الرياضيات

الصفّ الحادي عشر علمي
الفصل الدراسي الثاني

كتاب المعلّم

اللجنة الإشرافية لدراسة ومواءمة سلسلة كتب الرياضيات

أ. حسين علي عبدالله (رئيسًا)

أ. حصة يونس محمد علي		أ. فتحية محمود أبو زور

الطبعة الأولى

١٤٣٤ - ١٤٣٥ هـ

٢٠١٣ - ٢٠١٤ م

لجنة دراسة ومواءمة كتب الرياضيات للصف الحادي عشر علمي

أ. حسن نوح علي المهنا (رئيسًا)

أ. حسين اليماني الشامي
أ. مصطفى محمد شعبان محمود

أ. صديقة أحمد صالح الانصاري
أ. شيخة فلاح مبارك الحجرف

أ. منى علي عيسى المسري

دار التَّربَويّون House of Education ش.م.م. وبيرسون إديوكيشن ٢٠١٣م

الطبعة الأولى ٢٠١٣م

صاحب السمو الشيخ صباح الأحمد الجابر الصباح

أمير دولة الكويت

سمو الشيخ نواف الأحمد الجابر الصباح

ولي عهد دولة الكويت

مقدّمة من كتاب المعلِّم

توجيهات عامّة للمعلِّم

هذه السلسلة تعمل على تنمية أساليب التفكير، وذلك بتركيزها على بناء المفاهيم الرياضيّة وربطها بالواقع الحياتيّ من خلال:

١ - الأنشطة العمليّة في استكشاف المفاهيم ودعم إحساس الطالب بهذه المفاهيم، وذلك باستخدام عدّة طرائق مختلِفة:

العمل في فريق.

عمل مجلّات رياضيّة.

اِستخدام المحسوسات وشبه المحسوسات.

التعبير الشفهيّ (التواصل) - التفكير الناقد.

٢ - الاعتماد على المصوَّرات، وذلك من خلال التمثيل البيانيّ للمعلومات وقراءة البيانات الممثَّلة بيانيًّا.

٣ - الاعتماد على المواقف والقصص الحياتيّة وربطها بالموضوعات، وكذلك توظيف الموضوعات الرياضيّة في حلّ المسائل الحياتيّة.

٤ - التأكيد على فهم المفاهيم واستيعابها، والربط بين الرياضيّات وباقي الموادّ.

تطبيق السلسلة

لتطبيق السلسلة، يجب مراعاة ما يلي:

وجود ملفّين لكلّ تلميذ بحيث يُخصَّص أحدهما للأنشطة الصفّيّة واللاصفّيّة، أمّا الآخر فيُخصَّص للاختبارات والملحوظات الميدانيّة على أداء الطالب، ويُدوِّنها المعلِّم، وهذا أوّل ما يقوم به، مقرونةً بتواريخ المتابعة.

يُنوِّع المعلِّم في طرائق التدريس، وخاصّةً التي تشمل الاستكشاف وحلّ المشكلات.

نماذج المعلِّم لتقييم الطلاب تشمل:

- تقييم الأداء في حلّ المسائل.
- التقييم المستمرّ في حلّ المسائل والملاحظة والتعليم التعاونيّ.
- التقييم الفرديّ في الملاحظة والمراقبة.
- التقييم العامّ للطالب.

تقييم الأداء في حلّ المسائل

الإِسم .... التّاريخ ....

تقييم الأداء في حلّ المسائل

❶ ضع إشارة ✓ قرب العبارة التي تصف بدقّة أداء الطالب.

اِفهَمْ

- يقرأ المسألة بتأنٍّ.
- يقرأ أيّ جدوَل أو أيّ تمثيل بياني.
- يستطيع أن يصوغ المسألة من جديد وبطريقته وعباراته الخاصّة.
- يستطيع فهم وإدراك المعلومات المعطاة.
- يستطيع فهم وإدراك السؤال الذي يجب الإجابة عليه.

خَطِّطْ

- يختار الخطّة الأنسب لحلّ المسألة.
- يقدِّر الإجابة الصحيحة.

حُلَّ

- يعمل وفقًا لمنهجية معيّنة.
- يعرض الحلّ بطريقة منظَّمة وسليمة.
- يحسب بطريقة صحيحة.
- يعطي الإجابة بجملة كاملة صحيحة، مراعيًا الوحدات.

راجِعْ ولاحِظْ

- يُلاحِظُ معقولية الإجابة.
- يجرِّب طرقًا أخرى لحلّ المسألة.

❷ اِتبعِ المواصفات التالية لتقييم أداء الطالب:

مستوى ٤ (يتقن الطالب ١١–١٣ من المهمات السابق ذكرها). يُظهر الطالب فهمًا عميقًا للمسألة ويفسِّرها بشكل موجز وواضح ويكون قادرًا على ربط المسألة بعمل سبق أن أنجزه.

مستوى ٣ (يتقن الطالب ٨–١٠ من المهمات السابق ذكرها). يفهم الطالب المسألة ويعرض الحلّ الصحيح بطريقة منظَّمة وواضحة.

مستوى ٢ (يتقن الطالب ٤–٧ من المهمات السابق ذكرها). يُظهر الطالب فهمًا إجماليًّا للمسألة غير أنّه قد يرتكب بعض الأخطاء في تفاصيل معيّنة.

مستوى ١ (يتقن الطالب ٠–٣ فقط من المهمات السابق ذكرها). لا يُظهر الطالب إلّا فهمًا سطحيًّا أو جزئيًّا للمسألة وهو ليس قادرًا على إتمام العمل المطلوب أو حتى اعتماد المنهجية الصحيحة، كما أنّه لا يعطي إجابة صحيحة أو تكون خطّته غير مناسبة، وفي أغلب الأحيان لا نجد حلًّا ولا تجاوبًا مناسبًا أو إجابة صحيحة مرفقةً بجهد ما.

التقييم المستمرّ: حلّ المسائل

التّاريخ ....

قدّر كلّ بند بـ:
- + إذا كان ممتازًا
- ✓ إذا كان مقبولًا
- – بحاجة للتطوير
- غ.**ت** غير قابل للتطبيق

	يقرأ المسألة بتأنٍّ	يدرس الصوَر والجداول والتمثيلات البيانيّة	يستطيع إعادة صياغة المسألة بأسلوبه الخاصّ	يستطيع تحديد المعلومات	يستطيع تحديد الأسئلة التي تطلّب الإجابة عليها	يختار الخطّة المناسبة	يقدّر ما ستكون عليه الإجابة	يعمل بانتظام	يكتب الحلّ بطريقة منظّمة	يُجري العمليات الحسابية بدقّة	يكتب الإجابة في جملة كاملة مع ذكر الوحدات الصحيحة	يلاحظ صحة الإجابة ومعقوليتها	يجرّب طرقًا أخرى للحلّ
١.													
٢.													
٣.													
٤.													
٥.													
٦.													
٧.													
٨.													
٩.													
١٠.													
١١.													
١٢.													
١٣.													
١٤.													
١٥.													
١٦.													
١٧.													
١٨.													
١٩.													
٢٠.													
٢١.													
٢٢.													
٢٣.													
٢٤.													
٢٥.													
٢٦.													
٢٧.													
٢٨.													

التقييم المستمرّ: الملاحظة

التّاريخ ....

قدّر كلّ بند بـ:
+ إذا كان ممتازًا
✓ إذا كان مقبولًا
– بحاجة للتطوير
غ.ت غير قابل للتطبيق

	يُظهر معرفة بالمهارات	يدرك المفاهيم	يعمل بترتيب وانتظام	يعمل بنجاح مع الآخرين	يُظهر مواقف إيجابية	يحترم أفكار الغير ويستخدمها	يُظهر صبرًا ومثابرة	يطلب المساعدة عند الحاجة	يستخدم الوقت بإنتاجية	يجرّب طرقًا أخرى			
١.													
٢.													
٣.													
٤.													
٥.													
٦.													
٧.													
٨.													
٩.													
١٠.													
١١.													
١٢.													
١٣.													
١٤.													
١٥.													
١٦.													
١٧.													
١٨.													
١٩.													
٢٠.													
٢١.													
٢٢.													
٢٣.													
٢٤.													
٢٥.													
٢٦.													
٢٧.													
٢٨.													

التقييم المستمرّ: التعلُّم التعاوني

التّاريخ ....

قدّر كلّ بند بـ:
+ إذا كان ممتازًا
✓ إذا كان مقبولًا
– بحاجة للتطوير
غ.ت غير قابل للتطبيق

	يُظهر قدرة على حلّ المسائل	يعمل بانتظام	يعمل مع آخرين في الفريق	يوجّه ويساعد الآخرين	يحترم آراء الآخرين ويستخدمها	يتكلّم بهدوء	يُثير أسئلة	يُظهر ميولًا إيجابية	يُظهر صبرًا ومثابرة	يُظهر عدم موافقة دون اشمئزاز			
١.													
٢.													
٣.													
٤.													
٥.													
٦.													
٧.													
٨.													
٩.													
١٠.													
١١.													
١٢.													
١٣.													
١٤.													
١٥.													
١٦.													
١٧.													
١٨.													
١٩.													
٢٠.													
٢١.													
٢٢.													
٢٣.													
٢٤.													
٢٥.													
٢٦.													
٢٧.													
٢٨.													

المحتويات

الوحدة السابعة: الأعداد المركبة Complex Numbers

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

7–1: الأعداد المركبة

جزء 1: الوحدة التخيلية *i*.

جزء 2: تساوي عددين مركبين.

جزء 3: التمثيل البياني لعدد مركب.

جزء 4: العمليات على مجموعة الأعداد المركبة.

7–2: الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب

جزء 1: القيمة المطلقة لعدد مركب.

جزء 2: الإحداثيات القطبية.

جزء 3: الصورة المثلثية.

7–3: حل معادلات

جزء 1: حل معادلات من الدرجة الأولى.

جزء 2: حل معادلات من الدرجة الثانية.

جزء 3: الجذر التربيعي لعدد مركب.

مقدمة الوحدة

لاحظ العالم كاردان (Cardan) أنه يمكن إيجاد جذر تربيعي لعدد سالب من بين جذور المعادلة: $x^3 + bx = c$ حيث x المتغير و b, c ثابتان مع $c \neq 0$.

وفي منتصف القرن الثامن عشر، أثبت دالمبير (D'Alembert) إمكانية كتابة كل عدد مركب على النحو: $z = a + bi$ على أساس أنّ a, b عددان حقيقيان، i عدد تخيلي. كما أنه مثّل الأعداد المركبة بمتجهات مستوية.

إلا أن غاوس (Gauss) هو الذي وضّح العلاقة بين الأعداد المركبة والنقاط في المستوى الإحداثي.

لقد أصبح من المعروف في الوقت الحاضر أن مجالات علمية كثيرة لا يمكن التعامل معها من دون استخدام الأعداد المركبة مثل:

(a) **في الكهرباء:** كيفية عمل الدارة الكهربائية (يمكن تمثيل حركة ممتص الصدمات بواسطة معادلة تفاضلية تحتوي على أعداد مركبة).

(b) **في الفيزياء الكمية:** لا يمكن تحديد موقع ذرة بدقة من دون استخدام الأعداد المركبة.

(c) حركة دوران الكواكب (دوائر تتحرك داخل دوائر أخرى).

(d) إيجاد حلول لبعض المعادلات التفاضلية.

– تبسيط متسلسلة فورييه (Fourier Series).

– تشغيل أجهزة الهاتف الجوال (Cellular Phone).

الوحدة السابعة

الأعداد المركبة

Complex Numbers

مشروع الوحدة: استخدام الرادار في مراقبة حركة الطائرات

1 مقدمة المشروع: يرسل الرادار موجات عالية التردد ويتلقى انعكاسها، ما يسمح بتحديد موقع الطائرة وبعدها عن المطار. وكل هذا يتم باستخدام الإحداثيات القطبية.

2 الهدف: إيجاد البعد بين طائرتين باستخدام الإحداثيات القطبية عند رصدهما بواسطة الرادار.

3 اللوازم: أوراق رسم بياني – آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 أسئلة حول التطبيق:

رصد رادار أحد المطارات طائرتين على الارتفاع نفسه، وكانت إحداثياتهما القطبية $(8\text{ km}, 60^\circ)$, $(14\text{ km}, 150^\circ)$.

a ضع رسمًا بيانيًّا ينمذج موقع الطائرتين معتبرًا أن المطار هو نقطة الأصل.

b أوجد العددين المركبين z_1, z_2 بالصورة المثلثية اللذين يمثلان موقعي الطائرتين.

c احسب القيمة المطلقة للعدد المركب $|z_1 - z_2|$، ثم استنتج البعد بين الطائرتين.

5 التقرير: اكتب تقريرًا يبيّن بوضوح خطوات الحل وكيف استفدت من دروس هذه الوحدة للإجابة عن الأسئلة. دعّم تقريرك بملصق أو بعرض على جهاز الإسقاط.

دروس الوحدة

الأعداد المركبة	الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب	حل معادلات
7–1	7–2	7–3

10

الوحدة السابعة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت كتابة معادلات خطية وحلها.
- تعلمت حل معادلات تربيعية.
- تعلمت رسم دوال تربيعية بيانيًّا.
- تعلمت استخدام بيان الدوال التربيعية لحل مسائل معادلات تربيعية.

ماذا سوف تتعلم؟

- الوحدة التخيلية i.
- الصورة الجبرية للعدد المركب.
- مجموعة الأعداد المركبة.
- الصورة المثلثية للعدد المركب.
- جمع الأعداد المركبة وطرحها وضربها وقسمتها.
- إيجاد الجذر التربيعي لعدد مركب.
- حل معادلات من الدرجة الأولى ومن الدرجة الثانية تتضمن أعدادًا مركبة.

المصطلحات الأساسية

الوحدة التخيلية – الأعداد المركبة – الصورة الجبرية – العدد التخيلي – مرافق العدد المركب – الإحداثيات القطبية – مقياس العدد المركب – سعة العدد المركب – الصورة المثلثية.

أضف إلى معلوماتك

طوّر عالم الرياضيات بنوا مندلبرو Benoit Mandelbrot (1924 – 2010) مفهوم الكسريات Fractals، مما سمح بنمذجة أشكال طبيعية مثل القرنبيط والرئة والمنحدر الصخري، واستخدم متتاليات تتضمن أعدادًا مركبة لرسم بيانات مجموعات بواسطة الحاسوب.

11

سلّم التقييم

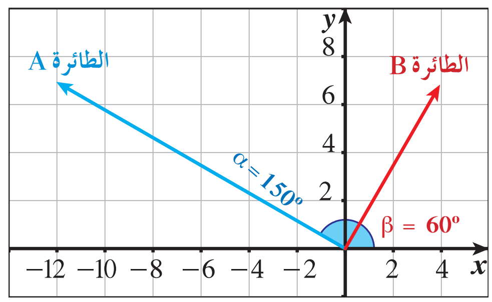
4	خطوات الحل واضحة – الحسابات دقيقة – التمثيل البياني صحيح – التقرير مفصل ومعبر.
3	معظم خطوات الحل واضحة – أخطاء قليلة في الحسابات – التمثيل البياني صحيح – معظم التقرير مفصل.
2	بعض خطوات الحل واضحة – أخطاء متعددة في الحسابات – التمثيل البياني مقبول – بعض عناصر التقرير بحاجة إلى تفصيل أكثر.
1	معظم عناصر المشروع ناقصة.

مشروع الوحدة

كانت فكرة الزاوية ونصف القطر مستخدمة منذ القدم. وقد وضع العالم الفلكي والرياضي هيبارخوس Hipparchus (120–190 ق.م.) جداول مثلثة تعطي طول الوتر وفق قياس الزاوية، واستخدم الإحداثيات القطبية لتحديد مواقع الكواكب. ولكن لم يعتمد اليونانيون الإحداثيات القطبية كنظام إحداثيات متكامل حتى القرن السابع عشر، حيث تمّ إدخال نظام الإحداثيات القطبية في العمليات الحسابية.

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

1 **(a)**



(b) $z_1 = 14(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ)$

$z_2 = 8(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$

$$z_1 - z_2 = 14\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) - 8\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= (-7\sqrt{3} - 4) + (7 - 4\sqrt{3})i$$

(c) $|z_1 - z_2| = \sqrt{(-7\sqrt{3} - 4)^2 + (7 - 4\sqrt{3})^2}$

$= 2\sqrt{65}$

≈ 16.125 km

طريقة ثانية: المثلث OAB قائم الزاوية O.

$\therefore\ AB = \sqrt{14^2 + 8^2} = 2\sqrt{65}$

$\therefore\ |z_1 - z_2| = AB \quad \therefore\ |z_1 - z_2| = 2\sqrt{65}$

يبلغ البعد بين الطائرتين حوالي 16.125 km

التقرير

اكتب تقريرًا مفصّلًا يبيّن خطوات عملك وكيفية التوصل إلى الإجابات المطلوبة في المشروع. دعّم تقريرك بملصق أو بعرض بواسطة جهاز الإسقاط. راجع مع زملائك خطوات الحل، ثم أعد النظر في بعض النقاط إذا كان ذلك ضروريًّا.

7–1: الأعداد المركبة

1 الأهداف

- يتعرف الوحدة التخيلية i.
- يكتب الصورة الجبرية والصورة الديكارتية للعدد المركب.
- يوجد مرافق العدد المركب.
- يستخدم العمليات على الأعداد المركبة.
- يمثل الأعداد المركبة على المستوى الإحداثي المركب (مستوى أرجاند).

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

وحدة تخيلية i – العدد المركب – جزء حقيقي – جزء تخيلي – الصورة الجبرية – مرافق العدد – العمليات على الأعداد المركبة – قوى العدد المركب.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) أوجد ناتج ما يلي: $(3x-4)(4x+7)$

(b) أوجد الجذر التربيعي لكل مما يلي:

$\sqrt{225}$, $\sqrt{169}$, $\sqrt{196}$

(c) أوجد الجذر التكعيبي لكل مما يلي:

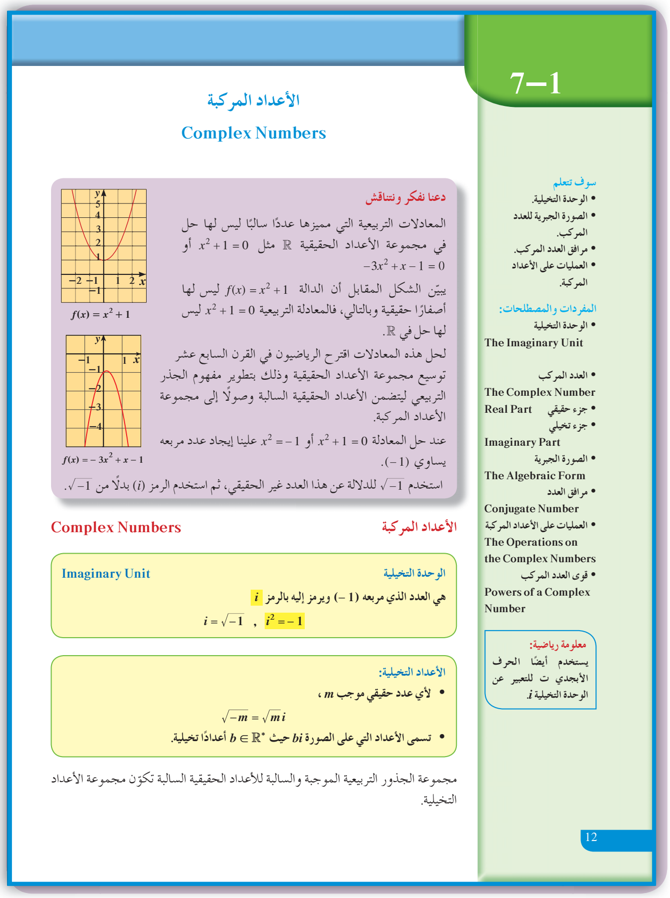
$\sqrt[3]{125}$, $\sqrt[3]{-343}$, $\sqrt[3]{216}$

(d) حلّ المعادلات التالية:

$$3x^2-75=0$$

$$x^2-7x+12=0$$

$$2x^2+50=0$$



7–1

الأعداد المركبة

Complex Numbers

دعنا نفكر ونتناقش

المعادلات التربيعية التي مميزها عددًا سالبًا ليس لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ مثل $x^2+1=0$ أو $-3x^2+x-1=0$

يبيّن الشكل المقابل أن الدالة $f(x)=x^2+1$ ليس لها أصفارًا حقيقية وبالتالي، فالمعادلة التربيعية $x^2+1=0$ ليس لها حل في $\mathbb{R}$.

لحل هذه المعادلات اقترح الرياضيون في القرن السابع عشر توسيع مجموعة الأعداد الحقيقية وذلك بتطوير مفهوم الجذر التربيعي ليتضمن الأعداد الحقيقية السالبة وصولًا إلى مجموعة الأعداد المركبة.

عند حل المعادلة $x^2+1=0$ أو $x^2=-1$ علينا إيجاد عدد مربعه يساوي (-1).

استخدم $\sqrt{-1}$ للدلالة عن هذا العدد غير الحقيقي، ثم استخدم الرمز (i) بدلًا من $\sqrt{-1}$.

$f(x)=x^2+1$

$f(x)=-3x^2+x-1$

الأعداد المركبة **Complex Numbers**

الوحدة التخيلية **Imaginary Unit**

هي العدد الذي مربعه (-1) ويرمز إليه بالرمز i

$i=\sqrt{-1}$, $i^2=-1$

الأعداد التخيلية:

- لأي عدد حقيقي موجب m ،

$\sqrt{-m}=\sqrt{m}\,i$

- تسمى الأعداد التي على الصورة bi حيث $b\in\mathbb{R}^*$ أعدادًا تخيلية.

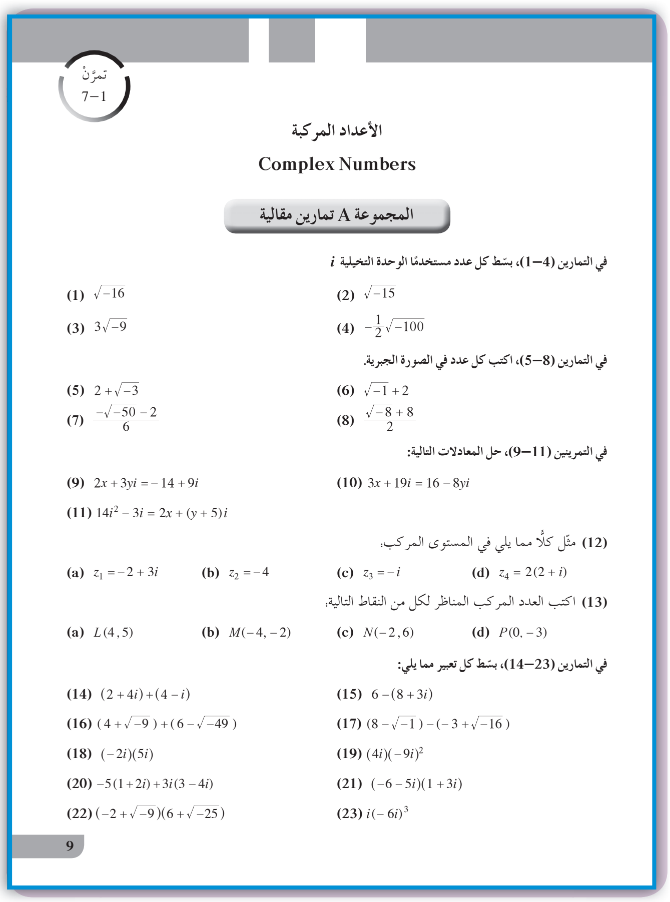
مجموعة الجذور التربيعية الموجبة والسالبة للأعداد الحقيقية السالبة تكوّن مجموعة الأعداد التخيلية.

سوف تتعلم
- الوحدة التخيلية.
- الصورة الجبرية للعدد المركب.
- مرافق العدد المركب.
- العمليات على الأعداد المركبة.

المفردات والمصطلحات:
- الوحدة التخيلية The Imaginary Unit
- العدد المركب The Complex Number
- جزء حقيقي Real Part
- جزء تخيلي Imaginary Part
- الصورة الجبرية The Algebraic Form
- مرافق العدد Conjugate Number
- العمليات على الأعداد المركبة The Operations on the Complex Numbers
- قوى العدد المركب Powers of a Complex Number

معلومة رياضية:
يستخدم أيضًا الحرف الأبجدي ت للتعبير عن الوحدة التخيلية i.

12



تمرَّنْ 7–1

الأعداد المركبة

Complex Numbers

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–4)، بسّط كل عدد مستخدمًا الوحدة التخيلية i

(1) $\sqrt{-16}$ (2) $\sqrt{-15}$

(3) $3\sqrt{-9}$ (4) $-\frac{1}{2}\sqrt{-100}$

في التمارين (5–8)، اكتب كل عدد في الصورة الجبرية.

(5) $2+\sqrt{-3}$ (6) $\sqrt{-1}+2$

(7) $\frac{-\sqrt{-50}-2}{6}$ (8) $\frac{\sqrt{-8}+8}{2}$

في التمرينين (9–11)، حل المعادلات التالية:

(9) $2x+3yi=-14+9i$ (10) $3x+19i=16-8yi$

(11) $14i^2-3i=2x+(y+5)i$

(12) مثّل كلًّا مما يلي في المستوى المركب:

(a) $z_1=-2+3i$ (b) $z_2=-4$ (c) $z_3=-i$ (d) $z_4=2(2+i)$

(13) اكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط التالية:

(a) $L(4,5)$ (b) $M(-4,-2)$ (c) $N(-2,6)$ (d) $P(0,-3)$

في التمارين (14–23)، بسّط كل تعبير مما يلي:

(14) $(2+4i)+(4-i)$ (15) $6-(8+3i)$

(16) $(4+\sqrt{-9})+(6-\sqrt{-49})$ (17) $(8-\sqrt{-1})-(-3+\sqrt{-16})$

(18) $(-2i)(5i)$ (19) $(4i)(-9i)^2$

(20) $-5(1+2i)+3i(3-4i)$ (21) $(-6-5i)(1+3i)$

(22) $(-2+\sqrt{-9})(6+\sqrt{-25})$ (23) $i(-6i)^3$

9

5 التدريس

يعتبر بناء مجموعة الأعداد المركبة والعمليات عليها المرحلة الأخيرة للتعرف على الأعداد، بحيث إن الطالب بدأ هذه المرحلة منذ دخوله إلى المدرسة، فكانت أولًا الأعداد الكلية والعمليات عليها، ثم الكسور والكسور العشرية والأعداد الكسرية. تتبعها الأعداد الصحيحة، تليها الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية وصولًا إلى الأعداد الحقيقية.

لذا، يستحسن التعامل بروية مع الأعداد المركبة، لأن الطالب سوف يبني مفاهيم ومهارات لها مكتسبات في كل ما سبق ولكن في تركيبة مختلفة عن الأعداد التي سبق أن رآها.

والخطوة الأولى التي سوف يقف فيها الطالب متسائلًا، هي استيعاب فكرة أن مربع العدد i هو عدد سالب أي $i^2 = -1$، فهو، على فترة سنوات عديدة، تعلّم أن مربع أي عدد مهما كان موجبًا أم سالبًا سوف يكون دائمًا موجبًا، فكيف سيتقبل فكرة $i^2 = -1$، وبالتالي $i = \sqrt{-1}$.

يعتبر المثال (1) تطبيقًا مباشرًا لهذه الفكرة.

أخبر الطلاب أنهم سوف يعتادون شيئًا فشيئًا على هذا المدخل في تكوين الأعداد المركبة، وأنهم في مراحل لاحقة سوف يتفهمون جيّدًا دور هذا العدد التخيلي وتمثيله على المستوى الإحداثي المركب.

ركّز أفكار الطلاب على الصورة الجبرية للعدد المركب وهي بصفة عامة: $z = a + bi$، وبالتالي تصبح كل الأعداد التي تعلمها الطالب جزءًا من الأعداد المركبة.

في المثال (2)

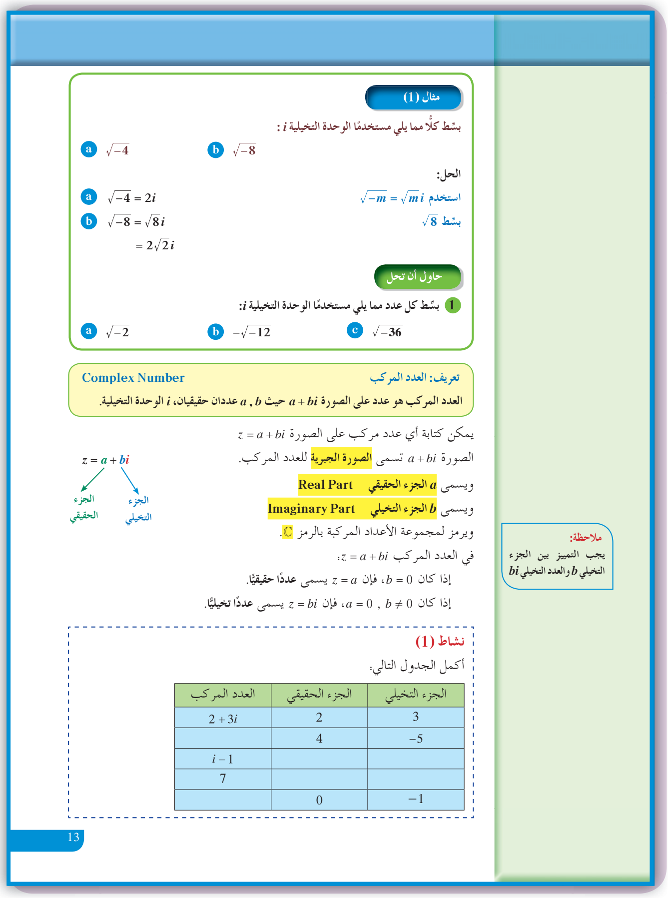
تركيز على فكرة الصورة الجبرية للعدد المركب.

في المثال (3)

تطبيق مباشر لِـ «تساوي عددين مركبين». في (c) أشر إلى أن العدد 1 يكتب على الصورة $1 + 0i$

في المثالين (4), (5)

يجب على المعلم التشديد على العلاقة بين صورة العدد المركب الجبرية وصورته الديكارتية، مما يوفّر للطلاب وضوحًا في الانتقال من الجزء الحقيقي والجزء التخيلي إلى الإحداثي السيني والإحداثي الصادي وبالعكس.



مثال (1)

بسّط كلًّا مما يلي مستخدمًا الوحدة التخيلية i:

a $\sqrt{-4}$ b $\sqrt{-8}$

الحل:

a $\sqrt{-4} = 2i$

b $\sqrt{-8} = \sqrt{8}\,i$ — بسّط $\sqrt{8}$

$= 2\sqrt{2}\,i$

استخدم $\sqrt{-m} = \sqrt{m}\,i$

حاول أن تحل

1 بسّط كل عدد مما يلي مستخدمًا الوحدة التخيلية i:

a $\sqrt{-2}$ b $-\sqrt{-12}$ c $\sqrt{-36}$

تعريف: العدد المركب Complex Number

العدد المركب هو عدد على الصورة $a + bi$ حيث a , b عددان حقيقيان، i الوحدة التخيلية.

يمكن كتابة أي عدد مركب على الصورة $z = a + bi$

الصورة $a + bi$ تسمى **الصورة الجبرية** للعدد المركب.

ويسمى a **الجزء الحقيقي Real Part**

ويسمى b **الجزء التخيلي Imaginary Part**

ويرمز لمجموعة الأعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$.

$z = a + bi$

الجزء الحقيقي   الجزء التخيلي

في العدد المركب $z = a + bi$:

إذا كان $b = 0$، فإن $z = a$ يسمى **عددًا حقيقيًّا**.

إذا كان $b \neq 0$, $a = 0$، فإن $z = bi$ يسمى **عددًا تخيليًّا**.

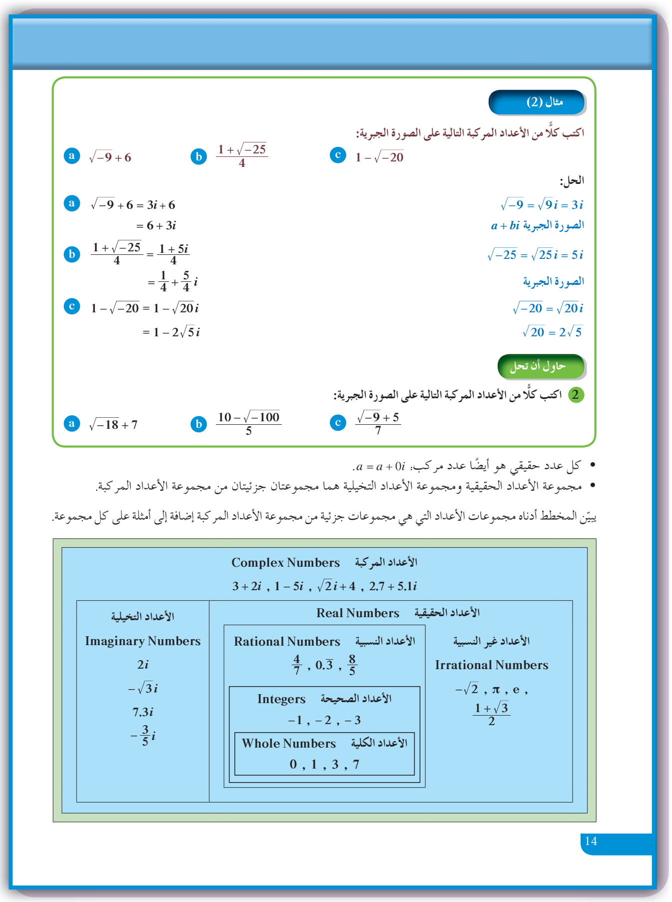
ملاحظة: يجب التمييز بين الجزء التخيلي b والعدد التخيلي bi

نشاط (1)

أكمل الجدول التالي:

الجزء التخيلي	الجزء الحقيقي	العدد المركب
3	2	$2 + 3i$
-5	4	
		$i - 1$
		7
-1	0	

13



مثال (2)

اكتب كلًّا من الأعداد المركبة التالية على الصورة الجبرية:

a $\sqrt{-9} + 6$ b $\frac{1 + \sqrt{-25}}{4}$ c $1 - \sqrt{-20}$

الحل:

a $\sqrt{-9} + 6 = 3i + 6$ — $\sqrt{-9} = \sqrt{9}\,i = 3i$

$= 6 + 3i$ — الصورة الجبرية $a + bi$

b $\frac{1 + \sqrt{-25}}{4} = \frac{1 + 5i}{4}$ — $\sqrt{-25} = \sqrt{25}\,i = 5i$

$= \frac{1}{4} + \frac{5}{4}i$ — الصورة الجبرية

c $1 - \sqrt{-20} = 1 - \sqrt{20}\,i$ — $\sqrt{-20} = \sqrt{20}\,i$

$= 1 - 2\sqrt{5}\,i$ — $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

حاول أن تحل

2 اكتب كلًّا من الأعداد المركبة التالية على الصورة الجبرية:

a $\sqrt{-18} + 7$ b $\frac{10 - \sqrt{-100}}{5}$ c $\frac{\sqrt{-9} + 5}{7}$

- كل عدد حقيقي هو أيضًا عدد مركب: $a = a + 0i$.
- مجموعة الأعداد الحقيقية ومجموعة الأعداد التخيلية هما مجموعتان جزئيتان من مجموعة الأعداد المركبة.

يبيّن المخطط أدناه مجموعات الأعداد التي هي مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد المركبة إضافة إلى أمثلة على كل مجموعة.

الأعداد المركبة Complex Numbers

$3 + 2i$, $1 - 5i$, $\sqrt{2}\,i + 4$, $2.7 + 5.1i$

الأعداد الحقيقية Real Numbers

الأعداد النسبية Rational Numbers

$\frac{4}{7}$, $0.\overline{3}$, $\frac{8}{5}$

الأعداد الصحيحة Integers

-1 , -2 , -3

الأعداد الكلية Whole Numbers

0 , 1 , 3 , 7

الأعداد غير النسبية Irrational Numbers

$-\sqrt{2}$, π , e , $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

الأعداد التخيلية Imaginary Numbers

$2i$

$-\sqrt{3}\,i$

$7.3i$

$-\frac{3}{5}i$

14

في المثال (6)

أكّد للطلاب أنه، في عمليتي جمع الأعداد المركبة أو طرحها، يتم التعامل مع الأجزاء الحقيقية معًا، ثم مع الأجزاء التخيلية تمامًا كما في عملية جمع المتجهات.

أشر إلى أنه يمكن تحويل عمليات الطرح إلى عمليات جمع. فمثلًا في «حاول أن تحل» تكتب $z_1 - z_2 - z_3$
$z_1 + (-z_2) + (-z_3)$

في المثالين (7), (8)

شدّد على عملية ضرب الأعداد المركبة. وإذا دعت الحاجة، راجع مع الطلاب العمليات على كثيرات الحدود.
ركّز على إمكانية التخلص دائمًا من i^2، حيث $i^2 = -1$

في المثال (9)

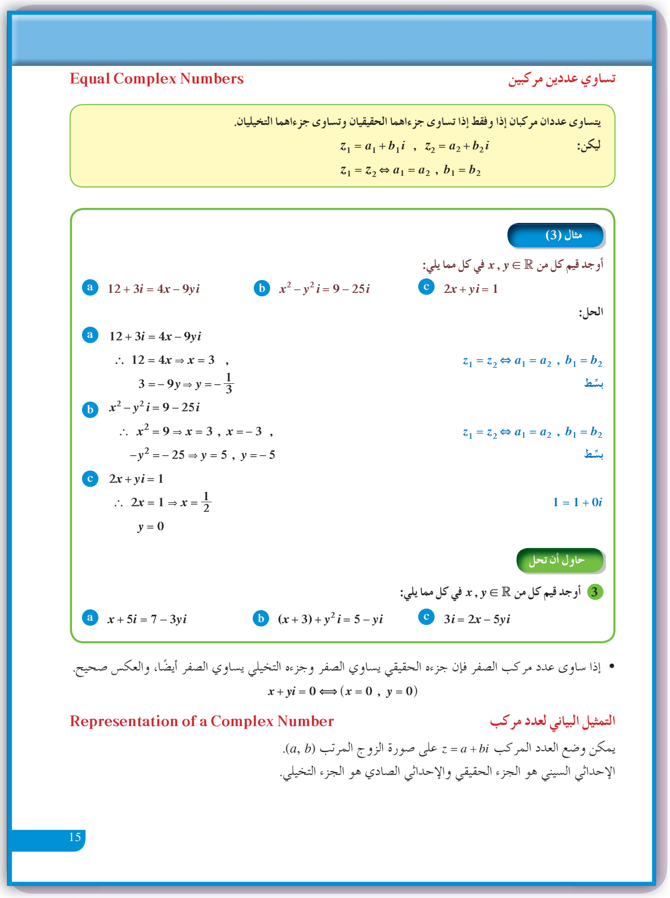
أكّد للطلاب أن قوى العدد المركب عملية بسيطة تستخدم فيها خاصية الضرب التي سبق أن تعاملوا معها في كثيرات الحدود.

في المثالين (10), (11)

ركّز مع الطلاب على أهمية العدد المرافق التي تكمن في أنه يساعد في كتابة كسر بسطه ومقامه عددان مركبان، بحيث يصبح مقامه عددًا حقيقيًّا. راجع مع الطلاب خواص المرافق.

في المثالين (12), (13)

شدّد على أهمية ضرب بسط ومقام الكسر المركب في مرافق مقام هذا العدد المركب، للحصول على عدد مركب مقامه عدد حقيقي. نبّه الطلاب إلى أن $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ وليس $a^2 - b^2$.
أشر إلى أن ناتج الضرب هو في الحقيقة $a^2 - i^2b^2$ ولكن بالتعويض عن i^2 بـ -1 نحصل على $a^2 + b^2$.



تساوي عددين مركبين Equal Complex Numbers

يتساوى عددان مركبان إذا وفقط إذا تساوى جزءاهما الحقيقيان وتساوى جزءاهما التخيليان.
ليكن: $z_1 = a_1 + b_1 i \ , \ z_2 = a_2 + b_2 i$
$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \ , \ b_1 = b_2$

مثال (3)

أوجد قيم كل من $x , y \in \mathbb{R}$ في كل مما يلي:

a $12 + 3i = 4x - 9yi$
b $x^2 - y^2 i = 9 - 25i$
c $2x + yi = 1$

الحل:

a $12 + 3i = 4x - 9yi$
$\therefore \ 12 = 4x \Rightarrow x = 3 \ ,$ — $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \ , \ b_1 = b_2$
$3 = -9y \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$ — بسّط

b $x^2 - y^2 i = 9 - 25i$
$\therefore \ x^2 = 9 \Rightarrow x = 3 \ , \ x = -3 \ ,$ — $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \ , \ b_1 = b_2$
$-y^2 = -25 \Rightarrow y = 5 \ , \ y = -5$ — بسّط

c $2x + yi = 1$
$\therefore \ 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ — $1 = 1 + 0i$
$y = 0$

حاول أن تحل

3 أوجد قيم كل من $x , y \in \mathbb{R}$ في كل مما يلي:

a $x + 5i = 7 - 3yi$
b $(x + 3) + y^2 i = 5 - yi$
c $3i = 2x - 5yi$

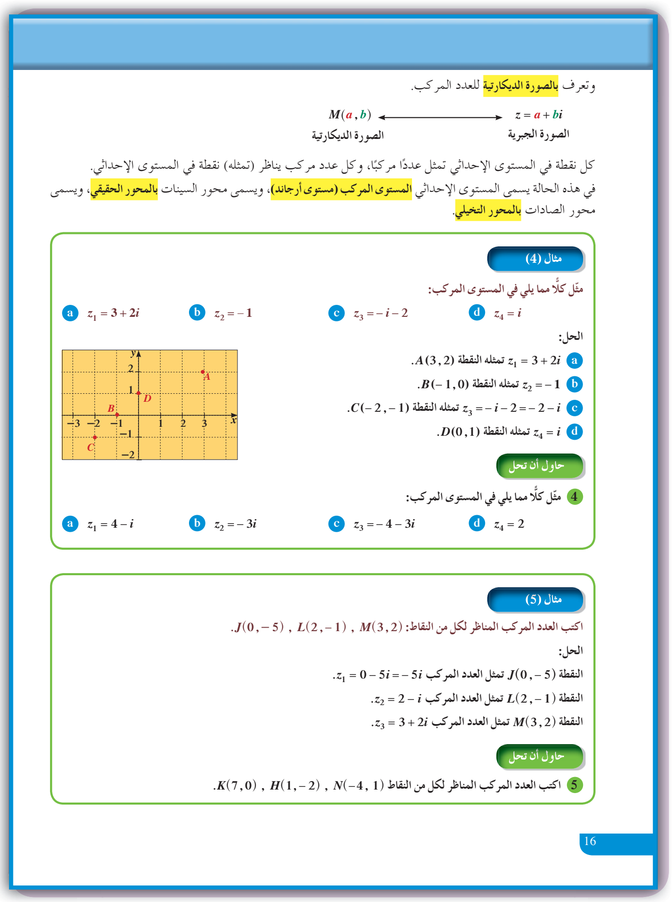
- إذا ساوى عدد مركب الصفر فإن جزءه الحقيقي يساوي الصفر وجزءه التخيلي يساوي الصفر أيضًا، والعكس صحيح.

$$x + yi = 0 \Longleftrightarrow (x = 0 \ , \ y = 0)$$

التمثيل البياني لعدد مركب Representation of a Complex Number

يمكن وضع العدد المركب $z = a + bi$ على صورة الزوج المرتب (a, b).
الإحداثي السيني هو الجزء الحقيقي والإحداثي الصادي هو الجزء التخيلي.

15



وتعرف **بالصورة الديكارتية** للعدد المركب.

$z = a + bi \longleftrightarrow M(a , b)$
الصورة الجبرية — الصورة الديكارتية

كل نقطة في المستوى الإحداثي تمثل عددًا مركبًا، وكل عدد مركب يناظر (تمثله) نقطة في المستوى الإحداثي.
في هذه الحالة يسمى المستوى الإحداثي **المستوى المركب (مستوى أرجاند)**، ويسمى محور السينات **بالمحور الحقيقي**، ويسمى محور الصادات **بالمحور التخيلي**.

مثال (4)

مثّل كلًّا مما يلي في المستوى المركب:

a $z_1 = 3 + 2i$
b $z_2 = -1$
c $z_3 = -i - 2$
d $z_4 = i$

الحل:

a $z_1 = 3 + 2i$ تمثله النقطة $A(3 , 2)$.
b $z_2 = -1$ تمثله النقطة $B(-1 , 0)$.
c $z_3 = -i - 2 = -2 - i$ تمثله النقطة $C(-2 , -1)$.
d $z_4 = i$ تمثله النقطة $D(0 , 1)$.

حاول أن تحل

4 مثّل كلًّا مما يلي في المستوى المركب:

a $z_1 = 4 - i$
b $z_2 = -3i$
c $z_3 = -4 - 3i$
d $z_4 = 2$

مثال (5)

اكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط: $M(3 , 2) \ , \ L(2 , -1) \ , \ J(0 , -5)$.

الحل:

النقطة $J(0 , -5)$ تمثل العدد المركب $z_1 = 0 - 5i = -5i$.
النقطة $L(2 , -1)$ تمثل العدد المركب $z_2 = 2 - i$.
النقطة $M(3 , 2)$ تمثل العدد المركب $z_3 = 3 + 2i$.

حاول أن تحل

5 اكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط $N(-4 , 1) \ , \ H(1 , -2) \ , \ K(7 , 0)$.

16

6 الربط

يمكن لقوى بعض الأعداد المركبة أن تشكل أنماطًا عند جمع مربع الجزء الحقيقي إلى مربع الجزء التخيلي.

فمثلًا إذا أخذنا: $z = 1 + i\sqrt{3}$ وأوجدنا z^2، z^3، z^4، z^5، ...

فسوف نستكشف نمطًا كما يلي:

$$z = 1 + i\sqrt{3} \rightarrow 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$z^2 = -2 + 2i\sqrt{3} \rightarrow (-2)^2 + (2\sqrt{3})^2 = 16 = 2^4$$

$$z^3 = -8 \rightarrow (-8)^2 = 64 = 2^6$$

$$z^4 = -8 - 8\sqrt{3}\,i \rightarrow (-8)^2 + (-8\sqrt{3})^2 = 256 = 2^8$$

$$z^5 = 16 - 16\sqrt{3}\,i \rightarrow (16)^2 + (-16\sqrt{3})^2 = 1024 = 2^{10}$$

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب عند الضرب في مرافق مقام العدد المركب، فيكتبون الناتج على الصورة $a^2 - b^2$. ذكّرهم بضرورة التعويض دائمًا عن i^2 بـ -1

8 التقييم

توفر فقرات «حاول أن تحل» الفرصة المناسبة أمام المعلم ليتأكّد من حسن أداء الطلاب في مهارات هذا الدرس ومفاهيمه.

اختبار سريع

1 أوجد ناتج ما يلي:

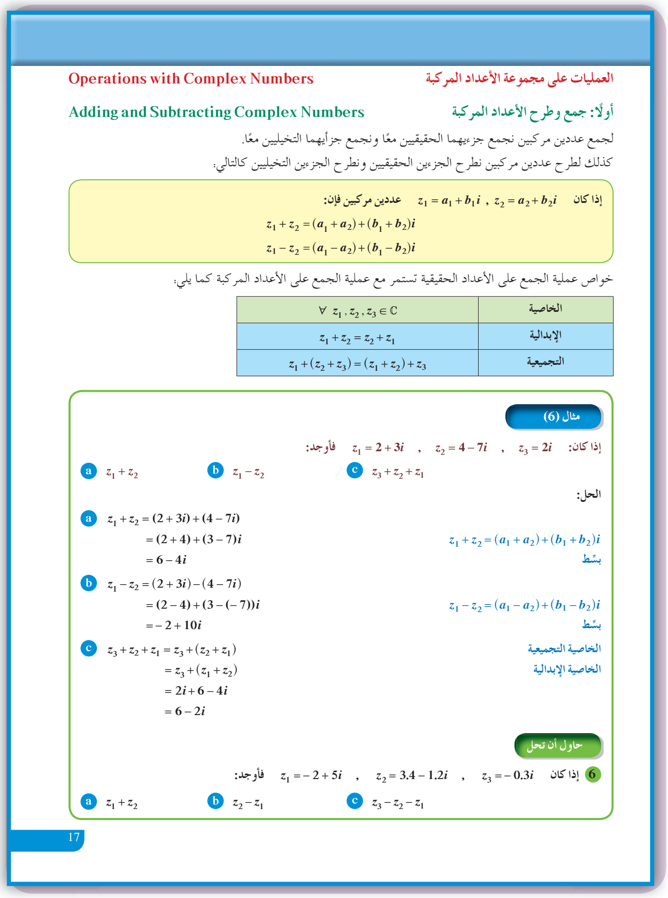
$(2 - 3i)(3 + 5i)$ $\quad 21 + i$

2 إذا كان $z = 1 - i$، فأوجد z^4 , z^2

$z^2 = -2i$, $z^4 = -4$

3 اكتب الكسر التالي في الصورة الجبرية:

$\dfrac{2 + 3i}{4 - 5i}$ $\quad \dfrac{-7}{41} + \dfrac{22}{41}i$



العمليات على مجموعة الأعداد المركبة Operations with Complex Numbers

أولًا: جمع وطرح الأعداد المركبة Adding and Subtracting Complex Numbers

لجمع عددين مركبين نجمع جزءيهما الحقيقيين معًا ونجمع جزأيهما التخيليين معًا.

كذلك لطرح عددين مركبين نطرح الجزءين الحقيقيين ونطرح الجزءين التخيليين كالتالي:

إذا كان $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ عددين مركبين فإن:

$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$

خواص عملية الجمع على الأعداد الحقيقية تستمر مع عملية الجمع على الأعداد المركبة كما يلي:

الخاصية	$\forall\ z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$
الإبدالية	$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
التجميعية	$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

مثال (6)

إذا كان: $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 4 - 7i$, $z_3 = 2i$ فأوجد:

a $z_1 + z_2$ b $z_1 - z_2$ c $z_3 + z_2 + z_1$

الحل:

a $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (4 - 7i)$
$= (2 + 4) + (3 - 7)i$ — $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
$= 6 - 4i$ — بسّط

b $z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (4 - 7i)$
$= (2 - 4) + (3 - (-7))i$ — $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$
$= -2 + 10i$ — بسّط

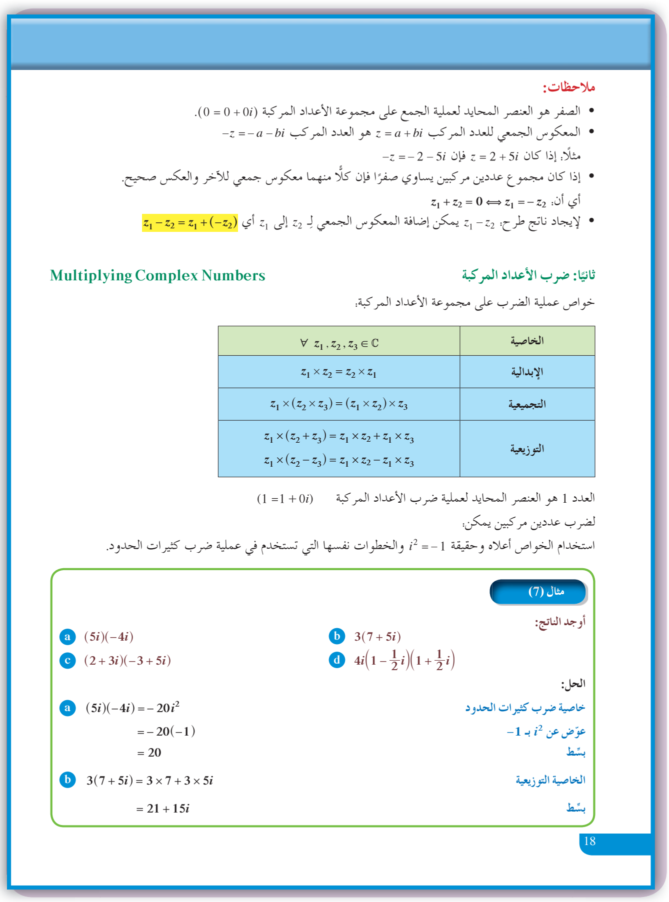
c $z_3 + z_2 + z_1 = z_3 + (z_2 + z_1)$ — الخاصية التجميعية
$= z_3 + (z_1 + z_2)$ — الخاصية الإبدالية
$= 2i + 6 - 4i$
$= 6 - 2i$

حاول أن تحل

6 إذا كان $z_1 = -2 + 5i$, $z_2 = 3.4 - 1.2i$, $z_3 = -0.3i$ فأوجد:

a $z_1 + z_2$ b $z_2 - z_1$ c $z_3 - z_2 - z_1$

17



ملاحظات:

- الصفر هو العنصر المحايد لعملية الجمع على مجموعة الأعداد المركبة ($0 = 0 + 0i$).
- المعكوس الجمعي للعدد المركب $z = a + bi$ هو العدد المركب $-z = -a - bi$
  مثلًا: إذا كان $z = 2 + 5i$ فإن $-z = -2 - 5i$
- إذا كان مجموع عددين مركبين يساوي صفرًا فإن كلًّا منهما معكوس جمعي للآخر والعكس صحيح.
  أي أن: $z_1 + z_2 = 0 \Longleftrightarrow z_1 = -z_2$
- لإيجاد ناتج طرح: $z_1 - z_2$ يمكن إضافة المعكوس الجمعي لِـ z_2 إلى z_1 أي $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

ثانيًا: ضرب الأعداد المركبة Multiplying Complex Numbers

خواص عملية الضرب على مجموعة الأعداد المركبة:

الخاصية	$\forall\ z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$
الإبدالية	$z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1$
التجميعية	$z_1 \times (z_2 \times z_3) = (z_1 \times z_2) \times z_3$
التوزيعية	$z_1 \times (z_2 + z_3) = z_1 \times z_2 + z_1 \times z_3$ $z_1 \times (z_2 - z_3) = z_1 \times z_2 - z_1 \times z_3$

العدد 1 هو العنصر المحايد لعملية ضرب الأعداد المركبة ($1 = 1 + 0i$)

لضرب عددين مركبين يمكن:

استخدام الخواص أعلاه وحقيقة $i^2 = -1$ والخطوات نفسها التي تستخدم في عملية ضرب كثيرات الحدود.

مثال (7)

أوجد الناتج:

a $(5i)(-4i)$ b $3(7 + 5i)$

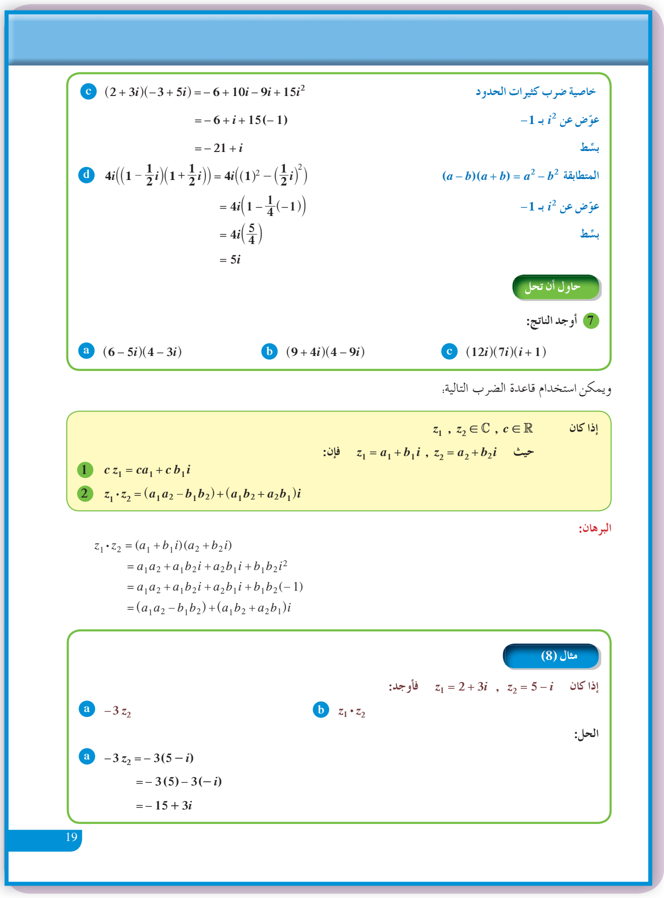
c $(2 + 3i)(-3 + 5i)$ d $4i\left(1 - \frac{1}{2}i\right)\left(1 + \frac{1}{2}i\right)$

الحل:

a $(5i)(-4i) = -20i^2$ — خاصية ضرب كثيرات الحدود
$= -20(-1)$ — عوّض عن i^2 بـ -1
$= 20$ — بسّط

b $3(7 + 5i) = 3 \times 7 + 3 \times 5i$ — الخاصية التوزيعية
$= 21 + 15i$ — بسّط

18



خاصية ضرب كثيرات الحدود ⓒ $(2+3i)(-3+5i) = -6+10i-9i+15i^2$

عوّض عن i^2 بـ -1 $\quad = -6+i+15(-1)$

بسّط $\quad = -21+i$

المتطابقة $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$ ⓓ $4i\left(\left(1-\frac{1}{2}i\right)\left(1+\frac{1}{2}i\right)\right) = 4i\left((1)^2-\left(\frac{1}{2}i\right)^2\right)$

عوّض عن i^2 بـ -1 $\quad = 4i\left(1-\frac{1}{4}(-1)\right)$

بسّط $\quad = 4i\left(\frac{5}{4}\right)$

$= 5i$

حاول أن تحل

7 أوجد الناتج:

ⓐ $(6-5i)(4-3i)$ ⓑ $(9+4i)(4-9i)$ ⓒ $(12i)(7i)(i+1)$

ويمكن استخدام قاعدة الضرب التالية:

إذا كان $z_1\ ,\ z_2 \in \mathbb{C}\ ,\ c \in \mathbb{R}$

حيث $z_1 = a_1+b_1 i\ ,\ z_2 = a_2+b_2 i$ فإن:

1 $c\,z_1 = ca_1 + c\,b_1 i$

2 $z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$

البرهان:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1+b_1 i)(a_2+b_2 i) \\ &= a_1a_2+a_1b_2 i+a_2b_1 i+b_1b_2 i^2 \\ &= a_1a_2+a_1b_2 i+a_2b_1 i+b_1b_2(-1) \\ &= (a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i \end{aligned}$$

مثال (8)

إذا كان $z_1 = 2+3i\ ,\ z_2 = 5-i$ فأوجد:

ⓐ $-3z_2$ ⓑ $z_1 \cdot z_2$

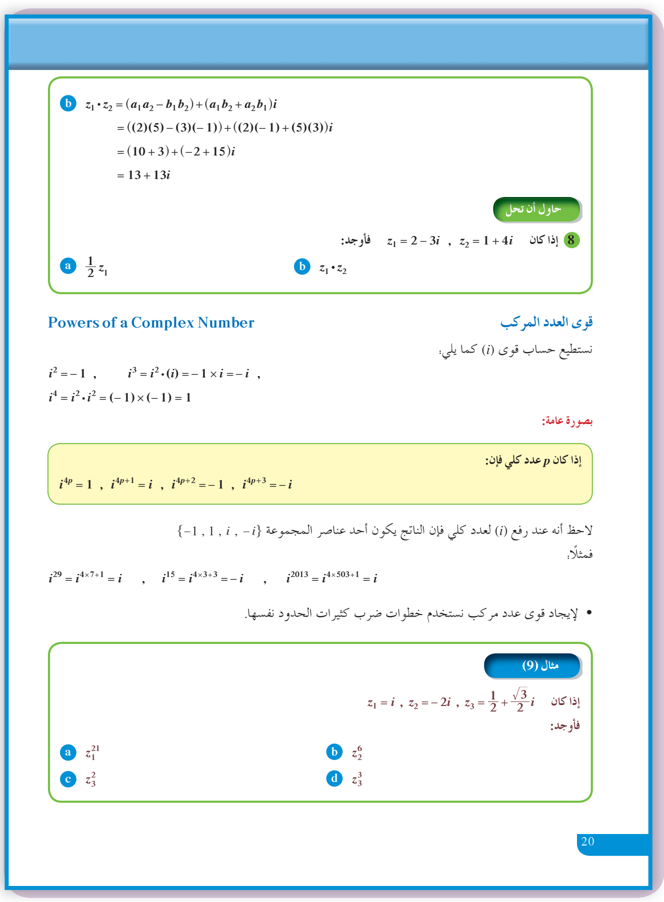
الحل:

ⓐ $-3z_2 = -3(5-i)$

$= -3(5)-3(-i)$

$= -15+3i$

19



ⓑ $z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$

$= ((2)(5)-(3)(-1))+((2)(-1)+(5)(3))i$

$= (10+3)+(-2+15)i$

$= 13+13i$

حاول أن تحل

8 إذا كان $z_1 = 2-3i\ ,\ z_2 = 1+4i$ فأوجد:

ⓐ $\frac{1}{2}z_1$ ⓑ $z_1 \cdot z_2$

قوى العدد المركب — Powers of a Complex Number

نستطيع حساب قوى (i) كما يلي:

$i^2 = -1\ ,\quad i^3 = i^2 \cdot (i) = -1 \times i = -i\ ,$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)\times(-1) = 1$

بصورة عامة:

إذا كان p عدد كلي فإن:

$i^{4p} = 1\ ,\ i^{4p+1} = i\ ,\ i^{4p+2} = -1\ ,\ i^{4p+3} = -i$

لاحظ أنه عند رفع (i) لعدد كلي فإن الناتج يكون أحد عناصر المجموعة $\{-1\ ,\ 1\ ,\ i\ ,\ -i\}$

فمثلًا:

$i^{29} = i^{4\times7+1} = i\quad ,\quad i^{15} = i^{4\times3+3} = -i\quad ,\quad i^{2013} = i^{4\times503+1} = i$

• لإيجاد قوى عدد مركب نستخدم خطوات ضرب كثيرات الحدود نفسها.

مثال (9)

إذا كان $z_1 = i\ ,\ z_2 = -2i\ ,\ z_3 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

فأوجد:

ⓐ z_1^{21} ⓑ z_2^{6}

ⓒ z_3^{2} ⓓ z_3^{3}

20

9 إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

1 (a) $i\sqrt{2}$

(b) $-2i\sqrt{3}$

(c) $6i$

2 (a) $7+3i\sqrt{2}$

(b) $2-2i$

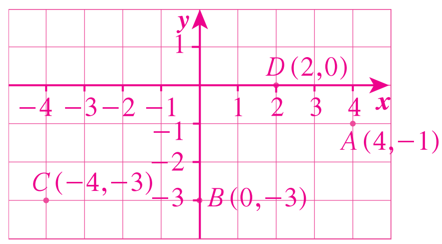
(c) $\frac{5}{7}+\frac{3}{7}i$

3 (a) $x = 7\ ,\ y = \frac{-5}{3}$

(b) $x = 2\ ,\ y = 0$ أو $y = -1$

(c) $x = 0\ ,\ y = \frac{-3}{5}$

4



5 النقطة $K(7, 0)$ تمثل العدد المركب $z_1 = 7$

النقطة $H(1, -2)$ تمثل العدد المركب $z_2 = 1-2i$

النقطة $N(-4, 1)$ تمثل العدد المركب $z_3 = -4+i$

6 (a) $1.4+3.8i$

(b) $5.4-6.2i$

(c) $z_3+(-z_2)+(-z_1)$

$= -0.3i + (-3.4+1.2i) + (2-5i)$

$= -1.4 - 4.1i$

7 (a) $9-38i$

(b) $72-65i$

(c) $-84-84i$

8 (a) $1-\frac{3}{2}i$

(b) $14+5i$

الحل:

a $z_1^{21} = i^{21} = i^{4\times5+1} = i$

b $z_2^6 = (-2i)^6 = (-2)^6 \times i^6$

$= 64 \times i^{4+2} = 64 \times i^2 = 64 \times (-1) = -64$

c $z_3^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$

$= \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{4}i^2$ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4}$ بسّط $(i^2 = -1)$

$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

d $z_3^3 = z_3^2 \cdot z_3$

$= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ عوّض عن z_3^2 بـ: $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$= -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i + \frac{\sqrt{3}}{4}i + \frac{3}{4}i^2$

$= -\frac{1}{4} + 0 + \frac{3}{4}(-1)$

$= -1$

حاول أن تحل

9 أوجد:

a $5(i)^{73}$ **b** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^3$ **c** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^4$

ثالثًا: قسمة الأعداد المركبة Dividing Complex Numbers

مرافق العدد المركب Complex Conjugate

ناتج ضرب العددين المركبين $a - bi$, $a + bi$ غير الصفريين هو عدد حقيقي موجب:

$$(a+bi)\cdot(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$$

للاستفادة من هذه العلاقة الخاصة نعرض ما يلي:

مرافق العدد المركب

مرافق العدد المركب $z = a + bi$ هو العدد المركب $\overline{z} = \overline{a+bi} = a - bi$

فمثلًا: مرافق العدد $2 + 3i$ هو $2 - 3i$

والعدد $\overline{-7i+2}$ هو $2 + 7i$

ملاحظة: لإيجاد المرافق $(\overline{z})$ يجب أن يكون z على الصورة الجبرية $z = a + bi$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$.

معلومة:
إذا كان $z = a$ عدد حقيقي
فإن $\overline{z} = z = a$

21

9 (a) $5(i^4)^{18} \times i = 5i$

(b) i

(c) -1

10 (a) $5 + 2i$ (b) $-1 + 12i$

(c) $41 + 11i$ (d) $41 + 11i$

11 (a) $\frac{-7}{58} + \frac{3}{58}i$

(b) $\frac{5}{146} - \frac{11}{146}i$

(c) $-\frac{1}{6}i$

12 $\frac{1}{5} + \frac{8}{5}i$

13 (a) $\frac{11}{29} - \frac{13}{29}i$

(b) $\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$

(c) $\frac{7}{13} - \frac{17}{13}i$

خواص مرافق العدد المركب:

إذا كان $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$

فإن:

- $z_1 + \overline{z_1} = 2a_1$
- $z_1 - \overline{z_1} = 2bi$
- $z_1 \cdot \overline{z_1} = a_1^2 + b_1^2$
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $\overline{(\overline{z_1})} = z_1$

مثال (10)

إذا كان $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 5 - 2i$ فأوجد:

a $z_1 + \overline{z_1}$ **b** $z_1 - \overline{z_1}$ **c** $\overline{(\overline{z_1})}$

d $\overline{z_1 + z_2}$ **e** $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ **f** $\overline{z_1 \cdot z_2}$

الحل:

نوجد كل من: $\overline{z}_1 = 3 - 4i$, $\overline{z}_2 = 5 + 2i$

a $z_1 + \overline{z_1} = 3 + 4i + 3 - 4i = 6$

b $z_1 - \overline{z_1} = 3 + 4i - (3 - 4i) = 8i$

c $\overline{(\overline{z_1})} = \overline{(\overline{3+4i})} = \overline{3-4i} = 3 + 4i$

d $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(3+4i)+(5-2i)} = \overline{3+4i+5-2i}$

$= \overline{8+2i} = 8 - 2i$

e $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{3+4i} \cdot \overline{5-2i}$

$= (3-4i)(5+2i)$

$= 15 + 6i - 20i + 8$

$= 23 - 14i$

f $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(3+4i)(5-2i)}$

$= \overline{15 - 6i + 20i + 8}$

$= \overline{23 + 14i}$

$= 23 - 14i$

حاول أن تحل

10 إذا كان $z_1 = 2 - 7i$, $z_2 = 3 + 5i$ فأوجد:

a $\overline{z_1} + \overline{z_2}$ **b** $\overline{z_1 - z_2}$ **d** $\overline{z_1 \cdot z_2}$ **e** $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

تدريب: استخدم خواص المرافق أعلاه في حل المثال (10) السابق.

22

(24) إذا كان $z = \frac{1-i}{1+i}$ فأوجد: z^{27} , z^{12}

(25) إذا كان $z_2 = -3 + 4i$, $z_1 = 2 + i$ فأوجد:

(a) $-\frac{1}{3}z_2$ (b) $z_1 . z_2$ (c) z_1^3 (d) $\overline{\overline{z}_1 . z_2}$

(e) $\overline{z}_1 - \overline{z}_2$ (f) $z_1 . \overline{z}_2$

(26) إذا كان $z = \frac{4i}{1 - i\sqrt{3}}$ فأوجد: $\overline{z}$

(27) أوجد المعكوس الضربي لكل مما يلي:

(a) $-3 - 2i$ (b) $5i$ (c) $3i - 4$

(28) إذا كان $z_2 = -\sqrt{3} + 2i$, $z_1 = \sqrt{3} + i$ فأوجد: $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$, $\frac{z_1}{\overline{z_2}}$, $\frac{\overline{z_1}}{z_2}$

(29) **تفكير ناقد:** أوجد العلاقة بين y , x عندما يكون $(x + yi)^2$ عددًا تخيّليًا.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الصورة الجبرية للعدد: $3 + \sqrt{-4}$ هي: $3 + 2i$ (a) (b)

(2) مرافق العدد المركب: $z = 3 + 4i$ هو: $\overline{z} = -3 - 4i$ (a) (b)

(3) المعكوس الجمعي للعدد المركب $z = 3 - 2i$ هو: $-z = 3 + 2i$ (a) (b)

(4) الصورة المبسّطة للتعبير: $(12 + 5i) - (2 - i)$ هي: $10 + 6i$ (a) (b)

10

«نشاط 1»

العدد المركب	الجزء الحقيقي	الجزء التخيلي
$2+3i$	2	3
$4-5i$	4	-5
$i-1$	-1	1
7	7	0
$-i$	0	-1

«تدريب»

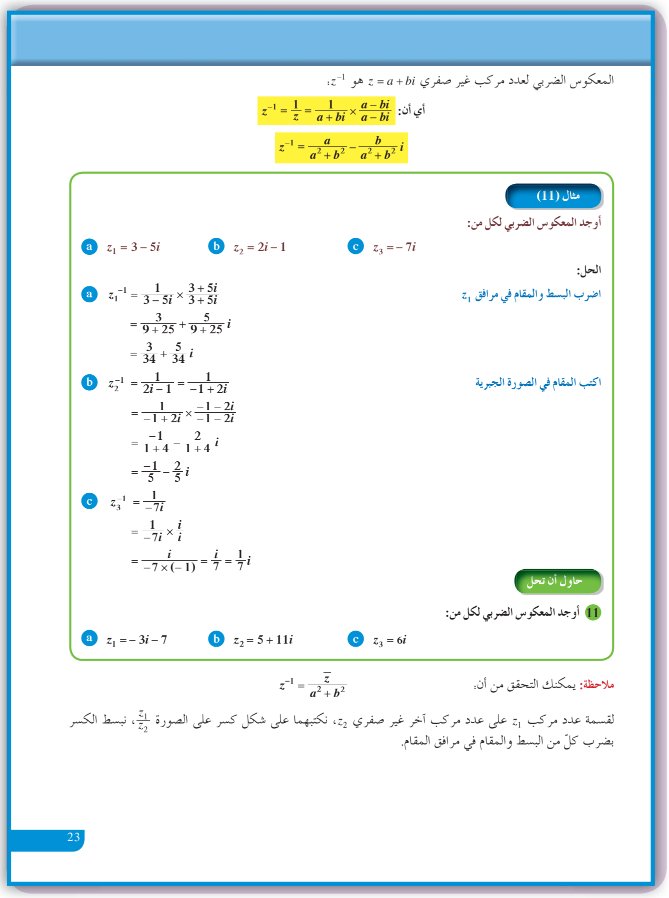
(c) $\overline{(\overline{z_1})} = z_1 = 3+4i$

(d) $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2} = 3-4i+5+2i = 8-2i$

(f) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2} = (3-4i)(5+2i)$

$= 15+6i-20i-8i^2 \quad (i^2=-1)$

$= 23-14i$


المعكوس الضربي لعدد مركب غير صفري $z=a+bi$ هو z^{-1}:

أي أن: $z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}\times\frac{a-bi}{a-bi}$

$z^{-1}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$

مثال (11)

أوجد المعكوس الضربي لكل من:

a $z_1=3-5i$ b $z_2=2i-1$ c $z_3=-7i$

الحل:

a $z_1^{-1}=\frac{1}{3-5i}\times\frac{3+5i}{3+5i}$ اضرب البسط والمقام في مرافق z_1

$=\frac{3}{9+25}+\frac{5}{9+25}i$

$=\frac{3}{34}+\frac{5}{34}i$

b $z_2^{-1}=\frac{1}{2i-1}=\frac{1}{-1+2i}$ اكتب المقام في الصورة الجبرية

$=\frac{1}{-1+2i}\times\frac{-1-2i}{-1-2i}$

$=\frac{-1}{1+4}-\frac{2}{1+4}i$

$=\frac{-1}{5}-\frac{2}{5}i$

c $z_3^{-1}=\frac{1}{-7i}$

$=\frac{1}{-7i}\times\frac{i}{i}$

$=\frac{i}{-7\times(-1)}=\frac{i}{7}=\frac{1}{7}i$

حاول أن تحل

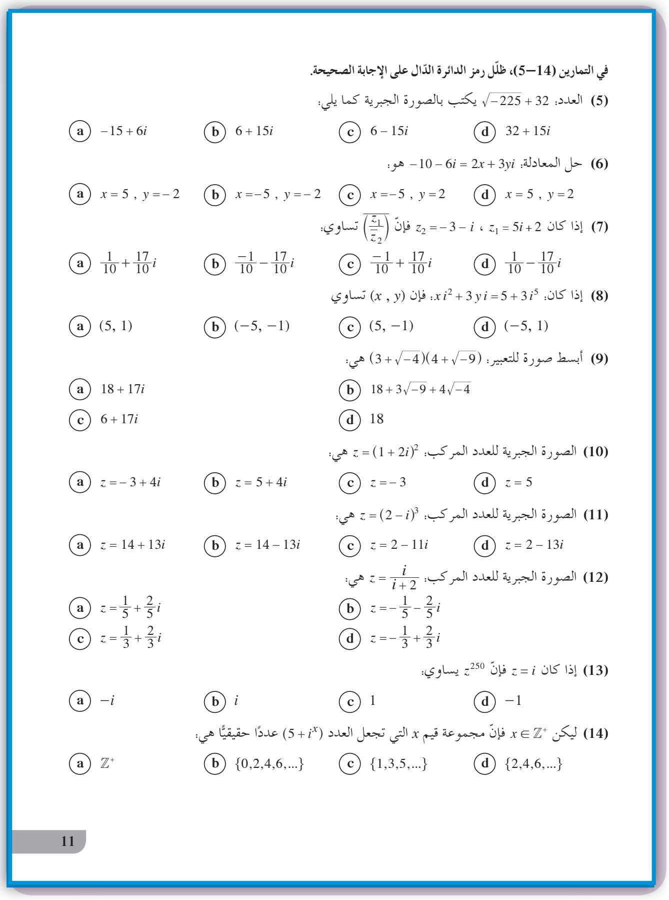
11 أوجد المعكوس الضربي لكل من:

a $z_1=-3i-7$ b $z_2=5+11i$ c $z_3=6i$

ملاحظة: يمكنك التحقق من أن: $z^{-1}=\frac{\overline{z}}{a^2+b^2}$

لقسمة عدد مركب z_1 على عدد مركب آخر غير صفري z_2، نكتبهما على شكل كسر على الصورة $\frac{z_1}{z_2}$، نبسط الكسر بضرب كلّ من البسط والمقام في مرافق المقام.

23


في التمارين (5–14)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) العدد: $32+\sqrt{-225}$ يكتب بالصورة الجبرية كما يلي:

a $-15+6i$ b $6+15i$ c $6-15i$ d $32+15i$

(6) حل المعادلة: $-10-6i=2x+3yi$ هو:

a $x=5\ ,\ y=-2$ b $x=-5\ ,\ y=-2$ c $x=-5\ ,\ y=2$ d $x=5\ ,\ y=2$

(7) إذا كان $z_1=5i+2$ ، $z_2=-3-i$ فإنّ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$ تساوي:

a $\frac{1}{10}+\frac{17}{10}i$ b $\frac{-1}{10}-\frac{17}{10}i$ c $\frac{-1}{10}+\frac{17}{10}i$ d $\frac{1}{10}-\frac{17}{10}i$

(8) إذا كان: $xi^2+3yi=5+3i^5$ فإن $(x\ ,\ y)$ تساوي

a $(5,\ 1)$ b $(-5,\ -1)$ c $(5,\ -1)$ d $(-5,\ 1)$

(9) أبسط صورة للتعبير: $(3+\sqrt{-4})(4+\sqrt{-9})$ هي:

a $18+17i$ b $18+3\sqrt{-9}+4\sqrt{-4}$ c $6+17i$ d 18

(10) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=(1+2i)^2$ هي:

a $z=-3+4i$ b $z=5+4i$ c $z=-3$ d $z=5$

(11) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=(2-i)^3$ هي:

a $z=14+13i$ b $z=14-13i$ c $z=2-11i$ d $z=2-13i$

(12) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=\frac{i}{i+2}$ هي:

a $z=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$ b $z=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$ c $z=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$ d $z=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$

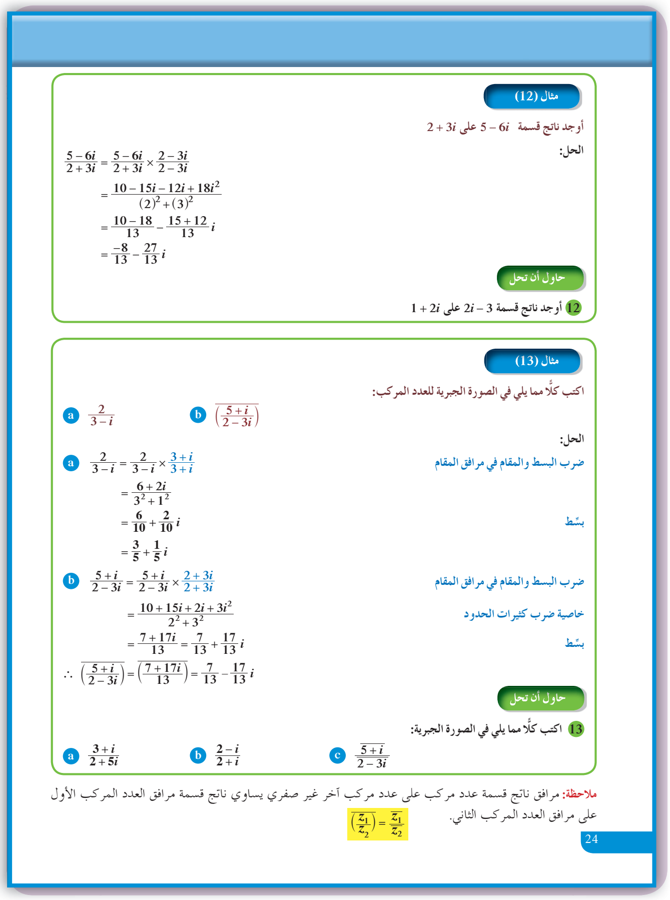
(13) إذا كان $z=i$ فإنّ z^{250} يساوي:

a $-i$ b i c 1 d -1

(14) ليكن $x\in\mathbb{Z}^+$ فإنّ مجموعة قيم x التي تجعل العدد $(5+i^x)$ عددًا حقيقيًّا هي:

a $\mathbb{Z}^+$ b $\{0,2,4,6,...\}$ c $\{1,3,5,...\}$ d $\{2,4,6,...\}$

11


مثال (12)

أوجد ناتج قسمة $5-6i$ على $2+3i$

الحل:

$\frac{5-6i}{2+3i}=\frac{5-6i}{2+3i}\times\frac{2-3i}{2-3i}$

$=\frac{10-15i-12i+18i^2}{(2)^2+(3)^2}$

$=\frac{10-18}{13}-\frac{15+12}{13}i$

$=\frac{-8}{13}-\frac{27}{13}i$

حاول أن تحل

12 أوجد ناتج قسمة $3-2i$ على $1+2i$

مثال (13)

اكتب كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية للعدد المركب:

a $\frac{2}{3-i}$ b $\overline{\left(\frac{5+i}{2-3i}\right)}$

الحل:

a $\frac{2}{3-i}=\frac{2}{3-i}\times\frac{3+i}{3+i}$ ضرب البسط والمقام في مرافق المقام

$=\frac{6+2i}{3^2+1^2}$

$=\frac{6}{10}+\frac{2}{10}i$ بسّط

$=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$

b $\frac{5+i}{2-3i}=\frac{5+i}{2-3i}\times\frac{2+3i}{2+3i}$ ضرب البسط والمقام في مرافق المقام

$=\frac{10+15i+2i+3i^2}{2^2+3^2}$ خاصية ضرب كثيرات الحدود

$=\frac{7+17i}{13}=\frac{7}{13}+\frac{17}{13}i$ بسّط

$\therefore\ \overline{\left(\frac{5+i}{2-3i}\right)}=\overline{\left(\frac{7+17i}{13}\right)}=\frac{7}{13}-\frac{17}{13}i$

حاول أن تحل

13 اكتب كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية:

a $\frac{3+i}{2+5i}$ b $\frac{2-i}{2+i}$ c $\overline{\frac{5+i}{2-3i}}$

ملاحظة: مرافق ناتج قسمة عدد مركب على عدد مركب آخر غير صفري يساوي ناتج قسمة مرافق العدد المركب الأول على مرافق العدد المركب الثاني.

$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

24

2–7: الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب

1 الأهداف

- يتعرف الإحداثيات القطبية.
- يكتب الصورة المثلثية للعدد المركب.
- يتعرف المحور الحقيقي والمحور التخيلي.
- يوجد مقياس عدد مركب وسعة عدد مركب.
- يتعرف التحويل بين الصورة الجبرية والصورة المثلثية لعدد مركب.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

إحداثيات قطبية – الصورة المثلثية – مقياس العدد المركب – سعة العدد المركب – تحويل.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – ورق رسم بياني – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

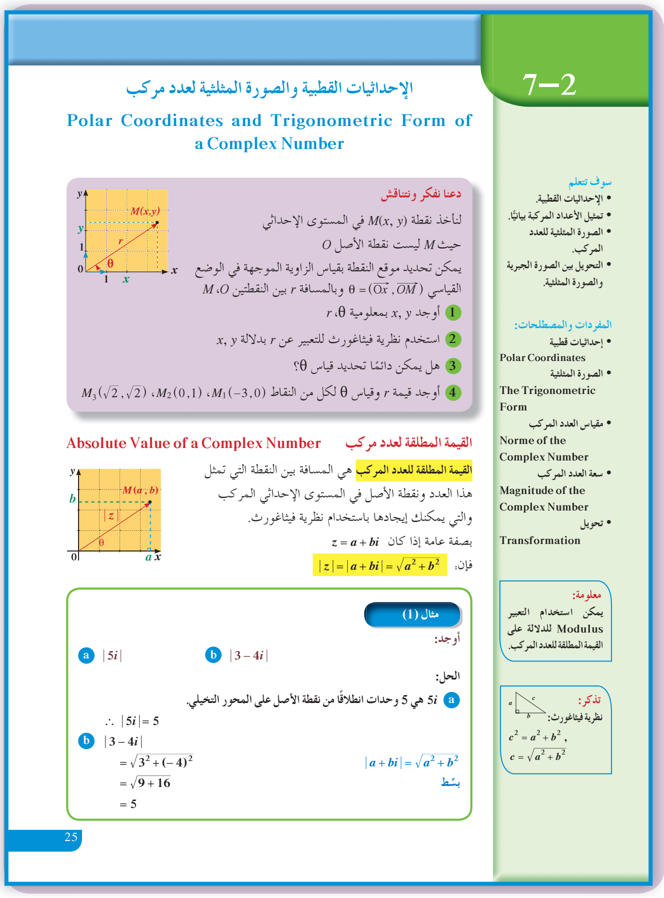
اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

أوجد ناتج كلّ مما يلي في الصورة الجبرية:

(a) $2 + 3i + 4i^2 + 5i^3 + 6i^4$

(b) $(4 + 3i)(6 - 7i)$

(c) $\dfrac{2 - 3i}{2 - 3i}$



7–2

الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب

Polar Coordinates and Trigonometric Form of a Complex Number

سوف تتعلم
- الإحداثيات القطبية
- تمثيل الأعداد المركبة بيانيًا
- الصورة المثلثية للعدد المركب
- التحويل بين الصورة الجبرية والصورة المثلثية

المفردات والمصطلحات:
- إحداثيات قطبية Polar Coordinates
- الصورة المثلثية The Trigonometric Form
- مقياس العدد المركب Norme of the Complex Number
- سعة العدد المركب Magnitude of the Complex Number
- تحويل Transformation

دعنا نفكر ونتناقش

لنأخذ نقطة $M(x, y)$ في المستوى الإحداثي حيث M ليست نقطة الأصل O

يمكن تحديد موقع النقطة بقياس الزاوية الموجهة في الوضع القياسي $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$ وبالمسافة r بين النقطتين O، M

1. أوجد x, y بمعلومية θ، r.
2. استخدم نظرية فيثاغورث للتعبير عن r بدلالة x, y
3. هل يمكن دائمًا تحديد قياس θ؟
4. أوجد قيمة r وقياس θ لكل من النقاط $M_1(-3, 0)$، $M_2(0, 1)$، $M_3(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

القيمة المطلقة لعدد مركب Absolute Value of a Complex Number

القيمة المطلقة للعدد المركب هي المسافة بين النقطة التي تمثل هذا العدد ونقطة الأصل في المستوى الإحداثي المركب والتي يمكنك إيجادها باستخدام نظرية فيثاغورث.

بصفة عامة إذا كان $z = a + bi$

فإن: $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

معلومة: يمكن استخدام التعبير Modulus للدلالة على القيمة المطلقة للعدد المركب.

تذكر: نظرية فيثاغورث: $c^2 = a^2 + b^2$، $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

مثال (1)

أوجد:

ⓐ $|5i|$ ⓑ $|3 - 4i|$

الحل:

ⓐ $5i$ هي 5 وحدات انطلاقًا من نقطة الأصل على المحور التخيلي.

$\therefore |5i| = 5$

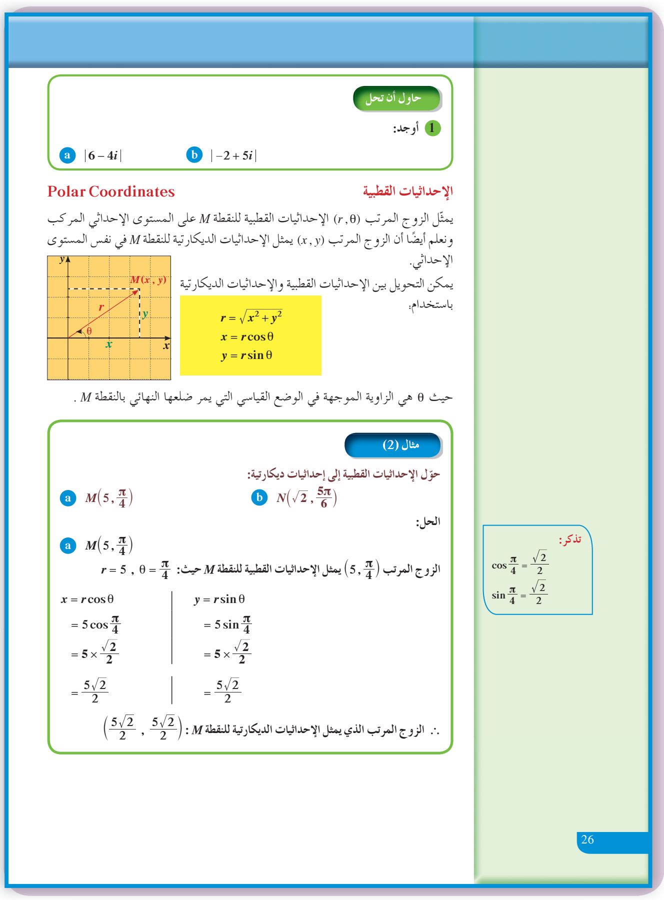
ⓑ $|3 - 4i|$

$= \sqrt{3^2 + (-4)^2}$ $\quad |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$= \sqrt{9 + 16}$ بسّط

$= 5$

25



حاول أن تحل

1. أوجد:

ⓐ $|6 - 4i|$ ⓑ $|-2 + 5i|$

الإحداثيات القطبية Polar Coordinates

يمثل الزوج المرتب (r, θ) الإحداثيات القطبية للنقطة M على المستوى الإحداثي المركب ونعلم أيضًا أن الزوج المرتب (x, y) يمثل الإحداثيات الديكارتية للنقطة M في نفس المستوى الإحداثي.

يمكن التحويل بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات الديكارتية باستخدام:

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

حيث θ هي الزاوية الموجهة في الوضع القياسي التي يمر ضلعها النهائي بالنقطة M.

مثال (2)

حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية:

ⓐ $M\left(5, \frac{\pi}{4}\right)$ ⓑ $N\left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$

الحل:

ⓐ $M\left(5, \frac{\pi}{4}\right)$

الزوج المرتب $\left(5, \frac{\pi}{4}\right)$ يمثل الإحداثيات القطبية للنقطة M حيث: $r = 5$، $\theta = \frac{\pi}{4}$

$x = r\cos\theta$	$y = r\sin\theta$
$= 5\cos\frac{\pi}{4}$	$= 5\sin\frac{\pi}{4}$
$= 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$	$= 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$
$= \frac{5\sqrt{2}}{2}$	$= \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$\therefore$ الزوج المرتب الذي يمثل الإحداثيات الديكارتية للنقطة M: $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$

تذكر: $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$، $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

26

5 التدريس

ركّز على فكرة الإحداثيات القطبية للطلاب من خلال فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» كونها المدخل الأساسي للصورة المثلثية في كتابة العدد المركب.

اكتب على السبورة إلى جانب المستوى الإحداثي القطبي القواعد التي تربط بين الإحداثيات الديكارتية $(x\,,y)$ والإحداثيات القطبية $(r\,,\theta)$.

حيث $r=\sqrt{x^2+y^2}$ ، $x=r\cos\theta\ ,\ y=r\sin\theta$

شجّعهم على فهم هذه القواعد من خلال النسب المثلثية في المثلث قائم الزاوية بدلًا من حفظها، وبالتالي يصبح التحويل بين هذه الإحداثيات سهلًا للغاية.

في المثال (1)

نبّه الطلاب إلى أن القيمة المطلقة للعدد المركب أو مقياس العدد المركب أو معيار العدد المركب هي تعابير متشابهة وتعني قيمة واحدة وهي:

إذاكان $z=a+bi$ فإن $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

أو إذا كان $z=x+yi$ فإن $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

في المثالين (2), (3)

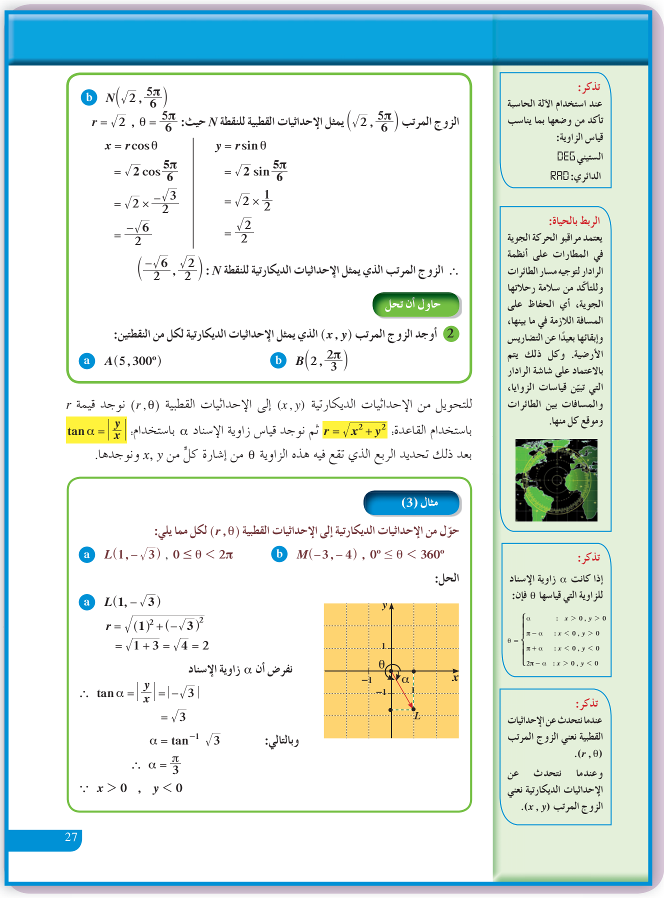
ناقش مع الطلاب التحويل من الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الديكارتية، ثم من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية.

أخبر الطلاب أن لكل عدد مركب صورة في المستوى الإحداثي، وهي نقطة معرفة بالإحداثيات الديكارتية، ومن ثم بإحداثيات قطبية. وسيكون للمحاور أسماء جديدة، حيث يصبح محور السينات المحور الحقيقي ومحور الصادات المحور التخيلي.

r = مقياس العدد المركب أو معيار العدد المركب.

θ = سعة العدد المركب.

اطلب إلى الطلاب تكرار هذه المفردات بصوت مرتفع عدة مرات.



b $N\left(\sqrt{2}\,,\frac{5\pi}{6}\right)$

الزوج المرتب $\left(\sqrt{2}\,,\frac{5\pi}{6}\right)$ يمثل الإحداثيات القطبية للنقطة N حيث: $r=\sqrt{2}\ ,\ \theta=\frac{5\pi}{6}$

$x=r\cos\theta=\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{6}=\sqrt{2}\times\frac{-\sqrt{3}}{2}=\frac{-\sqrt{6}}{2}$

$y=r\sin\theta=\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{6}=\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore$ الزوج المرتب الذي يمثل الإحداثيات الديكارتية للنقطة N: $\left(\frac{-\sqrt{6}}{2}\,,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

حاول أن تحل

2 أوجد الزوج المرتب $(x\,,y)$ الذي يمثل الإحداثيات الديكارتية لكل من النقطتين:

a $A(5\,,300^\circ)$ **b** $B\left(2\,,\frac{2\pi}{3}\right)$

للتحويل من الإحداثيات الديكارتية $(x\,,y)$ إلى الإحداثيات القطبية $(r\,,\theta)$ نوجد قيمة r باستخدام القاعدة: $r=\sqrt{x^2+y^2}$ ثم نوجد قياس زاوية الإسناد α باستخدام: $\tan\alpha=\left|\frac{y}{x}\right|$ بعد ذلك تحديد الربع الذي تقع فيه هذه الزاوية θ من إشارة كلٍّ من x, y ونوجدها.

مثال (3)

حوّل من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية $(r\,,\theta)$ لكل مما يلي:

a $L(1\,,-\sqrt{3})\ ,\ 0\le\theta<2\pi$ **b** $M(-3\,,-4)\ ,\ 0^\circ\le\theta<360^\circ$

الحل:

a $L(1\,,-\sqrt{3})$

$r=\sqrt{(1)^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$

نفرض أن α زاوية الإسناد

$\therefore\ \tan\alpha=\left|\frac{y}{x}\right|=|-\sqrt{3}|=\sqrt{3}$

وبالتالي: $\alpha=\tan^{-1}\sqrt{3}$

$\therefore\ \alpha=\frac{\pi}{3}$

$\because\ x>0\ ,\ y<0$

تذكر: عند استخدام الآلة الحاسبة تأكد من وضعها بما يناسب قياس الزاوية: الستيني DEG الدائري: RAD

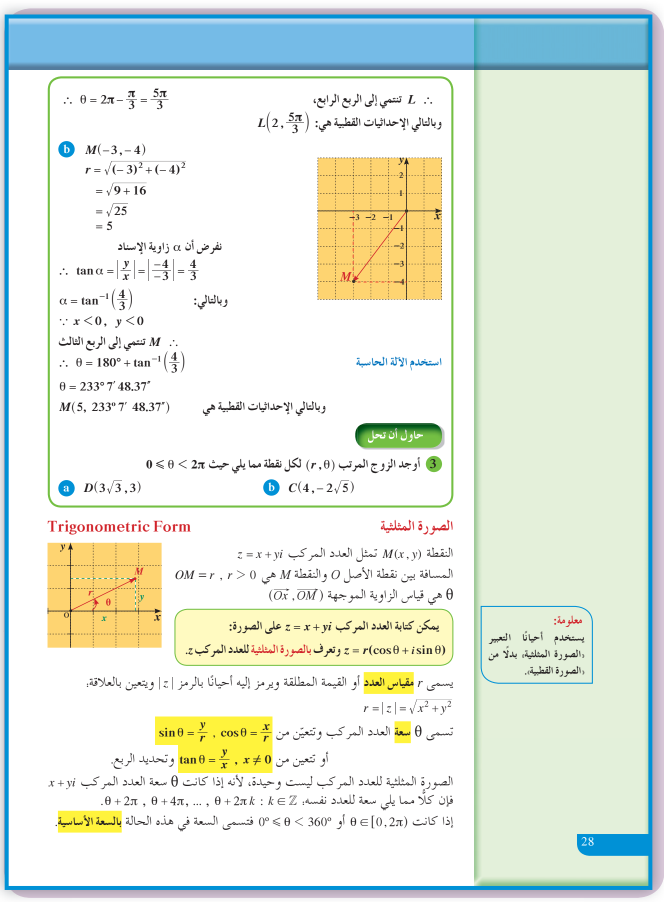
الربط بالحياة: يعتمد مراقبو الحركة الجوية في المطارات على أنظمة الرادار لتوجيه مسار الطائرات وللتأكّد من سلامة رحلاتها الجوية، أي الحفاظ على المسافة اللازمة في ما بينها، وإبقائها بعيدًا عن التضاريس الأرضية. وكل ذلك يتم بالاعتماد على شاشة الرادار التي تبيّن قياسات الزوايا، والمسافات بين الطائرات وموقع كل منها.

تذكر: إذا كانت α زاوية الإسناد للزاوية التي قياسها θ فإن:

$\theta=\begin{cases}\alpha & : x>0\,,y>0\\ \pi-\alpha & : x<0\,,y>0\\ \pi+\alpha & : x<0\,,y<0\\ 2\pi-\alpha & : x>0\,,y<0\end{cases}$

تذكر: عندما نتحدث عن الإحداثيات القطبية نعني الزوج المرتب $(r\,,\theta)$. وعندما نتحدث عن الإحداثيات الديكارتية نعني الزوج المرتب $(x\,,y)$.

27



$\therefore$ L تنتمي إلى الربع الرابع، $\therefore\ \theta=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$

وبالتالي الإحداثيات القطبية هي: $L\left(2\,,\frac{5\pi}{3}\right)$

b $M(-3\,,-4)$

$r=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

نفرض أن α زاوية الإسناد

$\therefore\ \tan\alpha=\left|\frac{y}{x}\right|=\left|\frac{-4}{-3}\right|=\frac{4}{3}$

وبالتالي: $\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$

$\because\ x<0\,,\ y<0$

$\therefore$ M تنتمي إلى الربع الثالث

$\therefore\ \theta=180^\circ+\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$

استخدم الآلة الحاسبة

$\theta=233^\circ\,7'\,48.37''$

وبالتالي الإحداثيات القطبية هي $M(5,\ 233^\circ\,7'\ 48.37'')$

حاول أن تحل

3 أوجد الزوج المرتب $(r\,,\theta)$ لكل نقطة مما يلي حيث $0\leqslant\theta<2\pi$

a $D(3\sqrt{3}\,,3)$ **b** $C(4\,,-2\sqrt{5})$

الصورة المثلثية Trigonometric Form

النقطة $M(x\,,y)$ تمثل العدد المركب $z=x+yi$

المسافة بين نقطة الأصل O والنقطة M هي $OM=r\ ,\ r>0$

θ هي قياس الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{Ox}\,,\overrightarrow{OM})$

يمكن كتابة العدد المركب $z=x+yi$ على الصورة: $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ وتعرف بالصورة المثلثية للعدد المركب z.

يسمى r **مقياس العدد** أو القيمة المطلقة ويرمز إليه أحيانًا بالرمز $|z|$ ويتعين بالعلاقة: $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

تسمى θ **سعة** العدد المركب وتتعيّن من $\sin\theta=\frac{y}{r}\ ,\ \cos\theta=\frac{x}{r}$

أو تتعين من $\tan\theta=\frac{y}{x}\ ,\ x\neq0$ وتحديد الربع.

الصورة المثلثية للعدد المركب ليست وحيدة، لأنه إذا كانت θ سعة العدد المركب $x+yi$ فإن كلًّا مما يلي سعة للعدد نفسه: $\theta+2\pi\ ,\ \theta+4\pi, \ldots\ ,\ \theta+2\pi k\ :\ k\in\mathbb{Z}$.

إذا كانت $\theta\in[0,2\pi)$ أو $0^\circ\leqslant\theta<360^\circ$ فتسمى السعة في هذه الحالة **بالسعة الأساسية**.

معلومة: يستخدم أحيانًا التعبير «الصورة المثلثية» بدلًا من «الصورة القطبية».

28

في المثالين (4), (5)

تأكّد من أن الطلاب يكتبون الصورة المثلثية للعدد المركب $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ وأن التحويل مع الصورة الديكارتية يعتمد على القواعد:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ x = r\cos\theta\ ,\ y = r\sin\theta$$

نبّه الطلاب إلى قيم الدوال المثلثية للزوايا التي تكون أكبر من $90°$ أو $\frac{\pi}{2}$. وكذلك ألفت انتباههم إلى الوضع المناسب على الآلة الحاسبة بحيث يستخدمون Rad أو Deg بحسب وحدة القياس المستخدمة.

في المثالين (6), (7)

يستخدم الطلاب حساب المثلثات لتحويل العدد المركب من الصورة المثلثية إلى الصورة الجبرية وبالعكس.

شجّع الطلاب على مراجعة العلاقات بين الدوال المثلثية.

أكّد لهم أن القيمة المطلقة للعدد المركب r هي دائمًا قيمة موجبة، حيث $r = \sqrt{x^2 + y^2}$، ولكن $\cos\theta$، $\sin\theta$ يمكن أن تكونا موجبتين أو سالبتين، ويمكن أن تكون إحداهما موجبة والأخرى سالبة.

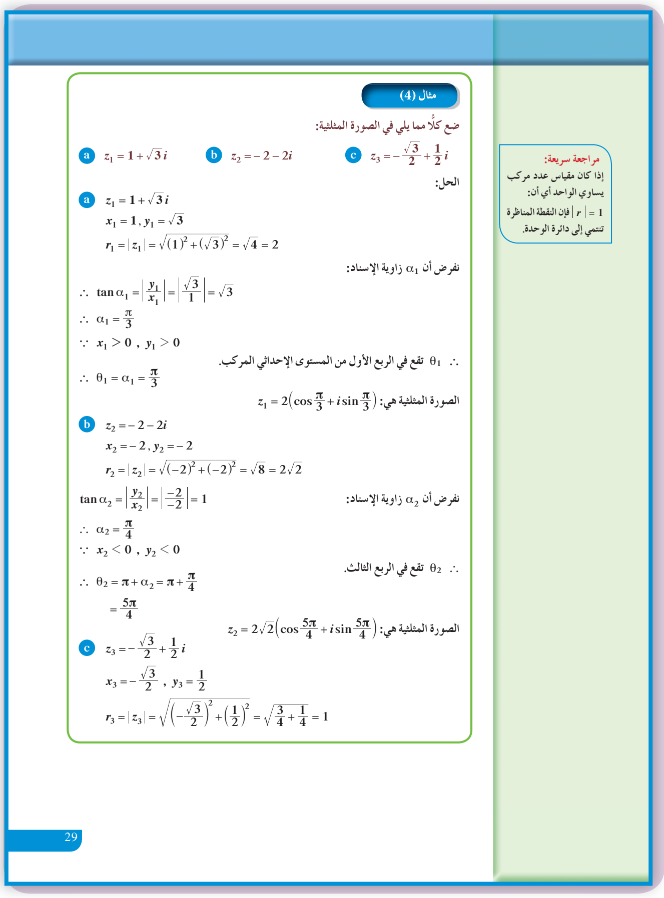
6 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في كتابة الصورة المثلثية للعدد المركب فيكتبون $z = r(\sin\theta + i\cos\theta)$

أكّد لهم أن: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$، ولا يمكن التبديل بين $\cos\theta$ و $\sin\theta$.

7 التقييم

تابع مع الطلاب فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من حسن أدائهم في التحويل بين الصورة الديكارتية والصورة المثلثية للعدد المركب وبالعكس.



مثال (4)

ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية:

a $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ b $z_2 = -2 - 2i$ c $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

الحل:

a $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$

$x_1 = 1, y_1 = \sqrt{3}$

$r_1 = |z_1| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

نفرض أن α_1 زاوية الإسناد:

$\therefore \tan\alpha_1 = \left|\frac{y_1}{x_1}\right| = \left|\frac{\sqrt{3}}{1}\right| = \sqrt{3}$

$\therefore \alpha_1 = \frac{\pi}{3}$

$\because x_1 > 0\ ,\ y_1 > 0$

$\therefore$ θ_1 تقع في الربع الأول من المستوى الإحداثي المركب.

$\therefore \theta_1 = \alpha_1 = \frac{\pi}{3}$

الصورة المثلثية هي: $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

b $z_2 = -2 - 2i$

$x_2 = -2, y_2 = -2$

$r_2 = |z_2| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

نفرض أن α_2 زاوية الإسناد: $\tan\alpha_2 = \left|\frac{y_2}{x_2}\right| = \left|\frac{-2}{-2}\right| = 1$

$\therefore \alpha_2 = \frac{\pi}{4}$

$\because x_2 < 0\ ,\ y_2 < 0$

$\therefore$ θ_2 تقع في الربع الثالث.

$\therefore \theta_2 = \pi + \alpha_2 = \pi + \frac{\pi}{4}$

$= \frac{5\pi}{4}$

الصورة المثلثية هي: $z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

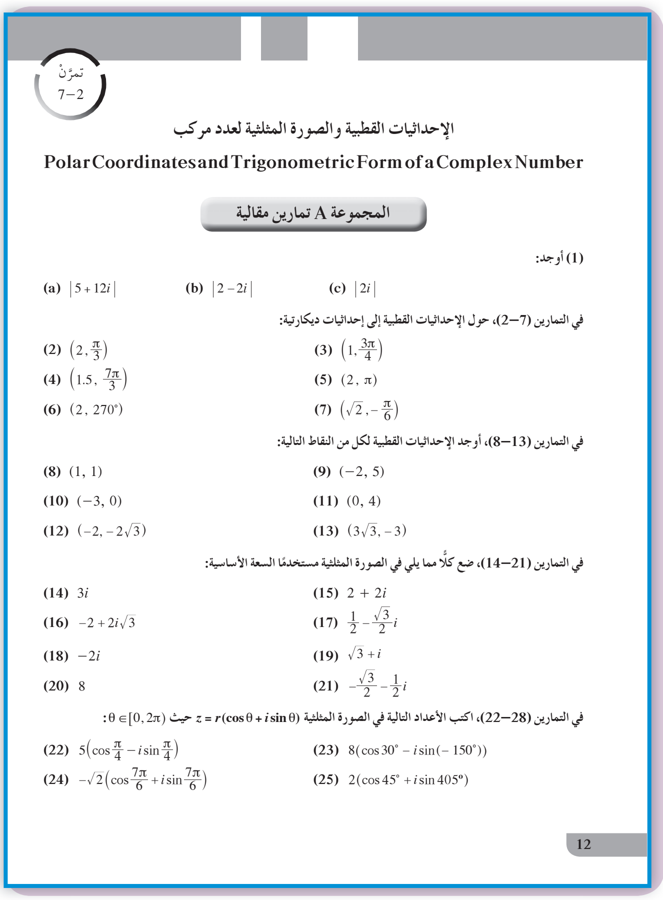
c $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ y_3 = \frac{1}{2}$

$r_3 = |z_3| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$

مراجعة سريعة:
إذا كان مقياس عدد مركب يساوي الواحد أي أن: $|r| = 1$ فإن النقطة المناظرة تنتمي إلى دائرة الوحدة.

29



تمرَّنْ 7−2

الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب

Polar Coordinates and Trigonometric Form of a Complex Number

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أوجد:

(a) $|5 + 12i|$ (b) $|2 - 2i|$ (c) $|2i|$

في التمارين (2−7)، حول الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية:

(2) $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ (3) $\left(1, \frac{3\pi}{4}\right)$

(4) $\left(1.5, \frac{7\pi}{3}\right)$ (5) $(2, \pi)$

(6) $(2, 270°)$ (7) $\left(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{6}\right)$

في التمارين (8−13)، أوجد الإحداثيات القطبية لكل من النقاط التالية:

(8) $(1, 1)$ (9) $(-2, 5)$

(10) $(-3, 0)$ (11) $(0, 4)$

(12) $(-2, -2\sqrt{3})$ (13) $(3\sqrt{3}, -3)$

في التمارين (14−21)، ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية مستخدمًا السعة الأساسية:

(14) $3i$ (15) $2 + 2i$

(16) $-2 + 2i\sqrt{3}$ (17) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(18) $-2i$ (19) $\sqrt{3} + i$

(20) 8 (21) $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

في التمارين (22−28)، اكتب الأعداد التالية في الصورة المثلثية $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ حيث $\theta \in [0, 2\pi)$:

(22) $5\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ (23) $8(\cos 30° - i\sin(-150°))$

(24) $-\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$ (25) $2(\cos 45° + i\sin 405°)$

12

اختبار سريع

1 أوجد الإحداثي الديكارتي للنقطة $D\left(\sqrt{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$

$$r = \sqrt{3} \ , \ x = r\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{-1}{2}\right)$$

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = r\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$y = \frac{3}{2}$$

ومنه: $D\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$

2 أوجد الإحداثي القطبي للنقطة $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ , \ \sin\theta = \frac{y}{r} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ومنه: $\theta = \frac{7\pi}{4}$

الإحداثي القطبي $M\left(1, \frac{7\pi}{4}\right)$

3 اكتب العدد المركب: $z = 1 - i\sqrt{3}$ في الصورة المثلثية.

$$|z| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

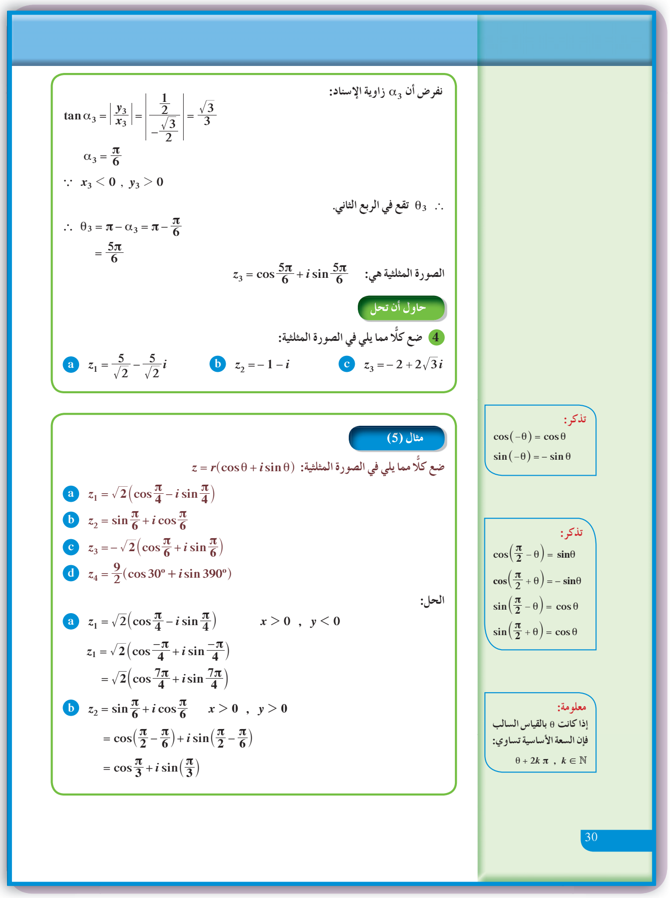
$$\cos\theta = \frac{1}{2} \ , \ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

فتكون: $\theta = \frac{5\pi}{3}$

والصورة المثلثية $z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

4 اكتب العدد المركب: $z = 3\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$ في الصورة الجبرية.

$$z = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$



نفرض أن α_3 زاوية الإسناد:

$$\tan\alpha_3 = \left|\frac{y_3}{x_3}\right| = \left|\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\alpha_3 = \frac{\pi}{6}$$

$\because \ x_3 < 0 \ , \ y_3 > 0$

$\therefore$ θ_3 تقع في الربع الثاني.

$$\therefore \ \theta_3 = \pi - \alpha_3 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

الصورة المثلثية هي: $z_3 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$

حاول أن تحل

4 ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية:

a $z_1 = \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}}i$ b $z_2 = -1 - i$ c $z_3 = -2 + 2\sqrt{3}i$

مثال (5)

ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

a $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

b $z_2 = \sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}$

c $z_3 = -\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

d $z_4 = \frac{9}{2}(\cos 30^\circ + i\sin 390^\circ)$

الحل:

a $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ $x > 0 \ , \ y < 0$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

b $z_2 = \sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}$ $x > 0 \ , \ y > 0$

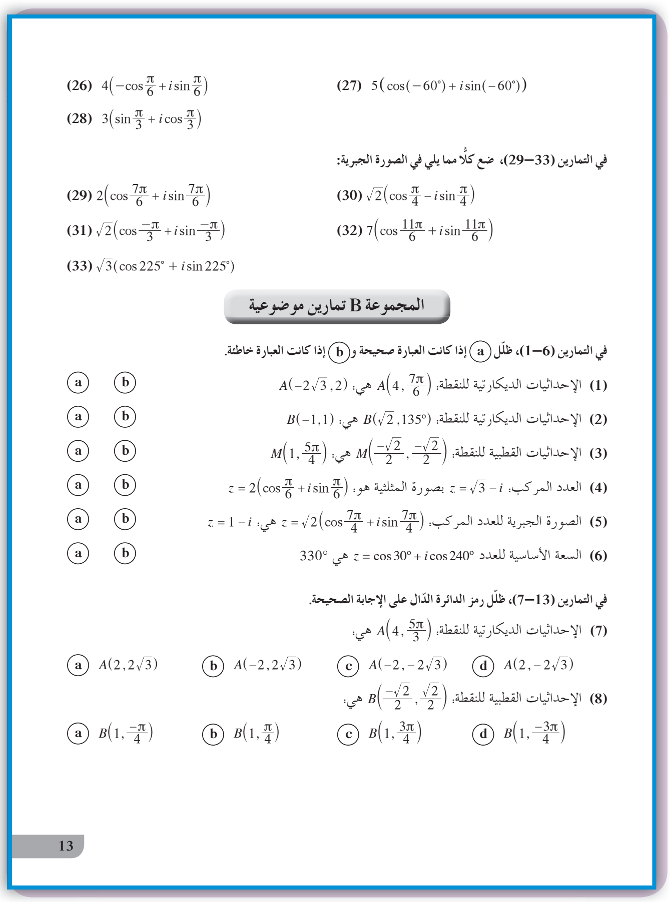
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

تذكر:
$\cos(-\theta) = \cos\theta$
$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

تذكر:
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$

معلومة:
إذا كانت θ بالقياس السالب فإن السعة الأساسية تساوي:
$\theta + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{N}$

30



(26) $4\left(-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ (27) $5(\cos(-60^\circ) + i\sin(-60^\circ))$

(28) $3\left(\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}\right)$

في التمارين (33–29)، ضع كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية:

(29) $2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$ (30) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(31) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right)$ (32) $7\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

(33) $\sqrt{3}(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ)$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (6–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $A\left(4, \frac{7\pi}{6}\right)$ هي: $A(-2\sqrt{3}, 2)$ (a) (b)

(2) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $B(\sqrt{2}, 135^\circ)$ هي: $B(-1, 1)$ (a) (b)

(3) الإحداثيات القطبية للنقطة: $M\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ هي: $M\left(1, \frac{5\pi}{4}\right)$ (a) (b)

(4) العدد المركب: $z = \sqrt{3} - i$ بصورة المثلثية هو: $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ (a) (b)

(5) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ هي: $z = 1 - i$ (a) (b)

(6) السعة الأساسية للعدد $z = \cos 30^\circ + i\cos 240^\circ$ هي 330° (a) (b)

في التمارين (13–7)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $A\left(4, \frac{5\pi}{3}\right)$ هي:

(a) $A(2, 2\sqrt{3})$ (b) $A(-2, 2\sqrt{3})$ (c) $A(-2, -2\sqrt{3})$ (d) $A(2, -2\sqrt{3})$

(8) الإحداثيات القطبية للنقطة: $B\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ هي:

(a) $B\left(1, \frac{-\pi}{4}\right)$ (b) $B\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ (c) $B\left(1, \frac{3\pi}{4}\right)$ (d) $B\left(1, \frac{-3\pi}{4}\right)$

13

8 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

1 $x = r\cos\theta \;,\; y = r\sin\theta$

2 $x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2$

3 إذا لم يكن قياس الزاوية θ من الحالات الخاصة $\left(0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi \ldots\right)$ فعلينا استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة تقريبية.

4 $M_1(r = 3 \;,\; \theta = \pi)$

$M_2\left(r = 1 \;,\; \theta = \frac{\pi}{2}\right)$

$M_3\left(r = 2 \;,\; \theta = \frac{\pi}{4}\right)$

«حاول أن تحل»

1 (a) $2\sqrt{13}$

(b) $\sqrt{29}$

2 (a) $A\left(\frac{5}{2}, \frac{-5\sqrt{3}}{2}\right)$

(b) $B(-1 \;,\; \sqrt{3})$

3 (a) $D\left(6, \frac{\pi}{6}\right)$

(b) $C(6 \;,\; 5.442 \text{ rad})$

4 (a) $5\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

(b) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

(c) $4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

5 (a) $3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

(b) $2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(c) $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(d) $3(\cos 50^\circ + i\sin(180^\circ - 130^\circ))$

$= 3(\cos 50^\circ + i\sin 50^\circ)$

---

c $z_3 = -\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= \sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) \qquad x < 0 \;,\; y < 0$

$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

d $z_4 = \frac{9}{2}(\cos 30^\circ + i\sin 390^\circ) \;,\; x > 0 \;,\; y > 0$

$= \frac{9}{2}(\cos 30^\circ + i\sin(360^\circ + 30^\circ))$

$= \frac{9}{2}(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$

حاول أن تحل

5 ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

a $3\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ b $2\left(\sin\frac{\pi}{4} + i\cos\frac{\pi}{4}\right)$

c $-\sqrt{3}\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ d $3(\cos 50^\circ - i\sin(-130^\circ))$

تذكر: $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$, $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$

تذكر: $\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$, $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$

مثال (6)

ضع كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية:

a $z_1 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$ b $z_2 = 3\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)$

الحل:

a $z_1 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

$z_1 = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

$z_1 = -\sqrt{3} - i$

b $z_2 = 3\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)$

$z_2 = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

$z_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

حاول أن تحل

6 ضع كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية:

a $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ b $z_2 = \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

31

---

(9) الصورة المثلثية للعدد المركب: $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ حيث $\theta \in [0, 2\pi)$ هي:

a $z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ b $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

c $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ d $z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

(10) الصورة المثلثية للعدد المركب: $z = \frac{-4}{1-i}$ حيث $0 \leqslant \theta < 2\pi$ هي:

a $z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ b $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

c $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ d $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

(11) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ حيث $0 \leqslant \theta < 2\pi$ هي:

a $z = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$ b $z = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

c $z = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ d $z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

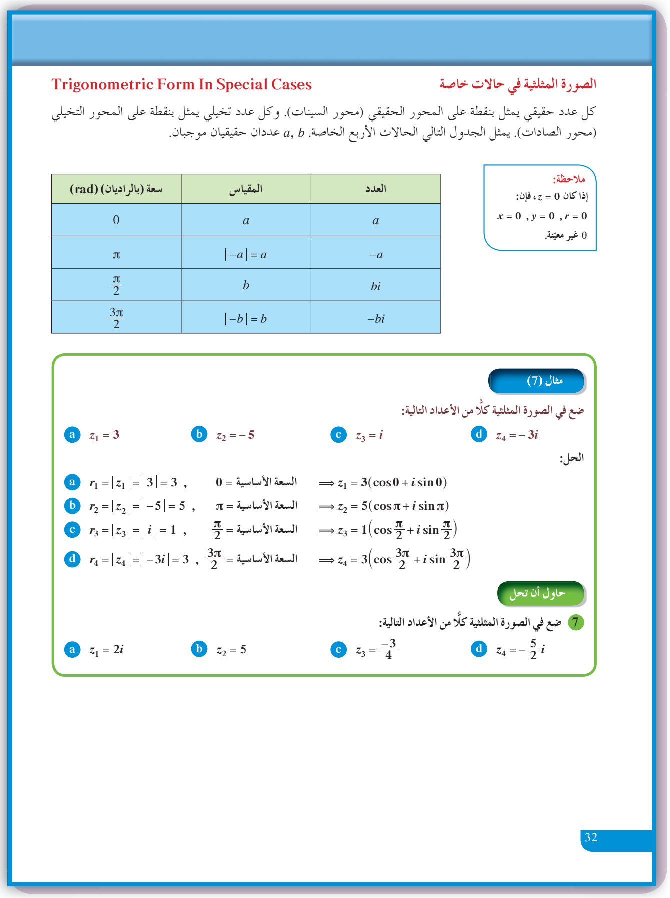
(12) $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ فإنّ قيمة $(i^{2n+2} + i^{2n+8})$ تساوي:

a 1 b 0 c −1 d i^{-2n}

(13) $(6 - 2i + 3i^5)^2$ تساوي:

a $35 - 12i$ b $35 + 12i$ c $81 - 12i$ d $81 + 12i$

14



الصورة المثلثية في حالات خاصة Trigonometric Form In Special Cases

كل عدد حقيقي يمثل بنقطة على المحور الحقيقي (محور السينات). وكل عدد تخيلي يمثل بنقطة على المحور التخيلي (محور الصادات). يمثل الجدول التالي الحالات الأربع الخاصة. a, b عددان حقيقيان موجبان.

ملاحظة:
إذا كان $z = 0$، فإن:
$x = 0\ ,\ y = 0\ ,\ r = 0$
θ غير معيّنة.

العدد	المقياس	سعة (بالراديان) (rad)
a	a	0
$-a$	$\lvert -a \rvert = a$	π
bi	b	$\frac{\pi}{2}$
$-bi$	$\lvert -b \rvert = b$	$\frac{3\pi}{2}$

مثال (7)

ضع في الصورة المثلثية كلًّا من الأعداد التالية:

a) $z_1 = 3$ b) $z_2 = -5$ c) $z_3 = i$ d) $z_4 = -3i$

الحل:

a) $r_1 = |z_1| = |3| = 3$, السعة الأساسية $= 0$ $\Longrightarrow z_1 = 3(\cos 0 + i\sin 0)$

b) $r_2 = |z_2| = |-5| = 5$, السعة الأساسية $= \pi$ $\Longrightarrow z_2 = 5(\cos\pi + i\sin\pi)$

c) $r_3 = |z_3| = |i| = 1$, السعة الأساسية $= \frac{\pi}{2}$ $\Longrightarrow z_3 = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

d) $r_4 = |z_4| = |-3i| = 3$, السعة الأساسية $= \frac{3\pi}{2}$ $\Longrightarrow z_4 = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

حاول أن تحل

7 ضع في الصورة المثلثية كلًّا من الأعداد التالية:

a) $z_1 = 2i$ b) $z_2 = 5$ c) $z_3 = \frac{-3}{4}$ d) $z_4 = -\frac{5}{2}i$

32

6 (a) $z_1 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i$

(b) $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

7 (a) $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

(b) $z_2 = 5(\cos 0 + i\sin 0)$

(c) $z_3 = \frac{3}{4}(\cos\pi + i\sin\pi)$

(d) $z_4 = \frac{5}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

3–7: حل معادلات

1 الأهداف

- يحل معادلات من الدرجة الأولى تتضمن عددًا تخيليًّا.
- يحل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد.
- يوجد الجذرين التربيعيين لعدد مركب.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

جذر تربيعي لعدد مركب – معادلة تربيعية.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

حلّ المعادلات التالية:

(a) $x^2 - 9 = 0$

(b) $x^2 + 25 = 0$

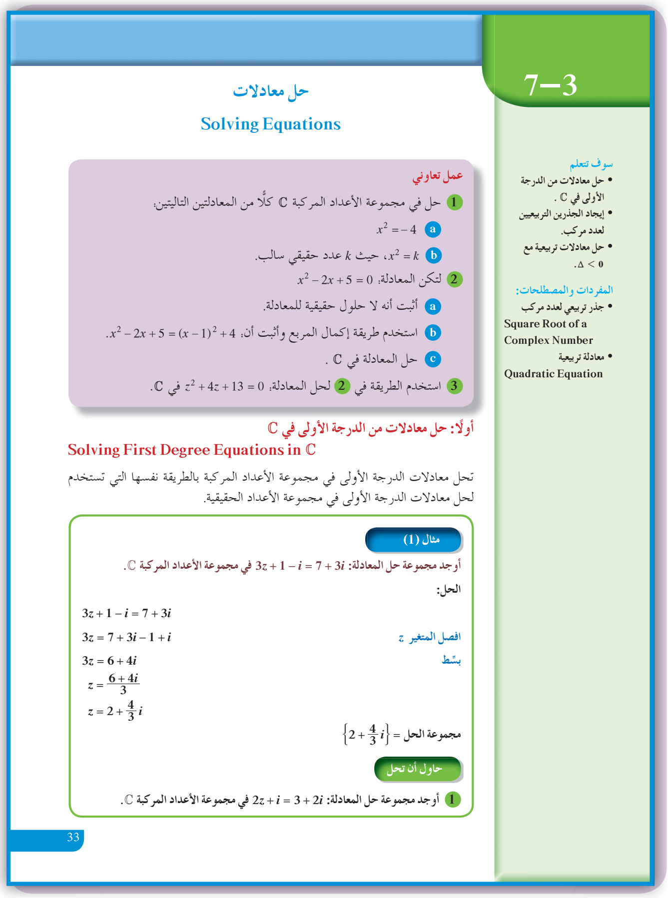
(c) $x^2 + 4x + 20 = 0$

5 التدريس

يتوسع هذا الدرس في إيجاد مجموعة الحل لمعادلات مميزها سالب إلى معادلات تتضمن أعدادًا مركبة، لذلك من المفيد جدًّا التدرج من المعادلة من الدرجة الأولى إلى المعادلة من الدرجة الثانية.

في المثالين (1), (2)

يوضّح هذان المثالان كيفية التعامل مع المعادلة من الدرجة الأولى لإيجاد مجموعة الحل بالصورة الجبرية $z = a + bi$ أو $z = x + yi$ كما وردت في المثال (2).
ناقش مع الطلاب خطوات الحل في المثال (2)، وأخبرهم أن كتابة z على صورة $z = x + yi$ تساعد كثيرًا على تخطي إشكالية وجود $\overline{z}$ والتي هي مرافق العدد المركب z، حيث نجد العلاقة بين $z = x + yi$ و $\overline{z} = x - yi$



7–3

حل معادلات

Solving Equations

عمل تعاوني

1 حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كلًّا من المعادلتين التاليتين:

a $x^2 = -4$

b $x^2 = k$، حيث k عدد حقيقي سالب.

2 لتكن المعادلة: $x^2 - 2x + 5 = 0$

a أثبت أنه لا حلول حقيقية للمعادلة.

b استخدم طريقة إكمال المربع وأثبت أن: $x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4$.

c حل المعادلة في $\mathbb{C}$.

3 استخدم الطريقة في 2 لحل المعادلة: $z^2 + 4z + 13 = 0$ في $\mathbb{C}$.

سوف تتعلم

- حل معادلات من الدرجة الأولى في $\mathbb{C}$.
- إيجاد الجذرين التربيعيين لعدد مركب.
- حل معادلات تربيعية مع $\Delta < 0$.

المفردات والمصطلحات:

- جذر تربيعي لعدد مركب
Square Root of a Complex Number
- معادلة تربيعية
Quadratic Equation

أولًا: حل معادلات من الدرجة الأولى في $\mathbb{C}$

Solving First Degree Equations in $\mathbb{C}$

تحل معادلات الدرجة الأولى في مجموعة الأعداد المركبة بالطريقة نفسها التي تستخدم لحل معادلات الدرجة الأولى في مجموعة الأعداد الحقيقية.

مثال (1)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $3z + 1 - i = 7 + 3i$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$.

الحل:

$3z + 1 - i = 7 + 3i$

افصل المتغير z — $3z = 7 + 3i - 1 + i$

بسّط — $3z = 6 + 4i$

$z = \frac{6+4i}{3}$

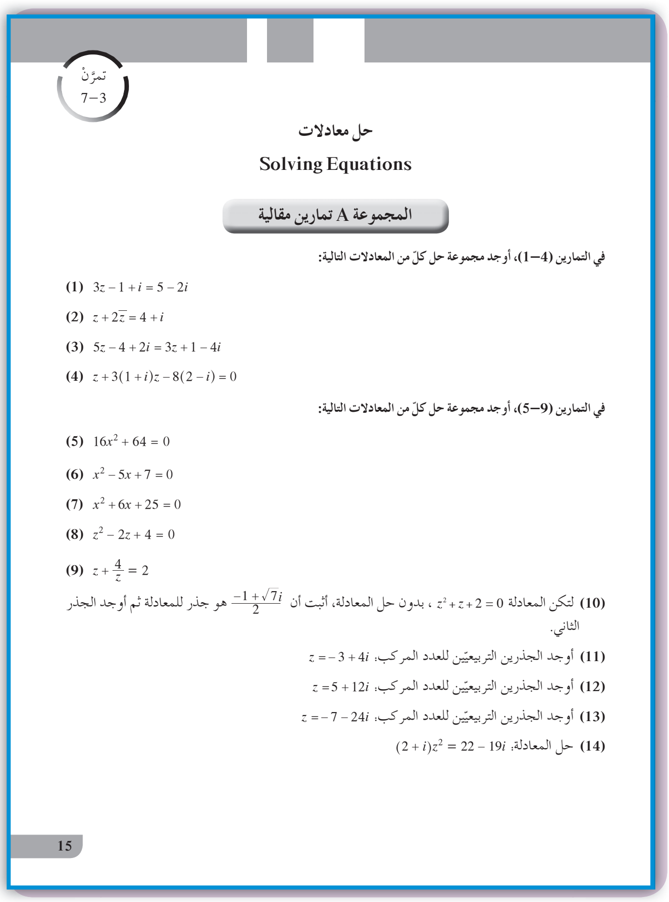
$z = 2 + \frac{4}{3}i$

مجموعة الحل = $\left\{2 + \frac{4}{3}i\right\}$

حاول أن تحل

1 أوجد مجموعة حل المعادلة: $2z + i = 3 + 2i$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$.

33



تمرَّنْ 7–3

حل معادلات

Solving Equations

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–4)، أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلات التالية:

(1) $3z - 1 + i = 5 - 2i$

(2) $z + 2\overline{z} = 4 + i$

(3) $5z - 4 + 2i = 3z + 1 - 4i$

(4) $z + 3(1+i)z - 8(2-i) = 0$

في التمارين (5–9)، أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلات التالية:

(5) $16x^2 + 64 = 0$

(6) $x^2 - 5x + 7 = 0$

(7) $x^2 + 6x + 25 = 0$

(8) $z^2 - 2z + 4 = 0$

(9) $z + \frac{4}{z} = 2$

(10) لتكن المعادلة $z^2 + z + 2 = 0$ ، بدون حل المعادلة، أثبت أن $\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}$ هو جذر للمعادلة ثم أوجد الجذر الثاني.

(11) أوجد الجذرين التربيعيّين للعدد المركب: $z = -3 + 4i$

(12) أوجد الجذرين التربيعيّين للعدد المركب: $z = 5 + 12i$

(13) أوجد الجذرين التربيعيّين للعدد المركب: $z = -7 - 24i$

(14) حل المعادلة: $(2+i)z^2 = 22 - 19i$

15

في المثال (3)

يوضّح هذا المثال كيف نحل معادلات على الصورة $x^2 + a^2 = 0$ وأن الحلول هي أعداد تخيلية.

في المثال (4)

كثيرًا ما يساعد هذا المثال على إيجاد حل معادلة من الدرجة الثانية عندما يكون المميز $\Delta < 0$.

ذكّر الطلاب أن $\Delta = b^2 - 4ac$، وأن $i^2 = -1$ وعندها تصبح الحلول أعدادًا مركبة على صورة $z = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

في المثال (5)

يساعد هذا المثال الطلاب على تعويض قيمة عدد مركب في معادلة من الدرجة الثانية والتأكد من أنه أحد حلول هذه المعادلة وبالتالي لإيجاد الحل الآخر (أو الجذر الثاني) لمعادلة الدرجة الثانية $az^2 + bz + c = 0$ يمكنهم استخدام إحدى العلاقتين: $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ أو $z_1 \times z_2 = \dfrac{c}{a}$

في الأمثلة (8), (7), (6)

أكّد للطلاب أن الجذرين التربيعيين لأي عدد مركب هما دائمًا موجودان، وأنهما عددان مركبان.

أخبرهم أن المعادلات الثلاث التي نحصل عليها ضرورية لإيجاد الجذور التربيعية، وأن إحدى هذه المعادلات وهي $m \times n$ توفر فقط نوعية الإشارات لكل من m, n والأساس هو حل النظام:
$$\begin{cases} m^2 + n^2 = \ldots \\ m^2 - n^2 = \ldots \end{cases}$$

مثال (2)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $2z + i\overline{z} = 5 - 2i$ في $\mathbb{C}$.

الحل:

لتكن $z = x + yi$ حيث x, y عددان حقيقيان.

$2z + i\overline{z} = 5 - 2i$

عوّض عن z بـ $x + yi$: $2(x+yi) + i(\overline{x+yi}) = 5 - 2i$

مرافق $x + yi$ هو $x - yi$: $2(x+yi) + i(x-yi) = 5 - 2i$

$2x + 2yi + xi - y(i)^2 = 5 - 2i$

$i^2 = -1$: $2x + 2yi + xi + y = 5 - 2i$

تجميع الأعداد الحقيقية معًا والأعداد التخيلية معًا: $2x + y + (x+2y)i = 5 - 2i$

خاصية تساوي عددين مركبين: $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$

بحل المعادلتين نحصل على: $\begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases}$

مجموعة الحل: $= \{4 - 3i\}$.

حاول أن تحل

2 أوجد مجموعة حل المعادلة: $z + i = 2\overline{z} + 1$.

تذكر: يمكن حل نظام معادلتين من الدرجة الأولى في متغيرين باستخدام طريقة الحذف أو التعويض أو باستخدام الآلة الحاسبة.

ثانيًا: حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد في $\mathbb{C}$

Solving Quadratic Equations With One Variable in $\mathbb{C}$

تذكر: إن العمليات على الأعداد المركبة مثل العمليات على الأعداد الحقيقية مع اعتبار $i^2 = -1$.

مثال (3)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $4x^2 + 100 = 0$ حيث $x \in \mathbb{C}$.

الحل:

$4x^2 + 100 = 0$

$4x^2 = -100$

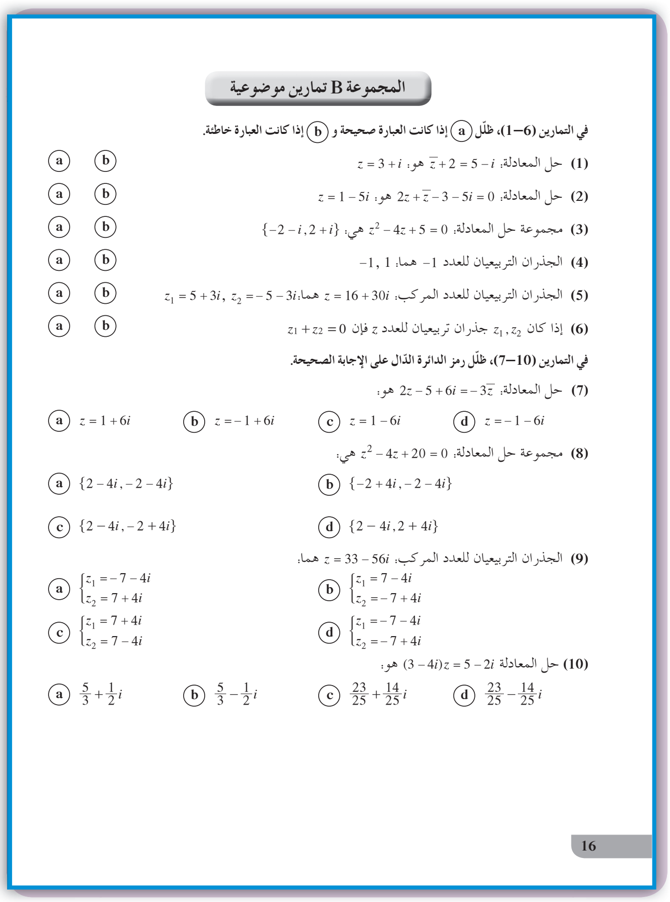
$x^2 = -25$

$x = \pm\sqrt{-25}$

$\sqrt{-a^2} = ai$: $x = \pm 5i$

مجموعة الحل $= \{5i, -5i\}$.

34



المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حل المعادلة: $\overline{z} + 2 = 5 - i$ هو: $z = 3 + i$ (a) (b)

(2) حل المعادلة: $2z + \overline{z} - 3 - 5i = 0$ هو: $z = 1 - 5i$ (a) (b)

(3) مجموعة حل المعادلة: $z^2 - 4z + 5 = 0$ هي: $\{-2 - i, 2 + i\}$ (a) (b)

(4) الجذران التربيعيان للعدد -1 هما: $-1, 1$ (a) (b)

(5) الجذران التربيعيان للعدد المركب: $z = 16 + 30i$ هما: $z_1 = 5 + 3i,\ z_2 = -5 - 3i$ (a) (b)

(6) إذا كان z_1, z_2 جذران تربيعيان للعدد z فإن $z_1 + z_2 = 0$ (a) (b)

في التمارين (7–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) حل المعادلة: $2z - 5 + 6i = -3\overline{z}$ هو:

(a) $z = 1 + 6i$ (b) $z = -1 + 6i$ (c) $z = 1 - 6i$ (d) $z = -1 - 6i$

(8) مجموعة حل المعادلة: $z^2 - 4z + 20 = 0$ هي:

(a) $\{2 - 4i, -2 - 4i\}$ (b) $\{-2 + 4i, -2 - 4i\}$

(c) $\{2 - 4i, -2 + 4i\}$ (d) $\{2 - 4i, 2 + 4i\}$

(9) الجذران التربيعيان للعدد المركب: $z = 33 - 56i$ هما:

(a) $\begin{cases} z_1 = -7 - 4i \\ z_2 = 7 + 4i \end{cases}$ (b) $\begin{cases} z_1 = 7 - 4i \\ z_2 = -7 + 4i \end{cases}$

(c) $\begin{cases} z_1 = 7 + 4i \\ z_2 = 7 - 4i \end{cases}$ (d) $\begin{cases} z_1 = -7 - 4i \\ z_2 = -7 + 4i \end{cases}$

(10) حل المعادلة $(3 - 4i)z = 5 - 2i$ هو:

(a) $\frac{5}{3} + \frac{1}{2}i$ (b) $\frac{5}{3} - \frac{1}{2}i$ (c) $\frac{23}{25} + \frac{14}{25}i$ (d) $\frac{23}{25} - \frac{14}{25}i$

16

6 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في الربط بين القيمة المطلقة للعدد المركب $z = a + bi$ والقيمة المطلقة لجذره التربيعي $w = m + ni$.

اكتب أمامهم على السبورة أن: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ولكن $|w| = \sqrt{m^2 + n^2}$. وبما أن $w^2 = z$، فإن: $m^2 + n^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$

7 التقييم

تابع الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» لتقف على حسن أدائهم وفهمهم لما ورد في هذا الدرس.

اختبار سريع

1 أوجد مجموعة حل المعادلة: $z + 3i = 2\overline{z} - 1$

نأخذ $z = x + yi$ فتكون $\overline{z} = x - yi$

$x = 1 \ , \ y = -1 \ , \ z = 1 - i$

2 أوجد مجموع حل المعادلة: $5z^2 + 6z + 9 = 0$

$\Delta = 36 - 180 = -144 = i^2 \times 144$

$z_1 = \frac{-3}{5} - \frac{6}{5}i \ , \ z_2 = -\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$

3 أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب:

(a) $z = 4i$

$$\begin{cases} m^2 - n^2 = 0 \\ 2mn = 4 \\ m^2 + n^2 = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4 \end{cases}$$

$\therefore \ m = -\sqrt{2} \ , \ m = \sqrt{2}$

$n = -\sqrt{2} \ , \ n = \sqrt{2}$

مجموعة الحل: $\{\sqrt{2} + \sqrt{2}i \ , \ -\sqrt{2} - \sqrt{2}i\}$

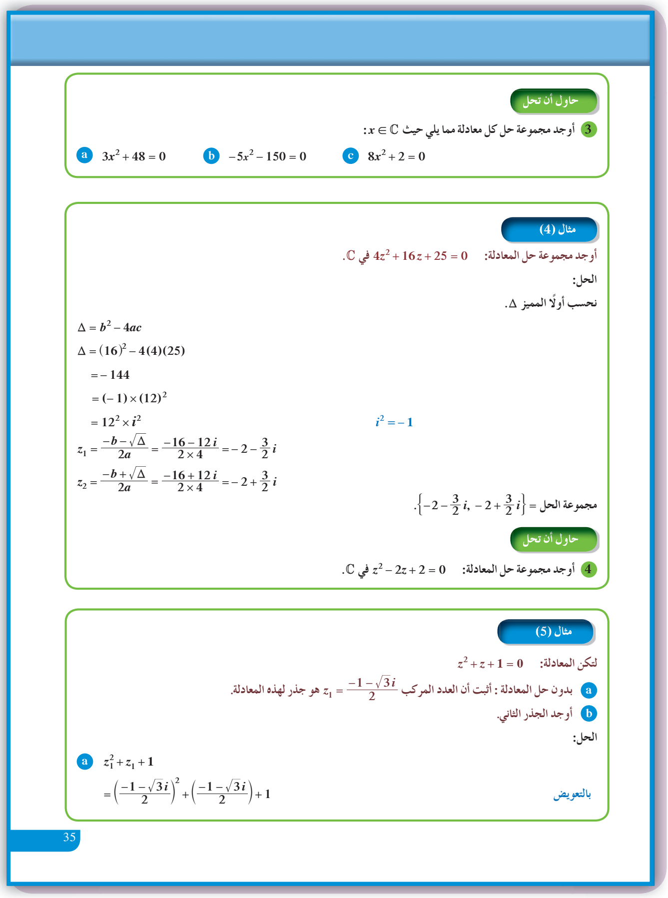
(b) $z = -12 - 16i$

$$\begin{cases} m^2 - n^2 = -12 \\ 2mn = -16 \\ m^2 + n^2 = \sqrt{(-12)^2 + (-16)^2} = 20 \end{cases}$$

$\therefore \ m = -2 \ , \ m = 2$

$n = -4 \ , \ n = 4$

مجموعة الحل: $\{-2 + 4i \ , \ 2 - 4i\}$



حاول أن تحل

3 أوجد مجموعة حل كل معادلة مما يلي حيث $x \in C$:

a $3x^2 + 48 = 0$ b $-5x^2 - 150 = 0$ c $8x^2 + 2 = 0$

مثال (4)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $4z^2 + 16z + 25 = 0$ في C.

الحل:

نحسب أولاً المميز Δ.

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (16)^2 - 4(4)(25)$

$= -144$

$= (-1) \times (12)^2$

$= 12^2 \times i^2$ $i^2 = -1$

$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16 - 12i}{2 \times 4} = -2 - \frac{3}{2}i$

$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16 + 12i}{2 \times 4} = -2 + \frac{3}{2}i$

مجموعة الحل $= \{-2 - \frac{3}{2}i, -2 + \frac{3}{2}i\}$

حاول أن تحل

4 أوجد مجموعة حل المعادلة: $z^2 - 2z + 2 = 0$ في C.

مثال (5)

لتكن المعادلة: $z^2 + z + 1 = 0$

a بدون حل المعادلة: أثبت أن العدد المركب $z_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ هو جذر لهذه المعادلة.

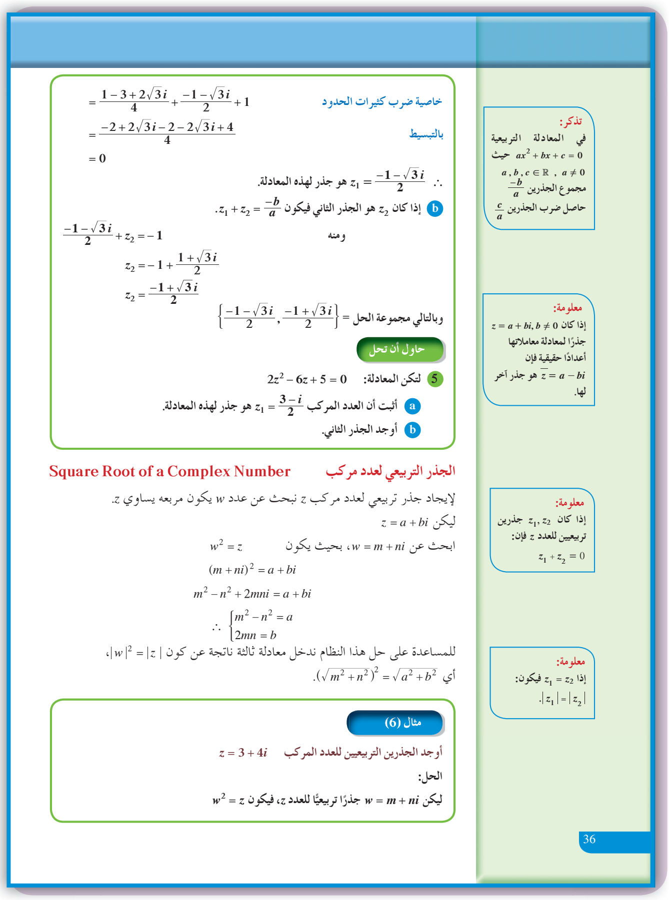
b أوجد الجذر الثاني.

الحل:

a $z_1^2 + z_1 + 1$

بالتعويض $= \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right) + 1$

35



خاصية ضرب كثيرات الحدود $= \frac{1 - 3 + 2\sqrt{3}i}{4} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} + 1$

بالتبسيط $= \frac{-2 + 2\sqrt{3}i - 2 - 2\sqrt{3}i + 4}{4}$

$= 0$

$\therefore$ $z_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ هو جذر لهذه المعادلة.

b إذا كان z_2 هو الجذر الثاني فيكون $z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$.

ومنه $\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} + z_2 = -1$

$z_2 = -1 + \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$

$z_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

وبالتالي مجموعة الحل $= \left\{\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right\}$

حاول أن تحل

5 لتكن المعادلة: $2z^2 - 6z + 5 = 0$

a أثبت أن العدد المركب $z_1 = \frac{3 - i}{2}$ هو جذر لهذه المعادلة.

b أوجد الجذر الثاني.

الجذر التربيعي لعدد مركب Square Root of a Complex Number

لإيجاد جذر تربيعي لعدد مركب z نبحث عن عدد w يكون مربعه يساوي z.

ليكن $z = a + bi$

ابحث عن $w = m + ni$، بحيث يكون $w^2 = z$

$(m + ni)^2 = a + bi$

$m^2 - n^2 + 2mni = a + bi$

$\therefore \begin{cases} m^2 - n^2 = a \\ 2mn = b \end{cases}$

للمساعدة على حل هذا النظام ندخل معادلة ثالثة ناتجة عن كون $|w|^2 = |z|$، أي $(\sqrt{m^2 + n^2})^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$.

مثال (6)

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 3 + 4i$

الحل:

ليكن $w = m + ni$ جذرًا تربيعيًا للعدد z، فيكون $w^2 = z$

تذكر: في المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a, b, c \in \mathbb{R}$ ، $a \neq 0$ مجموع الجذرين $\frac{-b}{a}$ حاصل ضرب الجذرين $\frac{c}{a}$

معلومة: إذا كان $z = a + bi, b \neq 0$ جذرًا لمعادلة معاملاتها أعدادًا حقيقية فإن $\overline{z} = a - bi$ هو جذر آخر لها.

معلومة: إذا كان z_1, z_2 جذرين تربيعيين للعدد z فإن: $z_1 + z_2 = 0$

معلومة: إذا كان $z_1 = z_2$ فيكون: $|z_1| = |z_2|$.

36

8 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

1 **(a)** $x = 2i \;,\; x = -2i$

(b) $x = \sqrt{-k}\, i \;,\; x = -\sqrt{-k}\, i$

2 **(a)** $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$

لا توجد حلول حقيقية للمعادلة.

(b) $x^2 - 2x + 1 - 1 + 5$

$= (x-1)^2 + 4$

(c) $(x-1)^2 + 4 = 0$

$(x-1)^2 = 4i^2$

$x = 1 - 2i \;,\; x = 1 + 2i$

3 $z^2 + 4z + 4 - 4 + 13 = 0$

$(z+2)^2 = 9i^2$

$z = -2 - 3i \;,\; z = -2 + 3i$

«حاول أن تحل»

1 $\left\{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right\}$

2 $z = x + yi \;,\; \overline{z} = x - yi$

ومنه: $x = -1$

$y = -\frac{1}{3}$

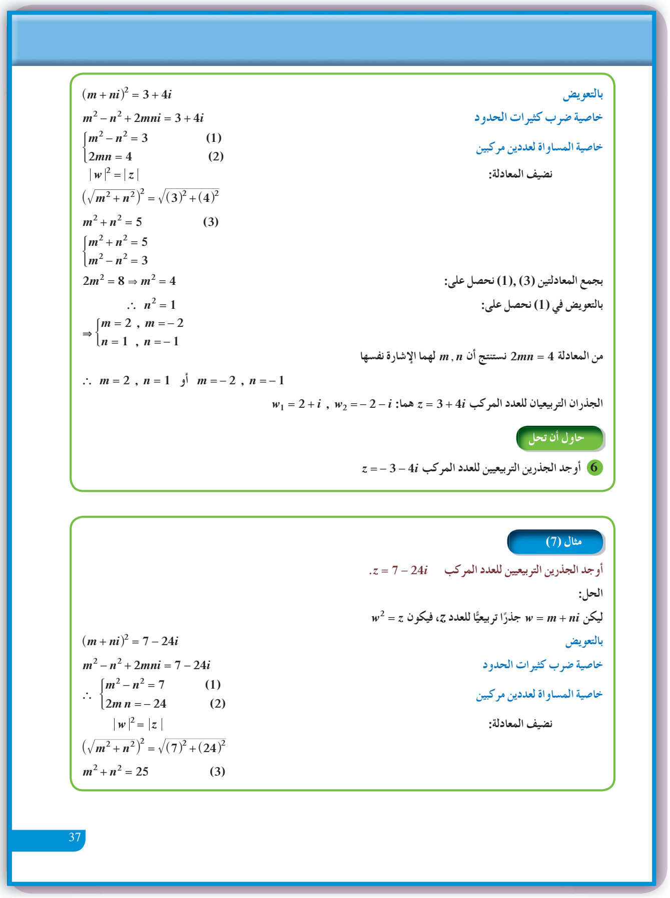
مجموعة الحل = $\left\{-1 - \frac{1}{3}i\right\}$

3 **(a)** $x^2 = -16 = 16i^2 \;,\; \{4i \;,\; -4i\}$

(b) $x^2 = -30 = 30i^2 \;,\; \{\sqrt{30}\, i \;,\; -\sqrt{30}\, i\}$

(c) $x^2 = \frac{-1}{4} = \frac{1}{4}i^2 \;,\; \left\{\frac{1}{2}i \;,\; -\frac{1}{2}i\right\}$

4 $(z-1)^2 = i^2 \;,\; \{1 + i \;,\; 1 - i\}$



بالتعويض $(m+ni)^2 = 3 + 4i$

خاصية ضرب كثيرات الحدود $m^2 - n^2 + 2mni = 3 + 4i$

خاصية المساواة لعددين مركبين $\begin{cases} m^2 - n^2 = 3 & (1) \\ 2mn = 4 & (2) \end{cases}$

نضيف المعادلة: $|w|^2 = |z|$

$\left(\sqrt{m^2+n^2}\right)^2 = \sqrt{(3)^2 + (4)^2}$

$m^2 + n^2 = 5 \qquad (3)$

$\begin{cases} m^2 + n^2 = 5 \\ m^2 - n^2 = 3 \end{cases}$

بجمع المعادلتين (3) ,(1) نحصل على: $2m^2 = 8 \Rightarrow m^2 = 4$

بالتعويض في (1) نحصل على: $\therefore\; n^2 = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} m = 2 \;,\; m = -2 \\ n = 1 \;,\; n = -1 \end{cases}$

من المعادلة $2mn = 4$ نستنتج أن m , n لهما الإشارة نفسها

$\therefore\; m = 2 \;,\; n = 1$ أو $m = -2 \;,\; n = -1$

الجذران التربيعيان للعدد المركب $z = 3 + 4i$ هما: $w_1 = 2 + i \;,\; w_2 = -2 - i$

حاول أن تحل

6 أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = -3 - 4i$

مثال (7)

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 7 - 24i$.

الحل:

ليكن $w = m + ni$ جذرًا تربيعيًّا للعدد z، فيكون $w^2 = z$

بالتعويض $(m+ni)^2 = 7 - 24i$

خاصية ضرب كثيرات الحدود $m^2 - n^2 + 2mni = 7 - 24i$

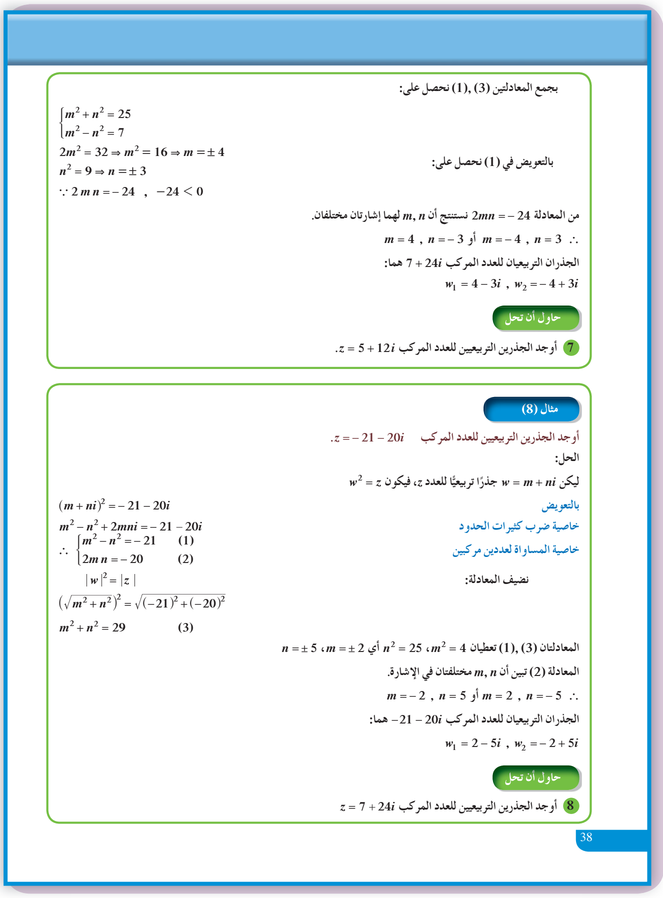
خاصية المساواة لعددين مركبين $\therefore \begin{cases} m^2 - n^2 = 7 & (1) \\ 2mn = -24 & (2) \end{cases}$

نضيف المعادلة: $|w|^2 = |z|$

$\left(\sqrt{m^2+n^2}\right)^2 = \sqrt{(7)^2 + (24)^2}$

$m^2 + n^2 = 25 \qquad (3)$

37


بجمع المعادلتين (3) ,(1) نحصل على:

$$\begin{cases} m^2+n^2=25 \\ m^2-n^2=7 \end{cases}$$

$2m^2=32 \Rightarrow m^2=16 \Rightarrow m=\pm 4$

بالتعويض في (1) نحصل على:

$n^2=9 \Rightarrow n=\pm 3$

$\because 2mn=-24 \quad , \quad -24<0$

من المعادلة $2mn=-24$ نستنتج أن m, n لهما إشارتان مختلفان.

$\therefore \; n=3 \; , \; m=-4$ أو $n=-3 \; , \; m=4$

الجذران التربيعيان للعدد المركب $7+24i$ هما:

$w_1=4-3i \; , \; w_2=-4+3i$

حاول أن تحل

7 أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z=5+12i$.

مثال (8)

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z=-21-20i$.

الحل:

ليكن $w=m+ni$ جذرًا تربيعيًّا للعدد z، فيكون $w^2=z$

بالتعويض $(m+ni)^2=-21-20i$

خاصية ضرب كثيرات الحدود $m^2-n^2+2mni=-21-20i$

خاصية المساواة لعددين مركبين

$$\therefore \begin{cases} m^2-n^2=-21 & (1) \\ 2mn=-20 & (2) \end{cases}$$

نضيف المعادلة:

$|w|^2=|z|$

$\left(\sqrt{m^2+n^2}\right)^2=\sqrt{(-21)^2+(-20)^2}$

$m^2+n^2=29 \qquad (3)$

المعادلتان (3) ,(1) تعطيان $m^2=4$، $n^2=25$ أي $m=\pm 2$، $n=\pm 5$

المعادلة (2) تبين أن m, n مختلفتان في الإشارة.

$\therefore \; n=-5 \; , \; m=2$ أو $n=5 \; , \; m=-2$

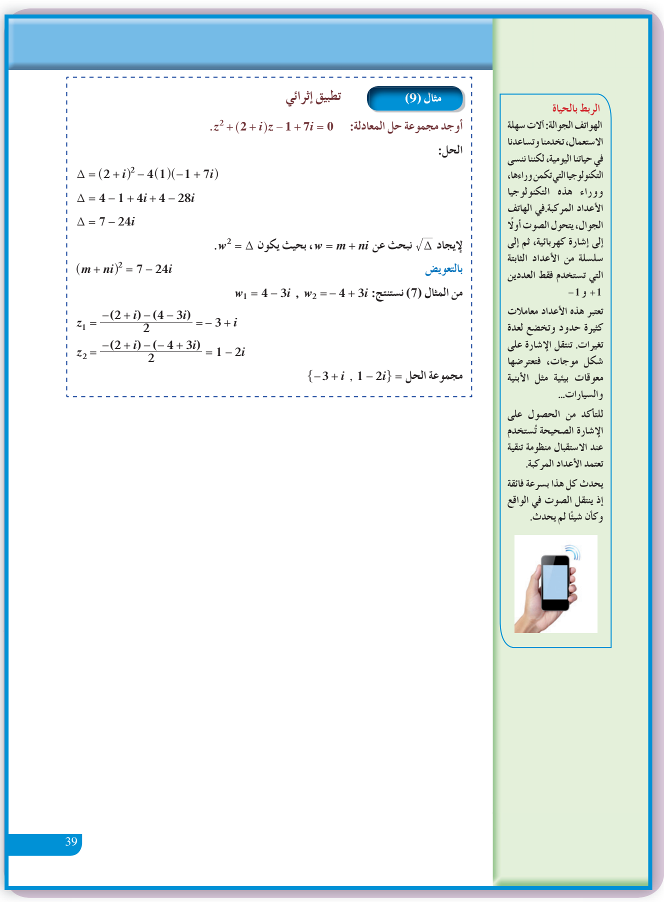
الجذران التربيعيان للعدد المركب $-21-20i$ هما:

$w_1=2-5i \; , \; w_2=-2+5i$

حاول أن تحل

8 أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z=7+24i$

38


مثال (9) تطبيق إثرائي

أوجد مجموعة حل المعادلة: $z^2+(2+i)z-1+7i=0$.

الحل:

$\Delta=(2+i)^2-4(1)(-1+7i)$

$\Delta=4-1+4i+4-28i$

$\Delta=7-24i$

لإيجاد $\sqrt{\Delta}$ نبحث عن $w=m+ni$، بحيث يكون $w^2=\Delta$.

بالتعويض $(m+ni)^2=7-24i$

من المثال (7) نستنتج: $w_1=4-3i \; , \; w_2=-4+3i$

$z_1=\dfrac{-(2+i)-(4-3i)}{2}=-3+i$

$z_2=\dfrac{-(2+i)-(-4+3i)}{2}=1-2i$

مجموعة الحل $=\{-3+i \; , \; 1-2i\}$

الربط بالحياة

الهواتف الجوالة: آلات سهلة الاستعمال، تخدمنا وتساعدنا في حياتنا اليومية، لكننا ننسى التكنولوجيا التي تكمن وراءها، ووراء هذه التكنولوجيا الأعداد المركبة. في الهاتف الجوال، يتحول الصوت أولًا إلى إشارة كهربائية، ثم إلى سلسلة من الأعداد الثابتة التي تستخدم فقط العددين $+1$ و -1

تعتبر هذه الأعداد معاملات كثيرة حدود وتخضع لعدة تغيرات. تنتقل الإشارة على شكل موجات، فتعترضها معوقات بيئية مثل الأبنية والسيارات...

للتأكد من الحصول على الإشارة الصحيحة تُستخدم عند الاستقبال منظومة تنقية تعتمد الأعداد المركبة.

يحدث كل هذا بسرعة فائقة إذ ينتقل الصوت في الواقع وكأن شيئًا لم يحدث.

39

5 **(a)** $2\left(\frac{3-i}{2}\right)^2-6\left(\frac{3-i}{2}\right)+5$

$=4-3i-9+3i+5=0$

$\therefore$ $\frac{3-i}{2}$ هو أحد جذري المعادلة.

(b) $z_1 z_2=\frac{c}{a} \; ; \; \frac{3-i}{2}\times z_2=\frac{5}{2} \Longrightarrow z_2=\frac{5}{3-i}$

$\Longrightarrow z_2=\frac{5}{3-i}\times\frac{3+i}{3+i}=\frac{3+i}{2}$

حل آخر:

الجذر الثاني هو مرافق الجذر الأول وهو: $\frac{3+i}{2}$

6 $\begin{cases} m^2-n^2=-3 \\ 2mn=-4 \\ m^2+n^2=5 \end{cases}$

$m^2=1 \; , \; m=1 \; , \; m=-1$

$n^2=4 \; , \; n=2 \; , \; n=-2$

$w_1=1-2i \; , \; w_2=-1+2i$

7 $\begin{cases} m^2-n^2=5 \\ 2mn=12 \\ m^2+n^2=\sqrt{25+144}=13 \end{cases}$

$m^2=9 \; , \; m=3 \; , \; m=-3$

$n^2=4 \; , \; n=2 \; , \; n=-2$

$w_1=3+2i \; , \; w_2=-3-2i$

8 $\begin{cases} m^2-n^2=7 \\ 2mn=24 \\ m^2+n^2=\sqrt{7^2+24^2}=25 \end{cases}$

$m^2=16 \; , \; m=4 \; , \; m=-4$

$n^2=9 \; , \; n=3 \; , \; n=-3$

$w_1=4+3i \; , \; w_2=-4-3i$

المرشد لحل المسائل

إجابة «مسألة إضافية»

نكتب المعادلة:

$$z^3-8+2(\sqrt{2}-1)z^2-4(\sqrt{2}-1)z=0$$

$$(z-2)(z^2+2z+4)+2(\sqrt{2}-1)z(z-2)=0$$

$$(z-2)(z^2+2z+4+2\sqrt{2}z-2z)=0$$

$$(z-2)(z^2+2\sqrt{2}z+4)=0$$

ومنه $z-2=0$ أي $z=2$ وهو جذر حقيقي.

والمعادلة الثانية:

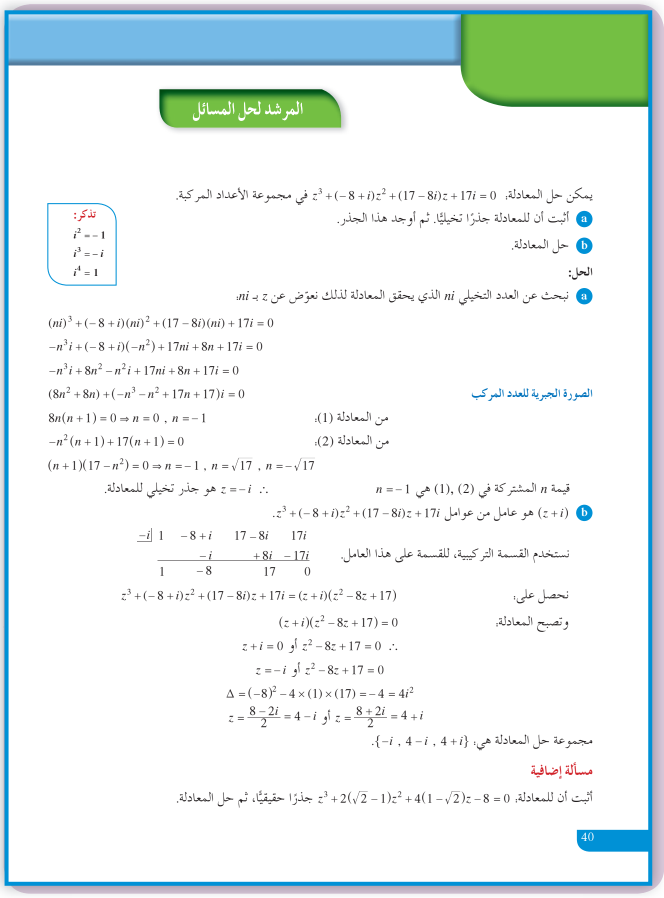
$$z^2+2\sqrt{2}z+4=0$$

$$\Delta=8-16=-8=8i^2$$

$$z_1=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$$

$$z_2=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$$

مجموعة الحل: $\{2,-\sqrt{2}-\sqrt{2}i\ ,\ -\sqrt{2}+\sqrt{2}i\}$



المرشد لحل المسائل

يمكن حل المعادلة: $z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=0$ في مجموعة الأعداد المركبة.

a أثبت أن للمعادلة جذرًا تخيليًا. ثم أوجد هذا الجذر.

b حل المعادلة.

تذكر:
$i^2=-1$
$i^3=-i$
$i^4=1$

الحل:

a نبحث عن العدد التخيلي ni الذي يحقق المعادلة لذلك نعوّض عن z بـ ni:

$(ni)^3+(-8+i)(ni)^2+(17-8i)(ni)+17i=0$

$-n^3i+(-8+i)(-n^2)+17ni+8n+17i=0$

$-n^3i+8n^2-n^2i+17ni+8n+17i=0$

الصورة الجبرية للعدد المركب

$(8n^2+8n)+(-n^3-n^2+17n+17)i=0$

من المعادلة (1): $8n(n+1)=0 \Rightarrow n=0\ ,\ n=-1$

من المعادلة (2): $-n^2(n+1)+17(n+1)=0$

$(n+1)(17-n^2)=0 \Rightarrow n=-1\ ,\ n=\sqrt{17}\ ,\ n=-\sqrt{17}$

قيمة n المشتركة في (2) ,(1) هي $n=-1$ $\therefore$ $z=-i$ هو جذر تخيلي للمعادلة.

b $(z+i)$ هو عامل من عوامل $z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i$.

نستخدم القسمة التركيبية، للقسمة على هذا العامل.

$$\begin{array}{r|rrrr} -i & 1 & -8+i & 17-8i & 17i \\ & & -i & +8i & -17i \\ \hline & 1 & -8 & 17 & 0 \end{array}$$

نحصل على: $z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=(z+i)(z^2-8z+17)$

وتصبح المعادلة: $(z+i)(z^2-8z+17)=0$

$\therefore$ $z+i=0$ أو $z^2-8z+17=0$

$z=-i$ أو $z^2-8z+17=0$

$\Delta=(-8)^2-4\times(1)\times(17)=-4=4i^2$

$z=\frac{8-2i}{2}=4-i$ أو $z=\frac{8+2i}{2}=4+i$

مجموعة حل المعادلة هي: $\{-i\ ,\ 4-i\ ,\ 4+i\}$.

مسألة إضافية

أثبت أن للمعادلة: $z^3+2(\sqrt{2}-1)z^2+4(1-\sqrt{2})z-8=0$ جذرًا حقيقيًا، ثم حل المعادلة.

40

مخطط تنظيمي للوحدة السابعة

الأعداد المركبة
حل معادلات
الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب
الأعداد المركبة
الجذر التربيعي لعدد مركب
حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد في $\mathbb{C}$
حل معادلات من الدرجة الأولى في $\mathbb{C}$
التحويل
الصورة المثلثية
الإحداثيات القطبية
العمليات على الأعداد المركبة
تساوي عددين مركبين
الأعداد التخيلية
التمثيل البياني للعدد المركب

ملخص

- العدد المركب هو عدد على الصورة $a+bi$ حيث a, b عددان حقيقيان.
- لأي عدد حقيقي موجب a، $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$
- الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=a+bi$ حيث a, b عددان حقيقيان ويسمى a الجزء الحقيقي وb الجزء التخيلي.
- يكون عددان مركبان متساويان إذا وفقط إذا تساوى جزءاهما الحقيقيان وتساوى جزءاهما التخيليان.
- إذا ساوى عدد مركب الصفر فإن جزءه الحقيقي يساوي الصفر وجزءه التخيلي يساوي الصفر أيضًا.
- يمكن تمثيل العدد المركب $z=a+bi$ بالزوج المرتب (a, b) وتعرف بالصورة الديكارتية للعدد المركب.
- لجمع (أو طرح) أعداد مركبة نجمع (أو نطرح) الأجزاء الحقيقية معًا والأعداد التخيلية معًا كل منهما بشكل منفصل عن الآخر.
- المعكوس الجمعي للعدد المركب $z=a+bi$ هو العدد المركب $-z=-a-bi$
- إذا كان $z_1=a_1+b_1i\ ,\ z_2=a_2+b_2i$ فإن $z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$
- إذا كان p عدد كلي: $i^{4p}=1\ ,\ i^{4p+1}=i\ ,\ i^{4p+2}=-1\ ,\ i^{4p+3}=-i$
- مرافق العدد المركب $z=a+bi$ هو العدد المركب $\bar{z}=a-bi$
- خواص المرافق:
  - $z\cdot\bar{z}=a^2+b^2$ • $z-\bar{z}=2bi$ • $z+\bar{z}=2a$
  - $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\ ,\ z_2\neq 0$ • $\overline{(\bar{z}_1)}=z_1$ • $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$ • $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$
- لقسمة عدد مركب z_1 على عدد مركب z_2 غير صفري نكتبهما على شكل كسر على الصورة $\frac{z_1}{z_2}$، نبسط الكسر ثم نضرب البسط والمقام في مرافق مقام الكسر.
- القيمة المطلقة للعدد المركب $z=a+bi$ هي المسافة بين الصورة الديكارتية (a, b) لهذا العدد ونقطة الأصل $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$
- الإحداثيات القطبية للنقطة M هي الزوج المرتب (r,θ) حيث $r=OM$، θ قياس الزاوية الموجهة في الوضع القياسي.
- الصورة المثلثية للعدد المركب $z=a+bi$ هي $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$، حيث $r=\sqrt{a^2+b^2}$
  $\sin\theta=\frac{y}{r}\ ,\ \cos\theta=\frac{x}{r}\ ,\ \tan\theta=\frac{y}{x}$

41

اختبار الوحدة السابعة

في التمارين (4—1)، بسّط كلًّا من التعابير التالية:

(1) $4\sqrt{-9}-2$ **(2)** $(4-i)+(5-9i)$

(3) $(-3+2i)-(6+i)$ **(4)** $(2+3i)(8-5i)$

(5) أوجد المعكوس الجمعي والمعكوس الضربي للعدد $3-7i$

(6) أوجد القيمة المطلقة للعدد $7-2i$

(7) أوجد كلًّا مما يلي:

(a) $-3i^{77}$ **(b)** i^{50} **(c)** $(-2+3i)^2$

(8) أوجد مجموعة حلّ المعادلة: $2x^2+10=0$

(9) اكتب الكسر $\frac{1+3i}{3+2i}$ في الصورة الجبرية، ثم حوّلها إلى صورة المثلثية.

(10) أوجد مجموعة حل المعادلة: $\frac{z+1}{z-1}=2i$

(11) أوجد مرافق العدد $\frac{3-i}{1+i}$

(12) حل المعادلة: $2z^2-6z+5=0$

(13) اكتب الأعداد المركبة التالية في صورة المثلثية:

(a) $\frac{1}{2}$ **(b)** $-3i$ **(c)** $2\sqrt{3}+6i$

(14) اكتب العدد $-3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ في الصورة المثلثية مستخدمًا السعة الأساسية.

(15) اكتب العدد $\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ في الصورة الجبرية.

(16) أوجد الجذرين التربيعيين للعدد $-8+6i$

(17) **(a)** أثبت أن $-2+\frac{3}{2}i$ هو أحد جذري المعادلة: $4z^2+16z+25=0$

(b) أوجد الجذر الآخر.

تمارين إثرائية

(1) أثبت أن النقاط الممثلة للأعداد:

i، $-i$، $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$، $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$، $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ تنتمي إلى دائرة واحدة.

(2) اكتب العدد $\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$ في صورة المثلثية.

(3) أثبت أن النقاط A, B, C, D الممثلة للأعداد المركبة $z_A=1$، $z_B=1\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$،

$z_C=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$، $z_D=2$ تشكل معينًا.

(4) اكتب العدد $z=\sin\alpha-i\cos\alpha$ في الصورة المثلثية مستخدمًا السعة الأساسية.

(5) أثبت أن $(1+i)^8$ هو عدد حقيقي موجب.

(6) إذا كان $|z|=1$، أثبت أن $\overline{z}=\frac{1}{z}$

(7) **(a)** أثبت أن $1+i$ هو أحد عوامل $f(z)=z^3+(-2+3i)z^2+(13-i)z-6-10i$

(b) استخدم القسمة التركيبية لتوجد ناتج قسمة $f(z)$ على $z=1+i$

(8) أوجد مجموعة النقاط M الممثلة للعدد المركب z بحيث تكون سعته الأساسية تساوي $\frac{\pi}{3}$

(9) **(a)** أثبت أن: $1+i$، $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ هما جذران للمعادلة: $z^4-z^3+z^2+2=0$ (1)

(b) أوجد مجموعة حل المعادلة (1).

(c) أثبت أن $f(z)=z^4-z^3-z^2+2$ يمكن أن تكتب على شكل كثيرتي حدود من الدرجة الثانية مضروبَتين في بعضهما بعضًا.

(10) **(a)** أثبت أن -1 هو أحد أصفار $f(z)=z^2+2(3-i)z+5-2i$

(b) أوجد الصفر الثاني.

الوحدة الثامنة: حساب المثلثات Trigonometry

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

1 – 8: التمثيل البياني للدوال المثلثية (الجيب ، جيب التمام ، الظل)

جزء 1: الدوال الجيبية.

جزء 2: التمثيل البياني لدالة الجيب.

جزء 3: التمثيل البياني لدالة جيب التمام.

جزء 4: التمثيل البياني لدالة الظل.

2 – 8: التحويلات الهندسية للدوال الجيبية

جزء 1: التحويلات على الدوال الجيبية.

3 – 8: قانون الجيب

جزء 1: تعريف قانون الجيب.

جزء 2: استخدام قانون الجيب في حل المثلث.

جزء 3: تحديد عدد المثلثات والحالة الغامضة.

4 – 8: قانون جيب التمام

جزء 1: تعريف قانون جيب التمام.

جزء 2: استخدام قانون جيب التمام في حل المثلث.

5 – 8: مساحة المثلث

جزء 1: إيجاد مساحة مثلث وقاعدة هيرون.

مقدمة الوحدة

الاحتباس الحراري والتصحر عنوانان بدأ كل واحد منا يسمعهما يوميًّا إذ يحملان في طياتهما مخاوف وأسئلة محيرة تتناول كل نواحي الحياة وديمومتها.

إن هذين العنوانين هما نتيجة لارتفاع درجة الحرارة في بيئة يتغير فيها سيلان الطاقة الحرارية منها وإليها.

وقد تنبه العلماء إلى مخاطر هذه الظاهرة على كل نواحي الحياة على الأرض، وعُقدت المؤتمرات وأُخذت قرارات وتوصيات، ولكن حتى الآن بقيت الأمور على حالها.

والمعروف أن إنتاج المصانع لمزيد من الغازات السامة المسببة للاحتباس الحراري على سطح الأرض يؤدي إلى ارتفاع درجة الحرارة. ولمعرفة أهمية هذه الظاهرة وتأثيرها على الحياة، نذكر أنه عندما انخفضت درجة الحرارة نصف درجة مئوية عن معدلها العام لمدة قرنين منذ سنة 1570 ميلادية، تعرضت أوروبا لموجة جليد جعلت الفلاحين ينزحون عن أراضيهم ويعانون من المجاعة لقلة المحاصيل الزراعية. ومن جهة ثانية، إذا ازدادت درجة الحرارة زيادة طفيفة عن معدلها العام فستطول فترة الدفء على سطح الأرض وفي الوقت نفسه ستتقلص فترات الصقيع والبرد، مما يؤدي إلى نمو النباتات بسرعة أكبر وتضاعف المحاصيل وانتشار الحشرات المعمرة، وهذا ما يشكل عدم توازن بين عناصر المخلوقات المنتشرة ومكوناتها على سطح كوكبنا.

والآن، لا بد من الإشارة إلى العلاقة بين الاحتباس الحراري وغاز الأوزون، فبعض الحسابات تبيّن زيادة في الاحتباس الحراري، تتبعها زيادة في تحلل الأوزون، وإن انبعاث بعض الغازات التي تزيد من تحلل غاز الأوزون يؤدي إلى زيادة اتساع ثقب الأوزون، ويعمل أيضًا على رفع درجة حرارة سطح الأرض.

- الظواهر المرتبطة بالاحتباس الحراري حتى الآن:
  - ارتفاع مستوى مياه البحار من 9 إلى 21 m خلال القرن الماضي.
  - ارتفاع درجة الحرارة على سطح الأرض ما بين 0.4 و0.8 درجة مئوية خلال القرن الماضي بحسب تقرير اللجنة الدولية لتغير المناخ التابعة للأمم المتحدة.

الوحدة الثامنة

حساب المثلثات

Trigonometry

مشروع الوحدة: تغير درجات الحرارة

1 مقدمة المشروع: تتغيّر درجات الحرارة خلال أشهر السنة وعادة ما تكون متقاربة من سنة إلى أخرى (قبل تأثير الاحتباس الحراري). في بعض البلدان يكون التغيّر واضحًا ومداه كبير وتكون الفصول الأربعة متمايزة.

2 الهدف: وضع تمثيل بياني لدالة جيبية تمثل تغيّر درجات الحرارة خلال أشهر السنة في منطقة ما ومقارنتها بتغيّر درجات الحرارة في دولة الكويت.

3 اللوازم: ورق رسم بياني، آلة حاسبة مبرمجة، حاسوب.

4 أسئلة حول التطبيق:

يبيّن الجدول المقابل معدل درجات الحرارة المسجلة في إحدى المناطق خلال أشهر السنة.

الشهر	معدل درجة الحرارة
يناير	11
فبراير	13
مارس	17
أبريل	19
مايو	25
يونيو	30
يوليو	32
أغسطس	32
سبتمبر	29
أكتوبر	22
نوفمبر	15
ديسمبر	11

a على ورقة رسم بياني ضع مخطط انتشار للبيانات. يبيّن محور السينات أشهر السنة (يناير = 1، فبراير = 2، ...) محور الصادات معدل درجات الحرارة.

b يمكن تمثيل البيانات بدالة جيبية على الشكل: $y = a\sin(wx - \phi) + b$،

حيث: a: السعة $= \dfrac{\text{أعلى درجة حرارة} - \text{أدنى درجة حرارة}}{2}$

b: الإزاحة الرأسية $= \dfrac{\text{أعلى درجة حرارة} + \text{أدنى درجة حرارة}}{2}$

w: الزمن الدوري $= \dfrac{2\pi}{\text{عدد الأشهر}}$

$\dfrac{\phi}{\omega}$: الإزاحة الأفقية لإيجاد قيمة ϕ يمكن استخدام الزوج المرتب $(1, 11)$ الذي يمثّل معدل درجة الحرارة في شهر يناير والتعويض في المعادلة.

c ارسم بيان الدالة التي حصلت عليها على الورقة حيث مخطط الانتشار.

d ابحث في المراجع عن درجات الحرارة المسجّلة خلال أشهر إحدى السنوات في دولة الكويت أوجد الدالة الجيبيّة المناظرة ومثّل بيانها.

5 التقرير: ضع تقريرًا مفصّلًا يبيّن مراحل عملك على المشروع. ضمّن تقريرك التمثيلات البيانية المطلوبة. اكتب فقرة لا تتعدى 25 كلمة تقارن بين تغيّر درجات الحرارة في الكويت وفي الجدول.

دروس الوحدة

التمثيل البياني للدوال المثلثية (الجيب، جيب التمام، الظل)	التحويلات الهندسية للدوال الجيبية	قانون الجيب	قانون جيب التمام	مساحة المثلث
8-1	8-2	8-3	8-4	8-5

42

  - ذوبان الجليد في المحيطين المتجمد الشمالي والمتجمد الجنوبي وقمم جبال أستراليا.
  - تزايد الدفء في مواسم الشتاء خلال العقود الأخيرة وتناقص فتراته بحيث بدأ الربيع يحل باكرًا.
  - تغير مجاري التيارات المائية داخل المحيطات ما أثّر على التوازن الحراري، وهذا ما دفع بالعلماء إلى توقع حدوث أعاصير في أماكن لم تكن تحدث فيها من قبل.
- الظواهر المتوقعة نتيجة الاحتباس الحراري:
  - ارتفاع مستوى سطح البحر نتيجة لاستمرار ذوبان الجليد.
  - غرق الجزر المنخفضة والمدن الساحلية.
  - ازدياد الفيضانات.
  - حدوث جفاف في مساحات واسعة من الأرض وتصحرها.
  - زيادة في عدد العواصف والأعاصير وشدتها.
  - انتشار الأمراض المعدية.
  - انقراض العديد من الكائنات الحية.
  - حدوث كوارث زراعية وفقدان بعض المحاصيل.
  - زيادة عدد الحرائق في الغابات.

مشروع الوحدة

يعالج هذا المشروع تغير درجات الحرارة في منطقة معينة من سطح الأرض، وكيفية استخدام الدوال الجيبية في التعبير عن هذا التغير.

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

4 **(a)** تحقق من عمل الطلاب.

(b) $a = \dfrac{32 - 11}{2} = 10.5$

$b = \dfrac{32 + 11}{2} = 21.5$

$\omega = \dfrac{2\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6}$

لإيجاد قيمة ϕ:

$$11 = 10.5 \sin\left(\frac{\pi}{6} \times 1 - \phi\right) + 21.5$$

نحصل على $\phi = -\dfrac{4\pi}{3}$

(c) تحقق من رسومات الطلاب.

(d) تحقق من عمل الطلاب.

التقرير

يجب أن يتضمن التقرير عرضًا مفصلًا يبيّن مراحل العمل في المشروع، إضافة إلى التمثيلات البيانية والمقارنة بين تغير درجات الحرارة في دولة الكويت.

قدّم شرحًا عن هذا التقرير إلى زملائك في غرفة الصف.

ناقش معهم الحسابات والنتائج كافة التي توصلت إليها.

أعد النظر في بعضها إذا رأيت ذلك ضروريًّا.

الوحدة الثامنة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت تمثيل بعض الدوال بيانيًّا.
- تعلمت إيجاد معادلة الدائرة.
- تعلمت الأنماط والدوال الدورية.
- تعلمت قياس الزاوية بالدرجات وبالراديان.

ماذا سوف تتعلم؟

- التمثيل البياني للدوال: الجيب، جيب التمام، الظل.
- التحويلات على الدوال الجيبية.
- خصائص الدوال الجيبية.
- قانون الجيب واستخدامه في حل مسائل متنوعة.
- استخدام قانون جيب التمام في حل المثلث.
- إيجاد مساحة المثلث بدلالة قياسات زواياه وأطوال أضلاعه.

المصطلحات الأساسية

دالة الجيب – دالة جيب التمام – قيمة عظمى – قيمة صغرى – التمدد الرأسي – الانكماش الرأسي – التمدد الأفقي – الانكماش الأفقي – سعة الدالة – دالة زوجية – دالة فردية – دورة الدالة – قانون الجيب – قانون جيب التمام – قاعدة هيرون.

أضف إلى معلوماتك

علم المثلثات Trigonometry مأخوذة من اللغة اليونانية القديمة.

Trigone: مثلث، Metron: قياس.

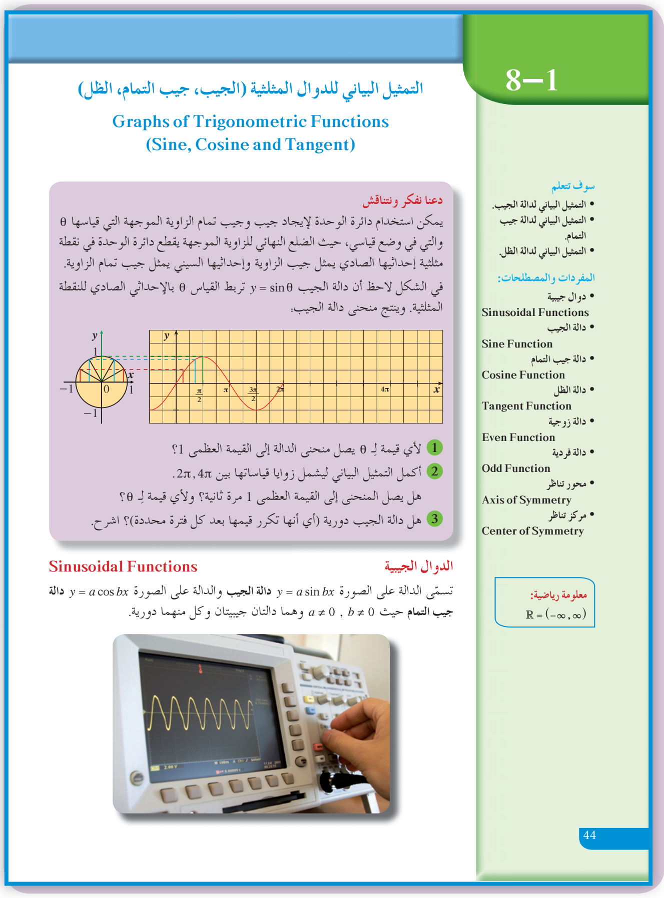
يعتبر البابليون أول من درسوا علم المثلثات من خلال عملهم في علم الفلك ومحاولتهم قياس المسافات بين الكواكب ومن هنا يأتي النظام الستيني في قياس الزوايا $(1^\circ = 60' \,,\, 1' = 60'')$.

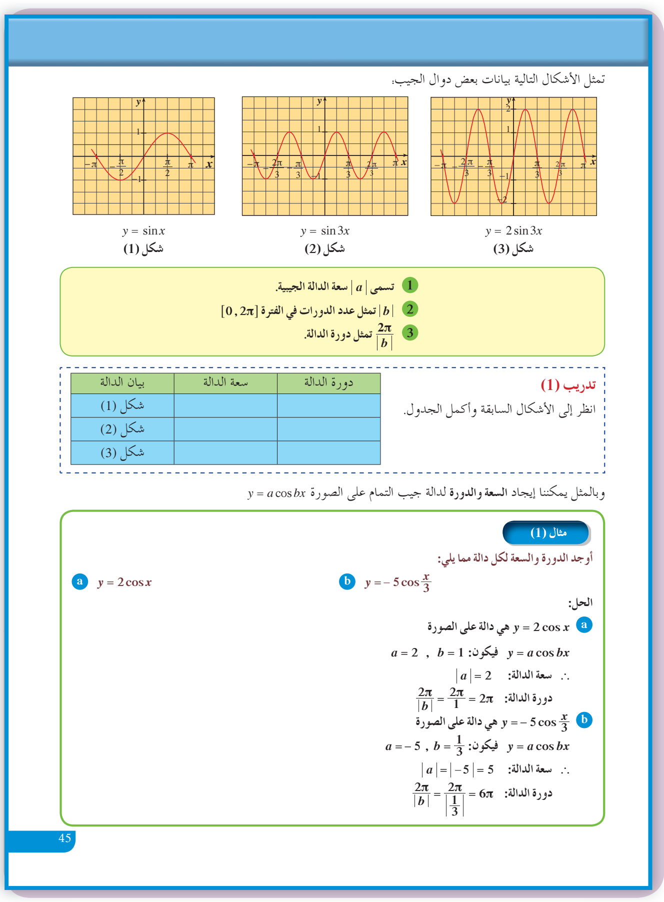
طوّر العلماء المسلمون علم المثلثات، نذكر منهم الخوارزمي وأبو الوفا، وقد استخدموا جداول مثلثية للجيب والظل على فترات 0.25° وبدقة تصل إلى جزء من مئة من المليون.

43

سلّم التقييم	
4	الحسابات صحيحة بالكامل – التمثيلات البيانية دقيقة – التقرير مفصل ومنظم.
3	معظم الحسابات صحيحة – التمثيلات البيانية صحيحة – معظم محتويات التقرير مفصلة ومنظمة.
2	بعض الحسابات صحيحة – التمثيلات البيانية بحاجة إلى إعادة نظر – محتويات التقرير غير مفصلة وغير منظمة.
1	معظم عناصر المشروع ناقصة وبحاجة إلى مراجعة.

1–8: التمثيل البياني للدوال المثلثية (الجيب، جيب التمام، الظل)





1 الأهداف

- تمثيل دالة الجيب بيانيًّا.
- تمثيل دالة جيب التمام بيانيًّا.
- تمثيل دالة الظل بيانيًّا.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

دوال جيبية – دالة الجيب – دالة جيب التمام – دالة الظل – دالة زوجية – دالة فردية – محور تناظر – مركز تناظر.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة بيانية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

بسّط التعابير المثلثية التالية:

(a) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(\pi-x)$

(b) $\sin(\pi+x)+\cos(\pi+x)+\sin(-x)$

(c) $\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\tan(-\pi+x)$

5 التدريس

يعتبر التمثيل البياني للدوال المثلثية الأكثر أهمية، لأن الطالب سوف يواجه هذه التمثيلات في مواقف حياتية متنوعة مثل الكهرباء والإلكترونيات... لذا يتوجب التعامل مع هذا الدرس بدقة وروية.

في المثال (1)

هذا المثال هو تطبيق مباشر لمفهومي الدورة والسعة لدوال الجيب وجيب التمام.

في المثال (2)

يتعرف الطالب في هذا المثال على كيفية كتابة معادلة دالة الجيب على الصورة $y = a\sin bx$ بمعلومية a (السعة) والدورة.

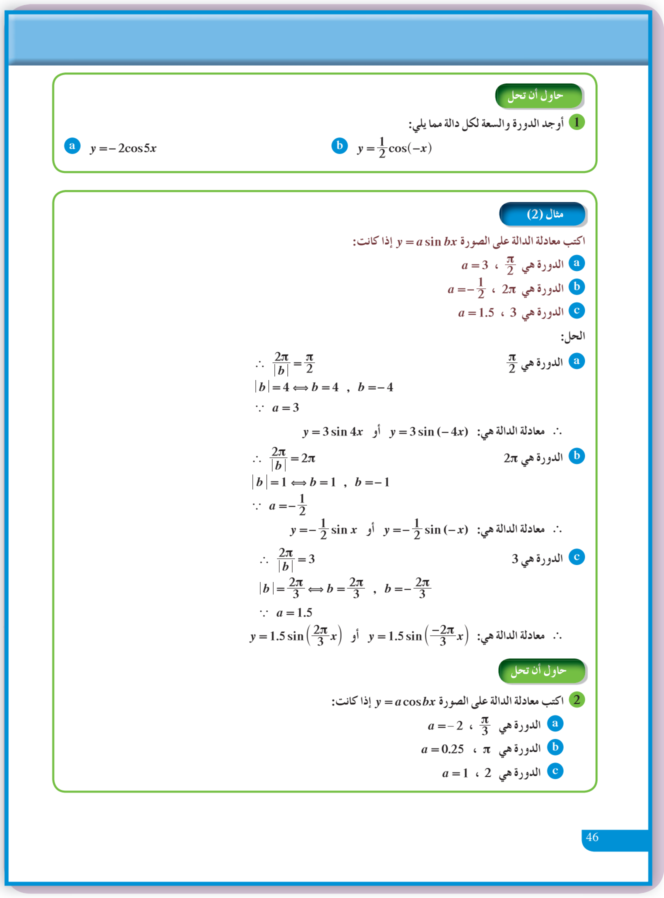
في المثالين (3), (4)

يبيّن هذان المثالان كيفية رسم بيان دالة جيبية بعد إيجاد السعة والدورة. شدّد على أهمية هذه التمارين ودور الجدول في رسم بيان الدالة.

شجّع الطلاب على إيجاد ربع الدورة وتكوين الجدول المرافق حيث الأهمية في الربط مع التمثيل البياني.

في المثال (5)

يوفّر هذا المثال فرصة للطالب كي يتعرف على التمثيل البياني لدالة الظل وطبيعة النقاط غير المعرفة وموقع بيان الدالة مقارنة بالمستقيمات المقاربة (المحاذية).



حاول أن تحل

1 أوجد الدورة والسعة لكل دالة مما يلي:

a $y = -2\cos 5x$ b $y = \frac{1}{2}\cos(-x)$

مثال (2)

اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\sin bx$ إذا كانت:

a الدورة هي $\frac{\pi}{2}$ ، $a = 3$

b الدورة هي 2π ، $a = -\frac{1}{2}$

c الدورة هي 3 ، $a = 1.5$

الحل:

a الدورة هي $\frac{\pi}{2}$

$\therefore \frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2}$

$|b| = 4 \Leftrightarrow b = 4 \ , \ b = -4$

$\because a = 3$

$\therefore$ معادلة الدالة هي: $y = 3\sin(-4x)$ أو $y = 3\sin 4x$

b الدورة هي 2π

$\therefore \frac{2\pi}{|b|} = 2\pi$

$|b| = 1 \Leftrightarrow b = 1 \ , \ b = -1$

$\because a = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ معادلة الدالة هي: $y = -\frac{1}{2}\sin(-x)$ أو $y = -\frac{1}{2}\sin x$

c الدورة هي 3

$\therefore \frac{2\pi}{|b|} = 3$

$|b| = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow b = \frac{2\pi}{3} \ , \ b = -\frac{2\pi}{3}$

$\because a = 1.5$

$\therefore$ معادلة الدالة هي: $y = 1.5\sin\left(\frac{-2\pi}{3}x\right)$ أو $y = 1.5\sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right)$

حاول أن تحل

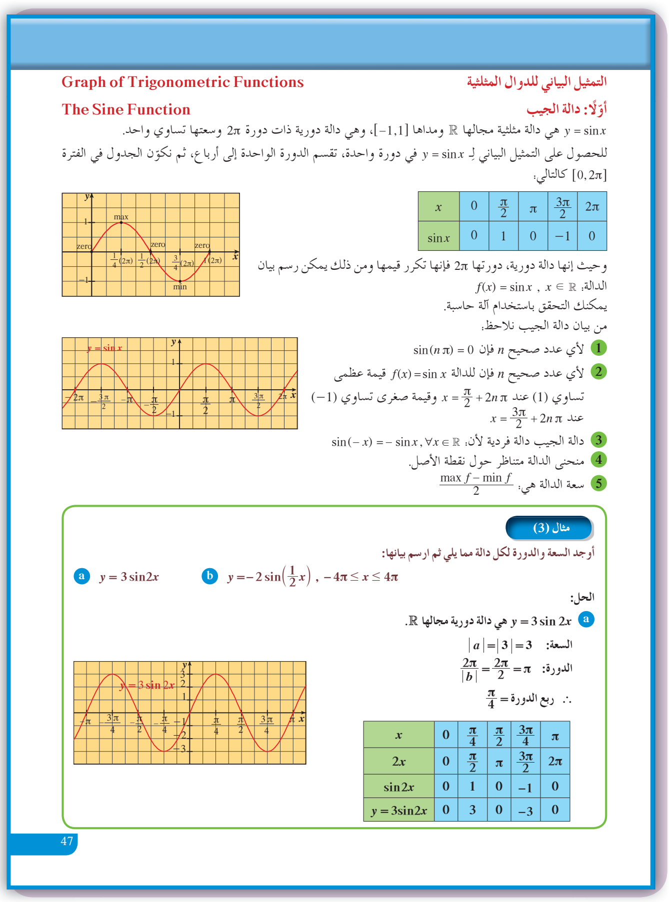
2 اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\cos bx$ إذا كانت:

a الدورة هي $\frac{\pi}{3}$ ، $a = -2$

b الدورة هي π ، $a = 0.25$

c الدورة هي 2 ، $a = 1$

46



التمثيل البياني للدوال المثلثية — Graph of Trigonometric Functions

أوّلًا: دالة الجيب — The Sine Function

$y = \sin x$ هي دالة مثلثية مجالها $\mathbb{R}$ ومداها $[-1,1]$، وهي دالة دورية ذات دورة 2π وسعتها تساوي واحد.

للحصول على التمثيل البياني لِـ $y = \sin x$ في دورة واحدة، تقسم الدورة الواحدة إلى أرباع، ثم نكوّن الجدول في الفترة $[0, 2\pi]$ كالتالي:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0

وحيث إنها دالة دورية، دورتها 2π فإنها تكرر قيمها ومن ذلك يمكن رسم بيان الدالة: $f(x) = \sin x \ , \ x \in \mathbb{R}$

يمكنك التحقق باستخدام آلة حاسبة.

من بيان دالة الجيب نلاحظ:

1 لأي عدد صحيح n فإن $\sin(n\pi) = 0$

2 لأي عدد صحيح n فإن للدالة $f(x) = \sin x$ قيمة عظمى تساوي (1) عند $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ وقيمة صغرى تساوي (-1) عند $x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$

3 دالة الجيب دالة فردية لأن: $\sin(-x) = -\sin x, \forall x \in \mathbb{R}$

4 منحنى الدالة متناظر حول نقطة الأصل.

5 سعة الدالة هي: $\frac{\max f - \min f}{2}$

مثال (3)

أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

a $y = 3\sin 2x$ b $y = -2\sin\left(\frac{1}{2}x\right) \ , \ -4\pi \le x \le 4\pi$

الحل:

a $y = 3\sin 2x$ هي دالة دورية مجالها $\mathbb{R}$.

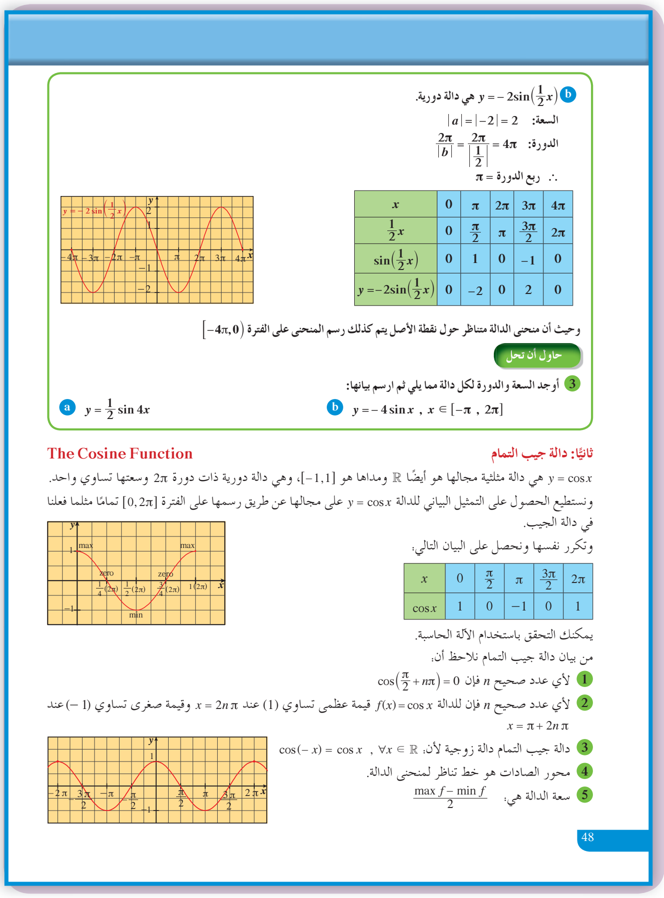
السعة: $|a| = |3| = 3$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$\therefore$ ربع الدورة $= \frac{\pi}{4}$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin 2x$	0	1	0	-1	0
$y = 3\sin 2x$	0	3	0	-3	0

47


ⓑ $y=-2\sin(\frac{1}{2}x)$ هي دالة دورية.
السعة: $|a|=|-2|=2$
الدورة: $\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{|\frac{1}{2}|}=4\pi$
∴ ربع الدورة $=\pi$

x	0	π	2π	3π	4π
$\frac{1}{2}x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin(\frac{1}{2}x)$	0	1	0	-1	0
$y=-2\sin(\frac{1}{2}x)$	0	-2	0	2	0

وحيث أن منحنى الدالة متناظر حول نقطة الأصل يتم كذلك رسم المنحنى على الفترة $[-4\pi, 0]$

حاول أن تحل

③ أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:
ⓐ $y=\frac{1}{2}\sin 4x$
ⓑ $y=-4\sin x\ ,\ x\in[-\pi\ ,\ 2\pi]$

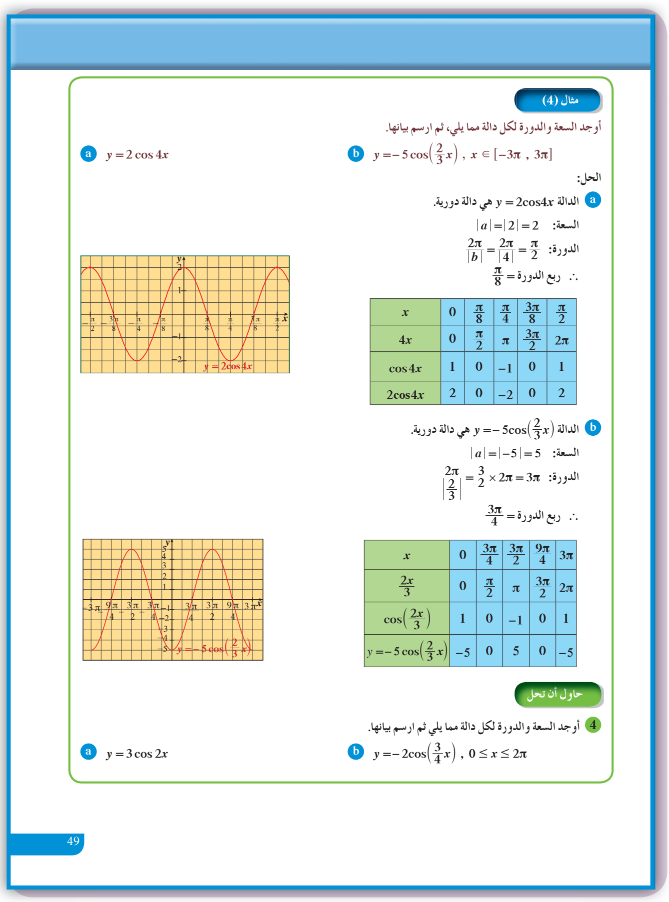
ثانيًا: دالة جيب التمام The Cosine Function

$y=\cos x$ هي دالة مثلثية مجالها هو أيضًا $\mathbb{R}$ ومداها هو $[-1,1]$، وهي دالة دورية ذات دورة 2π وسعتها تساوي واحد.
ونستطيع الحصول على التمثيل البياني للدالة $y=\cos x$ على مجالها عن طريق رسمها على الفترة $[0,2\pi]$ تمامًا مثلما فعلنا في دالة الجيب.
وتكرر نفسها ونحصل على البيان التالي:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1

يمكنك التحقق باستخدام الآلة الحاسبة.
من بيان دالة جيب التمام نلاحظ أن:
① لأي عدد صحيح n فإن $\cos(\frac{\pi}{2}+n\pi)=0$
② لأي عدد صحيح n فإن للدالة $f(x)=\cos x$ قيمة عظمى تساوي (1) عند $x=2n\pi$ وقيمة صغرى تساوي (-1) عند $x=\pi+2n\pi$
③ دالة جيب التمام دالة زوجية لأن: $\cos(-x)=\cos x\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}$
④ محور الصادات هو خط تناظر لمنحنى الدالة.
⑤ سعة الدالة هي: $\frac{\max f-\min f}{2}$

48


مثال (4)
أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي، ثم ارسم بيانها.
ⓐ $y=2\cos 4x$
ⓑ $y=-5\cos(\frac{2}{3}x)\ ,\ x\in[-3\pi\ ,\ 3\pi]$

الحل:
ⓐ الدالة $y=2\cos 4x$ هي دالة دورية.
السعة: $|a|=|2|=2$
الدورة: $\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{|4|}=\frac{\pi}{2}$
∴ ربع الدورة $=\frac{\pi}{8}$

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
$4x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos 4x$	1	0	-1	0	1
$2\cos 4x$	2	0	-2	0	2

ⓑ الدالة $y=-5\cos(\frac{2}{3}x)$ هي دالة دورية.
السعة: $|a|=|-5|=5$
الدورة: $\frac{2\pi}{|\frac{2}{3}|}=\frac{3}{2}\times 2\pi=3\pi$
∴ ربع الدورة $=\frac{3\pi}{4}$

x	0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{4}$	3π
$\frac{2x}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos(\frac{2x}{3})$	1	0	-1	0	1
$y=-5\cos(\frac{2}{3}x)$	-5	0	5	0	-5

حاول أن تحل

④ أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها.
ⓐ $y=3\cos 2x$
ⓑ $y=-2\cos(\frac{3}{4}x)\ ,\ 0\le x\le 2\pi$

49

6 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في تكوين جدول القيم الخاصة بعد تحديد ربع الدورة. ساعدهم على تخطي هذه الأخطاء باستخدام أمثلة بديلة.

7 التقييم

لاحظ الطلاب كيف يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من فهمهم لتكوين الجدول والربط مع التمثيل البياني للدالة.

اختبار سريع

1 أوجد السعة والدورة، ثم ارسم بيان الدالة:

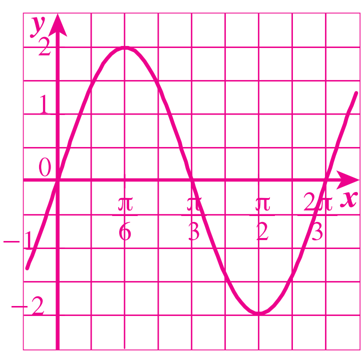
$y=2\sin 3x$

السعة: $|a|=|2|=2$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{3}$

∴ ربع الدورة $=\frac{\pi}{6}$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
$3x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin 3x$	0	1	0	-1	0
$y=2\sin 3x$	0	2	0	-2	0



2 أوجد السعة والدورة ثم ارسم بيان الدالة:

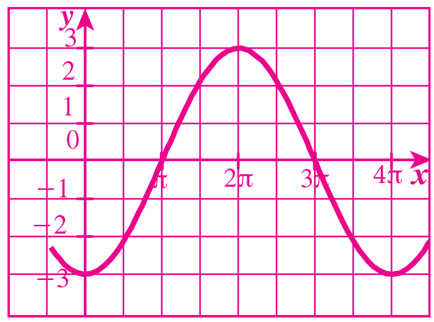
$$y=-3\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$$

السعة: $|a|=|-3|=3$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$

$\therefore$ ربع الدورة $=\pi=\frac{4\pi}{4}$

x	0	π	2π	3π	4π
$\frac{1}{2}x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos\frac{1}{2}x$	1	0	-1	0	1
$y=-3\cos\frac{1}{2}x$	-3	0	3	0	-3



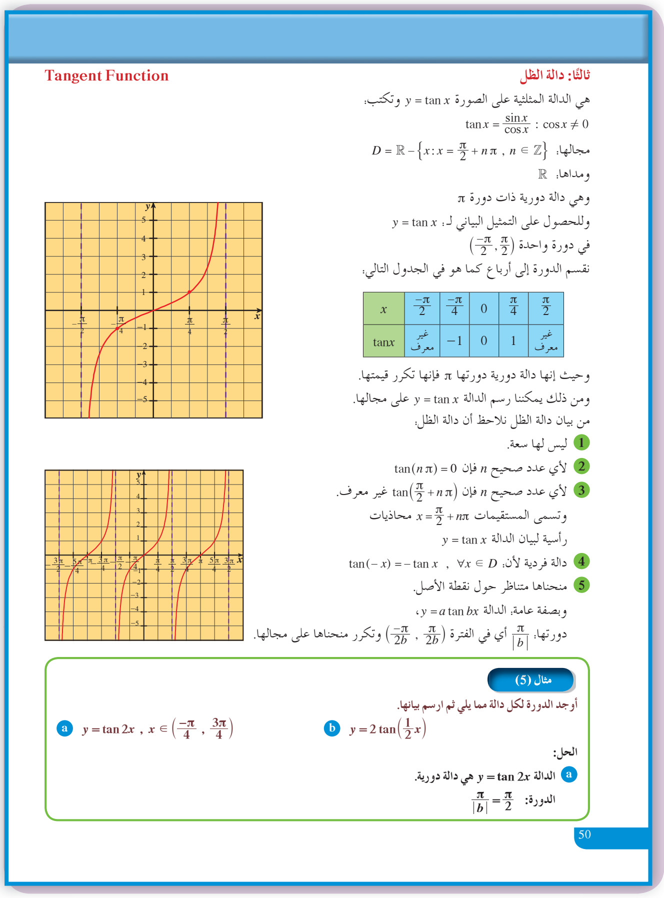
3 أوجد الدورة، ثم ارسم بيان الدالة:

$$y=-2\tan(2x)$$

الدورة: $\frac{\pi}{|b|}=\frac{\pi}{2}$

$\therefore$ ربع الدورة $=\frac{\pi}{8}$

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
$2x$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\tan 2x$	0	1	غير معرف	-1	0
$y=-2\tan 2x$	0	-2	غير معرف	2	0



ثالثًا: دالة الظل Tangent Function

هي الدالة المثلثية على الصورة $y=\tan x$ وتكتب:

$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\ :\ \cos x\neq 0$

مجالها: $D=\mathbb{R}-\left\{x : x=\frac{\pi}{2}+n\pi\ ,\ n\in\mathbb{Z}\right\}$

ومداها: $\mathbb{R}$

وهي دالة دورية ذات دورة π

وللحصول على التمثيل البياني لـ: $y=\tan x$

في دورة واحدة $\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

نقسم الدورة إلى أرباع كما هو في الجدول التالي:

x	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	غير معرف	-1	0	1	غير معرف

وحيث إنها دالة دورية دورتها π فإنها تكرر قيمتها.

ومن ذلك يمكننا رسم الدالة $y=\tan x$ على مجالها.

من بيان دالة الظل نلاحظ أن دالة الظل:

1 ليس لها سعة.

2 لأي عدد صحيح n فإن $\tan(n\pi)=0$

3 لأي عدد صحيح n فإن $\tan\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)$ غير معرف.

وتسمى المستقيمات $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$ محاذيات رأسية لبيان الدالة $y=\tan x$

4 دالة فردية لأن: $\forall x\in D\ ,\ \tan(-x)=-\tan x$

5 منحناها متناظر حول نقطة الأصل.

وبصفة عامة: الدالة $y=a\tan bx$،

دورتها: $\frac{\pi}{|b|}$ أي في الفترة $\left(\frac{-\pi}{2b}\ ,\ \frac{\pi}{2b}\right)$ وتكرر منحناها على مجالها.

مثال (5)

أوجد الدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها.

a $y=\tan 2x\ ,\ x\in\left(\frac{-\pi}{4}\ ,\ \frac{3\pi}{4}\right)$

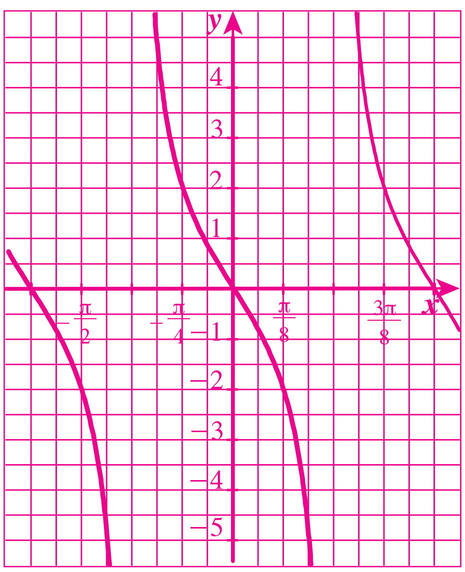
b $y=2\tan\left(\frac{1}{2}x\right)$

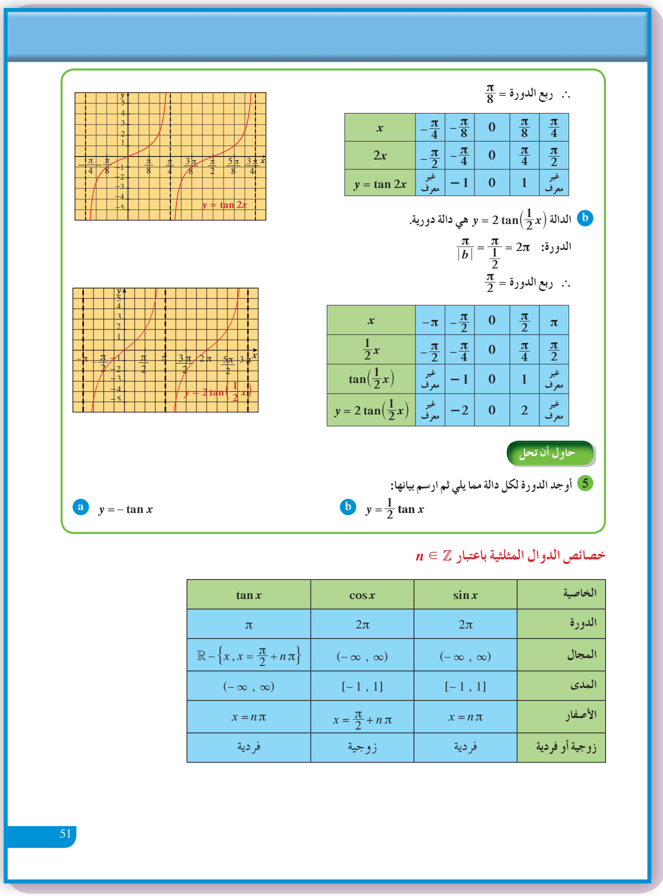
الحل:

a الدالة $y=\tan 2x$ هي دالة دورية.

الدورة: $\frac{\pi}{|b|}=\frac{\pi}{2}$

50





$\therefore$ ربع الدورة $= \frac{\pi}{8}$

x	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$
$2x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$y = \tan 2x$	غير معرف	-1	0	1	غير معرف

(b) الدالة $y = 2\tan\left(\frac{1}{2}x\right)$ هي دالة دورية.

الدورة: $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$

$\therefore$ ربع الدورة $= \frac{\pi}{2}$

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\frac{1}{2}x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan\left(\frac{1}{2}x\right)$	غير معرف	-1	0	1	غير معرف
$y = 2\tan\left(\frac{1}{2}x\right)$	غير معرف	-2	0	2	غير معرف

حاول أن تحل

5 أوجد الدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

(a) $y = -\tan x$ (b) $y = \frac{1}{2}\tan x$

خصائص الدوال المثلثية باعتبار $n \in \mathbb{Z}$

الخاصية	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
الدورة	2π	2π	π
المجال	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R} - \left\{x, x = \frac{\pi}{2} + n\pi\right\}$
المدى	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$(-\infty, \infty)$
الأصفار	$x = n\pi$	$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$	$x = n\pi$
زوجية أو فردية	فردية	زوجية	فردية

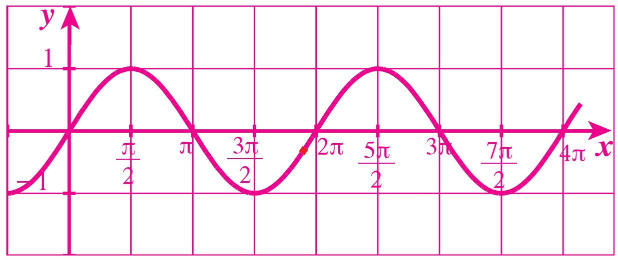
51

8 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

1 $\theta = \frac{\pi}{2}$

2



نعم، $\theta = \frac{5\pi}{2}$

3 نعم. بيان الدالة على الفترة $[0, 2\pi]$ يتكرر كما هو مبيّن.

«حاول أن تحل»

1 (a) السعة: $|a| = 2$، دورة الدالة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{5}$

(b) السعة: $|a| = \frac{1}{2}$، دورة الدالة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

2 (a) $y = -2\cos 6x$

(b) $y = 0.25\cos 2x$

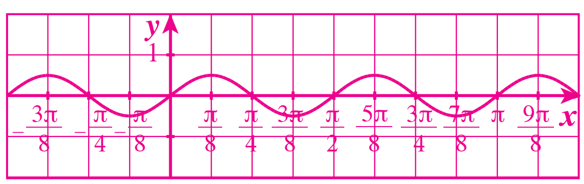
(c) $y = \cos \pi x$

3 (a) السعة: $|a| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ ربع الدورة $= \frac{\pi}{8}$

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
$4x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin 4x$	0	1	0	-1	0
$y = \frac{1}{2}\sin 4x$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0

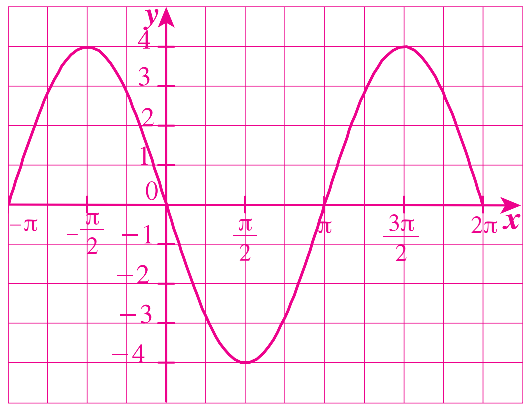


(b) السعة: $|a| = |-4| = 4$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

$\therefore$ ربع الدورة $= \frac{\pi}{2}$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$1x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$y = -4\sin x$	0	-4	0	4	0

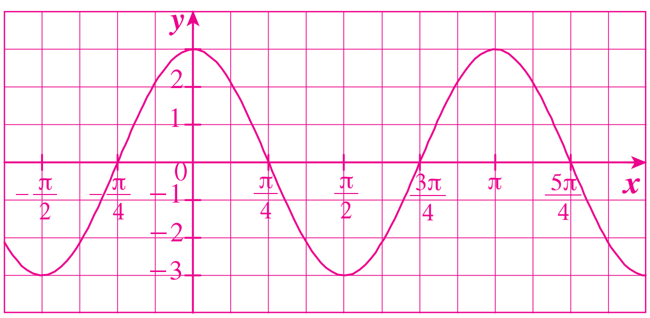


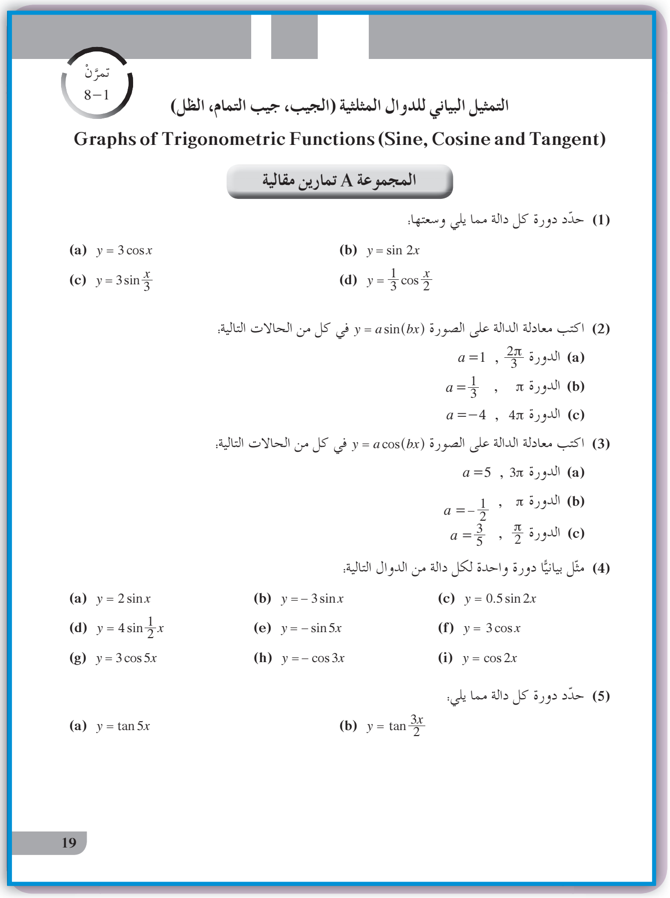
4 (a) السعة: $|a| = 3$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$\therefore$ ربع الدورة $= \frac{\pi}{4}$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos 2x$	1	0	-1	0	1
$y = 3\cos 2x$	3	0	-3	0	3





تمرَّنْ 8-1

التمثيل البياني للدوال المثلثية (الجيب، جيب التمام، الظل)

Graphs of Trigonometric Functions (Sine, Cosine and Tangent)

المجموعة A تمارين مقالية

(1) حدّد دورة كل دالة مما يلي وسعتها:

(a) $y = 3\cos x$ **(b)** $y = \sin 2x$

(c) $y = 3\sin\frac{x}{3}$ **(d)** $y = \frac{1}{3}\cos\frac{x}{2}$

(2) اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\sin(bx)$ في كل من الحالات التالية:

(a) الدورة $\frac{2\pi}{3}$, $a = 1$

(b) الدورة π , $a = \frac{1}{3}$

(c) الدورة 4π , $a = -4$

(3) اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\cos(bx)$ في كل من الحالات التالية:

(a) الدورة 3π , $a = 5$

(b) الدورة π , $a = -\frac{1}{2}$

(c) الدورة $\frac{\pi}{2}$, $a = \frac{3}{5}$

(4) مثّل بيانيًّا دورة واحدة لكل دالة من الدوال التالية:

(a) $y = 2\sin x$ **(b)** $y = -3\sin x$ **(c)** $y = 0.5\sin 2x$

(d) $y = 4\sin\frac{1}{2}x$ **(e)** $y = -\sin 5x$ **(f)** $y = 3\cos x$

(g) $y = 3\cos 5x$ **(h)** $y = -\cos 3x$ **(i)** $y = \cos 2x$

(5) حدّد دورة كل دالة مما يلي:

(a) $y = \tan 5x$ **(b)** $y = \tan\frac{3x}{2}$

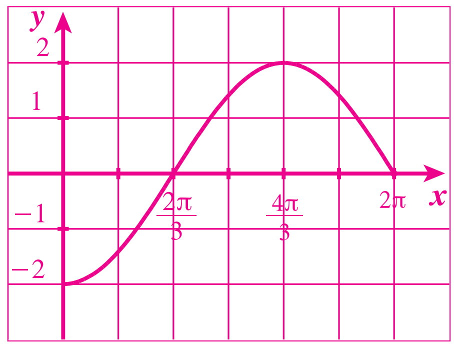
19

(b) السعة: $|a| = |-2| = 2$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{3}{4}\right|} = \frac{8\pi}{3}$

$\therefore$ ربع الدورة $= \frac{2\pi}{3}$

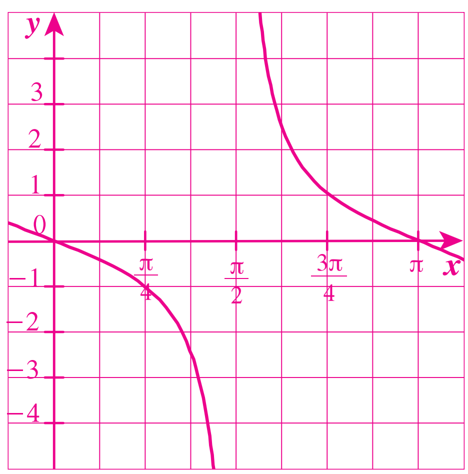
x	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	2π	$\frac{8\pi}{3}$
$\frac{3}{4}x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos\left(\frac{3}{4}x\right)$	1	0	-1	0	1
$y = -2\cos\left(\frac{3}{4}x\right)$	-2	0	2	0	-2



5 **(a)** الدورة: π

$\therefore$ ربع الدورة $= \frac{\pi}{4}$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\tan x$	0	1	غير معرف	-1	0
$y = -\tan x$	0	-1	غير معرف	1	0



(6) اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = \tan(bx)$ في كل من الحالات التالية:

(a) الدورة $\frac{\pi}{5}$ **(b)** الدورة $\frac{2\pi}{3}$

(c) الدورة $\frac{\pi}{4}$

(7) مثّل بيانيًا دورة واحدة لكل دالة من الدوال التالية:

(a) $y = \tan 2x$ **(b)** $y = \tan\frac{x}{2}$ **(c)** $y = -3\tan x$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–7)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) معادلة الدالة المثلثية $y = a\sin(b\theta)$ حيث السعة 5 والدورة 3π هي $y = 5\sin\left(\frac{2}{3}\theta\right)$ (a) (b)

(2) الدالة التي دورتها $\frac{\pi}{2}$ وسعتها 3 هي $y = 3\sin\left(\frac{\pi\theta}{2}\right)$ (a) (b)

(3) الدالة $y = 3\tan\left(\frac{3}{4}x\right)$ دورتها $\frac{4}{3}\pi$ (a) (b)

(4) الدالة التي دورتها $\frac{\pi}{3}$ وسعتها 4 هي $y = -4\cos(6x)$ (a) (b)

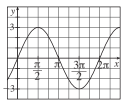
(5) سعة الدالة $y = -5\cos 2x$ هي -5 (a) (b)

(6) في الدالة f حيث $f(x) = a\cos bx$ يكون: $2|a| = \max f + \min f$ (a) (b)

(7) الدالتان f, g حيث $g(x) = \tan 4x$ ، $f(x) = \cos 8x$ لهما نفس الدورة. (a) (b)

في التمارين (8–17)، ظلّل رمز الدائرة الدالّ على الإجابة الصحيحة.

(8) البيان التالي يمثل بيان الدالة:

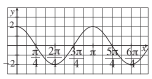


(a) $f(x) = 3\cos x$ (b) $f(x) = 3\sin x$
(c) $f(x) = -3\sin x$ (d) $f(x) = \sin 3x$

(9) لتكن $f(x) = 3\tan 2x$ فإن:

(a) السعة = 1 (b) السعة = 2 (c) السعة = 3 (d) f ليس لها سعة

(10) ليكن بيان f كما في الشكل التالي:



فإن f يمكن أن تكون:

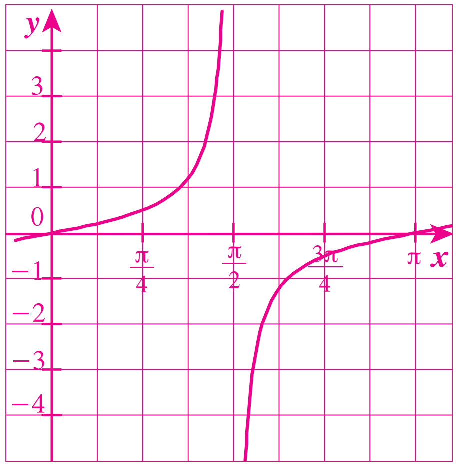
(a) $2\cos 2x$ (b) $\cos 2x$ (c) $\cos\frac{x}{2}$ (d) $\sin 2x$

20

(b) الدورة: π

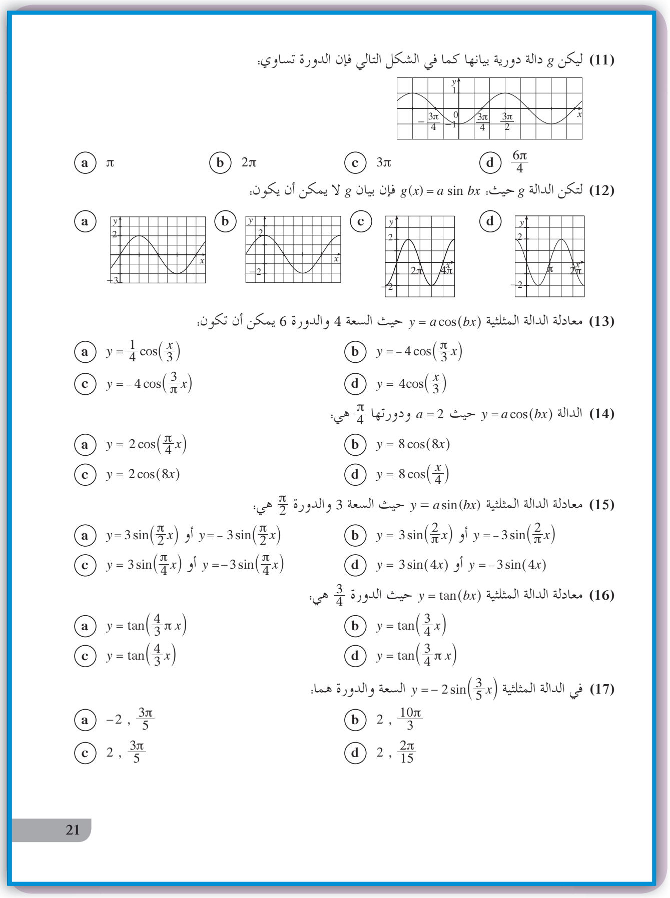
$\therefore$ ربع الدورة $= \frac{\pi}{4}$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\tan x$	0	1	غير معرف	-1	0
$y = \frac{1}{2}\tan x$	0	$\frac{1}{2}$	غير معرف	$\frac{-1}{2}$	0



«تدريب (1)»

دورة الدالة	سعة الدالة	بيان الدالة
2π	1	شكل (1)
$\frac{2\pi}{3}$	1	شكل (2)
$\frac{2\pi}{3}$	2	شكل (3)



(11) ليكن g دالة دورية بيانها كما في الشكل التالي فإن الدورة تساوي:

ⓐ π ⓑ 2π ⓒ 3π ⓓ $\frac{6\pi}{4}$

(12) لتكن الدالة g حيث: $g(x) = a \sin bx$ فإن بيان g لا يمكن أن يكون:

ⓐ ⓑ ⓒ ⓓ

(13) معادلة الدالة المثلثية $y = a\cos(bx)$ حيث السعة 4 والدورة 6 يمكن أن تكون:

ⓐ $y = \frac{1}{4}\cos\left(\frac{x}{3}\right)$ ⓑ $y = -4\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$

ⓒ $y = -4\cos\left(\frac{3}{\pi}x\right)$ ⓓ $y = 4\cos\left(\frac{x}{3}\right)$

(14) الدالة $y = a\cos(bx)$ حيث $a = 2$ ودورتها $\frac{\pi}{4}$ هي:

ⓐ $y = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ ⓑ $y = 8\cos(8x)$

ⓒ $y = 2\cos(8x)$ ⓓ $y = 8\cos\left(\frac{x}{4}\right)$

(15) معادلة الدالة المثلثية $y = a\sin(bx)$ حيث السعة 3 والدورة $\frac{\pi}{2}$ هي:

ⓐ $y = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ أو $y = -3\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ ⓑ $y = 3\sin\left(\frac{2}{\pi}x\right)$ أو $y = -3\sin\left(\frac{2}{\pi}x\right)$

ⓒ $y = 3\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ أو $y = -3\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ ⓓ $y = 3\sin(4x)$ أو $y = -3\sin(4x)$

(16) معادلة الدالة المثلثية $y = \tan(bx)$ حيث الدورة $\frac{3}{4}$ هي:

ⓐ $y = \tan\left(\frac{4}{3}\pi x\right)$ ⓑ $y = \tan\left(\frac{3}{4}x\right)$

ⓒ $y = \tan\left(\frac{4}{3}x\right)$ ⓓ $y = \tan\left(\frac{3}{4}\pi x\right)$

(17) في الدالة المثلثية $y = -2\sin\left(\frac{3}{5}x\right)$ السعة والدورة هما:

ⓐ $-2 , \frac{3\pi}{5}$ ⓑ $2 , \frac{10\pi}{3}$

ⓒ $2 , \frac{3\pi}{5}$ ⓓ $2 , \frac{2\pi}{15}$

21

2–8: التحويلات الهندسية للدوال الجيبية

1 الأهداف

- يستخدم التحويلات الهندسية على الدوال الجيبية: تمدد – انكماش – إزاحة – انعكاس.
- يتعرف خصائص الدوال الجيبية.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

تحويلات هندسية – تمدد – انكماش – سعة – دورة – إزاحة رأسية – انعكاس – إزاحة أفقية.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(1) أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي:

(a) $y = 2\sin\left(\frac{3}{4}x\right)$ (b) $y = -3\cos\left(\frac{1}{3}x\right)$

(2) هل يوجد انعكاس بين التمثيل البياني للدالة $f(x) = x$ والتمثيل البياني للدالة $g(x) = -x$؟ إذا كانت الإجابة نعم، فما هو محور الانعكاس؟

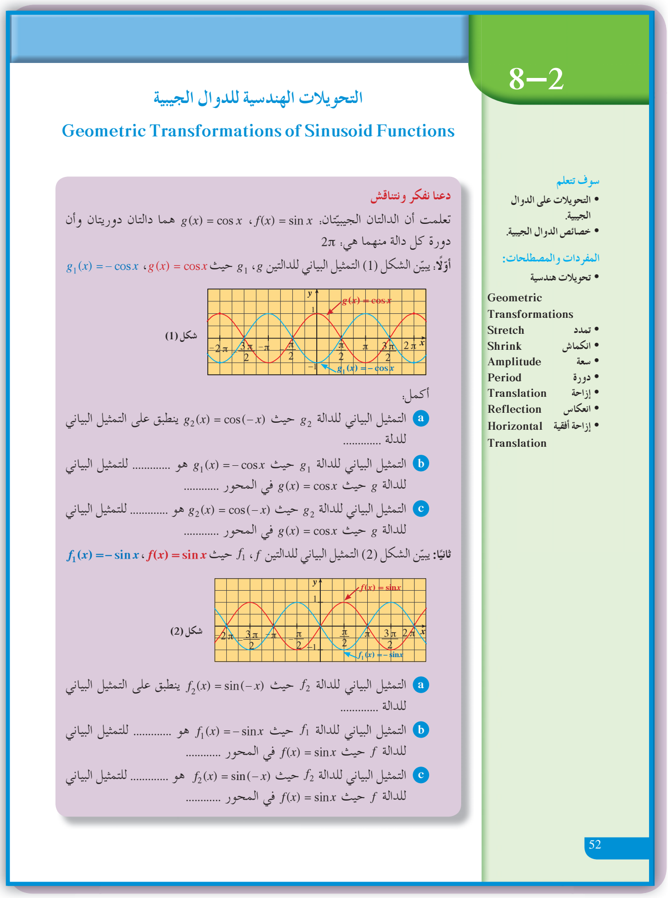
(3) هل يوجد انعكاس بين التمثيل البياني للدالة $f(x) = \sqrt{x-1}$ والتمثيل البياني للدالة $g(x) = -\sqrt{x-1}$؟ إذا كانت الإجابة نعم، فما هو محور الانعكاس؟

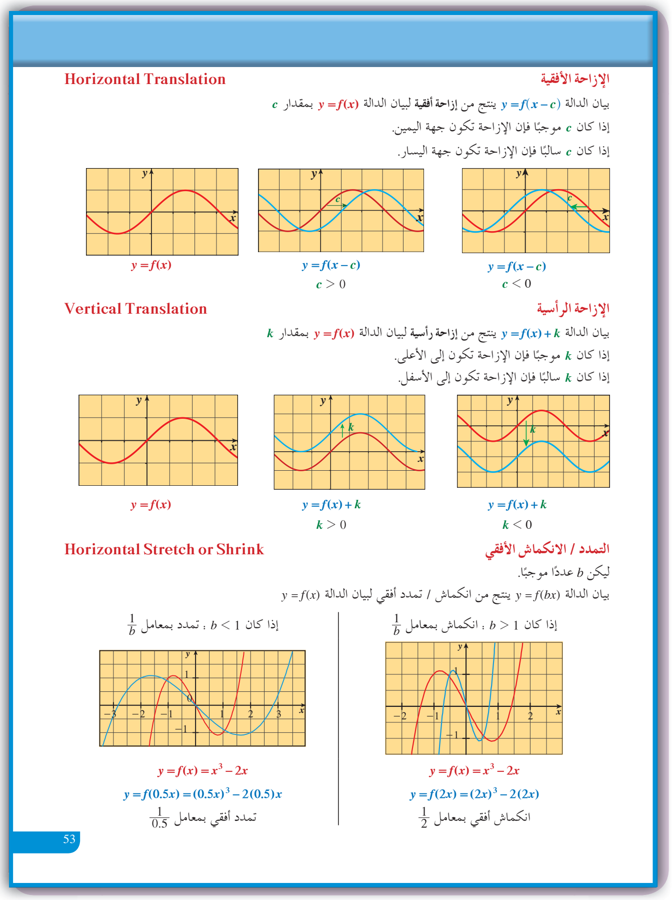
5 التدريس

يعتبر هذا الدرس استكمالًا للدرس الأول بحيث يتوجب على الطالب تحديد السعة والدورة، ليتمكن من إيجاد العلاقة بين الدالتين الجيبيتين Sinus و Cosinus والتحويلات التي سوف تحدث عليهما.

في الأمثلة (1), (2), (3)

من المهم جدًّا التعامل بدقة مع هذه الأمثلة نظرًا لأهميتها، إذ تبين دور سعة الدالة في المقارنة بين الدوال. عند الضرورة، اكتب على السبّورة سعة كل دالة ودورتها. دع الطلاب يقارنون بين بياني الدالتين في كل مثال لتبيان تأثير السعة والدورة في رسم بيان كل دالة.





في المثال (4)

يبيّن هذا المثال كيفية الاستفادة من خاصية الإزاحة الأفقية لإيجاد بيان دالة من خلال بيان دالة سابقة. أعد التشديد على مفهوم الإزاحة الأفقية عند الضرورة.

في المثال (5)

يساعد هذا المثال الطالب على فهم الإزاحة الرأسية. يمكن للمعلم الربط مع المثال (4) لإيضاح الفرق بين الإزاحة الأفقية (ناحية اليمين أو ناحية اليسار) والإزاحة الرأسية (إلى الأعلى أو إلى الأسفل).

في المثال (6)

يقدم هذا المثال صورة موسعة عن كيفية استخدام معظم التحويلات الهندسية على الدوال الجيبية، لذا من المهم التعامل مع الخطوات المتبعة بروية والإجابة عن التساؤلات من قبل الطلاب. أعطِ أمثلة بديلة إذا سمح الوقت بذلك.

في المثال (7)

تطبيق حياتي مهم يبيّن أن بعض الدوال ليست كثيرات حدود ولا دوال نسبية، وتستخدم في دراسة بعض العوامل الحياتية مثل عدد الأيام المشمسة في بعض الدول. يمكن للطلاب إجراء بحث سريع عن الانقلاب الصيفي والانقلاب الشتوي.

تمرَّنْ 8−2

التحويلات الهندسية للدوال الجيبية

Geometric Transformations of Sinusoid Functions

المجموعة A تمارين مقالية

(1) صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين h , f لكل مما يلي:

(a) $f(x)=\cos 2x\ ,\ h(x)=\frac{5}{3}\cos 2x$ **(b)** $f(x)=\sin\frac{x}{3}\ ,\ h(x)=\frac{-2}{3}\sin\frac{x}{3}$

(c) $f(x)=\sin x\ ,\ h(x)=\sin 3x$ **(d)** $f(x)=\cos x\ ,\ h(x)=\cos\frac{x}{5}$

(e) $f(x)=\sin x\ ,\ h(x)=-\frac{1}{3}\sin(-2x)$ **(f)** $f(x)=\cos x\ ,\ h(x)=1.5\cos 4x$

(g) $f(x)=\cos 2x\ ,\ h(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ **(h)** $f(x)=\sin 3x\ ,\ h(x)=\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$

(i) $f(x)=0.3\cos 2x\ ,\ h(x)=0.3\cos 2x+4$ **(j)** $f(x)=3\sin\frac{x}{2}\ ,\ h(x)=3\sin\frac{x}{2}-1$

(2) صف العلاقة بين التمثيلين البيانيين لكل من: $y_1=\cos x\ ,\ y_2=\cos 3x$
ثم ارسم دورتين من الدالة y_2

(3) وضّح كيف يمكن الحصول على التمثيل البياني لكل من الدالتين التاليتين باستخدام تحويلات الدوال المثلثية $y=\sin x$ أو $y=\cos x$، ثم أوجد سعة كل دالة ودورتها:

(a) $y=-2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+1$

(b) $y=+3.5\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)-1$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1—5)، ظلّل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) يمثّل منحنى الدالة $f(x)=4\sin(3x)$ تمددًا رأسيًا بمعامل 4 وانكماشًا أفقيًا بمعامل 3 لمنحنى الدالة: $g(x)=\sin x$ ⓐ ⓑ

22

(2) يمثّل منحنى الدالة $f(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+4$ إزاحة إلى اليسار $\frac{\pi}{3}$ وحدة وإزاحة إلى الأعلى 4 وحدات لمنحنى الدالة: $g(x)=\cos x$ ⓐ ⓑ

(3) يمثّل منحنى الدالة $y=2\tan x$ تمددًا رأسيًا بمعامل 2 لمنحنى الدالة $y=\tan x$ ⓐ ⓑ

(4) يمثّل منحنى الدالة $f(x)=4\cos(x-3)$ انكماشًا رأسيًا معامله 4 وإزاحة أفقية مقدارها 3 وحدات إلى اليمين لمنحنى الدالة $g(x)=\cos x$ ⓐ ⓑ

(5) يمثّل منحنى الدالة $f(x)=3\sin(x+4)$ تمددًا رأسيًا معامله 3 وإزاحة أفقية مقدارها 4 وحدات إلى اليسار لمنحنى الدالة $y=\sin x$ ⓐ ⓑ

في التمارين (6—10)، ظلّل رمز الدائرة الدالّ على الإجابة الصحيحة.

(6) يمثّل منحنى الدالة $f(x)=-\sin(x-5)$ لمنحنى الدالة $g(x)=\sin x$:

ⓐ انعكاسًا في محور السينات وإزاحة أفقية مقدارها 5 وحدات إلى اليمين.

ⓑ انعكاسًا في محور السينات وإزاحة أفقية مقدارها 5 وحدات إلى اليسار.

ⓒ انعكاسًا في محور الصادات وإزاحة أفقية مقدارها 5 وحدات إلى اليمين.

ⓓ انعكاسًا في محور الصادات وإزاحة أفقية مقدارها 5 وحدات إلى اليسار.

(7) يمثّل منحنى الدالة $f(x)=\sin(2x-6)-5$ لمنحنى الدالة $g(x)=\sin x$:

ⓐ انكماشًا أفقيًا بمعامل $\frac{1}{2}$، إزاحة أفقية 3 وحدات لجهة اليمين، إزاحة رأسية مقدارها 5 إلى الأسفل.

ⓑ تمددًا أفقيًا بمعامل 2، إزاحة أفقية 6 وحدات لجهة اليمين، إزاحة رأسية مقدارها 5 وحدات إلى الأعلى.

ⓒ انكماشًا أفقيًا بمعامل $\frac{1}{2}$، إزاحة أفقية 3 وحدات لجهة اليسار، إزاحة رأسية مقدارها 5 وحدات إلى الأسفل.

ⓓ تمددًا أفقيًا بمعامل 2، إزاحة أفقية 6 وحدات لجهة اليسار، إزاحة رأسية مقدارها 5 وحدات إلى الأسفل.

(8) يمثّل منحنى الدالة $f(x)=-4\cos\left(\frac{x}{3}\right)$ لمنحنى الدالة $g(x)=\cos x$:

ⓐ انكماشًا رأسيًا معامله $\frac{1}{4}$ وتمددًا أفقيًا معامله 3.

ⓑ تمددًا رأسيًا معامله 4 وتمددًا أفقيًا معامله 3.

ⓒ انكماشًا رأسيًا معامله 4 وانكماشًا أفقيًا معامله 3.

ⓓ تمددًا رأسيًا معامله 3 وانكماشًا أفقيًا معامله 4.

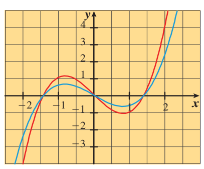
23

التمدد/الانكماش الرأسي — Vertical Stretch or Shrink

ليكن a عددًا موجبًا $a\neq 0$

بيان الدالة $y=af(x)$ ينتج من انكماش/تمدد رأسي لبيان الدالة $y=f(x)$

إذا كان $|a|<1$: انكماش بمعامل $|a|$

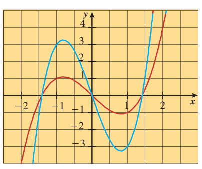


$y=f(x)=x^3-2x$

$y=0.6f(x)=0.6x^3-1.2x$

انكماش رأسي بمعامل 0.6

إذا كان $|a|>1$: تمدد بمعامل $|a|$



$y=f(x)=x^3-2x$

$y=3f(x)=3x^3-6x$

تمدد رأسي بمعامل 3

تطبيق التحويلات على الدوال الجيبية — Applying Transformations to Sinusoids

يمكن أن تطبق التحويلات السابقة على أي دالة بما في ذلك الدوال المثلثية.

والتمثيلات البيانية التي نحصل عليها من تطبيق هذه التحويلات على دالتي الجيب وجيب التمام هي دوال جيبية.

تكون الدالة جيبية إذا أمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$f(x)=a\sin(bx-h)+k$$

أو $$f(x)=a\cos(bx-h)+k$$

حيث a,b,h,k ثوابت $a\neq 0\ ,\ b\neq 0$

سوف نرى في مثال لاحق أن $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ ،
لذلك فإن رسم دالة جيب التمام هو نفسه رسم دالة الجيب بعد إزاحتها إلى اليسار بمقدار $\frac{\pi}{2}$ وحدة.
بسبب هذه العلاقة يمكن أن نعيد كتابة كل الدوال الجيبية على الصورة:

$$f(x)=a\sin(bx-h)+k$$

54

6 الربط

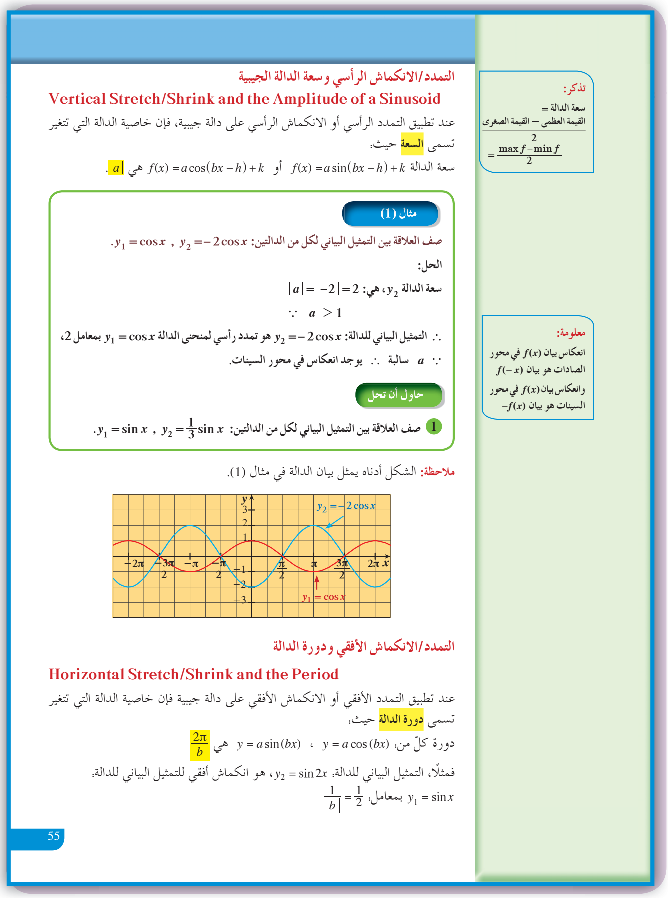
يوفر المثال (7) الربط بين الدالة الجيبية وعدد الأيام المشمسة في إحدى المدن، وكيفية الاستفادة من الدالة لتقدير عدد الأيام المشمسة.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام التحويلات على الدوال المثلثية. ساعدهم على كتابة كل دالة بالصورة القياسية لكي يجدوا كل التحويلات من دون ارتكاب الأخطاء.

8 التقييم

توفر فقرات «حاول أن تحل» فرصة أمام المعلم لمتابعة أداء طلابه ومعرفة مدى استيعابهم لمفاهيم هذا الدرس ومهاراته.


التمدد/الانكماش الرأسي وسعة الدالة الجيبية

Vertical Stretch/Shrink and the Amplitude of a Sinusoid

عند تطبيق التمدد الرأسي أو الانكماش الرأسي على دالة جيبية، فإن خاصية الدالة التي تتغير تسمى السعة حيث:

سعة الدالة $f(x)=a\sin(bx-h)+k$ أو $f(x)=a\cos(bx-h)+k$ هي $|a|$.

مثال (1)

صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين: $y_1=\cos x$ ، $y_2=-2\cos x$.

الحل:

سعة الدالة y_2 هي: $|a|=|-2|=2$

$\because |a|>1$

$\therefore$ التمثيل البياني للدالة: $y_2=-2\cos x$ هو تمدد رأسي لمنحنى الدالة $y_1=\cos x$ بمعامل 2،

$\because$ a سالبة $\therefore$ يوجد انعكاس في محور السينات.

حاول أن تحل

1 صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين: $y_1=\sin x$ ، $y_2=\frac{1}{3}\sin x$.

ملاحظة: الشكل أدناه يمثل بيان الدالة في مثال (1).

التمدد/الانكماش الأفقي ودورة الدالة

Horizontal Stretch/Shrink and the Period

عند تطبيق التمدد الأفقي أو الانكماش الأفقي على دالة جيبية فإن خاصية الدالة التي تتغير تسمى دورة الدالة حيث:

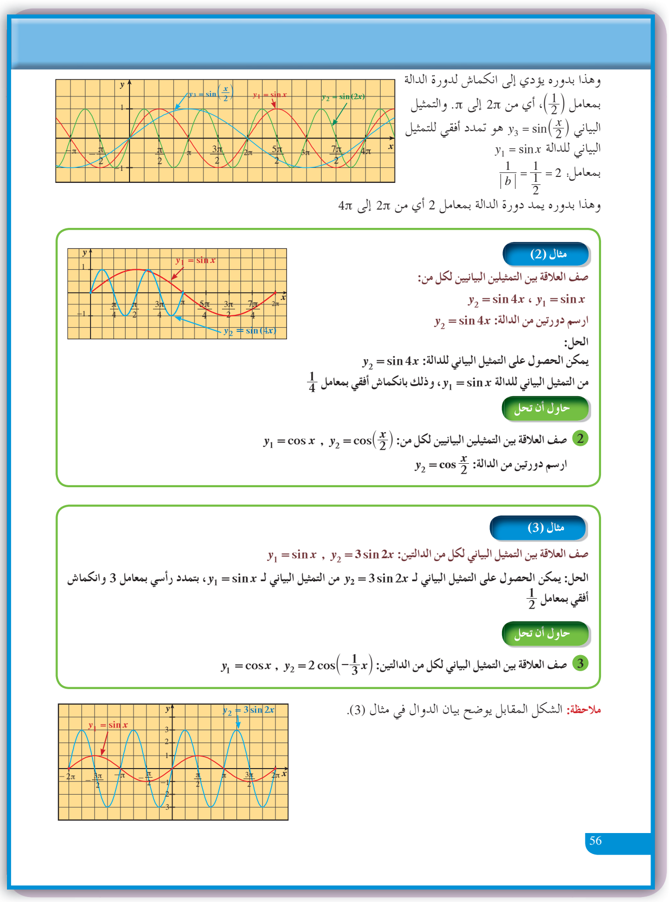
دورة كلٍّ من: $y=a\cos(bx)$ ، $y=a\sin(bx)$ هي $\frac{2\pi}{|b|}$

فمثلًا، التمثيل البياني للدالة: $y_2=\sin 2x$، هو انكماش أفقي للتمثيل البياني للدالة $y_1=\sin x$ بمعامل: $\frac{1}{|b|}=\frac{1}{2}$

تذكر: سعة الدالة = $\frac{\text{القيمة العظمى} - \text{القيمة الصغرى}}{2} = \frac{\max f - \min f}{2}$

معلومة: انعكاس بيان $f(x)$ في محور الصادات هو بيان $f(-x)$ وانعكاس بيان $f(x)$ في محور السينات هو بيان $-f(x)$

55


وهذا بدوره يؤدي إلى انكماش لدورة الدالة بمعامل $\left(\frac{1}{2}\right)$، أي من 2π إلى π. والتمثيل البياني $y_3=\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ هو تمدد أفقي للتمثيل البياني للدالة $y_1=\sin x$ بمعامل: $\frac{1}{|b|}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$

وهذا بدوره يمد دورة الدالة بمعامل 2 أي من 2π إلى 4π

مثال (2)

صف العلاقة بين التمثيلين البيانيين لكل من: $y_1=\sin x$ ، $y_2=\sin 4x$

ارسم دورتين من الدالة: $y_2=\sin 4x$

الحل:

يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة: $y_2=\sin 4x$ من التمثيل البياني للدالة $y_1=\sin x$، وذلك بانكماش أفقي بمعامل $\frac{1}{4}$

حاول أن تحل

2 صف العلاقة بين التمثيلين البيانيين لكل من: $y_1=\cos x$ ، $y_2=\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

ارسم دورتين من الدالة: $y_2=\cos\frac{x}{2}$

مثال (3)

صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين: $y_1=\sin x$ ، $y_2=3\sin 2x$

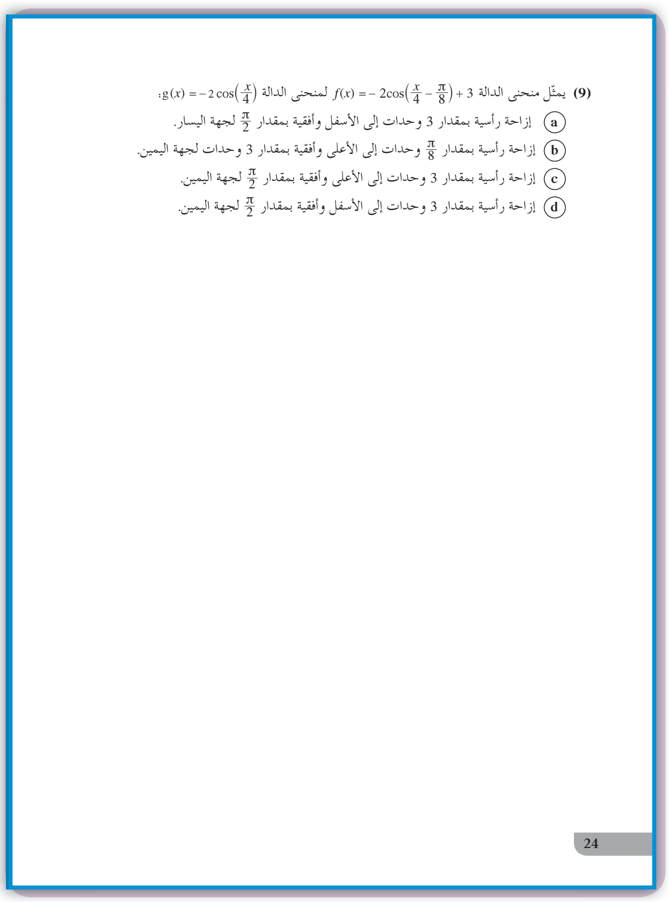
الحل: يمكن الحصول على التمثيل البياني لـ $y_2=3\sin 2x$ من التمثيل البياني لـ $y_1=\sin x$، بتمدد رأسي بمعامل 3 وانكماش أفقي بمعامل $\frac{1}{2}$

حاول أن تحل

3 صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين: $y_1=\cos x$ ، $y_2=2\cos\left(-\frac{1}{3}x\right)$

ملاحظة: الشكل المقابل يوضح بيان الدوال في مثال (3).

56


(9) يمثّل منحنى الدالة $f(x)=-2\cos\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{8}\right)+3$ لمنحنى الدالة $g(x)=-2\cos\left(\frac{x}{4}\right)$:

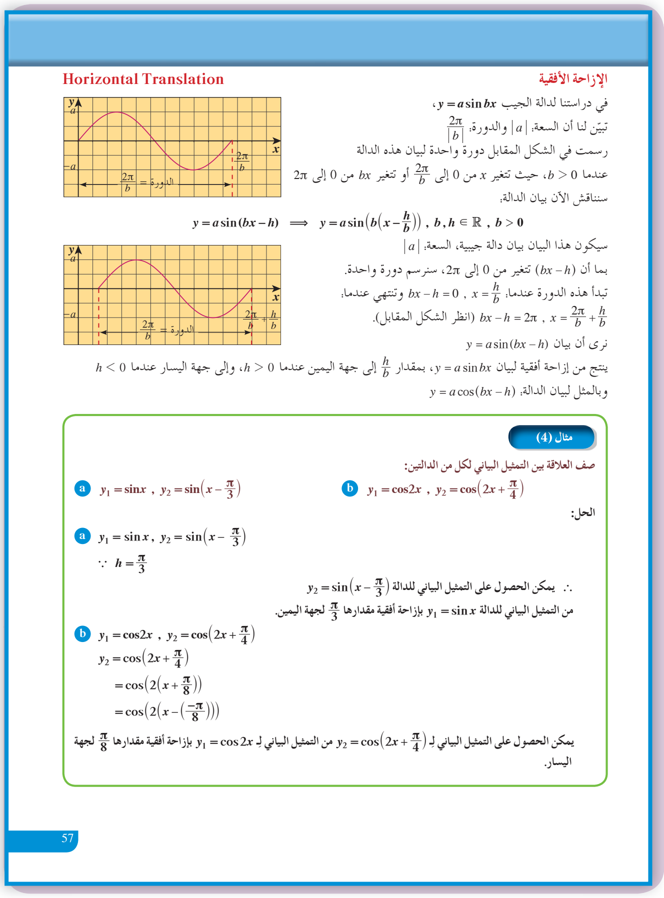
(a) إزاحة رأسية بمقدار 3 وحدات إلى الأسفل وأفقية بمقدار $\frac{\pi}{2}$ لجهة اليسار.

(b) إزاحة رأسية بمقدار 3 وحدات إلى الأعلى وأفقية بمقدار $\frac{\pi}{8}$ وحدات لجهة اليمين.

(c) إزاحة رأسية بمقدار 3 وحدات إلى الأعلى وأفقية بمقدار $\frac{\pi}{2}$ لجهة اليمين.

(d) إزاحة رأسية بمقدار 3 وحدات إلى الأسفل وأفقية بمقدار $\frac{\pi}{2}$ لجهة اليمين.

24



الإزاحة الأفقية Horizontal Translation

في دراستنا لدالة الجيب $y=a\sin bx$،
تبيّن لنا أن السعة: $|a|$ والدورة: $\frac{2\pi}{|b|}$
رسمت في الشكل المقابل دورة واحدة لبيان هذه الدالة
عندما $b>0$، حيث تتغير x من 0 إلى $\frac{2\pi}{b}$ أو تتغير bx من 0 إلى 2π
سنناقش الآن بيان الدالة:

$$y=a\sin(bx-h) \implies y=a\sin\left(b\left(x-\frac{h}{b}\right)\right),\ b,h\in\mathbb{R},\ b>0$$

سيكون هذا البيان بيان دالة جيبية، السعة: $|a|$
بما أن $(bx-h)$ تتغير من 0 إلى 2π، سنرسم دورة واحدة.
تبدأ هذه الدورة عندما: $x=\frac{h}{b}$ ، $bx-h=0$ وتنتهي عندما:
$x=\frac{2\pi}{b}+\frac{h}{b}$ ، $bx-h=2\pi$ (انظر الشكل المقابل).
نرى أن بيان $y=a\sin(bx-h)$
ينتج من إزاحة أفقية لبيان $y=a\sin bx$، بمقدار $\frac{h}{b}$ إلى جهة اليمين عندما $h>0$، وإلى جهة اليسار عندما $h<0$
وبالمثل لبيان الدالة: $y=a\cos(bx-h)$

مثال (4)

صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين:

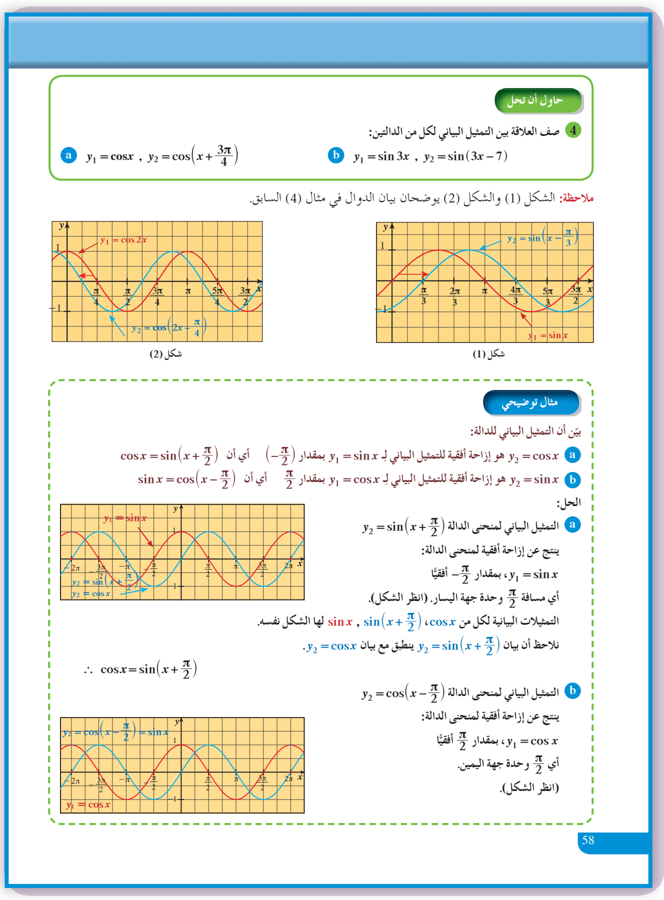
a) $y_1=\sin x\ ,\ y_2=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$
b) $y_1=\cos 2x\ ,\ y_2=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

الحل:

a) $y_1=\sin x,\ y_2=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$
$\because\ h=\frac{\pi}{3}$
$\therefore$ يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة $y_2=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$
من التمثيل البياني للدالة $y_1=\sin x$ بإزاحة أفقية مقدارها $\frac{\pi}{3}$ لجهة اليمين.

b) $y_1=\cos 2x\ ,\ y_2=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$
$y_2=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$
$=\cos\left(2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\right)$
$=\cos\left(2\left(x-\left(\frac{-\pi}{8}\right)\right)\right)$
يمكن الحصول على التمثيل البياني لِـ $y_2=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ من التمثيل البياني لِـ $y_1=\cos 2x$ بإزاحة أفقية مقدارها $\frac{\pi}{8}$ لجهة اليسار.

57



حاول أن تحل

4 صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين:
a) $y_1=\cos x\ ,\ y_2=\cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$
b) $y_1=\sin 3x\ ,\ y_2=\sin(3x-7)$

ملاحظة: الشكل (1) والشكل (2) يوضحان بيان الدوال في مثال (4) السابق.

شكل (2) شكل (1)

مثال توضيحي

بيّن أن التمثيل البياني للدالة:
a) $y_2=\cos x$ هو إزاحة أفقية للتمثيل البياني لِـ $y_1=\sin x$ بمقدار $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ أي أن $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$
b) $y_2=\sin x$ هو إزاحة أفقية للتمثيل البياني لِـ $y_1=\cos x$ بمقدار $\frac{\pi}{2}$ أي أن $\sin x=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

الحل:

a) التمثيل البياني لمنحنى الدالة $y_2=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$
ينتج عن إزاحة أفقية لمنحنى الدالة:
$y_1=\sin x$، بمقدار $-\frac{\pi}{2}$ أفقيًّا
أي مسافة $\frac{\pi}{2}$ وحدة جهة اليسار. (انظر الشكل).
التمثيلات البيانية لكل من $\cos x$، $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $\sin x$ لها الشكل نفسه.
نلاحظ أن بيان $y_2=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ ينطبق مع بيان $y_2=\cos x$.
$\therefore\ \cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

b) التمثيل البياني لمنحنى الدالة $y_2=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$
ينتج عن إزاحة أفقية لمنحنى الدالة:
$y_1=\cos x$، بمقدار $\frac{\pi}{2}$ أفقيًّا
أي $\frac{\pi}{2}$ وحدة جهة اليمين.
(انظر الشكل).

58

اختبار سريع

1 أثبت أن: $-\sin x$ هي إزاحة أفقية للدالة $\sin x$ بمقدار $-\pi$ أي أن $\sin(x+\pi)=-\sin x$

التمثيل البياني للدالة: $y=\sin(x+\pi)$ ينتج من إزاحة أفقية لمنحنى الدالة: $y=\sin x$ قيمتها $-\pi$ وحدة أفقية (يمكن ملاحظة أن $\sin x$، $\sin(x+\pi)$ لهما الشكل نفسه).

2 صف العلاقة لكل من الدالتين:
$y_1=\cos x$ ، $y_2=3\cos\frac{1}{2}x$

سعة الدالة y_2 هي: 3
التمثيل البياني للدالة: $y_2=3\cos\frac{1}{2}x$ هو تمدد أفقي معامله $\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$ وتمدد رأسي إلى أعلى معامله 3 مقارنة بالتمثيل البياني للدالة:
$y_1=\cos x$

3 أوجد الدورة لكل دالة مما يلي:

$y=\sin 3x$ $\quad \frac{2\pi}{3}$
$y=\cos 5x$ $\quad \frac{2\pi}{5}$
$y=\tan 2x$ $\quad \frac{\pi}{2}$

4 اشرح كيفية الحصول على التمثيل البياني للدالة: $y_2=-4\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{2}\right)-2$ من التمثيل البياني للدالة: $y_1=\cos x$، ثم أوجد دورة الدالة y_2

نكتب أولًا: $y_2=-4\cos\left[\frac{1}{3}\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)\right]-2$
وبالمقارنة بالصورة القياسية:
$y=a\cos(bx-h)+k$
يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة y_2 من التمثيل البياني للدالة y_1 كما يلي:

- تمدد أفقي معامله $\frac{1}{\frac{1}{3}}=3$ للحصول على $\cos\left(\frac{1}{3}x\right)$
- إزاحة أفقية إلى اليسار مقدارها $\frac{3\pi}{2}$ للحصول على $\cos\left[\frac{1}{3}\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)\right]$

- تمدد رأسي معامله $4 = |-4|$ للحصول على $-4\cos\left[\frac{1}{3}\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)\right]$ وانعكاس في محور السينات.
- إزاحة رأسية إلى الأسفل قيمتها 2 وحدة للحصول على $y_2 = -4\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{2}\right)-2$

دورة الدالة: $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

أولًا:

(a) $g(x)$

(b) انعكاس، السيني. **(c)** انعكاس، الصادي.

ثانيًا:

(a) $f_1(x)$

(b) انعكاس، السيني. **(c)** انعكاس، السيني.

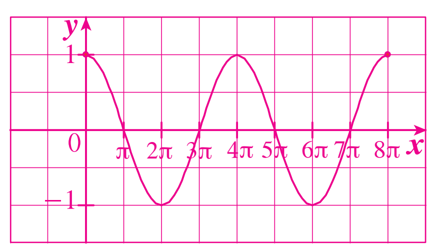
«حاول أن تحل»

1 سعة الدالة y_2 هي $|a| = \frac{1}{3}$

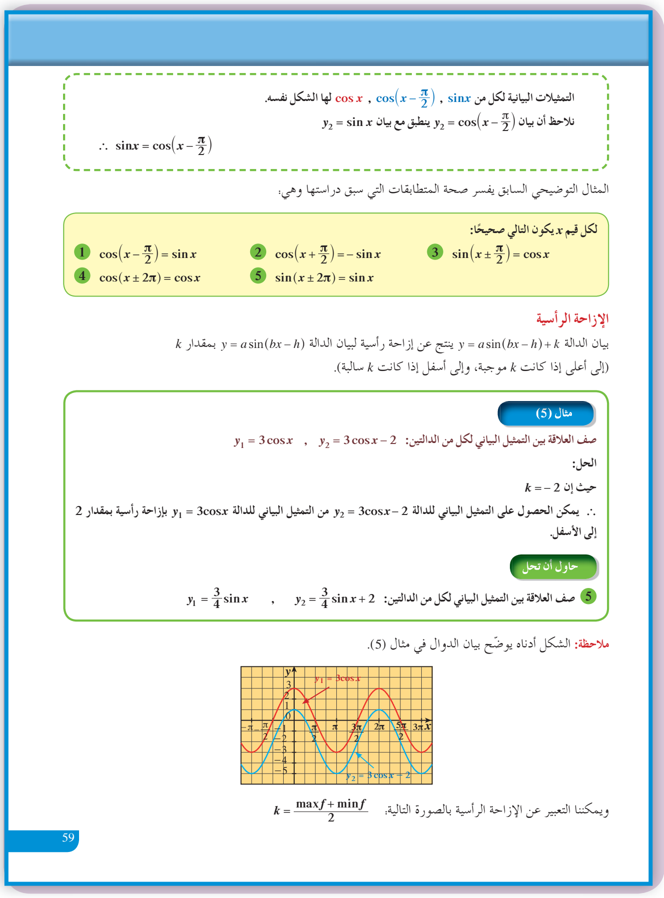
$\because$ $|a| < 1$ $\therefore$ التمثيل البياني للدالة: $y_2 = \frac{1}{3}\sin x$ هو انكماش رأسي لمنحنى الدالة $y_1 = \sin x$ بمعامل $\frac{1}{3}$

$\because$ a موجبة $\therefore$ لا يوجد انعكاس في محور السينات.

2 يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة $y_2 = \cos\frac{x}{2}$ من تمثيل $y_1 = \cos x$ بتمدد أفقي بمعامل 2.



3 تمدد رأسي بمعامل 2، تمدد أفقي بمعامل 3.



التمثيلات البيانية لكل من $\sin x$, $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$, $\cos x$ لها الشكل نفسه.

نلاحظ أن بيان $y_2 = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ ينطبق مع بيان $y_2 = \sin x$

$\therefore\ \sin x = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

المثال التوضيحي السابق يفسر صحة المتطابقات التي سبق دراستها وهي:

لكل قيم x يكون التالي صحيحًا:

1 $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \sin x$ 2 $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ 3 $\sin\left(x\pm\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

4 $\cos(x\pm 2\pi) = \cos x$ 5 $\sin(x\pm 2\pi) = \sin x$

الإزاحة الرأسية

بيان الدالة $y = a\sin(bx-h)+k$ ينتج عن إزاحة رأسية لبيان الدالة $y = a\sin(bx-h)$ بمقدار k (إلى أعلى إذا كانت k موجبة، وإلى أسفل إذا كانت k سالبة).

مثال (5)

صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين: $y_2 = 3\cos x - 2$, $y_1 = 3\cos x$

الحل:

حيث إن $k = -2$

$\therefore$ يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة $y_2 = 3\cos x - 2$ من التمثيل البياني للدالة $y_1 = 3\cos x$ بإزاحة رأسية بمقدار 2 إلى الأسفل.

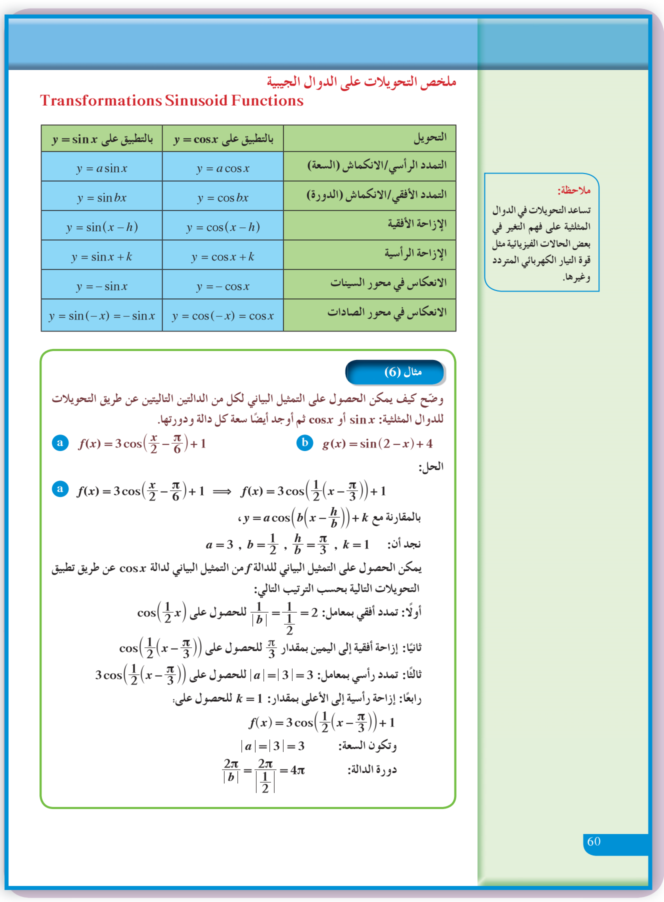
حاول أن تحل

5 صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين: $y_2 = \frac{3}{4}\sin x + 2$, $y_1 = \frac{3}{4}\sin x$

ملاحظة: الشكل أدناه يوضّح بيان الدوال في مثال (5).

ويمكننا التعبير عن الإزاحة الرأسية بالصورة التالية: $k = \frac{\max f + \min f}{2}$

59



ملخص التحويلات على الدوال الجيبية
Transformations Sinusoid Functions

بالتطبيق على $y = \sin x$	بالتطبيق على $y = \cos x$	التحويل
$y = a\sin x$	$y = a\cos x$	التمدد الرأسي/الانكماش (السعة)
$y = \sin bx$	$y = \cos bx$	التمدد الأفقي/الانكماش (الدورة)
$y = \sin(x-h)$	$y = \cos(x-h)$	الإزاحة الأفقية
$y = \sin x + k$	$y = \cos x + k$	الإزاحة الرأسية
$y = -\sin x$	$y = -\cos x$	الانعكاس في محور السينات
$y = \sin(-x) = -\sin x$	$y = \cos(-x) = \cos x$	الانعكاس في محور الصادات

ملاحظة: تساعد التحويلات في الدوال المثلثية على فهم التغير في بعض الحالات الفيزيائية مثل قوة التيار الكهربائي المتردد وغيرها.

مثال (6)

وضّح كيف يمكن الحصول على التمثيل البياني لكل من الدالتين التاليتين عن طريق التحويلات للدوال المثلثية: $\sin x$ أو $\cos x$ ثم أوجد أيضًا سعة كل دالة ودورتها.

a $f(x) = 3\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+1$ b $g(x) = \sin(2-x)+4$

الحل:

a $f(x) = 3\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+1 \Longrightarrow f(x) = 3\cos\left(\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)+1$

بالمقارنة مع $y = a\cos\left(b\left(x-\frac{h}{b}\right)\right)+k$،

نجد أن: $a = 3$, $b = \frac{1}{2}$, $\frac{h}{b} = \frac{\pi}{3}$, $k = 1$

يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة f من التمثيل البياني لدالة $\cos x$ عن طريق تطبيق التحويلات التالية بحسب الترتيب التالي:

أولًا: تمدد أفقي بمعامل: $\frac{1}{|b|} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ للحصول على $\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

ثانيًا: إزاحة أفقية إلى اليمين بمقدار $\frac{\pi}{3}$ للحصول على $\cos\left(\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

ثالثًا: تمدد رأسي بمعامل: $|a| = |3| = 3$ للحصول على $3\cos\left(\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

رابعًا: إزاحة رأسية إلى الأعلى بمقدار: $k = 1$ للحصول على:

$f(x) = 3\cos\left(\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)+1$

وتكون السعة: $|a| = |3| = 3$

دورة الدالة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$

60

4 (a) يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة $y_2 = \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$ من التمثيل البياني للدالة $y_1 = \cos x$ باستخدام إزاحة أفقية قيمتها $\frac{3\pi}{4}$ لجهة اليسار.

(b) $y_2 = \sin\left[3\left(x - \frac{7}{3}\right)\right]$ يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة $y_2 = \sin(3x - 7)$ من التمثيل البياني للدالة $y_1 = \sin 3x$ باستخدام إزاحة أفقية قيمتها $\frac{7}{3}$ لجهة اليمين وانكماش أفقي معامله $\frac{1}{3}$.

5 يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة $y_2 = \frac{3}{4}\sin x + 2$ من التمثيل البياني للدالة $y_1 = \frac{3}{4}\sin x$ باستخدام إزاحة رأسية قيمتها 2 وحدة إلى الأعلى.

6 (a) $f(x) = \cos(1 - x) + 2 = \cos(x - 1) + 2$

يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة f من التمثيل البياني للدالة $\cos x$ عن طريق تطبيق التحويلات التالية بحسب الترتيب الآتي:

(1) إزاحة جهة اليمين مقدارها 1 وحدة.

(2) إزاحة رأسية إلى الأعلى مقدارها 2 وحدة.

بالمقارنة بـ $y = a\cos(bx - h) + k$ نجد أن:

$a = 1 \ , \ b = 1$

$\therefore$ السعة: $|a| = 1$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = 2\pi$

(b) $f(x) = 2\sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 2\sin\left[\frac{1}{3}\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)\right] - 1$

يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة f من التمثيل البياني للدالة $\sin x$ عن طريق تطبيق التحويلات التالية بحسب الترتيب الآتي:

(1) تمدد أفقي معامله $\frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

(2) إزاحة أفقية إلى اليسار مقدارها $\frac{3\pi}{4}$ وحدة.

(3) تمدد رأسي بمعامل 2.

(4) إزاحة رأسية إلى الأسفل مقدارها وحدة واحدة.

السعة: $|a| = 2$

دورة الدالة: 6π

(b) $g(x) = \sin(2 - x) + 4 \implies g(x) = \sin(-(x - 2)) + 4$

$\implies g(x) = -\sin(x - 2) + 4$

بالمقارنة مع: $y = a\sin\left(b\left(x - \frac{h}{b}\right)\right) + k$،

نجد أن: $a = -1 \ , \ b = 1 \ , \ \frac{h}{b} = 2 \ , \ k = 4$

يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة g من التمثيل البياني للدالة $\sin x$ عن طريق تطبيق التحويلات التالية بحسب الترتيب الآتي:

أولًا: إزاحة أفقية إلى اليمين بمقدار $\frac{h}{b} = 2$ للحصول على $\sin(x - 2)$

ثانيًا: انعكاس في محور السينات للحصول على $-\sin(x - 2)$

ثالثًا: إزاحة رأسية إلى الأعلى بمقدار $k = 4$ للحصول على:

$g(x) = -\sin(x - 2) + 4$

وتكون السعة: $|a| = |-1| = 1$ ، دورة الدالة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

حاول أن تحل

6 وضّح كيف يمكن الحصول على التمثيل البياني لكل من الدالتين التاليتين عن طريق التمثيلات البيانية للدوال المثلثية: $\sin x$ أو $\cos x$. أوجد أيضًا سعة كل دالة ودورتها.

(a) $y = \cos(1 - x) + 2$ (b) $y = 2\sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) - 1$

والشكلان فيما يلي يوضحان الدوال من مثال (6).

مثال (7) تطبيق حياتي إثرائي

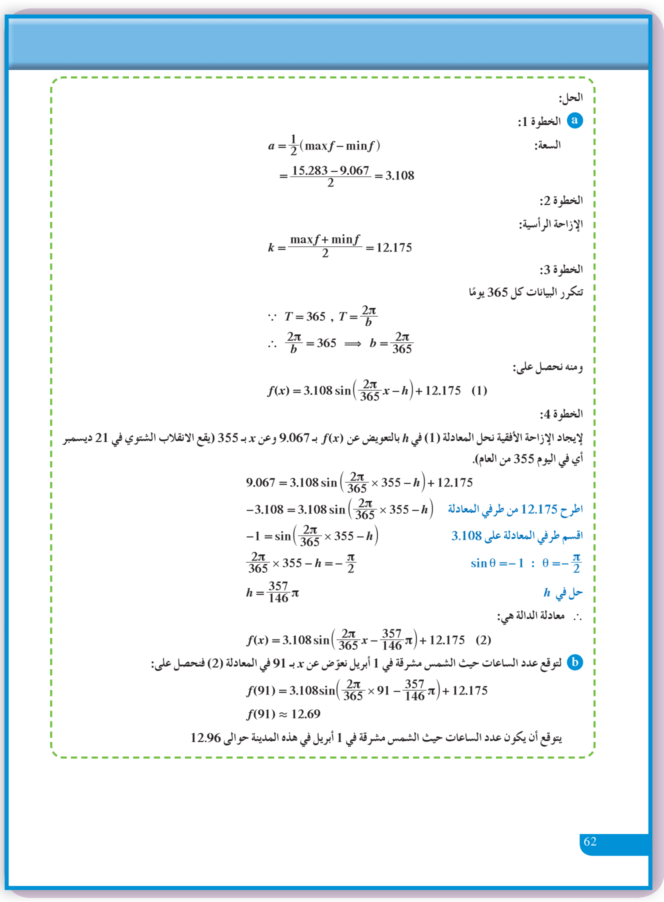
تبيّن الدراسات أن في إحدى المدن، يبلغ معدل الساعات حيث الشمس مشرقة خلال الانقلاب الصيفي 15.283 وخلال الانقلاب الشتوي 9.067

(a) أوجد دالة جيبية على الصورة $f(x) = a\sin(bx - h) + k$ تنمذج هذه البيانات.

(b) استخدم هذه الدالة لتوقع عدد الساعات حيث الشمس مشرقة في هذه المدينة في أول أبريل أي في اليوم 91 من العام.

معلومة: يحدث الانقلاب الصيفي في نصف الكرة الشمالي في 21 يونيو وفي هذا اليوم يكون أطول نهار وأقصر ليل. ويحدث الانقلاب الشتوي في نصف الكرة الشمالي في 21 ديسمبر حيث يكون أقصر نهار وأطول ليل.

61



الحل:

(a) الخطوة 1:

السعة: $a = \frac{1}{2}(\max f - \min f)$

$= \frac{15.283 - 9.067}{2} = 3.108$

الخطوة 2:

الإزاحة الرأسية:

$k = \frac{\max f + \min f}{2} = 12.175$

الخطوة 3:

تتكرر البيانات كل 365 يومًا

$\because \ T = 365 \ , \ T = \frac{2\pi}{b}$

$\therefore \ \frac{2\pi}{b} = 365 \implies b = \frac{2\pi}{365}$

ومنه نحصل على:

$f(x) = 3.108\sin\left(\frac{2\pi}{365}x - h\right) + 12.175 \quad (1)$

الخطوة 4:

لإيجاد الإزاحة الأفقية نحل المعادلة (1) في h بالتعويض عن $f(x)$ بـ 9.067 وعن x بـ 355 (يقع الانقلاب الشتوي في 21 ديسمبر أي في اليوم 355 من العام).

$9.067 = 3.108\sin\left(\frac{2\pi}{365} \times 355 - h\right) + 12.175$

اطرح 12.175 من طرفي المعادلة $-3.108 = 3.108\sin\left(\frac{2\pi}{365} \times 355 - h\right)$

اقسم طرفي المعادلة على 3.108 $-1 = \sin\left(\frac{2\pi}{365} \times 355 - h\right)$

$\sin\theta = -1 \ : \ \theta = -\frac{\pi}{2}$ $\frac{2\pi}{365} \times 355 - h = -\frac{\pi}{2}$

حل في h $h = \frac{357}{146}\pi$

$\therefore$ معادلة الدالة هي:

$f(x) = 3.108\sin\left(\frac{2\pi}{365}x - \frac{357}{146}\pi\right) + 12.175 \quad (2)$

(b) لتوقع عدد الساعات حيث الشمس مشرقة في 1 أبريل نعوّض عن x بـ 91 في المعادلة (2) فنحصل على:

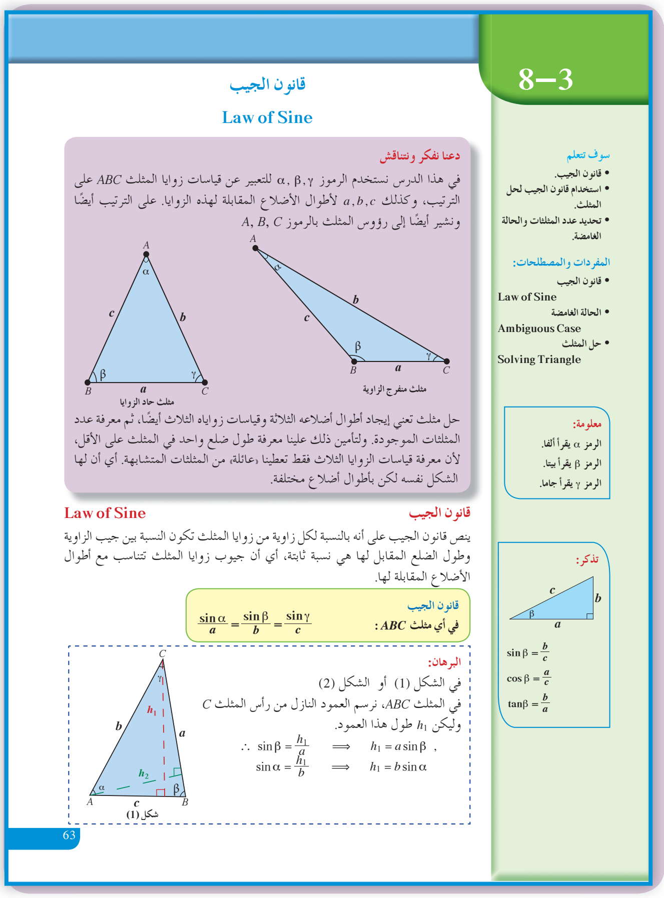
$f(91) = 3.108\sin\left(\frac{2\pi}{365} \times 91 - \frac{357}{146}\pi\right) + 12.175$

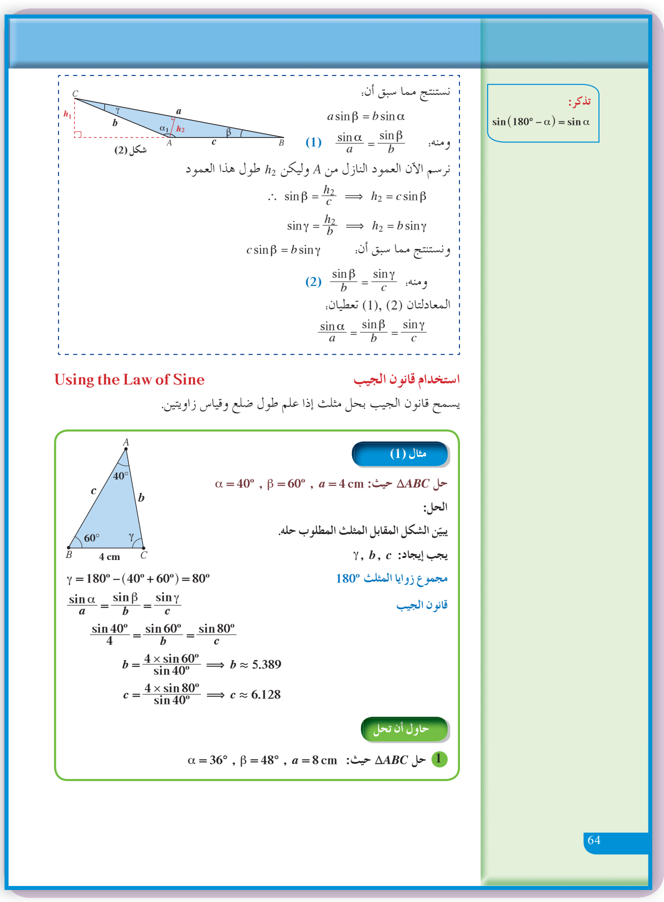
$f(91) \approx 12.69$

يتوقع أن يكون عدد الساعات حيث الشمس مشرقة في 1 أبريل في هذه المدينة حوالى 12.96

62

3–8: قانون الجيب


8–3
قانون الجيب
Law of Sine
قانون الجيب
Law of Sine
63


استخدام قانون الجيب
Using the Law of Sine
64

1 الأهداف

- يتعرف قانون الجيب.
- يستخدم قانون الجيب لحل المثلث.
- يحدد عدد المثلثات والحالة الغامضة.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

قانون الجيب – الحالة الغامضة – حل المثلث.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) أوجد دون استخدام الآلة الحاسبة:

$\sin 30^\circ,\ \sin 45^\circ,\ \sin 60^\circ,\ \sin 90^\circ,\ \sin 120^\circ,\ \sin 150^\circ$

(b) استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد:

$\sin 25^\circ,\ \sin 40^\circ,\ \sin 15^\circ,\ \sin 75^\circ,\ \sin 125^\circ$

(c) أوجد قيمة x في كل حالة:

$\sin x = 0.467\ ,\ \sin x = 0.895$

$\sin x = 0.637\ ,\ \sin x = 0.984$

(d) هل الأطوال: 10 , 6 , 4 تشكل مثلثًا؟ اشرح.

5 التدريس

يساعد قانون الجيب على إيجاد عناصر مثلث (زوايا وأضلاع) بمعلومية بعض منها وذلك بحسب المعطيات المتوفرة في هذا المثلث.

فالقانون: $\dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\beta}{b} = \dfrac{\sin\gamma}{c}$ يوفر فرصة مهمة لإيجاد ثلاثة عناصر إذا أعطيت ثلاثة عناصر منها.

اطلب إلى الطلاب كتابة هذا القانون، ثم ناقش الطلاب حول العناصر الثلاثة المطلوبة والتي تؤمن إيجاد العناصر الأخرى.

فمثلًا، إذا عرفت: $\sin\alpha$ ، $\sin\beta$ ، a فهل يمكن إيجاد:

$\sin\gamma$ ، b ، c؟

إذا عرفت $\sin\gamma$ ، a ، c فهل يمكن إيجاد: $\sin\beta$ ، b ، $\sin\gamma$؟

في الحالة الغامضة، اشرح للطلاب أنه في بعض الأحيان يمكن إيجاد مثلث واحد، وفي أحيان أخرى يوجد مثلثان، وفي حالات أخرى لا يوجد أي مثلث.

ناقش مع الطلاب هذه الحالات ومتى نحصل على كل حالة. اشرح بتوسع شروط الحصول على مثلثين، وعلى مثلث واحد، ومتى لا نحصل على أي مثلث.

في المثال (1)

يمكن استخدام قانون الجيب إذا علم طول ضلع وقياس زاويتين وليس بالضرورة الزاويتان المجاورتان للضلع.

ذكر الطلاب بإمكانية إيجاد قياس زاوية في مثلث إذا علم قياس الزاويتين الباقيتين لأن مجموع قياسات الزوايا الثلاث يساوي 180°.

في المثال (2)

تمّ استخدام قانون الجيب مرتين لحل المثلث. أشر إلى أن هذه المعطيات تسمح بإيجاد مثلث واحد فقط.

في المثال (3)

يوفر هذا المثال شروط إيجاد مثلثين، لأن:

$$\sin 49.46^\circ = \sin(130.54^\circ) = 0.76$$

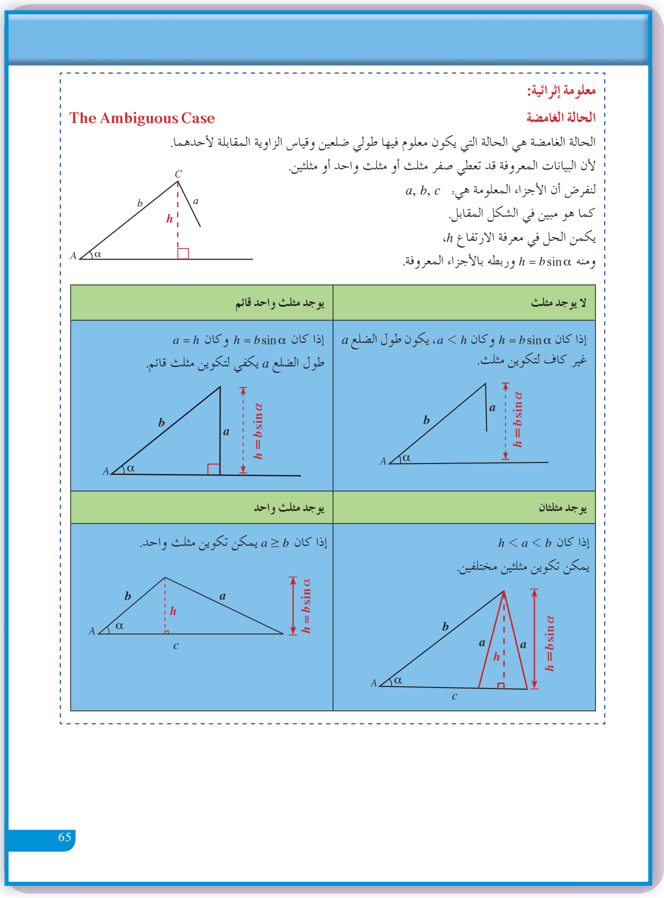
وبالتالي: $35^\circ + 130.54^\circ = 165.54^\circ < 180^\circ$

في المثال (4)

يبيّن هذا المثال كيف نستخدم قانون الجيب لمعرفة ارتفاع جبل.

في المثال (5)

استخدم قياسات الزوايا لمعرفة بُعد كل حارس عن موقع الحريق، أي معرفة طولي ضلعي مثلث إذا علم طول الضلع الثالث وقياسي زاويتين.



معلومة إثرائية:

الحالة الغامضة **The Ambiguous Case**

الحالة الغامضة هي الحالة التي يكون معلوم فيها طولي ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما.

لأن البيانات المعروفة قد تعطي صفر مثلث أو مثلث واحد أو مثلثين.

لنفرض أن الأجزاء المعلومة هي: a, b, c

كما هو مبين في الشكل المقابل.

يكمن الحل في معرفة الارتفاع h،

ومنه $h = b\sin\alpha$ وربطه بالأجزاء المعروفة.

لا يوجد مثلث	يوجد مثلث واحد قائم
إذا كان $h = b\sin\alpha$ وكان $a < h$، يكون طول الضلع a غير كاف لتكوين مثلث.	إذا كان $h = b\sin\alpha$ وكان $a = h$ طول الضلع a يكفي لتكوين مثلث قائم.
يوجد مثلثان	**يوجد مثلث واحد**
إذا كان $h < a < b$ يمكن تكوين مثلثين مختلفين.	إذا كان $a \geq b$ يمكن تكوين مثلث واحد.

6 الربط

يوفر المثالان (5) ,(4) فرصة أمام الطلاب للتعرف على كيفية الربط بين قانون الجيب ومواقف حياتية.

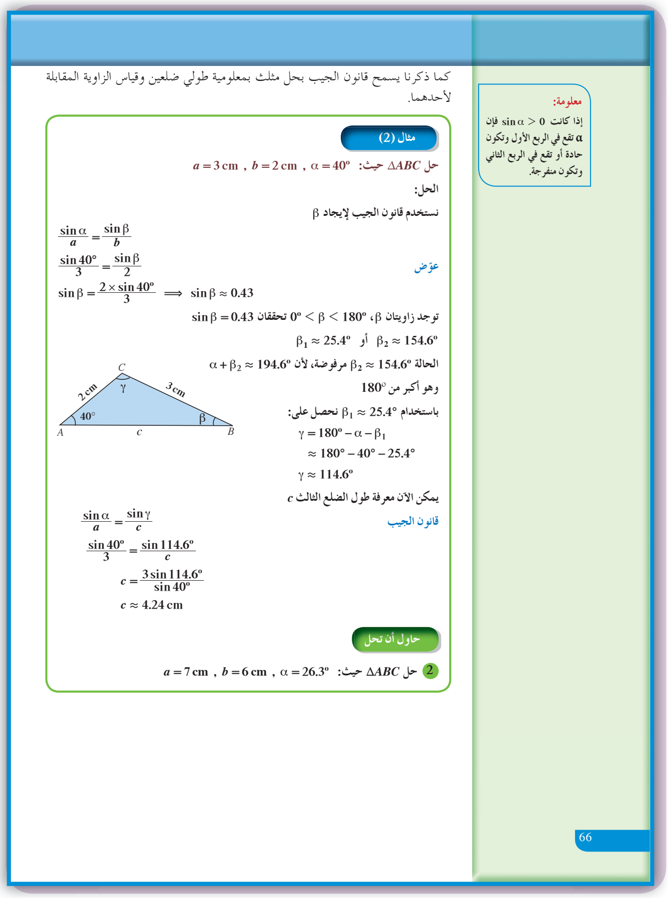
7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في الترتيب عند كتابة أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا المناظرة.

شدّد على ضرورة الترتيب في كتابة قانون الجيب والتحقق من صحة كتابة القانون قبل البدء في الحل.

8 التقييم

تابع الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» لتقف على حسن أدائهم.



معلومة:
إذا كانت $\sin\alpha > 0$ فإن α تقع في الربع الأول وتكون حادة أو تقع في الربع الثاني وتكون منفرجة.

كما ذكرنا يسمح قانون الجيب بحل مثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما.

مثال (2)

حل ΔABC حيث: $a = 3\text{ cm}\ ,\ b = 2\text{ cm}\ ,\ \alpha = 40^\circ$

الحل:

نستخدم قانون الجيب لإيجاد β

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$$

عوّض

$$\frac{\sin 40^\circ}{3} = \frac{\sin\beta}{2}$$

$$\sin\beta = \frac{2\times\sin 40^\circ}{3} \implies \sin\beta \approx 0.43$$

توجد زاويتان β، $0^\circ < \beta < 180^\circ$ تحققان $\sin\beta = 0.43$

$\beta_1 \approx 25.4^\circ$ أو $\beta_2 \approx 154.6^\circ$

الحالة $\beta_2 \approx 154.6^\circ$ مرفوضة، لأن $\alpha + \beta_2 \approx 194.6^\circ$ وهو أكبر من 180°

باستخدام $\beta_1 \approx 25.4^\circ$ نحصل على:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta_1$$
$$\approx 180^\circ - 40^\circ - 25.4^\circ$$
$$\gamma \approx 114.6^\circ$$

يمكن الآن معرفة طول الضلع الثالث c

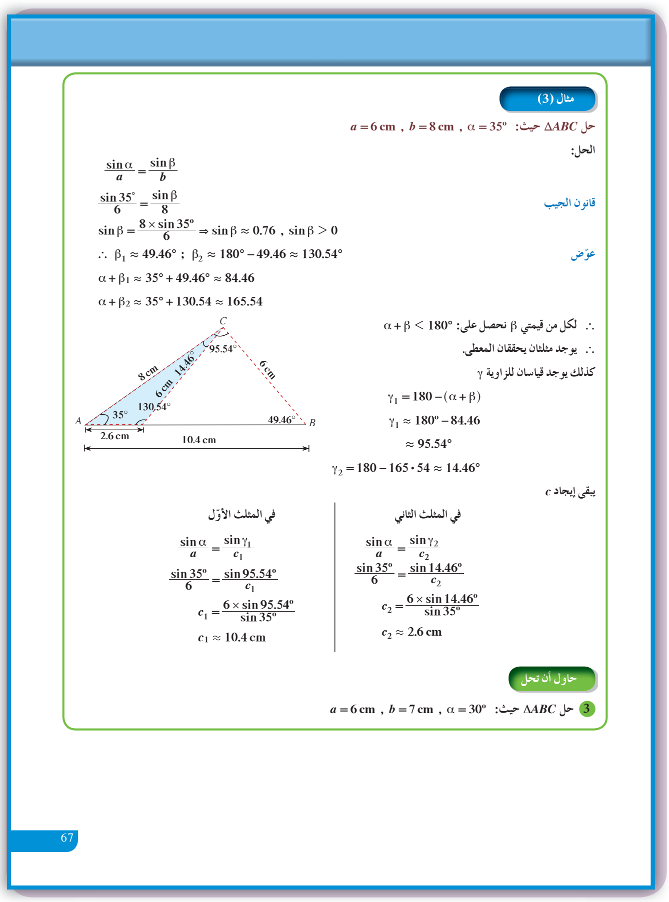
قانون الجيب

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c}$$
$$\frac{\sin 40^\circ}{3} = \frac{\sin 114.6^\circ}{c}$$
$$c = \frac{3\sin 114.6^\circ}{\sin 40^\circ}$$
$$c \approx 4.24\text{ cm}$$

حاول أن تحل

2 حل ΔABC حيث: $a = 7\text{ cm}\ ,\ b = 6\text{ cm}\ ,\ \alpha = 26.3^\circ$

66



مثال (3)

حل ΔABC حيث: $a = 6\text{ cm}\ ,\ b = 8\text{ cm}\ ,\ \alpha = 35^\circ$

الحل:

قانون الجيب

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$$

عوّض

$$\frac{\sin 35^\circ}{6} = \frac{\sin\beta}{8}$$

$$\sin\beta = \frac{8\times\sin 35^\circ}{6} \Rightarrow \sin\beta \approx 0.76\ ,\ \sin\beta > 0$$

$$\therefore\ \beta_1 \approx 49.46^\circ\ ;\ \beta_2 \approx 180^\circ - 49.46 \approx 130.54^\circ$$

$$\alpha + \beta_1 \approx 35^\circ + 49.46^\circ \approx 84.46$$

$$\alpha + \beta_2 \approx 35^\circ + 130.54 \approx 165.54$$

$\therefore$ لكل من قيمتي β نحصل على: $\alpha + \beta < 180^\circ$

$\therefore$ يوجد مثلثان يحققان المعطى.

كذلك يوجد قياسان للزاوية γ

$$\gamma_1 = 180 - (\alpha + \beta)$$
$$\gamma_1 \approx 180^\circ - 84.46$$
$$\approx 95.54^\circ$$
$$\gamma_2 = 180 - 165\cdot 54 \approx 14.46^\circ$$

يبقى إيجاد c

في المثلث الثاني

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma_2}{c_2}$$
$$\frac{\sin 35^\circ}{6} = \frac{\sin 14.46^\circ}{c_2}$$
$$c_2 = \frac{6\times\sin 14.46^\circ}{\sin 35^\circ}$$
$$c_2 \approx 2.6\text{ cm}$$

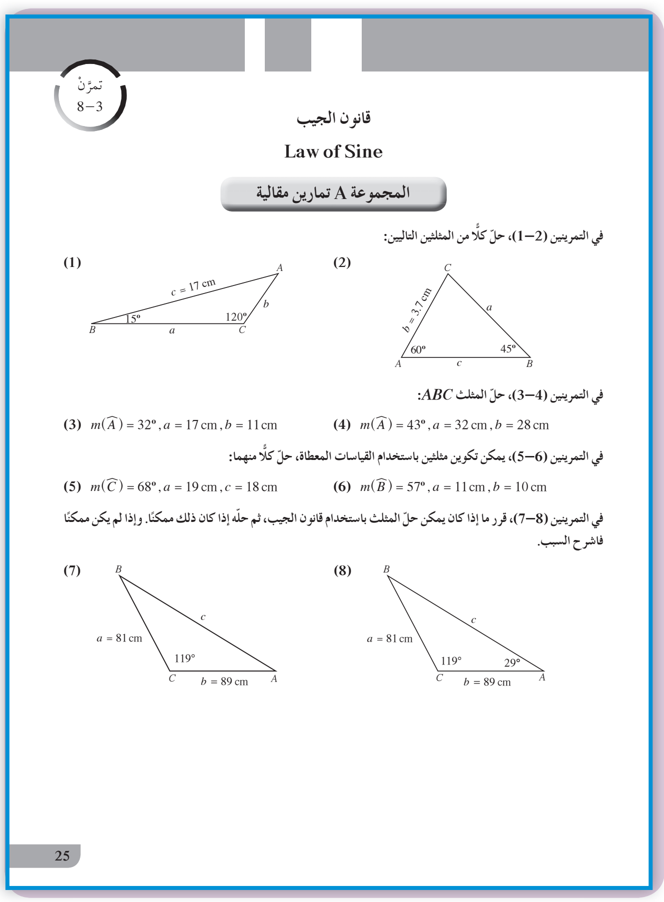
في المثلث الأوّل

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma_1}{c_1}$$
$$\frac{\sin 35^\circ}{6} = \frac{\sin 95.54^\circ}{c_1}$$
$$c_1 = \frac{6\times\sin 95.54^\circ}{\sin 35^\circ}$$
$$c_1 \approx 10.4\text{ cm}$$

حاول أن تحل

3 حل ΔABC حيث: $a = 6\text{ cm}\ ,\ b = 7\text{ cm}\ ,\ \alpha = 30^\circ$

67



تمرَّنْ 8-3

قانون الجيب

Law of Sine

المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (2–1)، حلّ كلًّا من المثلثين التاليين:

(1) (2)

في التمرينين (4–3)، حلّ المثلث ABC:

(3) $m(\widehat{A}) = 32^\circ, a = 17\text{ cm}, b = 11\text{ cm}$

(4) $m(\widehat{A}) = 43^\circ, a = 32\text{ cm}, b = 28\text{ cm}$

في التمرينين (6–5)، يمكن تكوين مثلثين باستخدام القياسات المعطاة، حلّ كلًّا منهما:

(5) $m(\widehat{C}) = 68^\circ, a = 19\text{ cm}, c = 18\text{ cm}$

(6) $m(\widehat{B}) = 57^\circ, a = 11\text{ cm}, b = 10\text{ cm}$

في التمرينين (8–7)، قرر ما إذا كان يمكن حلّ المثلث باستخدام قانون الجيب، ثم حلّه إذا كان ذلك ممكنًا. وإذا لم يكن ممكنًا فاشرح السبب.

(7) (8)

25

اختبار سريع

1 حل المثلث ABC، حيث:

$$\alpha = 53^\circ \ , \ \beta = 64^\circ \ , \ a = 7\,\text{cm}$$

قانون الجيب: $\dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\beta}{b} = \dfrac{\sin\gamma}{c}$

$\dfrac{\sin 53^\circ}{7} = \dfrac{\sin 64^\circ}{b} = \dfrac{\sin 63^\circ}{c}$

$b \approx 7.9\,\text{cm} \quad , \quad c \approx 7.8\,\text{cm}$

2 حل المثلث ABC، حيث:

$$a = 6\,\text{cm} \ , \ b = 5\,\text{cm} \ , \ \alpha = 50^\circ$$

قانون الجيب: $\dfrac{\sin 50^\circ}{6} = \dfrac{\sin\beta}{5} = \dfrac{\sin\gamma}{c}$

$\beta_1 = 39.7^\circ \ , \ \beta_2 = 140.3^\circ$

الحالة β_2 مرفوضة، لأن $140.3^\circ + 50^\circ = 190.3^\circ$

نستخدم $\beta = 39.7^\circ$ فيبقى $\gamma = 90.3^\circ$

نوجد: $\dfrac{\sin 50^\circ}{6} = \dfrac{\sin 90.3^\circ}{c}$

$c \approx 7.8\,\text{cm}$

3 حل المثلث ABC، حيث:

$$a = 8\,\text{cm} \ , \ b = 10\,\text{cm} \ , \ \alpha = 28^\circ$$

قانون الجيب: $\dfrac{\sin 28^\circ}{8} = \dfrac{\sin\beta}{10} = \dfrac{\sin\gamma}{c}$

$\beta_1 = 36^\circ \ , \ \beta_2 = 144^\circ$

$28^\circ + 144^\circ = 172^\circ$ وبالتالي يوجد مثلثان:

إذا $\beta = 36^\circ$، نجد $\gamma = 116^\circ$

$\dfrac{\sin 28^\circ}{8} = \dfrac{\sin 36^\circ}{10} = \dfrac{\sin 116^\circ}{c}$

ومنه: $c \approx 15.3\,\text{cm}$

إذا $\beta = 144^\circ$، نجد $\gamma = 8^\circ$

$\dfrac{\sin 28^\circ}{8} = \dfrac{\sin 144^\circ}{10} = \dfrac{\sin 8^\circ}{c}$

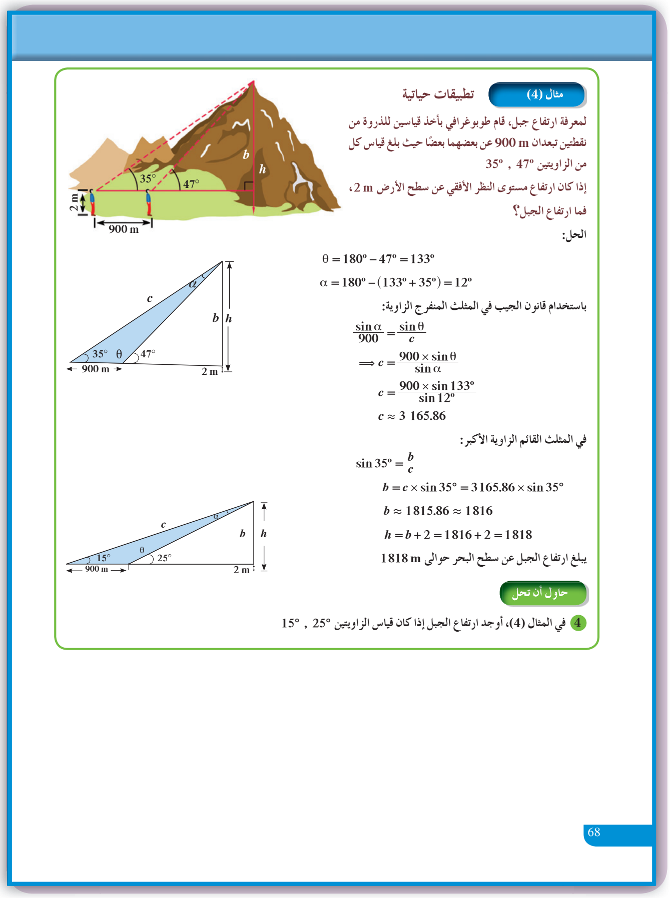
ومنه: $c \approx 2.4\,\text{cm}$

4 حل المثلث ABC، حيث:

$$a = 4 \ , \ c = 2 \ , \ \gamma = 54^\circ$$

قانون الجيب: $\dfrac{\sin\alpha}{4} = \dfrac{\sin\beta}{b} = \dfrac{\sin 54^\circ}{2}$

$\sin\alpha = 1.6 > 1$ وهذا غير ممكن لذا لا يوجد أي مثلث لهذه المعطيات.



مثال (4) تطبيقات حياتية

لمعرفة ارتفاع جبل، قام طوبوغرافي بأخذ قياسين للذروة من نقطتين تبعدان 900 m عن بعضهما بعضًا حيث بلغ قياس كل من الزاويتين 47° , 35°

إذا كان ارتفاع مستوى النظر الأفقي عن سطح الأرض 2 m، فما ارتفاع الجبل؟

الحل:

$\theta = 180^\circ - 47^\circ = 133^\circ$

$\alpha = 180^\circ - (133^\circ + 35^\circ) = 12^\circ$

باستخدام قانون الجيب في المثلث المنفرج الزاوية:

$\dfrac{\sin\alpha}{900} = \dfrac{\sin\theta}{c}$

$\Longrightarrow c = \dfrac{900 \times \sin\theta}{\sin\alpha}$

$c = \dfrac{900 \times \sin 133^\circ}{\sin 12^\circ}$

$c \approx 3\ 165.86$

في المثلث القائم الزاوية الأكبر:

$\sin 35^\circ = \dfrac{b}{c}$

$b = c \times \sin 35^\circ = 3165.86 \times \sin 35^\circ$

$b \approx 1815.86 \approx 1816$

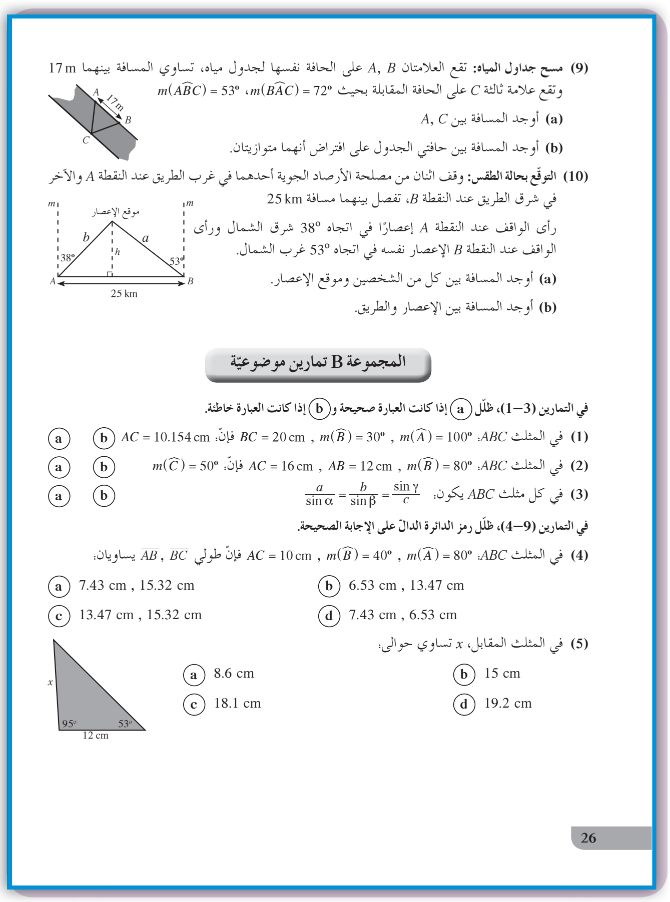
$h = b + 2 = 1816 + 2 = 1818$

يبلغ ارتفاع الجبل عن سطح البحر حوالى 1818 m

حاول أن تحل

4 في المثال (4)، أوجد ارتفاع الجبل إذا كان قياس الزاويتين 25° , 15°

68



(9) **مسح جداول المياه:** تقع العلامتان A, B على الحافة نفسها لجدول مياه، تساوي المسافة بينهما 17 m وتقع علامة ثالثة C على الحافة المقابلة بحيث $m(\widehat{BAC}) = 72^\circ$، $m(\widehat{ABC}) = 53^\circ$

(a) أوجد المسافة بين A, C

(b) أوجد المسافة بين حافتي الجدول على افتراض أنهما متوازيتان.

(10) **التوقّع بحالة الطقس:** وقف اثنان من مصلحة الأرصاد الجوية أحدهما في غرب الطريق عند النقطة A والآخر في شرق الطريق عند النقطة B، تفصل بينهما مسافة 25 km

رأى الواقف عند النقطة A إعصارًا في اتجاه 38° شرق الشمال ورأى الواقف عند النقطة B الإعصار نفسه في اتجاه 53° غرب الشمال.

(a) أوجد المسافة بين كل من الشخصين وموقع الإعصار.

(b) أوجد المسافة بين الإعصار والطريق.

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1—3)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 100^\circ$, $m(\widehat{B}) = 30^\circ$, $BC = 20\,\text{cm}$ فإنّ: $AC = 10.154\,\text{cm}$ (a) (b)

(2) في المثلث ABC: $m(\widehat{B}) = 80^\circ$, $AB = 12\,\text{cm}$, $AC = 16\,\text{cm}$ فإنّ: $m(\widehat{C}) = 50^\circ$ (a) (b)

(3) في كل مثلث ABC يكون: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{\sin\gamma}{c}$ (a) (b)

في التمارين (4—9)، ظلّل رمز الدائرة الدالّ على الإجابة الصحيحة.

(4) في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 80^\circ$, $m(\widehat{B}) = 40^\circ$, $AC = 10\,\text{cm}$ فإنّ طولي $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ يساويان:

(a) 7.43 cm , 15.32 cm
(b) 6.53 cm , 13.47 cm
(c) 13.47 cm , 15.32 cm
(d) 7.43 cm , 6.53 cm

(5) في المثلث المقابل، x تساوي حوالى:

(a) 8.6 cm
(b) 15 cm
(c) 18.1 cm
(d) 19.2 cm

26

9 إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

1 $\frac{\sin 36^\circ}{8} = \frac{\sin 48^\circ}{b} = \frac{\sin 96^\circ}{c}$

$b \approx 10.11\,\text{cm}\ ,\ c \approx 13.54\,\text{cm}$

2 $\frac{\sin 26.3^\circ}{7} = \frac{\sin\beta}{6} = \frac{\sin\gamma}{c}$

$\beta = 22.32^\circ\ ,\ \gamma = 131.38^\circ$

$c \approx 11.85\,\text{cm}$

3 $\frac{\sin 30^\circ}{6} = \frac{\sin\beta}{7} = \frac{\sin\gamma}{c}$

$\beta_1 = 35.7^\circ\ ,\ \beta_2 = 144.3^\circ$

$144.3^\circ + 30^\circ = 174.3^\circ < 180^\circ$

لذا يوجد مثلثان.

إذا $\beta = 35.7^\circ$ نحصل على $\gamma = 114.3^\circ$

ومنه $c \approx 11\,\text{cm}$

إذا $\beta = 144.3^\circ$ نحصل على $\gamma = 5.7^\circ$

ومنه $c \approx 1.2\,\text{cm}$

4 $\theta = 180^\circ - 25^\circ = 155^\circ$

$\alpha = 180^\circ - (155^\circ + 15^\circ) = 10^\circ$

$\frac{\sin 10^\circ}{900} = \frac{\sin 155^\circ}{c}$

ومنه $c \approx 2190\,\text{m}$

في المثلث قائم الزاوية $\sin 15^\circ = \frac{h}{c}$

$h \approx 567\,\text{m}$

ارتفاع الجبل: $567 + 2 = 569\,\text{m}$

5 $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{B}) = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

$\frac{\sin 110^\circ}{7} = \frac{\sin\gamma}{5} = \frac{\sin\alpha}{BC}$

$\gamma = 42.16^\circ\ ,\ \alpha = 27.84^\circ$

$BC \approx 3.48\,\text{km}$

مسافة السباق حوالي: $5 + 7 + 3.48 = 15.48\,\text{km}$

مثال (5) تطبيقات حياتية

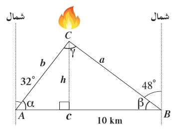
رأى حارس الغابة عند موقع الحراسة A حريقًا في اتجاه 32° شرق الشمال.

في حين رأى حارس آخر في موقع الحراسة B على بعد 10 km شرق الموقع A الحريق نفسه في اتجاه 48° غرب الشمال.

أوجد المسافة بين كل حارس وموقع الحريق.

الحل:

نمذج



لتكن C هي موقع الحريق.

$\alpha = 58^\circ\ ,\ \beta = 42^\circ$،

وتحتاج إلى حساب b, a في المثلث ABC

$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$

$= 180 - (58^\circ + 42^\circ) = 80^\circ$

قانون الجيب

$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$

$\frac{\sin 58^\circ}{a} = \frac{\sin 80^\circ}{10}\ ,\ \frac{\sin 42^\circ}{b} = \frac{\sin 80^\circ}{10}$

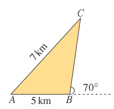
$a = \frac{10\sin 58^\circ}{\sin 80^\circ} \implies a \approx 8.611\,\text{cm}\ ,\ b \approx \frac{10\sin 42^\circ}{\sin 80^\circ} \Rightarrow b \approx 6.794\,\text{cm}$

يبعد موقع الحريق حوالى 6.79 km عن موقع الحراسة A وحوالى 8.61 km عن موقع الحراسة B

حاول أن تحل

5 يمثل الشكل المقابل مسار اليخوت في أحد السباقات انطلاقًا من النقطة A إلى النقطة B ثم النقطة C ثم إلى النقطة A

أوجد مسافة السباق.



69

(6) مثلث قياسات زواياه: $50^\circ, 60^\circ, 70^\circ$، طول أصغر ضلع فيه هو 9 cm طول أطول ضلع حوالي:

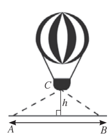
(a) 11 cm (b) 11.5 cm (c) 12 cm (d) 12.5 cm

(7) القياسات المعطاة في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 56^\circ$, $AC = 23\,\text{cm}$, $AB = 19\,\text{cm}$، طول $\overline{BC}$ يساوي:

(a) 12 cm (b) 18 cm

(c) 19 cm (d) لا يمكن استخدام قانون الجيب

(8) رأى شخصان، أحدهما يقف عند النقطة A والثاني عند النقطة B، منطادًا، حيث المسافة بينهما 3 km. إذا كان قياس زاوية الارتفاع عند النقطة A هي 28° وقياس زاوية الارتفاع عند النقطة B هي 37°، فإنّ ارتفاع المنطاد عن سطح الأرض هو:



(a) $h \approx 1200\,\text{m}$ (b) $h \approx 2\,500\,\text{m}$

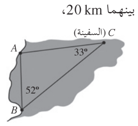
(c) $h \approx 940\,\text{m}$ (d) $h \approx 880\,\text{m}$

(9) تقع منارتان A , B على خط واحد من الشمال إلى الجنوب وتساوي المسافة بينهما 20 km،

إذا كان قائد السفينة موجود في الموقع C بحيث إن $m(\widehat{ACB}) = 33^\circ$

وعامل الراديو موجود في الموقع B بحيث إن: $m(\widehat{ABC}) = 52^\circ$،

فإن المسافة بين السفينة وكل من المنارتين تساوي:



(a) $AC \approx 13.8\,\text{km}\ , BC \approx 10.9\,\text{km}$ (b) $AC \approx 32.6\,\text{km}\ , BC \approx 36.6\,\text{km}$

(c) $AC \approx 28.9\,\text{km}\ , BC \approx 10.9\,\text{km}$ (d) $AC \approx 28.9\,\text{km}\ , BC \approx 36.6\,\text{km}$

27

8–4: قانون جيب التمام

1 الأهداف

- يتعرف قانون جيب التمام.
- يستخدم قانون جيب التمام لإيجاد حلول لمثلث.
- يجد مساحة مثلث.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

قانون جيب التمام.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) أوجد دون استخدام الآلة الحاسبة:

$\cos 30^\circ,\ \cos 45^\circ,\ \cos 60^\circ,\ \cos 90^\circ,\ \cos 120^\circ,$

$\cos 150^\circ,\ \cos 210^\circ$

(b) استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد:

$\cos 35^\circ, \cos 70^\circ, \cos 100^\circ, \cos 145^\circ, \cos 217^\circ$

(c) أوجد مجموعة حل المعادلة:

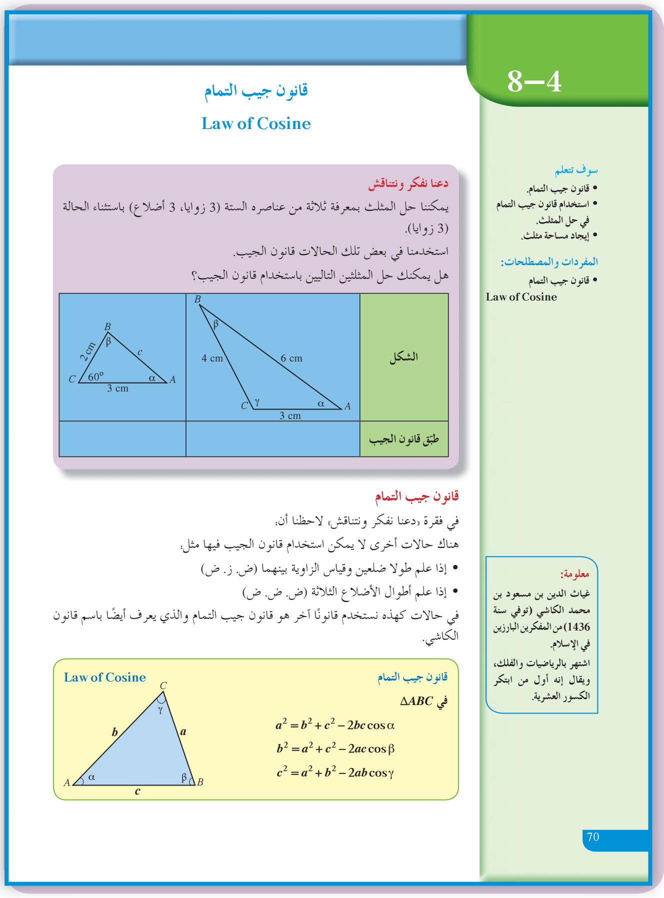
$$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$$

5 التدريس

يعتبر قانون جيب التمام خطوة مرافقة لقانون الجيب، وهو يعتمد أيضًا على معرفة 3 عناصر من المثلث لأنه يمكن من خلالها معرفة 3 عناصر متبقية.

أخبر الطلاب أنه يمكن استخدام قانون الجيب حيث تدعو الحاجة، وكذلك الأمر بالنسبة إلى قانون جيب التمام، وأن لكل قانون ميزاته وخصائصه.

المهم أن في قانون الجيب نستخدم جيب الزاوية، أما في قانون جيب التمام فنستخدم جيب تمام الزاوية مع العلم بأن دائمًا لدينا متطابقة فيثاغورث: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$، لذا يمكن الانتقال من قانون الجيب إلى قانون جيب التمام وبالعكس أيضًا وذلك بحسب المسألة المطروحة.



8–4

قانون جيب التمام

Law of Cosine

سوف تتعلم
- قانون جيب التمام.
- استخدام قانون جيب التمام في حل المثلث.
- إيجاد مساحة مثلث.

المفردات والمصطلحات:
- قانون جيب التمام Law of Cosine

دعنا نفكر ونتناقش

يمكننا حل المثلث بمعرفة ثلاثة من عناصره الستة (3 زوايا، 3 أضلاع) باستثناء الحالة (3 زوايا).

استخدمنا في بعض تلك الحالات قانون الجيب.

هل يمكنك حل المثلثين التاليين باستخدام قانون الجيب؟

الشكل	B, β, 4 cm, 6 cm, C, γ, α, A, 3 cm	B, β, 2 cm, c, C, 60°, α, A, 3 cm
طبّق قانون الجيب		

قانون جيب التمام

في فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» لاحظنا أن:

هناك حالات أخرى لا يمكن استخدام قانون الجيب فيها مثل:

- إذا علم طولا ضلعين وقياس الزاوية بينهما (ض. ز. ض)
- إذا علم أطوال الأضلاع الثلاثة (ض. ض. ض)

في حالات كهذه نستخدم قانونًا آخر هو قانون جيب التمام والذي يعرف أيضًا باسم قانون الكاشي.

معلومة:
غياث الدين بن مسعود بن محمد الكاشي (توفي سنة 1436) من المفكرين البارزين في الإسلام.
اشتهر بالرياضيات والفلك، ويقال إنه أول من ابتكر الكسور العشرية.

قانون جيب التمام Law of Cosine

في ΔABC

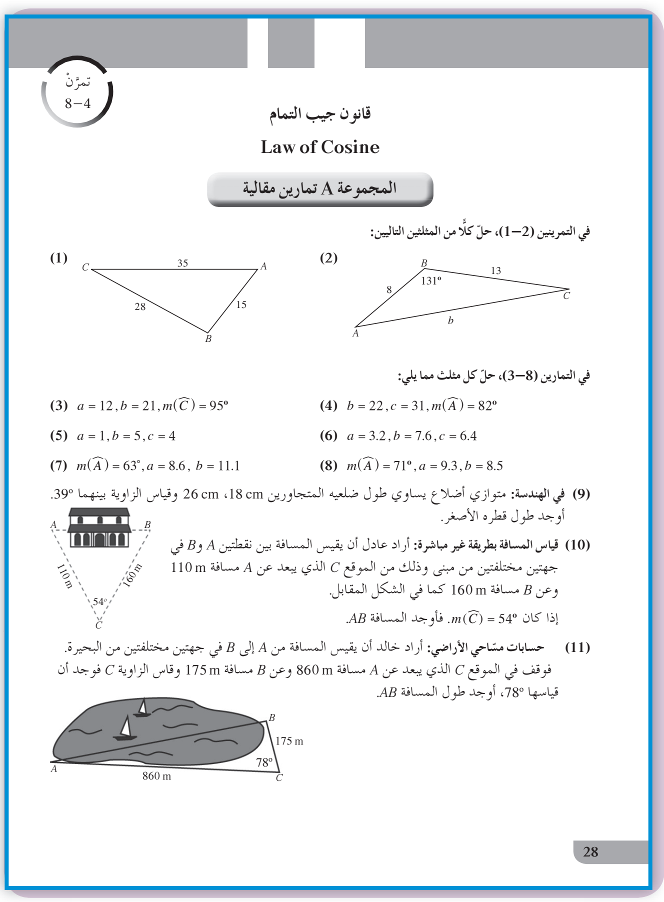
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

C, γ, b, a, A, α, β, B, c

70



تمرَّنْ 8–4

قانون جيب التمام

Law of Cosine

المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (1–2)، حلّ كلًّا من المثلثين التاليين:

(1) C, 35, A, 28, 15, B

(2) B, 131°, 13, 8, C, A, b

في التمارين (3–8)، حلّ كل مثلث مما يلي:

(3) $a = 12, b = 21, m(\widehat{C}) = 95^\circ$

(4) $b = 22, c = 31, m(\widehat{A}) = 82^\circ$

(5) $a = 1, b = 5, c = 4$

(6) $a = 3.2, b = 7.6, c = 6.4$

(7) $m(\widehat{A}) = 63^\circ, a = 8.6, b = 11.1$

(8) $m(\widehat{A}) = 71^\circ, a = 9.3, b = 8.5$

(9) **في الهندسة:** متوازي أضلاع يساوي طول ضلعيه المتجاورين 18 cm، 26 cm وقياس الزاوية بينهما 39°. أوجد طول قطره الأصغر.

(10) **قياس المسافة بطريقة غير مباشرة:** أراد عادل أن يقيس المسافة بين نقطتين A وB في جهتين مختلفتين من مبنى وذلك من الموقع C الذي يبعد عن A مسافة 110 m وعن B مسافة 160 m كما في الشكل المقابل.
إذا كان $m(\widehat{C}) = 54^\circ$. فأوجد المسافة AB.

A, B, 110 m, 160 m, 54°, C

(11) **حسابات مسّاحي الأراضي:** أراد خالد أن يقيس المسافة من A إلى B في جهتين مختلفتين من البحيرة. فوقف في الموقع C الذي يبعد عن A مسافة 860 m وعن B مسافة 175 m وقاس الزاوية C فوجد أن قياسها 78°، أوجد طول المسافة AB.

B, 175 m, 78°, A, 860 m, C

28

ذكّر الطلاب أن زاوية المثلث المنفرجة (أكبر من 90° وأصغر من 180°) لها جيب تمام قيمته سالبة.

في المثالين (1), (2)

نبّه الطلاب إلى الملاحظة الموجودة وهي أنه بالإمكان استخدام قانون الجيب ضمن شروط معينة، ولكن قانون جيب التمام يسمح بالتمييز بين الزاوية الحادة والزاوية المنفرجة وذلك من خلال إشارة جيب تمام الزاوية.

إذا كانت موجبة فسيكون قياس الزاوية أصغر من 90° (حادة) وإذا كانت سالبة فسيكون قياس الزاوية بين 90° و 180° (منفرجة).

في المثال (3)

هذا المثال هو عودة إلى المعادلة التربيعية. ذكّر الطلاب بقيمة المميز Δ، حيث $\Delta = b^2 - 4ac$

إذا $\Delta > 0$ فيكون لدينا حلان حقيقيان وإذا $\Delta = 0$ فيكون لدينا حلّ واحد.

وهنا نبّه الطلاب إلى إشارة كل حل، لأنه يتعامل مع أضلاع مثلث لذا لا يمكن استخدام قيم سالبة.

6 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام قانون جيب التمام عندما يكون قياس زاوية بين 90° و 180°.

ساعدهم على كتابة بعض الحالات لإيضاح هذه المسألة، مثال: في المثلث ABC،

$$AC = 9\,\text{cm}\,,\, AB = 8\,\text{cm}\,,\, \alpha = 120^\circ$$

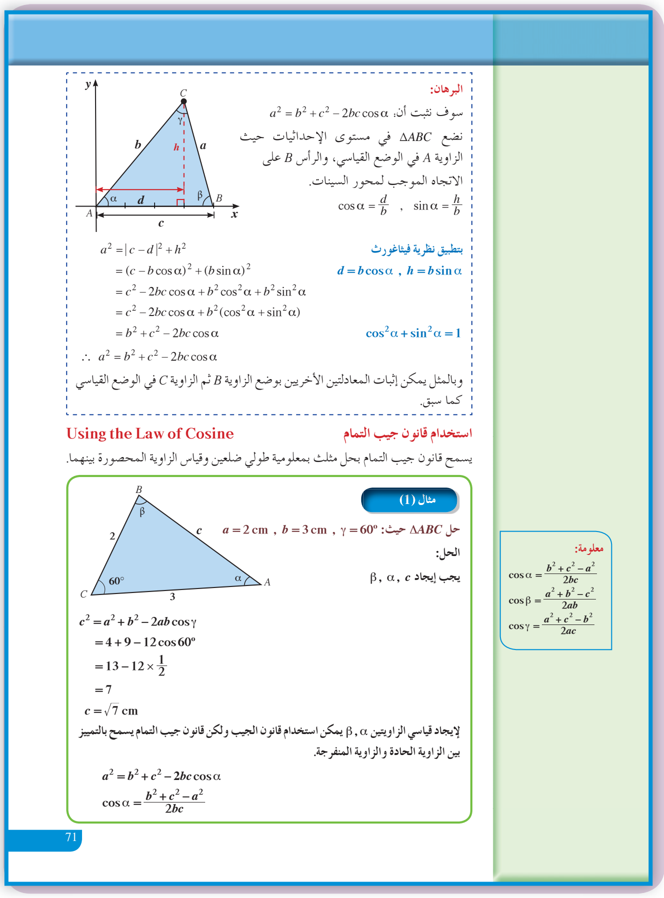
أوجد BC.

نكتب:

$$BC^2 = 8^2 + 9^2 - 2\times 8 \times 9 \cos 120^\circ$$

$$BC^2 = 64 + 81 + 2 \times 72 \times \frac{1}{2}$$

$$BC \approx 14.73\,\text{cm}$$



البرهان:

سوف نثبت أن: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

نضع ΔABC في مستوى الإحداثيات حيث الزاوية A في الوضع القياسي، والرأس B على الاتجاه الموجب لمحور السينات.

$\cos\alpha = \frac{d}{b}$, $\sin\alpha = \frac{h}{b}$

بتطبيق نظرية فيثاغورث

$d = b\cos\alpha$, $h = b\sin\alpha$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$$\begin{aligned} a^2 &= |c-d|^2 + h^2 \\ &= (c - b\cos\alpha)^2 + (b\sin\alpha)^2 \\ &= c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha \\ &= c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \end{aligned}$$

$\therefore\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

وبالمثل يمكن إثبات المعادلتين الأخريين بوضع الزاوية B ثم الزاوية C في الوضع القياسي كما سبق.

استخدام قانون جيب التمام Using the Law of Cosine

يسمح قانون جيب التمام بحل مثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

مثال (1)

حل ΔABC حيث: $a = 2\,\text{cm}$, $b = 3\,\text{cm}$, $\gamma = 60^\circ$

الحل:

يجب إيجاد β, α, c

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \\ &= 4 + 9 - 12\cos 60^\circ \\ &= 13 - 12 \times \frac{1}{2} \\ &= 7 \end{aligned}$$

$c = \sqrt{7}\,\text{cm}$

لإيجاد قياسي الزاويتين α , β يمكن استخدام قانون الجيب ولكن قانون جيب التمام يسمح بالتمييز بين الزاوية الحادة والزاوية المنفرجة.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

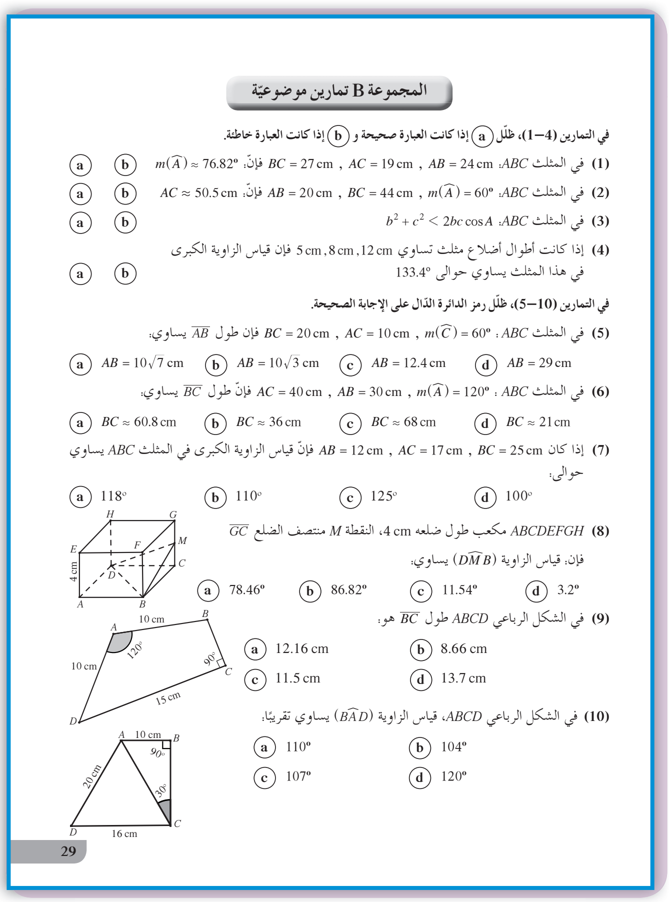
معلومة:

$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$\cos\beta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

$\cos\gamma = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

71



المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) في المثلث ABC: $AB = 24\,\text{cm}$, $AC = 19\,\text{cm}$, $BC = 27\,\text{cm}$ فإنّ: $m(\widehat{A}) \approx 76.82^\circ$ (a) (b)

(2) في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 60^\circ$, $BC = 44\,\text{cm}$, $AB = 20\,\text{cm}$ فإنّ: $AC \approx 50.5\,\text{cm}$ (a) (b)

(3) في المثلث ABC: $b^2 + c^2 < 2bc\cos A$ (a) (b)

(4) إذا كانت أطوال أضلاع مثلث تساوي $5\,\text{cm}, 8\,\text{cm}, 12\,\text{cm}$ فإن قياس الزاوية الكبرى في هذا المثلث يساوي حوالى 133.4° (a) (b)

في التمارين (5–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) في المثلث ABC : $m(\widehat{C}) = 60^\circ$, $AC = 10\,\text{cm}$, $BC = 20\,\text{cm}$ فإن طول $\overline{AB}$ يساوي:

(a) $AB = 10\sqrt{7}\,\text{cm}$ (b) $AB = 10\sqrt{3}\,\text{cm}$ (c) $AB = 12.4\,\text{cm}$ (d) $AB = 29\,\text{cm}$

(6) في المثلث ABC : $m(\widehat{A}) = 120^\circ$, $AB = 30\,\text{cm}$, $AC = 40\,\text{cm}$ فإنّ طول $\overline{BC}$ يساوي:

(a) $BC \approx 60.8\,\text{cm}$ (b) $BC \approx 36\,\text{cm}$ (c) $BC \approx 68\,\text{cm}$ (d) $BC \approx 21\,\text{cm}$

(7) إذا كان $BC = 25\,\text{cm}$, $AC = 17\,\text{cm}$, $AB = 12\,\text{cm}$ فإنّ قياس الزاوية الكبرى في المثلث ABC يساوي حوالى:

(a) 118° (b) 110° (c) 125° (d) 100°

(8) $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه $4\,\text{cm}$، النقطة M منتصف الضلع $\overline{GC}$ فإن: قياس الزاوية $(D\widehat{M}B)$ يساوي:

(a) 78.46° (b) 86.82° (c) 11.54° (d) 3.2°

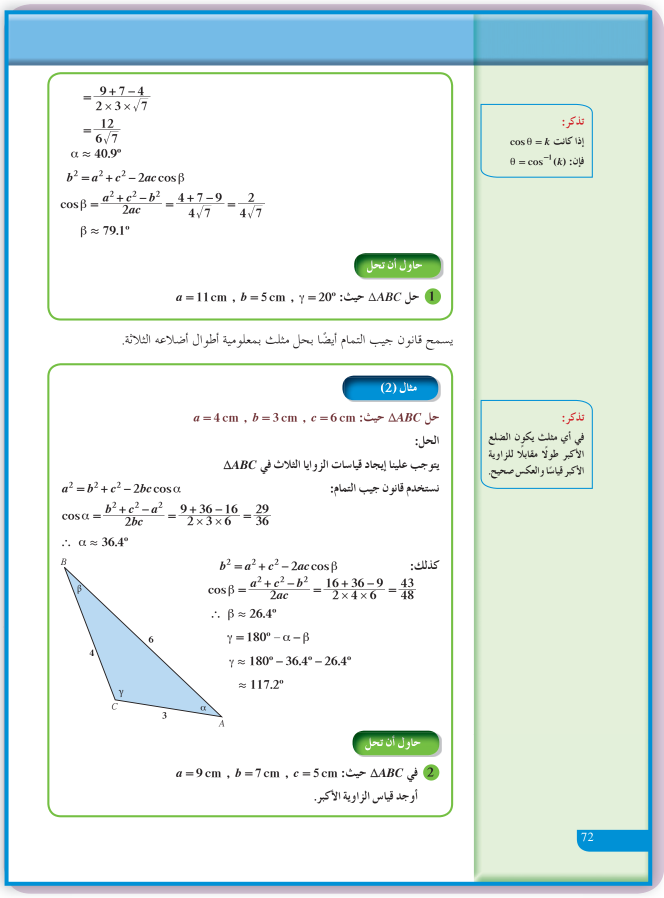
(9) في الشكل الرباعي $ABCD$ طول $\overline{BC}$ هو:

(a) $12.16\,\text{cm}$ (b) $8.66\,\text{cm}$ (c) $11.5\,\text{cm}$ (d) $13.7\,\text{cm}$

(10) في الشكل الرباعي $ABCD$، قياس الزاوية $(B\widehat{A}D)$ يساوي تقريبًا:

(a) 110° (b) 104° (c) 107° (d) 120°

29



$$= \frac{9+7-4}{2\times 3\times\sqrt{7}}$$
$$= \frac{12}{6\sqrt{7}}$$
$$\alpha \approx 40.9^{\circ}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{4+7-9}{4\sqrt{7}} = \frac{2}{4\sqrt{7}}$$
$$\beta \approx 79.1^{\circ}$$

حاول أن تحل

1 حل ΔABC حيث: $a = 11\,\text{cm}$, $b = 5\,\text{cm}$, $\gamma = 20^{\circ}$

يسمح قانون جيب التمام أيضًا بحل مثلث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة.

مثال (2)

حل ΔABC حيث: $a = 4\,\text{cm}$, $b = 3\,\text{cm}$, $c = 6\,\text{cm}$

الحل:

يتوجب علينا إيجاد قياسات الزوايا الثلاث في ΔABC

نستخدم قانون جيب التمام: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{9+36-16}{2\times 3\times 6} = \frac{29}{36}$$
$$\therefore\ \alpha \approx 36.4^{\circ}$$

كذلك: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{16+36-9}{2\times 4\times 6} = \frac{43}{48}$$
$$\therefore\ \beta \approx 26.4^{\circ}$$
$$\gamma = 180^{\circ} - \alpha - \beta$$
$$\gamma \approx 180^{\circ} - 36.4^{\circ} - 26.4^{\circ}$$
$$\approx 117.2^{\circ}$$

حاول أن تحل

2 في ΔABC حيث: $a = 9\,\text{cm}$, $b = 7\,\text{cm}$, $c = 5\,\text{cm}$

أوجد قياس الزاوية الأكبر.

تذكر:
إذا كانت $\cos\theta = k$
فإن: $\theta = \cos^{-1}(k)$

تذكر:
في أي مثلث يكون الضلع الأكبر طولًا مقابلًا للزاوية الأكبر قياسًا والعكس صحيح.

72

7 التقييم

تابع الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من أنهم قد فهموا جيّدًا كيفية استخدام القوانين والقواعد في هذا الدرس.

اختبار سريع

1 حل المثلث ABC، حيث:

$AC = 7\,\text{cm}$, $AB = 4\,\text{cm}$, $\alpha = 70^{\circ}$

$BC^2 = 16 + 49 - 56\cos 70^{\circ}$

$BC \approx 6.77\,\text{cm}$

$$\frac{\sin 70^{\circ}}{6.77} = \frac{\sin\beta}{7} = \frac{\sin\gamma}{4}$$

$\beta = 76.3^{\circ}$, $\gamma = 33.7^{\circ}$

2 حل المثلث ABC، إذا كان:

$c = 10\,\text{cm}$, $b = 8\,\text{cm}$, $a = 6\,\text{cm}$

$a = 6\,\text{cm}$, $b = 8\,\text{cm}$, $c = 10\,\text{cm}$

$$\cos\alpha = \frac{64+100-36}{10\times 8\times 2} = 0.8$$

$\alpha = 36.87^{\circ}$

$$\cos\beta = \frac{36+100-64}{2\times 6\times 10} = 0.6$$

$\beta = 53.13^{\circ}$

$\gamma = 180^{\circ} - (36.87^{\circ} + 53.13^{\circ}) = 90^{\circ}$

يمكن التأكد باستخدام معكوس نظرية فيثاغورث

$a^2 + b^2 = 36 + 64 = 100$

$c^2 = 100$ وبالتالي $a^2 + b^2 = c^2$

والمثلث قائم الزاوية في C

8 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

تحقق من إجابات الطلاب.

لا يمكن تطبيق قانون الجيب مباشرة.

«حاول أن تحل»

1) $c^2 = 121 + 25 - 2 \times 5 \times 11 \times \cos 20^\circ$

$c \approx 6.53 \text{ cm}$

$\alpha = 144.8^\circ , \ \beta = 15.2^\circ$

2) $\cos\alpha = \dfrac{49 + 25 - 81}{2 \times 7 \times 5} = -0.1$

ومنه: $\alpha = 95.74^\circ$ (الزاوية الأكبر)

3) $25 = 42.25 + c^2 - 2 \times 6.5 \times c \times \cos 25^\circ$

$c^2 - 11.78c + 17.25 = 0$

$c_1 = \dfrac{11.78 - 8.35}{2} \approx 1.71 \text{ cm}$

$c_2 = \dfrac{11.78 + 8.35}{2} \approx 10 \text{ cm}$

يوجد قيمتان لِـ c لذا يوجد مثلثان.

إذا $c = 1.71$ يكون:

$\cos\beta = \dfrac{25 + 2.92 - 42.25}{2 \times 5 \times 1.72} = -0.83$

ومنه: $\beta = 146^\circ$

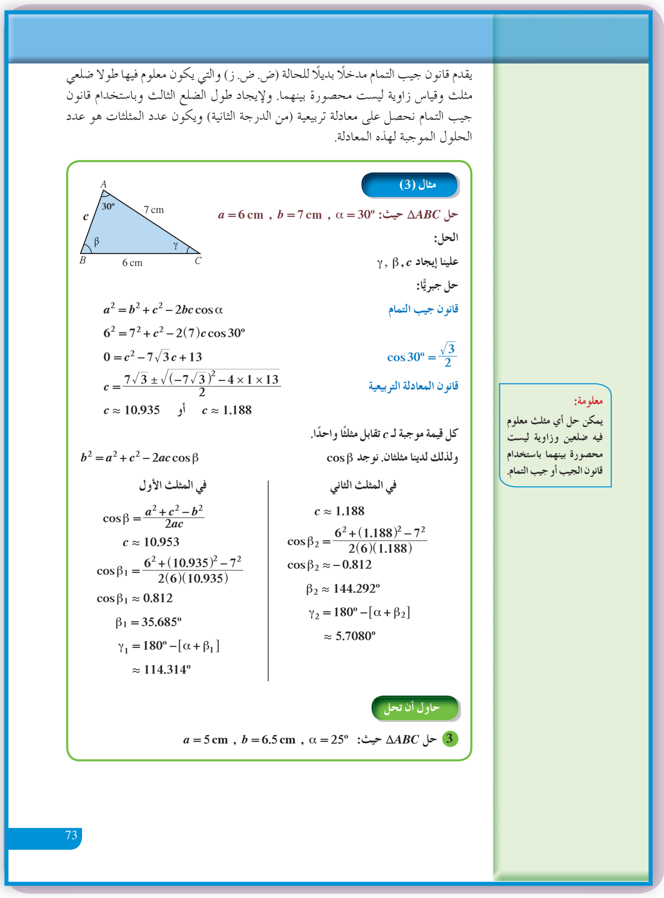
$\gamma = 180^\circ - (25^\circ + 146^\circ) = 9^\circ$

إذا $c = 10$ يكون:

$\cos\beta = \dfrac{25 + 100 - 42.25}{2 \times 5 \times 10} = 0.83$

ومنه: $\beta = 34^\circ$

$\gamma = 180^\circ - (25^\circ + 34^\circ) = 121^\circ$



يقدم قانون جيب التمام مدخلًا بديلًا للحالة (ض. ض. ز) والتي يكون معلوم فيها طولا ضلعي مثلث وقياس زاوية ليست محصورة بينهما. ولإيجاد طول الضلع الثالث وباستخدام قانون جيب التمام نحصل على معادلة تربيعية (من الدرجة الثانية) ويكون عدد المثلثات هو عدد الحلول الموجبة لهذه المعادلة.

مثال (3)

حل ΔABC حيث: $a = 6\text{ cm} \ , \ b = 7\text{ cm} \ , \ \alpha = 30^\circ$

الحل:

علينا إيجاد c , β , γ

حل جبريًّا:

قانون جيب التمام

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$6^2 = 7^2 + c^2 - 2(7)c\cos 30^\circ$

$\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0 = c^2 - 7\sqrt{3}c + 13$

قانون المعادلة التربيعية

$c = \dfrac{7\sqrt{3} \pm \sqrt{(-7\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 13}}{2}$

$c \approx 10.935$ أو $c \approx 1.188$

كل قيمة موجبة لـ c تقابل مثلثًا واحدًا.

ولذلك لدينا مثلثان. نوجد $\cos\beta$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

في المثلث الأول

$\cos\beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$c \approx 10.953$

$\cos\beta_1 = \dfrac{6^2 + (10.935)^2 - 7^2}{2(6)(10.935)}$

$\cos\beta_1 \approx 0.812$

$\beta_1 = 35.685^\circ$

$\gamma_1 = 180^\circ - [\alpha + \beta_1]$

$\approx 114.314^\circ$

في المثلث الثاني

$c \approx 1.188$

$\cos\beta_2 = \dfrac{6^2 + (1.188)^2 - 7^2}{2(6)(1.188)}$

$\cos\beta_2 \approx -0.812$

$\beta_2 \approx 144.292^\circ$

$\gamma_2 = 180^\circ - [\alpha + \beta_2]$

$\approx 5.7080^\circ$

حاول أن تحل

3) حل ΔABC حيث: $a = 5\text{ cm} \ , \ b = 6.5\text{ cm} \ , \ \alpha = 25^\circ$

معلومة:

يمكن حل أي مثلث معلوم فيه ضلعين وزاوية ليست محصورة بينهما باستخدام قانون الجيب أو جيب التمام.

73

5–8: مساحة المثلث

1 الأهداف

- يوجد مساحة مثلث باستخدام جيب الزاوية المحصورة بين ضلعين معروف طولاهما.
- يستخدم قاعدة هيرون لإيجاد مساحة مثلث.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

مساحة المثلث – قاعدة هيرون.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن السؤال التالي:

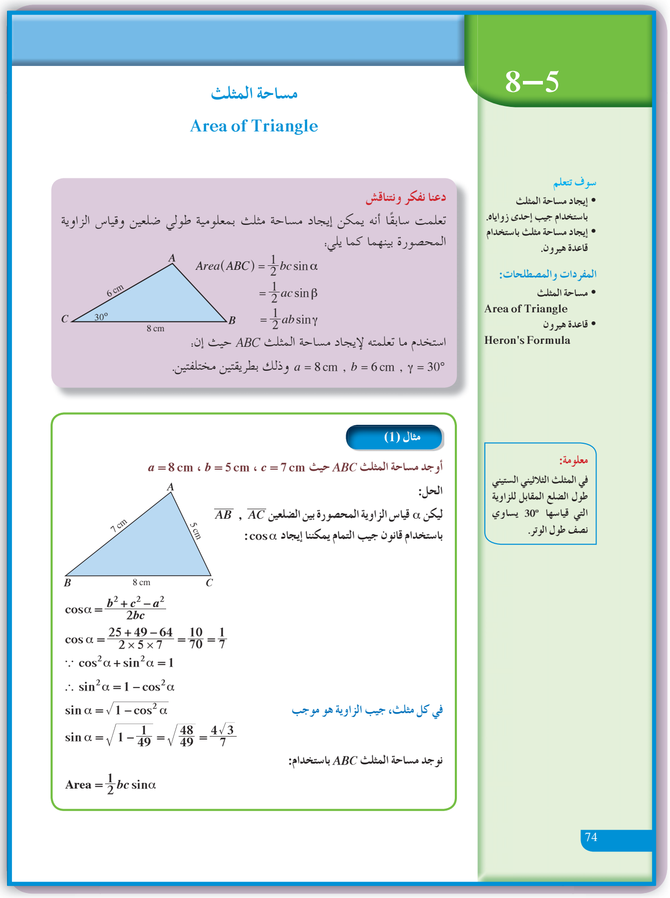
أوجد مساحة مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه 4 cm

5 التدريس

إن معرفة طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما تسمح بإيجاد مساحة مثلث. ذكّر الطلاب بقاعدة إيجاد مساحة مثلث: $\frac{1}{2} \times b \times h$

أشر إلى أن مساحة المثلث تساوي نصف مساحة متوازي الأضلاع، وبالتالي تسمح هذه الطريقة بإيجاد مساحة متوازي أضلاع إذا عُلم طولا ضلعين وقياس الزاوية بينهما. كذلك تسمح قاعدة هيرون بإيجاد مساحة مثلث إذا علمت أطوال أضلاعه الثلاثة.

أشر إلى أنه إذا عرفت أطوال أضلاع مثلث فيسمكن تطبيق قانون جيب التمام لإيجاد جيب تمام الزاوية ومنه جيب الزاوية، مما يسمح بإيجاد مساحة المثلث.



8–5

مساحة المثلث

Area of Triangle

سوف تتعلم
- إيجاد مساحة المثلث باستخدام جيب إحدى زواياه.
- إيجاد مساحة مثلث باستخدام قاعدة هيرون.

المفردات والمصطلحات:
- مساحة المثلث Area of Triangle
- قاعدة هيرون Heron's Formula

دعنا نفكر ونتناقش

تعلمت سابقًا أنه يمكن إيجاد مساحة مثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما كما يلي:

$$Area(ABC) = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

استخدم ما تعلمته لإيجاد مساحة المثلث ABC حيث إن: $a = 8\,cm$, $b = 6\,cm$, $\gamma = 30°$ وذلك بطريقتين مختلفتين.

مثال (1)

أوجد مساحة المثلث ABC حيث $a = 8\,cm$ ، $b = 5\,cm$ ، $c = 7\,cm$

الحل:

ليكن α قياس الزاوية المحصورة بين الضلعين $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ باستخدام قانون جيب التمام يمكننا إيجاد $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\cos\alpha = \frac{25+49-64}{2\times5\times7} = \frac{10}{70} = \frac{1}{7}$$

$$\because \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$\therefore \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

في كل مثلث، جيب الزاوية هو موجب

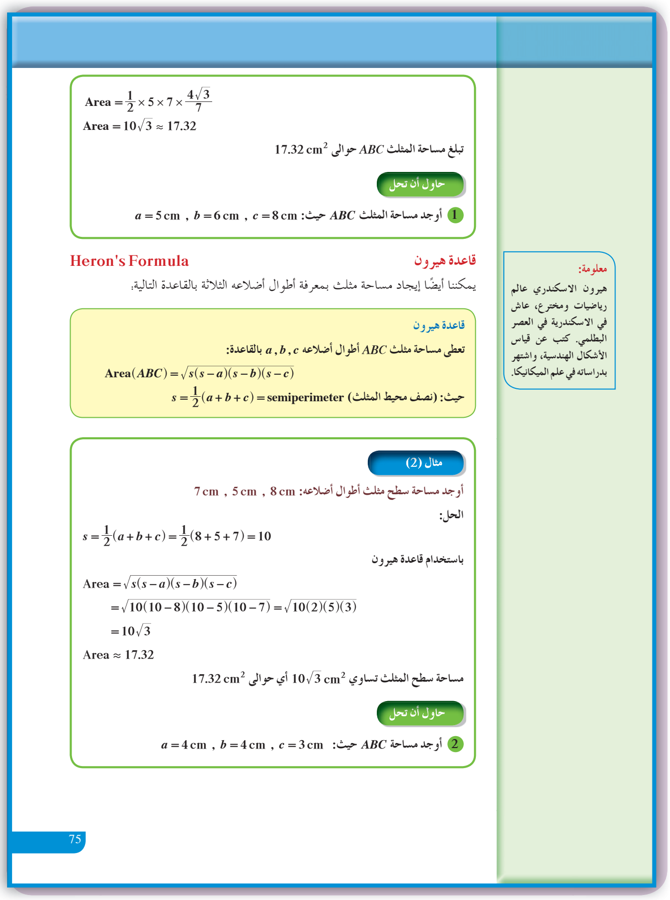
$$\sin\alpha = \sqrt{1-\frac{1}{49}} = \sqrt{\frac{48}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

نوجد مساحة المثلث ABC باستخدام:

$$Area = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

معلومة: في المثلث الثلاثيني الستيني طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها 30° يساوي نصف طول الوتر.

74



$$Area = \frac{1}{2}\times5\times7\times\frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$Area = 10\sqrt{3} \approx 17.32$$

تبلغ مساحة المثلث ABC حوالى $17.32\,cm^2$

حاول أن تحل

1 أوجد مساحة المثلث ABC حيث: $a = 5\,cm$, $b = 6\,cm$, $c = 8\,cm$

قاعدة هيرون Heron's Formula

يمكننا أيضًا إيجاد مساحة مثلث بمعرفة أطوال أضلاعه الثلاثة بالقاعدة التالية:

قاعدة هيرون

تعطى مساحة مثلث ABC أطوال أضلاعه a, b, c بالقاعدة:

$$Area(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

حيث: (نصف محيط المثلث) $s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \text{semiperimeter}$

معلومة: هيرون الاسكندري عالم رياضيات ومخترع، عاش في الاسكندرية في العصر البطلمي. كتب عن قياس الأشكال الهندسية، واشتهر بدراساته في علم الميكانيكا.

مثال (2)

أوجد مساحة سطح مثلث أطوال أضلاعه: 8 cm , 5 cm , 7 cm

الحل:

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(8+5+7) = 10$$

باستخدام قاعدة هيرون

$$Area = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{10(10-8)(10-5)(10-7)} = \sqrt{10(2)(5)(3)} = 10\sqrt{3}$$

$$Area \approx 17.32$$

مساحة سطح المثلث تساوي $10\sqrt{3}\,cm^2$ أي حوالى $17.32\,cm^2$

حاول أن تحل

2 أوجد مساحة ABC حيث: $a = 4\,cm$, $b = 4\,cm$, $c = 3\,cm$

75

لكن قاعدة هيرون تسمح لنا بإيجاد المساحة مباشرة دون الحاجة إلى كل هذه الحسابات.

في المثال (1)

يتمّ استخدام قانون جيب التمام لمعرفة قياس إحدى زوايا المثلث مما يسمح بإيجاد مساحته. ويعتبر هذا المثال تحضيرًا لقاعدة هيرون.

في المثال (2)

هذا المثال هو تطبيق مباشر لقاعدة هيرون. عادة ما نحتاج إلى الآلة الحاسبة العلمية لاحتساب مساحة المثلث بواسطة قاعدة هيرون نظرًا إلى وجود الجذر التربيعي.

في المثال (3)

هذا المثال هو أيضًا تطبيق حياتي لاستخدام قاعدة هيرون، وهو يؤمن الربط بين الهندسة وحساب المثلثات.

6 الربط

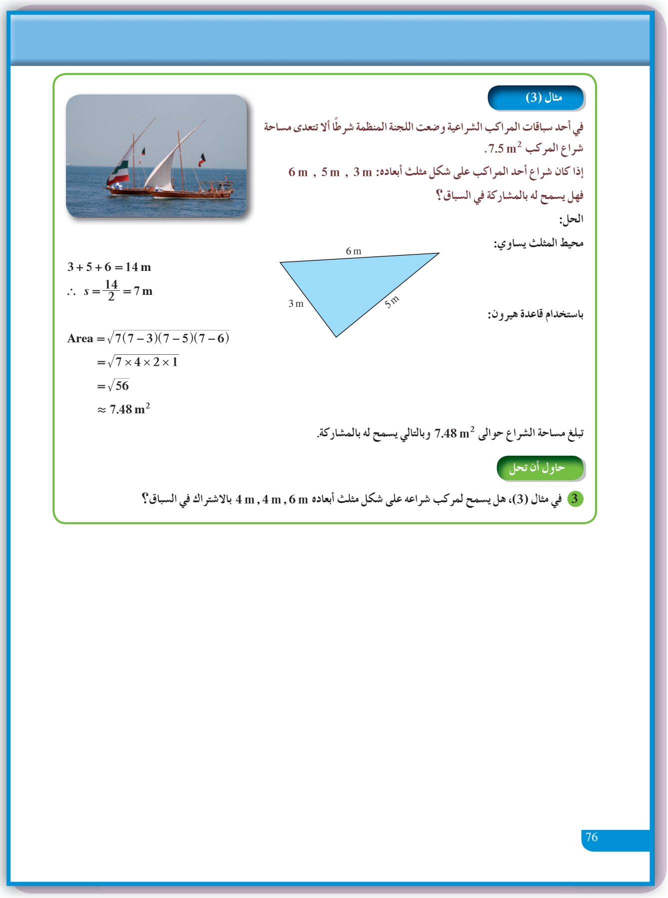
يشكل المثال (3) ترابطًا بين الرياضيات والحياة اليومية.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في اختيار الزاوية المناسبة. شدّد على وجوب اختيار الزاوية المحصورة بين الضلعين المعلوم طوليهما.

8 التقييم

تابع الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من فهمهم لكيفية استخدام القانون والقاعدة في هذا الدرس.



مثال (3)

في أحد سباقات المراكب الشراعية وضعت اللجنة المنظمة شرطًا ألا تتعدى مساحة شراع المركب $7.5\ m^2$.

إذا كان شراع أحد المراكب على شكل مثلث أبعاده: $6\ m$, $5\ m$, $3\ m$

فهل يسمح له بالمشاركة في السباق؟

الحل:

محيط المثلث يساوي:

$3+5+6=14\ m$

$\therefore\ s=\frac{14}{2}=7\ m$

باستخدام قاعدة هيرون:

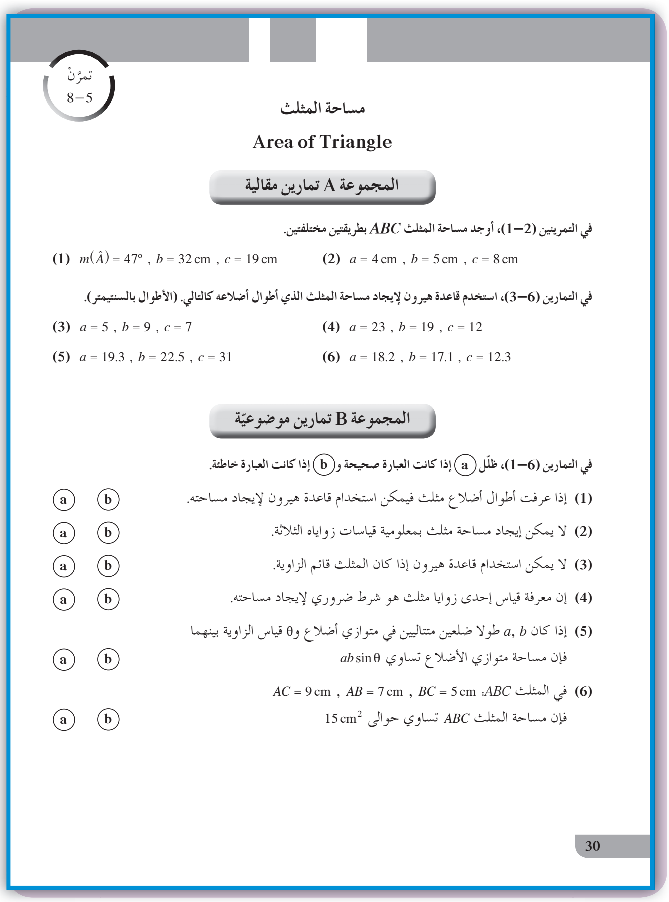
$$\begin{aligned}\text{Area} &= \sqrt{7(7-3)(7-5)(7-6)}\\ &= \sqrt{7\times4\times2\times1}\\ &= \sqrt{56}\\ &\approx 7.48\ m^2\end{aligned}$$

تبلغ مساحة الشراع حوالى $7.48\ m^2$ وبالتالي يسمح له بالمشاركة.

حاول أن تحل

3 في مثال (3)، هل يسمح لمركب شراعه على شكل مثلث أبعاده $6\ m$, $4\ m$, $4\ m$ بالاشتراك في السباق؟

76



تمرَّنْ 8–5

مساحة المثلث

Area of Triangle

المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (1–2)، أوجد مساحة المثلث ABC بطريقتين مختلفتين.

(1) $m(\hat{A})=47^\circ$, $b=32\ cm$, $c=19\ cm$
(2) $a=4\ cm$, $b=5\ cm$, $c=8\ cm$

في التمارين (3–6)، استخدم قاعدة هيرون لإيجاد مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه كالتالي. (الأطوال بالسنتيمتر).

(3) $a=5$, $b=9$, $c=7$
(4) $a=23$, $b=19$, $c=12$
(5) $a=19.3$, $b=22.5$, $c=31$
(6) $a=18.2$, $b=17.1$, $c=12.3$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا عرفت أطوال أضلاع مثلث فيمكن استخدام قاعدة هيرون لإيجاد مساحته. (a) (b)

(2) لا يمكن إيجاد مساحة مثلث بمعلومية قياسات زواياه الثلاثة. (a) (b)

(3) لا يمكن استخدام قاعدة هيرون إذا كان المثلث قائم الزاوية. (a) (b)

(4) إن معرفة قياس إحدى زوايا مثلث هو شرط ضروري لإيجاد مساحته. (a) (b)

(5) إذا كان a, b طولا ضلعين متتاليين في متوازي أضلاع وθ قياس الزاوية بينهما فإن مساحة متوازي الأضلاع تساوي $ab\sin\theta$ (a) (b)

(6) في المثلث ABC: $AC=9\ cm$, $AB=7\ cm$, $BC=5\ cm$ فإن مساحة المثلث ABC تساوي حوالى $15\ cm^2$ (a) (b)

30

اختبار سريع

1 أوجد مساحة المثلث ABC، إذا كان:

$AC = 16\text{ cm}\ ,\ AB = 12\text{ cm}\ ,\ \alpha = 150^\circ$

$$\text{Area}(ABC) = \frac{1}{2}\times 12\times 16\sin 150^\circ$$
$$= \frac{1}{2}\times 12\times 16\times\frac{1}{2}$$
$$= 48$$

مساحة المثلث $= 48\text{ cm}^2$

2 أوجد مساحة المثلث ABC، إذا كان:

$AB = 10\text{ cm}\ ,\ BC = 18\text{ cm}\ ,\ AC = 14\text{ cm}$

باستخدام قاعدة هيرون:

$$\text{Area}(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

حيث $s = \frac{10+14+18}{2} = 21$

$$\text{Area}(ABC) = \sqrt{21\times 11\times 7\times 3} = 69.65$$

أي مساحة المثلث $= 69.65\text{ cm}^2$

في التمارين (7–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) إذا كان: $m(\widehat{C}) = 40^\circ\ ,\ b = 3\text{ cm}\ ,\ a = 2\text{ cm}$ فإن مساحة المثلث ABC تساوي حوالى:

(a) 4.6 cm^2 (b) 3.86 cm^2

(c) 1.93 cm^2 (d) 2.3 cm^2

(8) مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه $9\text{ cm}\ ,\ 8\text{ cm}\ ,\ 7\text{ cm}$ هي:

(a) $6\sqrt{15}\text{ cm}^2$ (b) $12\sqrt{5}\text{ cm}^2$

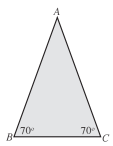
(c) $16\sqrt{3}\text{ cm}^2$ (d) $18\sqrt{3}\text{ cm}^2$

(9) مساحة مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه a هي:

(a) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\text{ units}^2$ (b) $a^2\text{ units}^2$

(c) $\frac{1}{2}a^2\text{units}^2$ (d) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\text{ units}^2$

(10) إذا كانت مساحة المثلث ABC تساوي حوالى 8 cm^2 فإن طول $\overline{AB}$ هو حوالى:



(a) 5 cm (b) 8 cm

(c) 4 cm (d) 6 cm

31

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

مساحة المثلث ABC:

طريقة أولى:

$$A = \frac{1}{2}\times 6\times 8\times\sin 30^\circ = 12\text{ cm}^2$$

طريقة ثانية:

$$\sin 30^\circ = \frac{h}{AC}\ ;\ h = 6\times\frac{1}{2} = 3$$
$$A = \frac{1}{2}\times 8\times 3 = 12\text{ cm}^2$$

«حاول أن تحل»

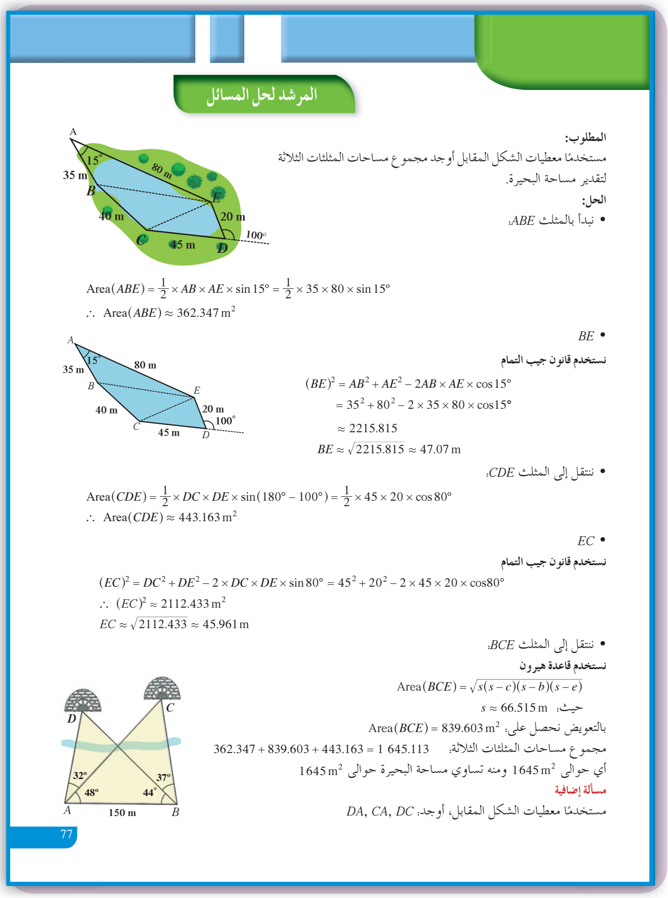
1 $$\cos\alpha = \frac{64+36-25}{2\times 6\times 8} = \frac{25}{32}$$
$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{339}}{32}$$
$$\text{Area} = \frac{1}{2}\times 8\times 6\times\frac{\sqrt{339}}{32} \approx 13.8\text{ cm}^2$$

2 $$\text{Area} = \sqrt{\frac{11}{2}\left(\frac{11}{2}-4\right)\left(\frac{11}{2}-4\right)\left(\frac{11}{2}-3\right)}$$
$$= \frac{3\sqrt{55}}{4} \approx 5.56\text{ cm}^2$$

3 $$\text{Area} = \sqrt{7(7-4)(7-4)(7-6)}$$
$$= 3\sqrt{7} \approx 7.9\text{ cm}^2 > 7.5\text{ m}^2$$

لا يسمح له بالمشاركة.

المرشد لحل المسائل



المرشد لحل المسائل

المطلوب:
مستخدمًا معطيات الشكل المقابل أوجد مجموع مساحات المثلثات الثلاثة لتقدير مساحة البحيرة.

الحل:
• نبدأ بالمثلث ABE:

$\text{Area}(ABE) = \frac{1}{2} \times AB \times AE \times \sin 15^\circ = \frac{1}{2} \times 35 \times 80 \times \sin 15^\circ$

$\therefore \ \text{Area}(ABE) \approx 362.347 \text{ m}^2$

• BE
نستخدم قانون جيب التمام

$(BE)^2 = AB^2 + AE^2 - 2AB \times AE \times \cos 15^\circ$
$= 35^2 + 80^2 - 2 \times 35 \times 80 \times \cos 15^\circ$
≈ 2215.815
$BE \approx \sqrt{2215.815} \approx 47.07 \text{ m}$

• ننتقل إلى المثلث CDE:

$\text{Area}(CDE) = \frac{1}{2} \times DC \times DE \times \sin(180^\circ - 100^\circ) = \frac{1}{2} \times 45 \times 20 \times \cos 80^\circ$

$\therefore \ \text{Area}(CDE) \approx 443.163 \text{ m}^2$

• EC
نستخدم قانون جيب التمام

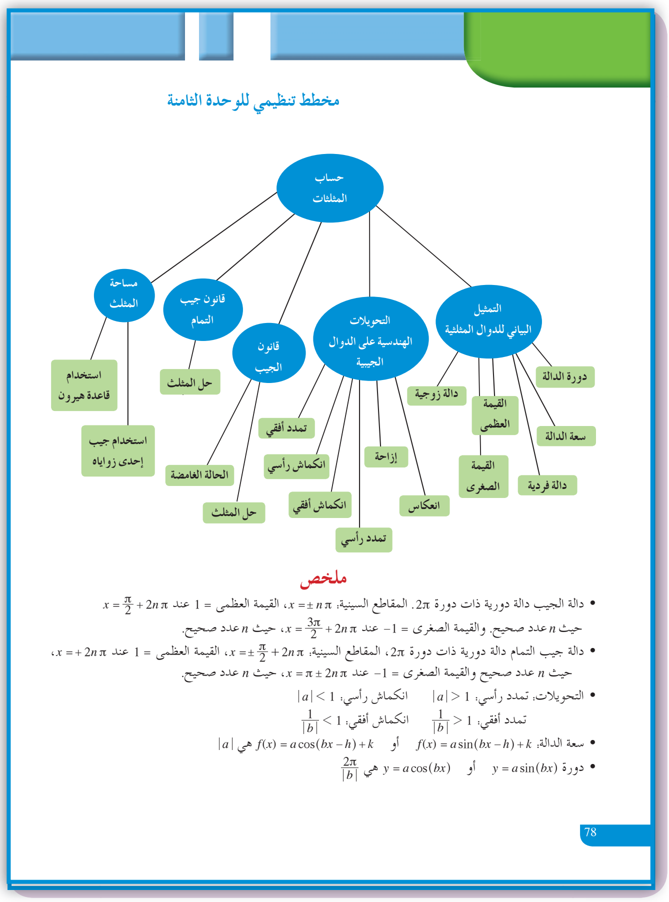
$(EC)^2 = DC^2 + DE^2 - 2 \times DC \times DE \times \sin 80^\circ = 45^2 + 20^2 - 2 \times 45 \times 20 \times \cos 80^\circ$
$\therefore \ (EC)^2 \approx 2112.433 \text{ m}^2$
$EC \approx \sqrt{2112.433} \approx 45.961 \text{ m}$

• ننتقل إلى المثلث BCE:
نستخدم قاعدة هيرون

$\text{Area}(BCE) = \sqrt{s(s-c)(s-b)(s-e)}$
حيث $s \approx 66.515$ m
بالتعويض نحصل على $\text{Area}(BCE) = 839.603 \text{ m}^2$
مجموع مساحات المثلثات الثلاثة: $362.347 + 839.603 + 443.163 = 1\,645.113$
أي حوالي 1645 m^2 ومنه تساوي مساحة البحيرة حوالي 1645 m^2

مسألة إضافية
مستخدمًا معطيات الشكل المقابل، أوجد: DA, CA, DC

77



مخطط تنظيمي للوحدة الثامنة

ملخص

• دالة الجيب دالة دورية ذات دورة 2π. المقاطع السينية: $x = \pm n\pi$، القيمة العظمى = 1 عند $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ حيث n عدد صحيح. والقيمة الصغرى = -1 عند $x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$، حيث n عدد صحيح.
• دالة جيب التمام دالة دورية ذات دورة 2π، المقاطع السينية: $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi$، القيمة العظمى = 1 عند $x = +2n\pi$، حيث n عدد صحيح والقيمة الصغرى = -1 عند $x = \pi \pm 2n\pi$، حيث n عدد صحيح.
• التحويلات: تمدد رأسي $|a| > 1$ انكماش رأسي $|a| < 1$
تمدد أفقي $\frac{1}{|b|} > 1$ انكماش أفقي $\frac{1}{|b|} < 1$
• سعة الدالة: $f(x) = a\sin(bx - h) + k$ أو $f(x) = a\cos(bx - h) + k$ هي $|a|$
• دورة $y = a\sin(bx)$ أو $y = a\cos(bx)$ هي $\frac{2\pi}{|b|}$

78

إجابة «مسألة إضافية»

باستخدام قانون الجيب نكتب:

$$\frac{\sin 44^\circ}{AD} = \frac{\sin 56^\circ}{150}$$

ومنه: $AD \approx 125.7 \text{ m}$

$$\frac{\sin 81^\circ}{AC} = \frac{\sin 51^\circ}{150}$$

ومنه: $AC \approx 190.6 \text{ m}$

باستخدام قانون جيب التمام في المثلث ACD نجد:

$$DC^2 = 15\ 800.49 + 36\,328.36 - 40\,636.8$$

$$DC \approx 107.2 \text{ m}$$

- دالة الظل دالة دورية ذات دورة π، الأصفار: $x = \pm n\pi$
- دالة الجيب، دالة الظل هما دالتان فرديتان. نقطة الأصل مركز تناظر.
- دالة جيب التمام دالة زوجية. محور الصادات محور تناظر.
- قانون الجيب: $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$
- قانون جيب التمام: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
- مساحة المثلث $= \frac{1}{2}ab\sin\gamma$
- قاعدة هيرون: $\text{Area} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

حيث $s = \text{semiperimeter}$ (نصف محيط المثلث).

تمارين إثرائية

في التمرينين (2–1)، حدّد السعة، الدورة، الإزاحة الأفقية، الإزاحة الرأسية لكل من الدوال التالية:

(1) $y = 3\cos(x+3) - 2$

(2) $y = \frac{2}{3}\sin\left(\frac{x-3}{3}\right) + 1$

في التمرينين (4–3)، صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين f, g

(3) $f(x) = 2\cos\pi x \; , \; g(x) = 2\cos 2\pi x$

(4) $f(x) = 3\sin\frac{2\pi x}{3} \; , \; g(x) = 2\sin\frac{\pi x}{3}$

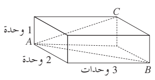
(5) إيجاد الارتفاع: وقف شخصان في جهتين مختلفتين من شجرة كبيرة بينهما مسافة 122 m، إذا كانت زاوية ارتفاع قمة الشجرة بالنسبة إلى كل منهما $15°$، $20°$، فأوجد ارتفاع الشجرة.

(6) تصميم العجلة الدوّارة: تتكوّن العجلة الدوارة من 16 عربة متساوية البعد، تبلغ المسافة بين كرسيين متجاورين 4.72 m، أوجد نصف قطر العجلة.

(7) اكتب لتتعلم: حدّد أي من الحالات التالية يمكن حلها باستخدام قانون الجيب أو قانون جيب التمام إذا علمت: $A.S.A$ ،$S.A.A$ ،$S.S.A$ ،$S.A.S$ ،$S.S.S$.

(8) الربط بين حساب المثلثات والهندسة: CAB زاوية داخلية لصندوق مستطيل الشكل، أطوال أضلاعه بالوحدات هي: 3 , 2 , 1

أوجد $m(\widehat{CAB})$



(9) في المثلث ABC أثبت أنّ: $\frac{\cos A}{a} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2abc}$

اختبار الوحدة الثامنة

في التمارين (3–1)، ارسم بيان كل دالة.

(1) $y = -2\cos x$

(2) $y = 2\sin 2x$

(3) $y = \tan\frac{3}{2}x$

في التمارين (8–4)، حدّد دورة كل دالة وسعتها إذا كان ممكنًا.

(4) $y = 1.5\sin x$

(5) $y = 5\cos\frac{x}{2}$

(6) $y = -4\sin\frac{\pi}{3}x$

(7) $y = \tan 2.5x$

(8) $y = -\tan\frac{\pi}{6}x$

(9) اكتب معادلة دالة على صورة $y = a\sin(bx)$ إذا كانت السعة 3، الدورة 4π

في التمرينين (11–10)، استخدم التحويلات لكي تصف كيف أن التمثيل البياني لمنحنيات الدوال التالية مرتبطًا بالتمثيل البياني للدوال المثلثية الأساسية $\sin x$ أو $\cos x$

(10) $y = -2\sin\frac{\pi x}{4}$

(11) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

في التمارين (15–12)، أوجد مساحة كل مثلث.

(12) $m(\widehat{A}) = 20°, b = 5\text{ cm}, c = 5\text{ cm}$

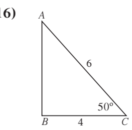
(13) $a = 4\text{ cm}, b = 3\text{ cm}, c = 5\text{ cm}$

(14) $m(\widehat{A}) = 10°, m(\widehat{C}) = 40°, c = 3\text{ cm}$

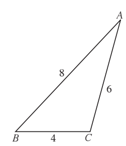
(15) $a = 4\text{ cm}, b = 2\text{ cm}, c = 3\text{ cm}$

في التمارين (18–16)، أوجد العناصر المجهولة (قياس زاوية أو طول ضلع) في كل مثلث مما يلي:

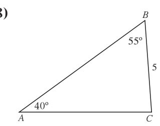
(16)



(17)



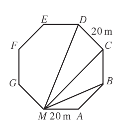
(18)



(19) الملاحة الجوية: أقلعت طائرتان في الوقت نفسه، إحداهما في اتجاه الشرق بسرعة 560 km/h والأخرى في اتجاه الشمال الشرقي بسرعة 600 km/h، أوجد البعد بينهما بعد ساعتين من افتراقهما علمًا أنهما تحلقان على الارتفاع نفسه.

(20) التصميم الزراعي: صمم مهندس زراعي حديقة على شكل مثمن منتظم، طول كل ضلع من أضلاعه 20 m

أوجد أطوال الأقطار MB , MC , MD



الوحدة التاسعة: تطبيقات على حساب المثلثات

Applications of Trigonometry

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

1 – 9: المتطابقات المثلثية

جزء 1: المتطابقات المثلثية الأساسية.

جزء 2: متطابقات الدوال المثلثية الزوجية أو الفردية.

جزء 3: تحليل المقادير المثلثية.

2 – 9: إثبات صحة متطابقات مثلثية

جزء 1: إثبات صحة المتطابقات.

3 – 9: حل معادلات مثلثية

جزء 1: حل معادلات مثلثية.

جزء 2: معادلات تحتوي على مضاعفات الزوايا.

4 – 9: متطابقات المجموع والفرق

جزء 1: متطابقات الدوال المتكافئة.

جزء 2: متطابقات المجموع والفرق.

5 – 9: متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

جزء 1: متطابقات ضعف الزاوية.

جزء 2: متطابقات نصف الزاوية.

مقدمة الوحدة

من المتعارف عليه أن الصوت ينتج من اهتزاز الأجسام وهو يتكوّن من موجات متلاحقة، فالنغمات الموسيقية التي تتمتع الآذان بسماعها هي موجات تنشأ من اهتزاز الأوتار المشدودة لهذه الآلات، فتصل إلينا عبر الهواء. وعندما يتكلم الإنسان فإن الصوت ينتج من اهتزاز الأوتار الصوتية للحنجرة.

تنتقل موجات الصوت عبر الغازات والسوائل والأجسام الصلبة، ولكن لا تنتقل عبر الفراغ.

إذا ألقيت حجرًا صغيرًا في بركة ماء ساكنة فسوف تشاهد سلسلة من الدوائر تتسع شيئًا فشيئًا، مبتعدة عن النقطة التي لامس فيها الحجر سطح الماء. وهكذا تتحرك أمواج الصوت.

تعتبر موجة الصوت في السوائل والغازات موجة طولية وهي أيضًا في الهواء، أما موجة الصوت في المواد الصلبة فهي موجة عرضية.

تعتمد سرعة الصوت على الوسط الذي ينقلها حيث تبلغ في الهواء 343 m في الثانية عند درجة حرارة 20°، وتبلغ هذه السرعة 1407 m في الثانية في الماء عند درجة الصفر.

إذا اعتبرنا أن سرعة الصوت c وتردد موجة الصوت f وطول الموجة الصوتية (المسافة بين موجتين متتاليتين) λ فتكون $\lambda = \frac{c}{f}$، ويحتسب عادة تردد موجة الصوت بالهرتز (Hertz).

يعتبر الصوت أحد المظاهر الأساسية التي يستخدمها الإنسان والحيوان في حياتهما اليومية، وذلك عن طريق حاسة السمع (الأذن) والتي بواسطتها يتم تحويل الصوت من موجات صوتية إلى إشارات كهربائية.

يواجه الإنسان مشكلة مع الموجات الصوتية التي يقل ترددها عن 20 Hertz حيث لا تستطيع الأذن البشرية التقاطها أو الإحساس بها، وهي ناتجة عن الاهتزازات والانزلاقات لطبقات القشرة الأرضية والتي ينتج عنها زلازل وبراكين.

الوحدة التاسعة

تطبيقات على حساب المثلثات

Applications of Trigonometry

مشروع الوحدة: الموجات الصوتية

1 مقدمة المشروع: أنت تسمع في الإذاعات عن تردد الموجات الصوتية وقياساتها وكيف تصل إلى مسامعك من خلال موجات متتالية لها قوانين ووحدات قياس معروفة.

2 الهدف: قياس بعض الموجات البسيطة.

3 اللوازم: ورق رسم بياني — آلة حاسبة علمية.

4 أسئلة حول التطبيق: نربط خيطًا مطاطيًّا من طرفيه بوتدين ثابتين. إذا ضغطنا على الخيط عموديًّا في نقطة، ثم تركناه نلاحظ أنه يهتز محدثًا موجات صوتية متتالية وخفيفة. لنفرض أنه لا يوجد أي احتكاك أو صدى، يمكن نمذجة هذه الموجات بالمعادلة:

$y = y_m \sin(kx - wt)$، حيث: y_m هي السعة بالأمتار (m)؛ k و w هما كميتان ثابتتان؛ t هو الزمن؛ x هي المسافة من أحد طرفي الخيط إلى نقطة الضغط.

يتأثّر تردد الموجة الصوتية بالمسافة x وبالزمن t، لذلك للموجة حركتان أفقية وعمودية عبر الزمن. لنأخذ المعادلة:

$y = 0.00421 \sin(68.3x - 2.68t)$

a ما سعة الموجة y_m؟ وما الثابت w بالراديان في الثانية؟

b إنّ تردد الموجات الصوتية هو عدد الاهتزازات في الثانية ويعطى بالقانون: $f = \frac{w}{2\pi}$ ووحدته هرتز Hertz.
أوجد تردد الموجة أعلاه.

c طول الموجة الصوتية λ هو أقصر مسافة تتكرر فيها الموجة في فترة زمنية محددة t. يعطى طول الموجة بالقانون: $\lambda = \frac{2\pi}{k}$.
فما طول الموجة أعلاه؟

d مثّل بيان الدالة إذا كانت $x = 1\text{ m}$

e تتردد موجتان معًا على الخيط نفسه. وينمذج تردد الموجتين معًا بالمعادلة:

$y = y_1 + y_2$، حيث: $y_1 = y_m \sin(kx - wt)$، $y_2 = y_m \sin(kx - wt + \varphi)$، حيث φ تمثّل الفرق بين الموجتين بإزاحة أفقية ثابتة.
مستخدمًا المتطابقات المثلثية اكتب: $y = y_1 + y_2$ كناتج ضرب. [إرشاد: $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$]

f أوجد y_1 ، y_2 ثم y في حالة: $f = 2.3\text{ hertz}$, $\lambda = 0.09\text{ m}$, $\varphi = 2.5\text{ radians}$, $y_m = 0.0045\text{ m}$.
مثّل بيان كل من y_1، y_2، y في نظام إحداثي واحد، علمًا أن $x = 1\text{ m}$.

5 التقرير: اكتب تقريرًا مفصلًا يبيّن خطوات العمل التي قمت بها وأشر إلى المتطابقات المثلثية التي استعنت بها. أرفق تقريرك بالتمثيلات البيانية الملونة.

دروس الوحدة

المتطابقات المثلثية	إثبات صحة متطابقات مثلثية	حل معادلات مثلثية	متطابقات المجموع والفرق	متطابقات ضعف الزاوية ونصفها
9 – 1	9 – 2	9 – 3	9 – 4	9 – 5

80

تستطيع بعض الحيوانات الإحساس بالزلازل قبل حدوثها مثل القطط والكلاب.

يستطيع الإنسان التقاط موجات صوتية يقع ترددها بين 20 Hertz و 20 000 Hertz وينخفض هذا المدى عند كبار السن إلى 12 000 Hertz،

أما الموجات الصوتية التي يزيد ترددها عن 20 000 Hertz فهي تقع خارج نطاق التقاطها من الأذن البشرية حيث إن طول موجاتها يعتبر صغيرًا جدًّا.

لموجة صوت مقام مرتفع أو مقام منخفض بحسب ترددها، ويمكن تمييز صوت الأطفال أثناء اللعب بالمقارنة مع الأكبر منهم سنًّا.

تحيط الموجات الصوتية بنا طوال الوقت، فلا تمر ثانية إلا ونسمع أصواتًا منذ اللحظة التي نستيقظ فيها صباحًا حتى اللحظة التي ننام فيها ليلًا.

مشروع الوحدة

يزود مشروع الوحدة الطلاب بمعلومات أولية عن انتشار الموجات الصوتية وكيفية قياس ترددها وطولها. ويساعد على الربط بين هذه الموجات والدوال الجيبية.

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

4 **(a)** $y = y_m \sin(kx - wt)$

$y = 0.00421 \sin(68.3x - 2.68t)$

فتكون: $y_m = 0.00421$ (السعة)

$w = 2.68 \text{ rad/s}$

(b) $f = \dfrac{w}{2\pi} = \dfrac{2.68}{2\pi} \approx 0.43 \text{ Hz}$

(c) $\lambda = \dfrac{2\pi}{k} = \dfrac{2\pi}{68.3} \approx 0.092 \text{ m/s}$

(طول موجة الصوت)

(d) $y = 0.00421 \sin(68.3 - 2.68t)$

تحقق من الرسوم البيانية.

(e) $y = y_1 + y_2$

$= y_m \sin(kx - wt) + y_m \sin(kx - wt + \varphi)$

$= 2y_m \sin\left(kx - wt + \dfrac{\varphi}{2}\right) \times \cos\dfrac{\varphi}{2}$

(f) $f = \dfrac{w}{2\pi} = 2.3$

$\Longrightarrow w = 4.6\pi$

$\lambda = \dfrac{2\pi}{k} = 0.09$

$\Longrightarrow k = \dfrac{2\pi}{0.09} \approx 69.8$

$y_1 = 0.0045 \sin\left(\dfrac{2\pi}{0.09} - 4.6\pi t\right)$

$= 0.0045 \sin(69.8 - 4.6\pi t)$

$y_2 = 0.0045 \sin\left(\dfrac{2\pi}{0.09} - 4.6\pi t + 2.5\right)$

$= 0.0045 \sin(72.3 - 4.6\pi t)$

$y = 2(0.0045) \sin\left(\dfrac{2\pi}{0.09} - 4.6\pi t + 1.25\right) \cos(1.25)$

$= 0.009 \sin\left(\dfrac{2\pi}{0.09} - 4.6\pi t + 1.25\right) \cos(1.25)$

$= 0.00283 \sin(71.05 - 4.6\pi t)$

تحقّق من الرسوم البيانية.

الوحدة التاسعة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت تحديد الدوال المثلثية.
- تعلمت التمثيلات البيانية لدوال: الجيب، جيب التمام، الظل.
- تعلمت القيم المثلثية لبعض الزوايا الخاصة.
- تعلمت مجال ودورة وسعة الدوال المثلثية: الجيب، جيب التمام، الظل.

ماذا سوف تتعلم؟

- استخدام المتطابقات الأساسية في تبسيط المقادير المثلثية وتحليلها.
- إثبات صحة المتطابقات جبريًّا وبيانيًّا.
- حل المعادلات المثلثية جبريًّا وبيانيًّا.
- متطابقات مجموع زاويتين.
- متطابقات الفرق بين زاويتين.
- متطابقات ضعف الزاوية.
- متطابقات نصف الزاوية.

المصطلحات الأساسية

المتطابقات المثلثية الأساسية – متطابقات المقلوب – متطابقات الظل وظل التمام – متطابقات فيثاغورث – متطابقات الدوال المثلثية الزوجية أو الفردية – متطابقة الدوال المتكافئة – متطابقات المجموع والفرق – متطابقات الضعف والنصف.

أضف إلى معلوماتك

احتل علم المثلثات مكانة مرموقة في الرياضيات عند العلماء العرب والمسلمين.

وقد شكل نقطة وصل بين الرياضيات وعلم الفلك. فأطلق أولئك العلماء عليه اسم «علم النسب».

وساعد كثيرًا من خلال المسائل المتعلقة به على تطوير «الحساب التقريبي».

من الأسباب الرئيسة التي دفعت العلماء المسلمين إلى حساب المثلثات، وبصورة خاصة المثلثات الكروية، هي ضرورة إكمال حسابات النجوم والفلك والشمس وتحديد جهة القبلة لتأدية الصلاة، أي تحديد اتجاه مدينة مكة المكرمة بالنسبة إلى كل مدينة أو قرية.

81

التقرير

يجب أن يكون التقرير مفصّلًا يتضمن خطوات الحلول والتمثيلات البيانية المطلوبة.

اعرض أمام زملائك في غرفة الصف كل النتائج التي توصلت إليها. أعد النظر في بعض الحسابات إذا كان ذلك ضروريًّا. ناقش معهم التمثيلات البيانية التي وضعتها وتأكد من صحتها وسلامتها من الأخطاء.

سلّم التقييم

4	الحسابات صحيحة بالكامل – التمثيلات البيانية واضحة ودقيقة – التقرير مفصل وواضح ويتضمن كل النتائج المطلوبة.
3	معظم الحسابات صحيحة – التمثيلات البيانية واضحة مع بعض الأخطاء – التقرير مفصل وواضح ويتضمن النتائج المطلوبة.
2	بعض الحسابات صحيحة – معظم التمثيلات البيانية تشوبها الأخطاء – التقرير غير منظم وبحاجة إلى إعادة.
1	معظم عناصر المشروع ناقصة وبحاجة إلى إعادة.

9–1: المتطابقات المثلثية

1 الأهداف

- يتعرف المتطابقات المثلثية الأساسية.
- يبسّط المقادير المثلثية.
- يحلّل المقادير المثلثية.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

متطابقة – متطابقة فيثاغورث – متطابقات مثلثية – تبسيط – تحليل.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة بيانية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

بسّط ما يلي:

(a) $(2x+3)^2 - 4x^2$

(b) $x^2 - x(1+3x)$

(c) $\dfrac{x}{x-3} - \dfrac{4x}{x+1}$

حلّل المقادير التالية إلى عوامل:

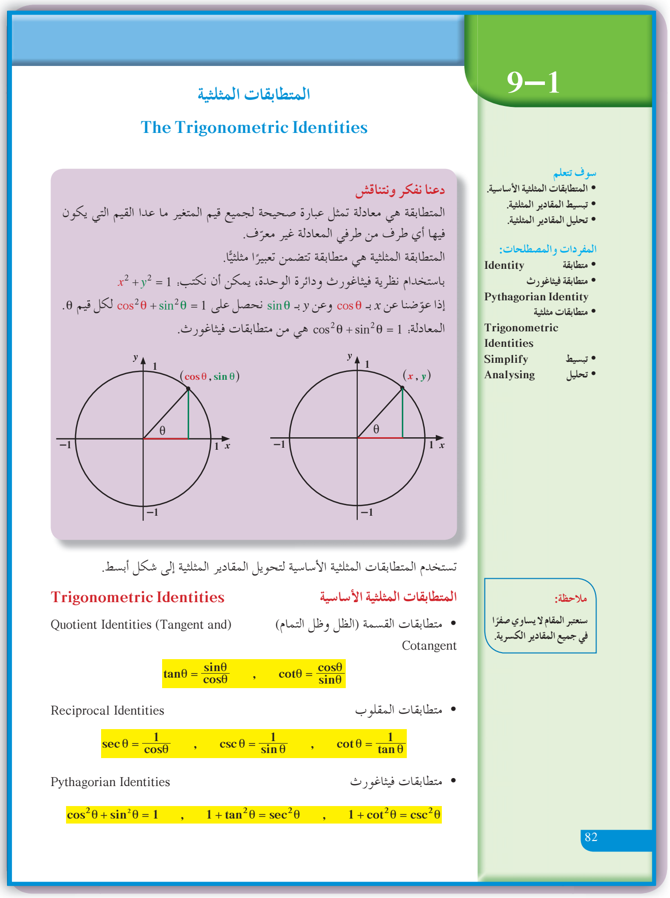
(a) $y = x^2 - 9x + 20$

(b) $y = 3x^2 + 10x - 8$

(c) $y = x^3 - 3x^2 + 2x$

5 التدريس

تعرف الطلاب سابقًا على متطابقات جبرية واستخدموها في تبسيط مقادير جبرية مختلفة، لذا لا بد من التذكير كما ورد في فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» بتعريف المتطابقة. ركز مع الطلاب قبل البدء في هذا الدرس على بعض المتطابقات الجبرية لتريهم مدى أهمية فهم المتطابقة.



9–1

المتطابقات المثلثية

The Trigonometric Identities

دعنا نفكر ونتناقش

المتطابقة هي معادلة تمثل عبارة صحيحة لجميع قيم المتغير ما عدا القيم التي يكون فيها أي طرف من طرفي المعادلة غير معرّف.

المتطابقة المثلثية هي متطابقة تتضمن تعبيرًا مثلثيًّا.

باستخدام نظرية فيثاغورث ودائرة الوحدة، يمكن أن نكتب: $x^2 + y^2 = 1$

إذا عوّضنا عن x بـ $\cos\theta$ وعن y بـ $\sin\theta$ نحصل على $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ لكل قيم θ.

المعادلة: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ هي من متطابقات فيثاغورث.

تستخدم المتطابقات المثلثية الأساسية لتحويل المقادير المثلثية إلى شكل أبسط.

المتطابقات المثلثية الأساسية — Trigonometric Identities

- متطابقات القسمة (الظل وظل التمام) Quotient Identities (Tangent and Cotangent)

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad , \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

- متطابقات المقلوب Reciprocal Identities

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad , \quad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad , \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

- متطابقات فيثاغورث Pythagorian Identities

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \quad , \quad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \quad , \quad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

سوف تتعلم

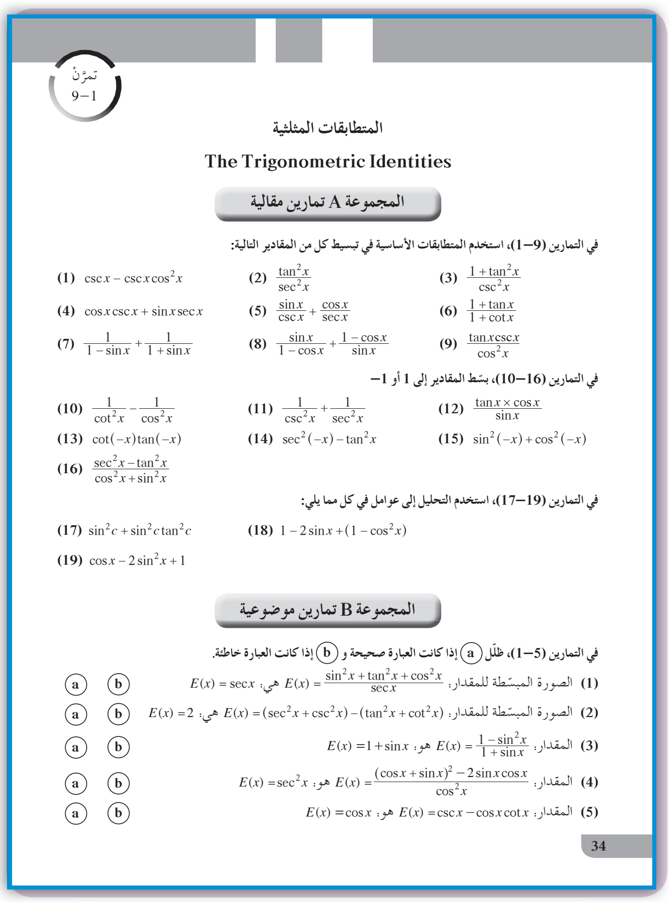
- المتطابقات المثلثية الأساسية.
- تبسيط المقادير المثلثية.
- تحليل المقادير المثلثية.

المفردات والمصطلحات:

- متطابقة Identity
- متطابقة فيثاغورث Pythagorian Identity
- متطابقات مثلثية Trigonometric Identities
- تبسيط Simplify
- تحليل Analysing

ملاحظة: سنعتبر المقام لا يساوي صفرًا في جميع المقادير الكسرية.

82



تمرَّنْ 9–1

المتطابقات المثلثية

The Trigonometric Identities

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–9)، استخدم المتطابقات الأساسية في تبسيط كل من المقادير التالية:

(1) $\csc x - \csc x \cos^2 x$ **(2)** $\dfrac{\tan^2 x}{\sec^2 x}$ **(3)** $\dfrac{1+\tan^2 x}{\csc^2 x}$

(4) $\cos x \csc x + \sin x \sec x$ **(5)** $\dfrac{\sin x}{\csc x} + \dfrac{\cos x}{\sec x}$ **(6)** $\dfrac{1+\tan x}{1+\cot x}$

(7) $\dfrac{1}{1-\sin x} + \dfrac{1}{1+\sin x}$ **(8)** $\dfrac{\sin x}{1-\cos x} + \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ **(9)** $\dfrac{\tan x \csc x}{\cos^2 x}$

في التمارين (10–16)، بسّط المقادير إلى 1 أو –1

(10) $\dfrac{1}{\cot^2 x} - \dfrac{1}{\cos^2 x}$ **(11)** $\dfrac{1}{\csc^2 x} + \dfrac{1}{\sec^2 x}$ **(12)** $\dfrac{\tan x \times \cos x}{\sin x}$

(13) $\cot(-x)\tan(-x)$ **(14)** $\sec^2(-x) - \tan^2 x$ **(15)** $\sin^2(-x) + \cos^2(-x)$

(16) $\dfrac{\sec^2 x - \tan^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$

في التمارين (17–19)، استخدم التحليل إلى عوامل في كل مما يلي:

(17) $\sin^2 c + \sin^2 c \tan^2 c$ **(18)** $1 - 2\sin x + (1 - \cos^2 x)$

(19) $\cos x - 2\sin^2 x + 1$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الصورة المبسّطة للمقدار: $E(x) = \dfrac{\sin^2 x + \tan^2 x + \cos^2 x}{\sec x}$ هي: $E(x) = \sec x$ (a) (b)

(2) الصورة المبسّطة للمقدار: $E(x) = (\sec^2 x + \csc^2 x) - (\tan^2 x + \cot^2 x)$ هي: $E(x) = 2$ (a) (b)

(3) المقدار: $E(x) = \dfrac{1-\sin^2 x}{1+\sin x}$ هو: $E(x) = 1 + \sin x$ (a) (b)

(4) المقدار: $E(x) = \dfrac{(\cos x + \sin x)^2 - 2\sin x \cos x}{\cos^2 x}$ هو: $E(x) = \sec^2 x$ (a) (b)

(5) المقدار: $E(x) = \csc x - \cos x \cot x$ هو: $E(x) = \cos x$ (a) (b)

34

مثال على ذلك:

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ هي متطابقة لكل قيم x , y

ولكن: $\sin x + \cos x = 1$ قد تكون صحيحة لبعض قيم x مثل:

$x = 0$ يكون $\sin 0 + \cos 0 = 1$

$x = \frac{\pi}{2}$ يكون $\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = 1$

$x = 2\pi$ يكون $\sin 2\pi + \cos 2\pi = 1$

$x = \frac{5\pi}{2}$ يكون $\sin\frac{5\pi}{2} + \cos\frac{5\pi}{2} = 1$

والسؤال: هل هي صحيحة لكل قيم x؟ بالطبع لا، لأن:

$x = \frac{\pi}{6}$ يكون $\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{1+\sqrt{3}}{2} \neq 1$

$x = \frac{\pi}{4}$ يكون $\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \neq 1$

بالتالي $\sin x + \cos x = 1$ ليست متطابقة.

وهنا يكمن الفرق مع متطابقات فيثاغورث:

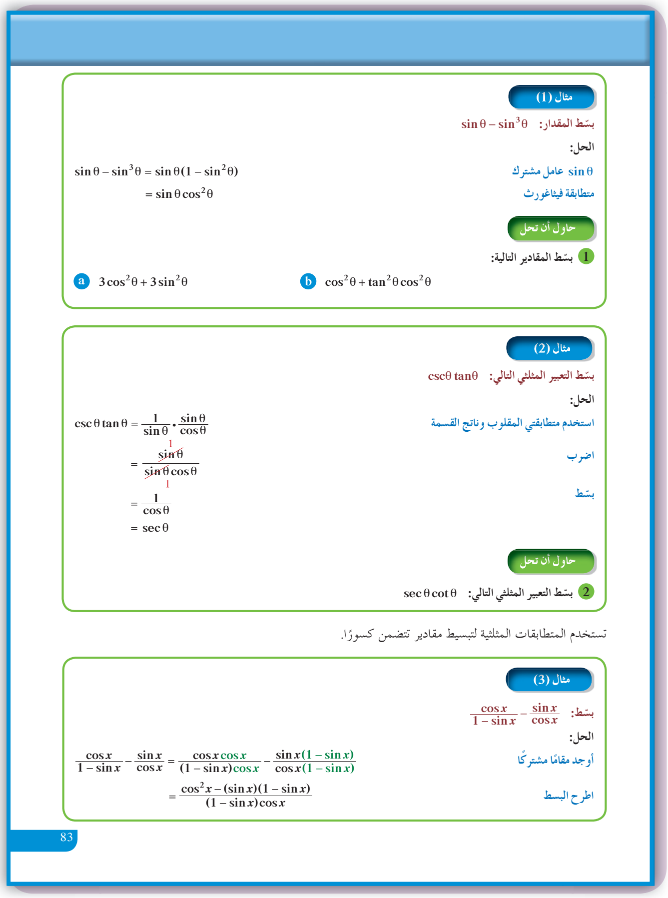
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$، $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$،

$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

وهي صحيحة لكل قيم $x \in (-\infty, +\infty)$

وتكمن أهمية المتطابقات المثلثية في أنها تساعد كثيرًا على تبسيط مقادير تتضمن تعابير مثلثية كما في الأمثلة (1), (2), (3), (4), (5) وهذا التبسيط يساعد على تحقيق عدة أهداف:

- يسهل عملية الحل إذا كان ذلك مطلوبًا.
- يسهل تمثيل المقدار بيانيًّا.



مثال (1)

بسّط المقدار: $\sin\theta - \sin^3\theta$

الحل:

$\sin\theta - \sin^3\theta = \sin\theta(1-\sin^2\theta)$ — $\sin\theta$ عامل مشترك

$= \sin\theta\cos^2\theta$ — متطابقة فيثاغورث

حاول أن تحل

1 بسّط المقادير التالية:

a $3\cos^2\theta + 3\sin^2\theta$

b $\cos^2\theta + \tan^2\theta\cos^2\theta$

مثال (2)

بسّط التعبير المثلثي التالي: $\csc\theta\tan\theta$

الحل:

$\csc\theta\tan\theta = \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ — استخدم متطابقتي المقلوب وناتج القسمة

$= \frac{\cancel{\sin\theta}}{\cancel{\sin\theta}\cos\theta}$ — اضرب

$= \frac{1}{\cos\theta}$ — بسّط

$= \sec\theta$

حاول أن تحل

2 بسّط التعبير المثلثي التالي: $\sec\theta\cot\theta$

تستخدم المتطابقات المثلثية لتبسيط مقادير تتضمن كسورًا.

مثال (3)

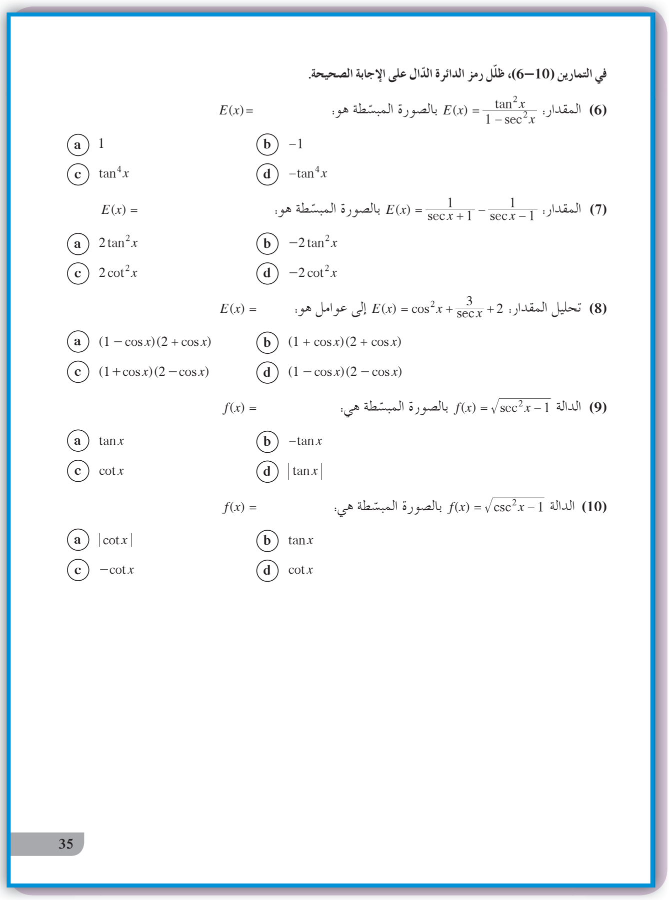
بسّط: $\frac{\cos x}{1-\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x}$

الحل:

$\frac{\cos x}{1-\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x\cos x}{(1-\sin x)\cos x} - \frac{\sin x(1-\sin x)}{\cos x(1-\sin x)}$ — أوجد مقامًا مشتركًا

$= \frac{\cos^2 x - (\sin x)(1-\sin x)}{(1-\sin x)\cos x}$ — اطرح البسط

83



في التمارين (6–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) المقدار: $E(x) = \frac{\tan^2 x}{1-\sec^2 x}$ بالصورة المبسّطة هو: $E(x) =$

a 1 b -1 c $\tan^4 x$ d $-\tan^4 x$

(7) المقدار: $E(x) = \frac{1}{\sec x - 1} - \frac{1}{\sec x + 1}$ بالصورة المبسّطة هو: $E(x) =$

a $2\tan^2 x$ b $-2\tan^2 x$ c $2\cot^2 x$ d $-2\cot^2 x$

(8) تحليل المقدار: $E(x) = \cos^2 x + \frac{3}{\sec x} + 2$ إلى عوامل هو: $E(x) =$

a $(1-\cos x)(2+\cos x)$ b $(1+\cos x)(2+\cos x)$ c $(1+\cos x)(2-\cos x)$ d $(1-\cos x)(2-\cos x)$

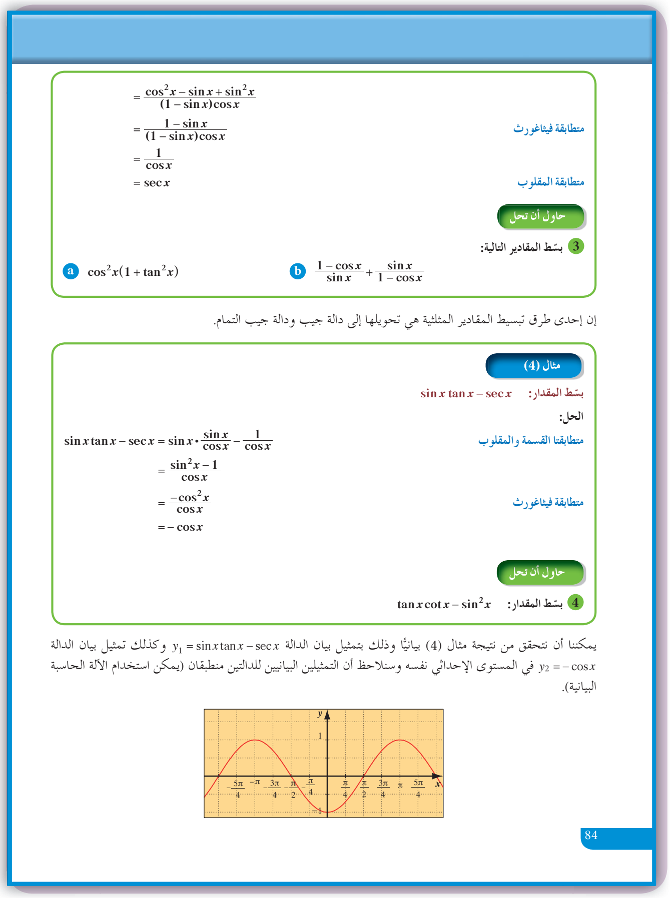
(9) الدالة $f(x) = \sqrt{\sec^2 x - 1}$ بالصورة المبسّطة هي: $f(x) =$

a $\tan x$ b $-\tan x$ c $\cot x$ d $|\tan x|$

(10) الدالة $f(x) = \sqrt{\csc^2 x - 1}$ بالصورة المبسّطة هي: $f(x) =$

a $|\cot x|$ b $\tan x$ c $-\cot x$ d $\cot x$

35



$$= \frac{\cos^2 x - \sin x + \sin^2 x}{(1 - \sin x)\cos x}$$

متطابقة فيثاغورث $= \frac{1 - \sin x}{(1 - \sin x)\cos x}$

$$= \frac{1}{\cos x}$$

متطابقة المقلوب $= \sec x$

حاول أن تحل

3 بسّط المقادير التالية:

a $\cos^2 x(1 + \tan^2 x)$

b $\frac{1 - \cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 - \cos x}$

إن إحدى طرق تبسيط المقادير المثلثية هي تحويلها إلى دالة جيب ودالة جيب التمام.

مثال (4)

بسّط المقدار: $\sin x \tan x - \sec x$

الحل:

متطابقتا القسمة والمقلوب $\sin x \tan x - \sec x = \sin x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x}$

$$= \frac{\sin^2 x - 1}{\cos x}$$

متطابقة فيثاغورث $= \frac{-\cos^2 x}{\cos x}$

$$= -\cos x$$

حاول أن تحل

4 بسّط المقدار: $\tan x \cot x - \sin^2 x$

يمكننا أن نتحقق من نتيجة مثال (4) بيانيًّا وذلك بتمثيل بيان الدالة $y_1 = \sin x \tan x - \sec x$ وكذلك تمثيل بيان الدالة $y_2 = -\cos x$ في المستوى الإحداثي نفسه وسنلاحظ أن التمثيلين البيانيين للدالتين منطبقان (يمكن استخدام الآلة الحاسبة البيانية).

84

كما أن المتطابقات المثلثية تساعد كثيرًا في تحليل مقادير تتضمن تعابير مثلثية إلى عوامل كما في المثالين (7) ,(6) بحيث يساعد هذا التحليل على إيجاد حلول لهذه المقادير إذا كان ذلك مطلوبًا.

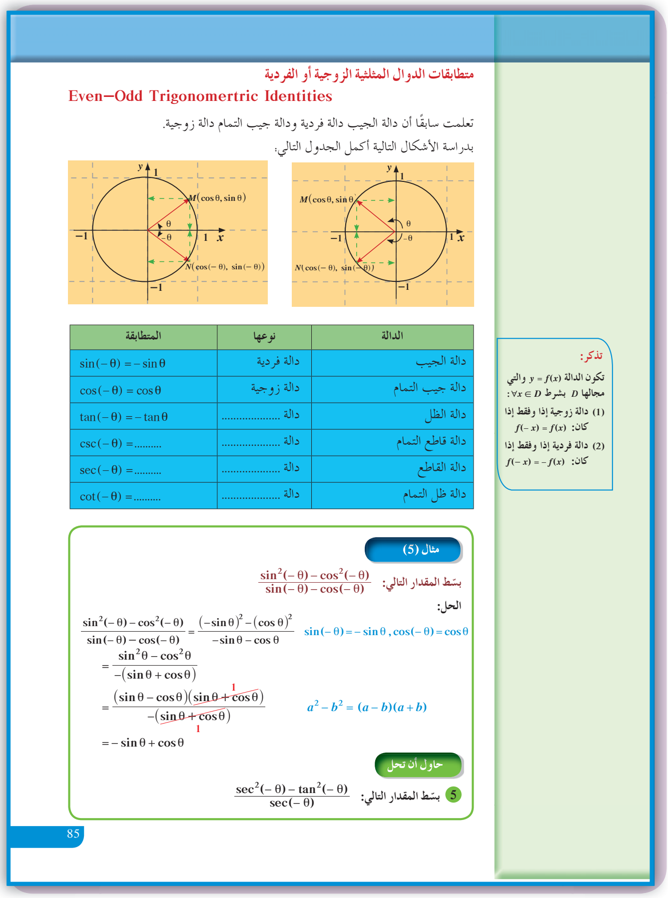
وهنا لا بد من الإشارة إلى الطلاب أنه لا يمكن تحليل مقدار يتضمن نسبًا مثلثية متعددة إلا إذا استخدمت المتطابقات المثلثية وكتب المقدار بدلالة نسبة مثلثية واحدة وهذا يبدو واضحًا في المثالين (7) ,(6).

6 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام المتطابقات المثلثية $\csc\theta, \sec\theta$. ذكرهم أن $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ ، $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ وذلك بكتابة كل واحدة عدة مرّات.

7 التقييم

توفر فقرات «حاول أن تحل» فرصة مهمة أمام المعلم للتعرف على كيفية تعامل الطلاب مع المتطابقات المثلثية.



متطابقات الدوال المثلثية الزوجية أو الفردية

Even–Odd Trigonomertric Identities

تعلمت سابقًا أن دالة الجيب دالة فردية ودالة جيب التمام دالة زوجية.

بدراسة الأشكال التالية أكمل الجدول التالي:

الدالة	نوعها	المتطابقة
دالة الجيب	دالة فردية	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$
دالة جيب التمام	دالة زوجية	$\cos(-\theta) = \cos\theta$
دالة الظل	دالة	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$
دالة قاطع التمام	دالة	$\csc(-\theta) =$..........
دالة القاطع	دالة	$\sec(-\theta) =$..........
دالة ظل التمام	دالة	$\cot(-\theta) =$..........

تذكر: تكون الدالة $y = f(x)$ والتي مجالها D بشرط $\forall x \in D$:
(1) دالة زوجية إذا وفقط إذا كان: $f(-x) = f(x)$
(2) دالة فردية إذا وفقط إذا كان: $f(-x) = -f(x)$

مثال (5)

بسّط المقدار التالي: $\dfrac{\sin^2(-\theta) - \cos^2(-\theta)}{\sin(-\theta) - \cos(-\theta)}$

الحل:

$$\frac{\sin^2(-\theta) - \cos^2(-\theta)}{\sin(-\theta) - \cos(-\theta)} = \frac{(-\sin\theta)^2 - (\cos\theta)^2}{-\sin\theta - \cos\theta}$$ $\sin(-\theta) = -\sin\theta\,,\ \cos(-\theta) = \cos\theta$

$$= \frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{-(\sin\theta + \cos\theta)}$$

$$= \frac{(\sin\theta - \cos\theta)\overset{1}{\cancel{(\sin\theta + \cos\theta)}}}{-\underset{1}{\cancel{(\sin\theta + \cos\theta)}}}$$ $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$$= -\sin\theta + \cos\theta$$

حاول أن تحل

5 بسّط المقدار التالي: $\dfrac{\sec^2(-\theta) - \tan^2(-\theta)}{\sec(-\theta)}$

85

اختبار سريع

1 أثبت أن: $\csc^2 x \bullet \sec^2 x - 2 = \tan^2 x + \cot^2 x$

$$\csc^2 x \bullet \sec^2 x - 2$$
$$= \frac{1}{\sin^2 x} \bullet \frac{1}{\cos^2 x} - 2$$
$$= \frac{1 - 2\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$$
$$= \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x}$$
$$= \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$
$$= \tan^2 x + \cot^2 x$$

2 أثبت أن: $\tan^2 x - \cot^2 x = \sec^2 x - \csc^2 x$

$$\tan^2 x - \cot^2 x$$
$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$
$$= \frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\cos^2 x \sin^2 x}$$
$$= \frac{(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x \cos^2 x}$$
$$= \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x \times \sin^2 x}$$
$$= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}$$
$$= \sec^2 x - \csc^2 x$$

3 حلّل المقدار: $\tan^2 x + 4\tan x \sec x - 3$

$$\tan^2 x + 4\tan x \sec x - 3$$
$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 4\frac{\sin x}{\cos^2 x} - 3$$
$$= \frac{\sin^2 x + 4\sin x - 3(1 - \sin^2 x)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{4\sin^2 x + 4\sin x - 3}{\cos^2 x}$$
$$= \sec^2 x(2\sin x + 3)(2\sin x - 1)$$

8 إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

1 (a) $3(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=3\times 1=3$

(b) $\cos^2\theta+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\cos^2\theta$

$=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

2 $\dfrac{1}{\cos\theta}\times\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta}=\csc\theta$

3 (a) $\cos^2 x\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)=1\,(\cos x\neq 0)$

(b) $\dfrac{(1-\cos x)^2+\sin^2 x}{\sin x(1-\cos x)}=\dfrac{2-2\cos x}{\sin x(1-\cos x)}$

$=\dfrac{2}{\sin x}=2\csc x$

4 $1-\sin^2 x=\cos^2 x$

5 $\dfrac{1}{\cos\theta}-\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$

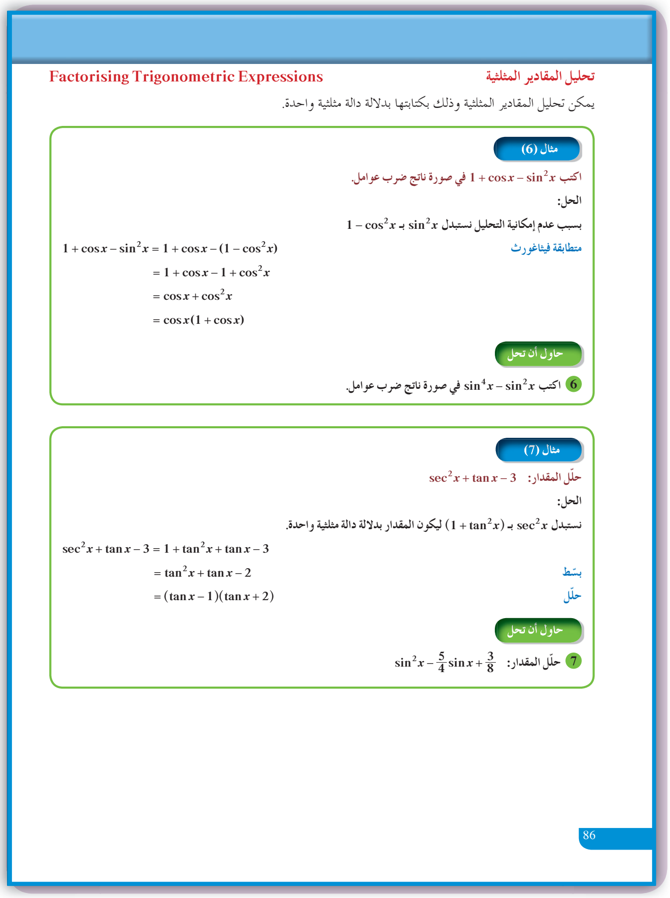
$=\dfrac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta}=\cos\theta$

6 $\sin^2 x(\sin^2 x-1)=-\sin^2 x\cos^2 x$

7 $\left(\sin x-\dfrac{1}{2}\right)\left(\sin x-\dfrac{3}{4}\right)$

«متطابقات الدوال المثلثية الزوجية أو الفردية»

الدالة	نوعها	المتطابقة
دالة الجيب	دالة فردية	$\sin(-\theta)=-\sin\theta$
دالة جيب التمام	دالة زوجية	$\cos(-\theta)=\cos\theta$
دالة الظل	دالة فردية	$\tan(-\theta)=-\tan\theta$
دالة قاطع التمام	دالة فردية	$\csc(-\theta)=-\csc\theta$
دالة القاطع	دالة زوجية	$\sec(-\theta)=\sec\theta$
دالة ظل التمام	دالة فردية	$\cot(-\theta)=-\cot\theta$



تحليل المقادير المثلثية — **Factorising Trigonometric Expressions**

يمكن تحليل المقادير المثلثية وذلك بكتابتها بدلالة دالة مثلثية واحدة.

مثال (6)

اكتب $1+\cos x-\sin^2 x$ في صورة ناتج ضرب عوامل.

الحل:

بسبب عدم إمكانية التحليل نستبدل $\sin^2 x$ بـ $1-\cos^2 x$

متطابقة فيثاغورث

$$1+\cos x-\sin^2 x=1+\cos x-(1-\cos^2 x)$$
$$=1+\cos x-1+\cos^2 x$$
$$=\cos x+\cos^2 x$$
$$=\cos x(1+\cos x)$$

حاول أن تحل

6 اكتب $\sin^4 x-\sin^2 x$ في صورة ناتج ضرب عوامل.

مثال (7)

حلّل المقدار: $\sec^2 x+\tan x-3$

الحل:

نستبدل $\sec^2 x$ بـ $(1+\tan^2 x)$ ليكون المقدار بدلالة دالة مثلثية واحدة.

$$\sec^2 x+\tan x-3=1+\tan^2 x+\tan x-3$$

بسّط $=\tan^2 x+\tan x-2$

حلّل $=(\tan x-1)(\tan x+2)$

حاول أن تحل

7 حلّل المقدار: $\sin^2 x-\frac{5}{4}\sin x+\frac{3}{8}$

86

2–9: إثبات صحة متطابقات مثلثية

1 الأهداف

- يبيّن ما إذا كانت المعادلة المثلثية متطابقة أم لا.
- يتثبت من صحة المتطابقات المثلثية.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

إثبات متطابقة – دمج الحدود – ضرب العوامل – فصل الحدود – التحليل.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة بيانية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

بسّط ما يلي:

(a) $\sin x\cos^3 x+\cos x\sin^3 x$

(b) $\dfrac{1}{\cos x+1}-\dfrac{1}{1-\cos x}$

(c) $2\sin^4 x+2\cos^4 x+4\sin^2 x\cos^2 x$

[استخدم: $(a^2+b^2)^2=a^4+b^4+2a^2b^2$]

(d) اكتب التعبير: $\sin\theta\cos\theta(1+\tan^2\theta)$ بدلالة $\tan\theta$ فقط.

(e) اكتب التعبير: $\sin^2\theta\cos\theta(1+\cot^2\theta)$ بدلالة $\cos\theta$ فقط.

5 التدريس

لإثبات صحة متطابقة مثلثية، شجّع الطلاب على النظر مليًّا إلى المتطابقة ليتعرفوا الجهة الأسهل للبدء في الحل.

قد يكون البدء بالمقدار من اليمين للحصول على المقدار في اليسار هو أسهل أو قد يكون البدء بالمقدار من اليسار للحصول على المقدار في اليمين هو أسهل.

وهذا يتوقف على مقدرة الطالب ومكتسباته السابقة.

حفّز الطلاب على استخدام المتطابقات الأساسية التي تعلموها في الدرس السابق في المكان المناسب لإثبات متطابقات مركبة.


9–2

إثبات صحة متطابقات مثلثية

Confirming Trigonometric Identities

سوف تتعلم
- تبيان ما إذا كانت المعادلة تمثل متطابقة.
- إثبات صحة المتطابقات جبريًا.

المفردات والمصطلحات:
- إثبات متطابقة Confirming an Identity
- دمج الحدود Associate Terms
- ضرب العوامل Multiplying Factors
- فصل الحدود Separating Terms
- التحليل Analysing

دعنا نفكر ونتناقش

لإثبات أن معادلة ما هي متطابقة، عليك إثبات أن طرفي المعادلة متساويان لكل قيم المتغير.

فمثلًا، هل المعادلة: $\sin^2 x-\tan x=-\cos^2 x+\cot x$ هي متطابقة؟

للتحقق من ذلك، يمكن تمثيل الدالتين التاليتين بيانيًّا. (باستخدام الآلة الحاسبة البيانية)

$y_1=\sin^2 x-\tan x$ ، $y_2=-\cos^2 x+\cot x$

بالنظر إلى الشكل نجد أن البيانين غير متطبقين. أي أن الطرفين غير متساويين، لذلك فإن المعادلة ليست متطابقة.

أحيانًا يكون من السهل إثبات أن الدالتين غير متساويتين جبريًّا، فمثلًا،

قيم y_1، y_2 عند $x=0$ هي:

$y_1(0)=0$ ولكن $y_2(0)$ غير معرّفة.

لذلك فالدالتان غير متساويتين والمعادلة ليست متطابقة.

$y_1=\sin^2 x-\tan x$

$y_2=-\cos^2 x+\cot x$

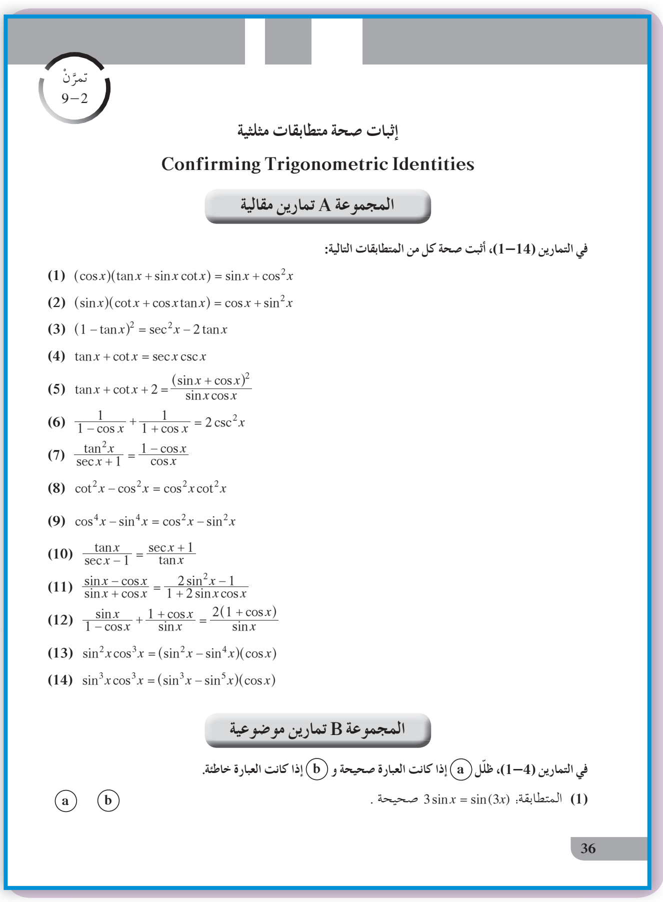
إثبات صحة متطابقة Confirming an Identity

لإثبات أن معادلة ما هي متطابقة نحتاج إلى محاولة إثبات أن طرفي المعادلة متساويان عند كل قيم المتغير نفسهما، من خلال استخدام إحدى الإستراتيجيات التالية:

1. تبسيط الطرف الأيمن بصورة الطرف الأيسر أو العكس.
2. تبسيط كلًّا من الطرفين على حدة حتى يتطابق ناتج تبسيطهما.

ويتم تبسيط كل طرف باستخدام إحدى الطرق التالية:
- دمج الحدود
- فصل الحدود
- ضرب العوامل
- التحليل
- استخدام متطابقات معلومة
- تبسيط الكسور
- التحويل إلى الجيب وجيب التمام

87


تمرّن 9–2

إثبات صحة متطابقات مثلثية

Confirming Trigonometric Identities

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–14)، أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

(1) $(\cos x)(\tan x+\sin x\cot x)=\sin x+\cos^2 x$

(2) $(\sin x)(\cot x+\cos x\tan x)=\cos x+\sin^2 x$

(3) $(1-\tan x)^2=\sec^2 x-2\tan x$

(4) $\tan x+\cot x=\sec x\csc x$

(5) $\tan x+\cot x+2=\dfrac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin x\cos x}$

(6) $\dfrac{1}{1-\cos x}+\dfrac{1}{1+\cos x}=2\csc^2 x$

(7) $\dfrac{\tan^2 x}{\sec x+1}=\dfrac{1-\cos x}{\cos x}$

(8) $\cot^2 x-\cos^2 x=\cos^2 x\cot^2 x$

(9) $\cos^4 x-\sin^4 x=\cos^2 x-\sin^2 x$

(10) $\dfrac{\tan x}{\sec x-1}=\dfrac{\sec x+1}{\tan x}$

(11) $\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}=\dfrac{2\sin^2 x-1}{1+2\sin x\cos x}$

(12) $\dfrac{\sin x}{1-\cos x}+\dfrac{1+\cos x}{\sin x}=\dfrac{2(1+\cos x)}{\sin x}$

(13) $\sin^2 x\cos^3 x=(\sin^2 x-\sin^4 x)(\cos x)$

(14) $\sin^3 x\cos^3 x=(\sin^3 x-\sin^5 x)(\cos x)$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) المتطابقة: $3\sin x=\sin(3x)$ صحيحة. (a) (b)

36

اطلب إليهم إعادة قراءة طرائق إثبات متطابقة كما وردت في كتاب الطالب: دمج الحدود، ضرب العوامل، استخدام متطابقات معلومة، التحويل إلى الجيب وجيب التمام، فصل الحدود، التحليل أو التفكيك، تبسيط الكسور...

في المثال (1)

ركّز مع الطلاب على أن الحل في هذا المثال اعتمد على البدء بالمقدار من جهة اليسار، ثم إجراء عملية الضرب في البسط، وبعد ذلك استخدام متطابقة فيثاغورث $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ للوصول إلى المقدار في جهة اليمين.

في المثال (2)

ركّز انتباه الطلاب في هذا المثال إلى أن الحل بدأ من جهة اليمين، حيث كان استخدام لمقام مشترك ثم جمع الحدود المتشابهة في البسط واستخدام ناتج ضرب المتطابقة الجبرية.

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ في المقام وبعد ذلك المتطابقة الأساسية المثلثة $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

وهكذا كانت النتيجة في جهة اليسار.

في المثال (3)

اطلب إلى الطلاب إثبات صحة هذه المتطابقة بأن يبدأوا من جهة اليسار للحصول على المقدار في جهة اليمين. ناقشهم بالخطة التي اعتمدوها.

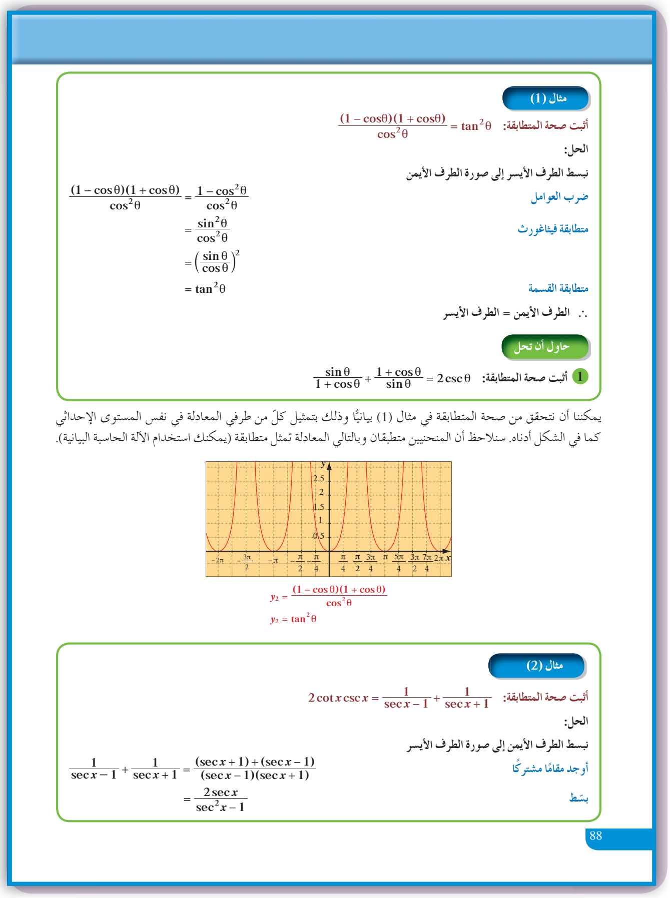
أخبرهم أن لإثبات بعض المتطابقات يمكن التعامل معها بحيث نبدأ من اليمين إلى اليسار أو من اليسار إلى اليمين.

في المثال (4)

قد يكون من الصعب في بعض الأحيان الانطلاق من مقدار في جهة للوصول إلى مقدار آخر في الجهة الثانية، لذا يمكن استخدام عملية التبسيط في الجهتين، وذلك باستخدام المتطابقات المثلثة الأساسية.

في المثال (5)

تستخدم متطابقة فيثاغورث $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ لتفكيك قوى مثلثية بدلالة $\sin\theta$ فقط أو بدلالة $\cos\theta$ فقط أو بدلالة $\sin\theta, \cos\theta$ معًا وذلك بحسب الحاجة.


مثال (1)

أثبت صحة المتطابقة: $\dfrac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta$

الحل:

نبسط الطرف الأيسر إلى صورة الطرف الأيمن

ضرب العوامل $\dfrac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\cos^2\theta} = \dfrac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$

متطابقة فيثاغورث $= \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$= \left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2$

متطابقة القسمة $= \tan^2\theta$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

حاول أن تحل

1 أثبت صحة المتطابقة: $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = 2\csc\theta$

يمكننا أن نتحقق من صحة المتطابقة في مثال (1) بيانيًّا وذلك بتمثيل كلّ من طرفي المعادلة في نفس المستوى الإحداثي كما في الشكل أدناه. سنلاحظ أن المنحنيين متطبقان وبالتالي المعادلة تمثل متطابقة (يمكنك استخدام الآلة الحاسبة البيانية).

مثال (2)

أثبت صحة المتطابقة: $2\cot x\csc x = \dfrac{1}{\sec x - 1} + \dfrac{1}{\sec x + 1}$

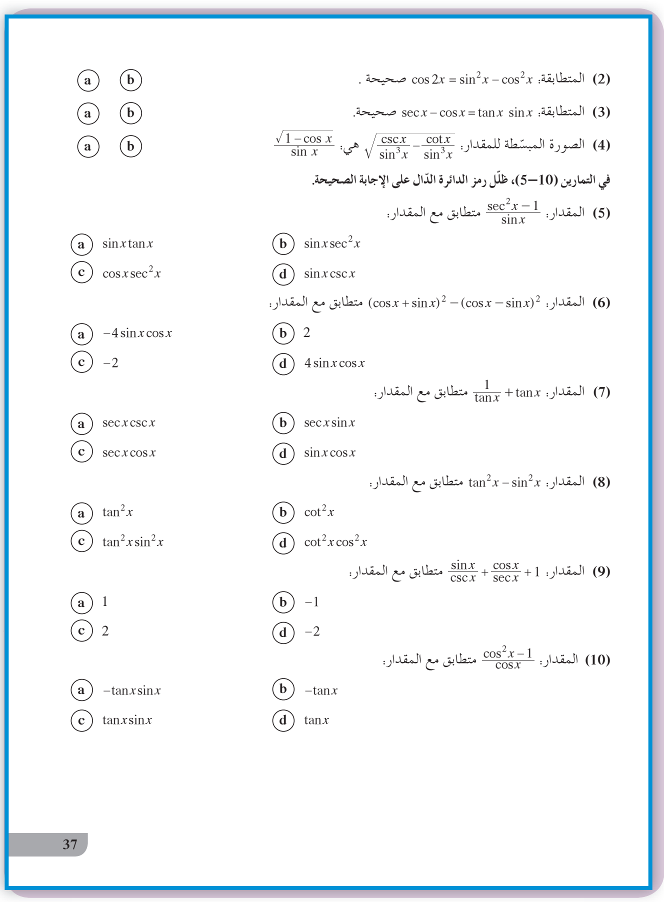
الحل:

نبسط الطرف الأيمن إلى صورة الطرف الأيسر

أوجد مقامًا مشتركًا $\dfrac{1}{\sec x - 1} + \dfrac{1}{\sec x + 1} = \dfrac{(\sec x + 1) + (\sec x - 1)}{(\sec x - 1)(\sec x + 1)}$

بسّط $= \dfrac{2\sec x}{\sec^2 x - 1}$

88


(2) المتطابقة: $\cos 2x = \sin^2 x - \cos^2 x$ صحيحة. ⓐ ⓑ

(3) المتطابقة: $\sec x - \cos x = \tan x \ \sin x$ صحيحة. ⓐ ⓑ

(4) الصورة المبسّطة للمقدار: $\sqrt{\dfrac{\csc x}{\sin^3 x} - \dfrac{\cot x}{\sin^3 x}}$ هي: $\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$ ⓐ ⓑ

في التمارين (5–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) المقدار: $\dfrac{\sec^2 x - 1}{\sin x}$ متطابق مع المقدار:

ⓐ $\sin x\tan x$ ⓑ $\sin x\sec^2 x$ ⓒ $\cos x\sec^2 x$ ⓓ $\sin x\csc x$

(6) المقدار: $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2$ متطابق مع المقدار:

ⓐ $-4\sin x\cos x$ ⓑ 2 ⓒ -2 ⓓ $4\sin x\cos x$

(7) المقدار: $\dfrac{1}{\tan x} + \tan x$ متطابق مع المقدار:

ⓐ $\sec x\csc x$ ⓑ $\sec x\sin x$ ⓒ $\sec x\cos x$ ⓓ $\sin x\cos x$

(8) المقدار: $\tan^2 x - \sin^2 x$ متطابق مع المقدار:

ⓐ $\tan^2 x$ ⓑ $\cot^2 x$ ⓒ $\tan^2 x\sin^2 x$ ⓓ $\cot^2 x\cos^2 x$

(9) المقدار: $\dfrac{\sin x}{\csc x} + \dfrac{\cos x}{\sec x} + 1$ متطابق مع المقدار:

ⓐ 1 ⓑ -1 ⓒ 2 ⓓ -2

(10) المقدار: $\dfrac{\cos^2 x - 1}{\cos x}$ متطابق مع المقدار:

ⓐ $-\tan x\sin x$ ⓑ $-\tan x$ ⓒ $\tan x\sin x$ ⓓ $\tan x$

37

$= \frac{2\sec x}{\tan^2 x}$ متطابقة فيثاغورث

$= 2\sec x \cot^2 x$ استخدم متطابقة المقلوب

$= \frac{2}{\cos x} \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$ بسّط

$= \frac{2\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x}$

$= 2\cot x \csc x$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

حاول أن تحل

2 أثبت صحة المتطابقة: $\frac{1+\sin x}{1-\sin x} - \frac{1-\sin x}{1+\sin x} = 4\tan x \cdot \sec x$

بالتعويض بأي قيمة من قيم المتغير x تصبح المتطابقة في المثال (2) عبارة صحيحة والجدول أدناه يوضح ذلك لبعض قيم الدالتين:

$y_1 = 2\cot x \csc x$

$y_2 = \frac{1}{\sec x - 1} + \frac{1}{\sec x + 1}$

x(radians)	y_1	y_2
−3	−99.4225	−99.4225
−2	−1.0066	−1.0066
−1	1.5261	1.5261
0	error	error
1	1.5261	1.5261
2	−1.0066	−1.0066
3	−99.4225	−99.4225

أحيانًا يمكن تحويل الكسر إلى صورة أخرى بضرب كل من البسط والمقام في نفس العامل.

مثال (3)

أثبت صحة المتطابقة: $\frac{\cos x}{1-\sin x} = \frac{1+\sin x}{\cos x}$

الحل:

نبدأ بالطرف الأيسر ونصل إلى صورة الطرف الأيمن

ضرب كل من البسط والمقام في $(1+\sin x)$

$\frac{\cos x}{1-\sin x} = \frac{\cos x}{1-\sin x} \times \frac{1+\sin x}{1+\sin x}$

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$= \frac{\cos x(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}$

89

6 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام المتطابقات المثلثية الأساسية وخاصة $1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$ و $1+\cot^2\theta = \csc^2\theta$، ساعدهم على فهم كيفية الحصول على هذه المتطابقات دون حفظها غيبًا.

7 التقييم

النقاش والحوار حول كيفية البدء بالحل، وخاصة أن التنوع بين التمارين يفسح المجال للتفكير في الجهة التي سوف يتمّ البدء فيها.

اختبار سريع

بسّط ما يلي:

1. أثبت أن: $1-2\sin^2 x\cos^2 x = \sin^4 x+\cos^4 x$

نبدأ من اليمين: $\sin^4 x+\cos^4 x$

$$= \sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x - 2\sin^2 x\cos^2 x$$

$$= (\sin^2 x+\cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x$$

$$= 1^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1-2\sin^2 x\cos^2 x$$

2. أثبت أن:

$$\sqrt{(2+2\tan^2 x)(2+2\cot^2 x)} = 2|\sec x|\,|\csc x|$$

نبدأ من اليسار: $\sqrt{2(1+\tan^2 x)2(1+\cot^2 x)}$

$$= \sqrt{4\sec^2 x \cdot \csc^2 x}$$

$$= 2|\sec x|\,|\csc x|$$

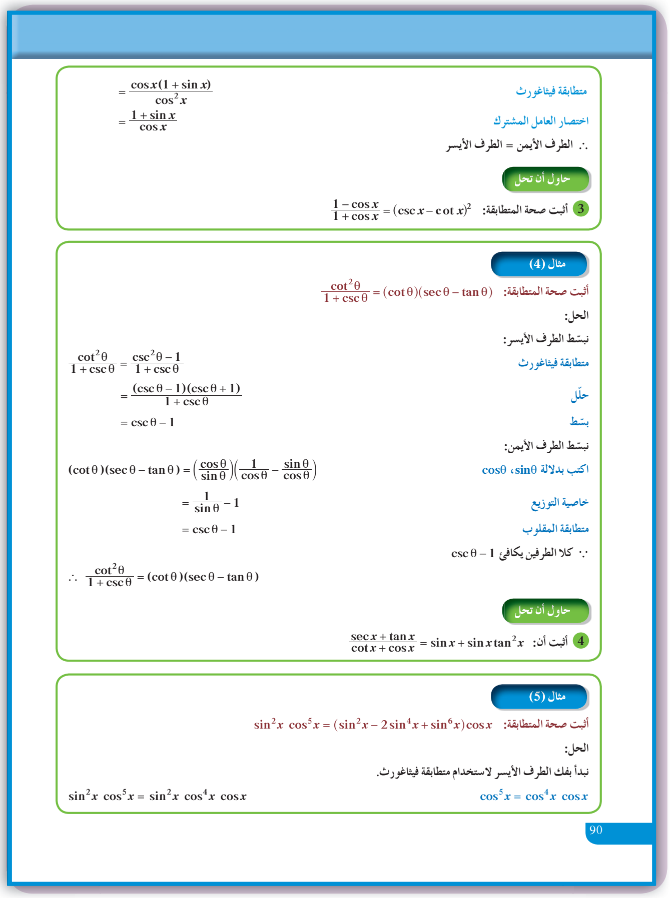
3. أثبت أن: $\dfrac{\csc^2 x+\sec^2 x}{\tan x+\cot x} = \sec x\times\csc x$

نبدأ من اليسار:

$$= \frac{\dfrac{1}{\sin^2 x}+\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\dfrac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}}{\dfrac{1}{\sin x\cos x}}$$

$$= \frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x\cos^2 x}$$

$$= \sec x\cdot\csc x$$



$= \dfrac{\cos x(1+\sin x)}{\cos^2 x}$ متطابقة فيثاغورث

$= \dfrac{1+\sin x}{\cos x}$ اختصار العامل المشترك

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

حاول أن تحل

3 أثبت صحة المتطابقة: $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x} = (\csc x-\cot x)^2$

مثال (4)

أثبت صحة المتطابقة: $\dfrac{\cot^2\theta}{1+\csc\theta} = (\cot\theta)(\sec\theta-\tan\theta)$

الحل:

نبسّط الطرف الأيسر:

متطابقة فيثاغورث $\dfrac{\cot^2\theta}{1+\csc\theta} = \dfrac{\csc^2\theta-1}{1+\csc\theta}$

حلّل $= \dfrac{(\csc\theta-1)(\csc\theta+1)}{1+\csc\theta}$

بسّط $= \csc\theta-1$

نبسّط الطرف الأيمن:

اكتب بدلالة $\sin\theta$، $\cos\theta$: $(\cot\theta)(\sec\theta-\tan\theta) = \left(\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\left(\dfrac{1}{\cos\theta}-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$

خاصية التوزيع $= \dfrac{1}{\sin\theta}-1$

متطابقة المقلوب $= \csc\theta-1$

∵ كلا الطرفين يكافئ $\csc\theta-1$

$\therefore \dfrac{\cot^2\theta}{1+\csc\theta} = (\cot\theta)(\sec\theta-\tan\theta)$

حاول أن تحل

4 أثبت أن: $\dfrac{\sec x+\tan x}{\cot x+\cos x} = \sin x+\sin x\tan^2 x$

مثال (5)

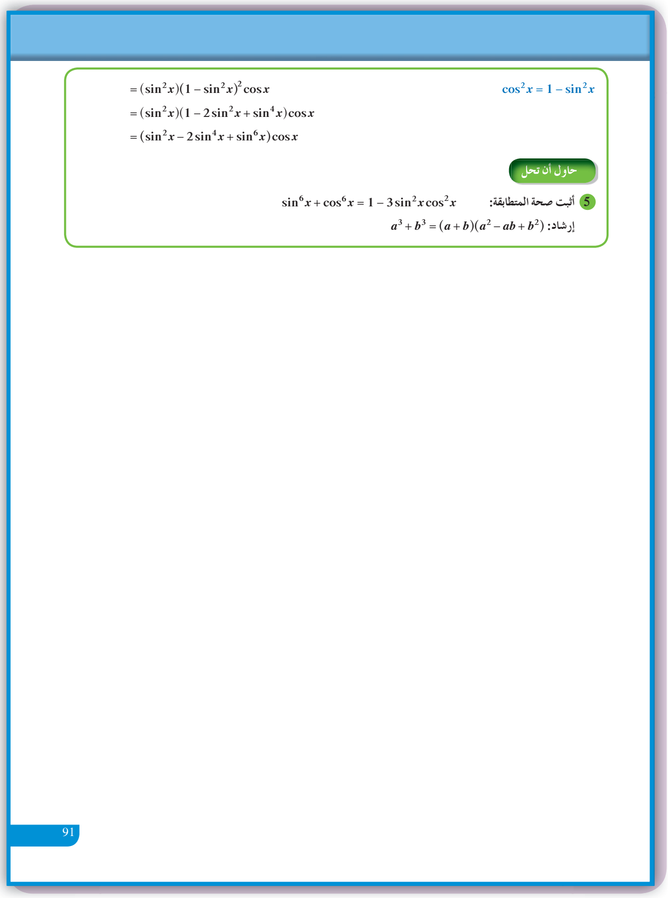
أثبت صحة المتطابقة: $\sin^2 x\ \cos^5 x = (\sin^2 x-2\sin^4 x+\sin^6 x)\cos x$

الحل:

نبدأ بفك الطرف الأيسر لاستخدام متطابقة فيثاغورث.

$\cos^5 x = \cos^4 x\ \cos x$ $\quad \sin^2 x\ \cos^5 x = \sin^2 x\ \cos^4 x\ \cos x$

90



$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$= (\sin^2 x)(1 - \sin^2 x)^2 \cos x$

$= (\sin^2 x)(1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x)\cos x$

$= (\sin^2 x - 2\sin^4 x + \sin^6 x)\cos x$

حاول أن تحل

5 أثبت صحة المتطابقة: $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x$

إرشاد: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

91

8 إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

1 $$\frac{\sin^2\theta + 1 + \cos^2\theta + 2\cos\theta}{(1+\cos\theta)\sin\theta} = \frac{2(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)\sin\theta}$$
$$= 2\csc\theta$$

2 $$\frac{1 + \sin^2 x + 2\sin x - 1 - \sin^2 x + 2\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$$
$$= \frac{4\sin x}{\cos^2 x} = 4\tan x\sec x$$

3 $$\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right)^2 = \left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)^2$$
$$= \frac{(1-\cos x)(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}$$
$$= \frac{(1-\cos x)(1-\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$
$$= \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

4 $$\frac{\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\sin x} + \cos x}$$
$$= \frac{(1+\sin x)}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x(1+\sin x)} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$
$$= \sin x(1+\tan^2 x) = \sin x + \sin x\tan^2 x$$

نستنتج أن: $\dfrac{\sec x + \tan x}{\cot x + \cos x} = \sin x + \sin x\tan^2 x$

5 طريقة أولى، نبدأ من اليمين: $1 - 3\sin^2 x\cos^2 x$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x\cos^2 x$$
$$= \sin^6 x + 3\sin^4 x\cos^2 x + 3\cos^4 x\sin^2 x$$
$$+\cos^6 x - 3\sin^2 x\cos^2 x$$
$$= \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x)$$
$$-3\sin^2 x\cos^2 x$$
$$= \sin^6 x + \cos^6 x$$

طريقة ثانية، نبدأ من اليسار:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3$$
$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x\cos^2 x)$$
$$=1((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x - \sin^2 x\cos^2 x)$$
$$= 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x$$

3–9: حل معادلات مثلثية

1 الأهداف

- يحل معادلات مثلثية بالطرائق الجبرية.
- يستخدم الدالة الدورية في حل المعادلات المثلثية.
- يحل معادلات مثلثية تتضمن مضاعفات الزاوية.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

معادلة مثلثية – دالة دورية – العامل الصفري – مضاعفات الزاوية.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة بيانية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) أوجد مجموعة حل المعادلة: $x^2 - 9x + 14 = 0$

(b) أوجد:

$\sin\frac{\pi}{6}$, $\sin\frac{\pi}{4}$, $\sin\frac{\pi}{3}$, $\cos\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{\pi}{4}$, $\cos\frac{\pi}{3}$,

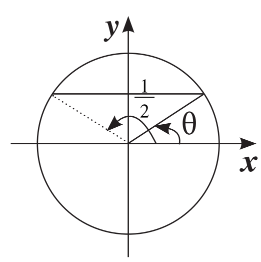
$\tan\frac{\pi}{6}$, $\tan\frac{\pi}{4}$, $\tan\frac{\pi}{3}$

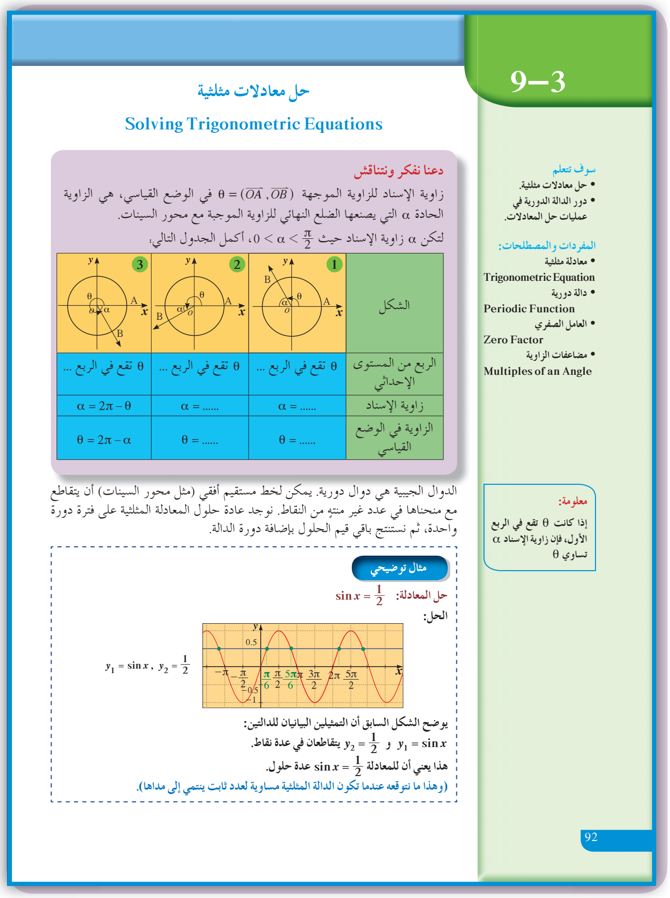
5 التدريس

ركّز مع الطلاب على المفاهيم التالية:

(a) إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{2}$، فما هي قيمة θ؟

ساعدهم على رؤية الحل باستخدام دائرة الوحدة.




9–3

حل معادلات مثلثية

Solving Trigonometric Equations

دعنا نفكر ونتناقش

زاوية الإسناد للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \theta$ في الوضع القياسي، هي الزاوية الحادة α التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجبة مع محور السينات.

لتكن α زاوية الإسناد حيث $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$، أكمل الجدول التالي:

الشكل	1	2	3
الربع من المستوى الإحداثي	θ تقع في الربع ...	θ تقع في الربع ...	θ تقع في الربع ...
زاوية الإسناد	$\alpha = ...$	$\alpha = ...$	$\alpha = 2\pi - \theta$
الزاوية في الوضع القياسي	$\theta = ...$	$\theta = ...$	$\theta = 2\pi - \alpha$

الدوال الجيبية هي دوال دورية. يمكن لخط مستقيم أفقي (مثل محور السينات) أن يتقاطع مع منحناها في عدد غير منتهٍ من النقاط. نوجد عادة حلول المعادلة المثلثية على فترة دورة واحدة، ثم نستنتج باقي قيم الحلول بإضافة دورة الدالة.

مثال توضيحي

حل المعادلة: $\sin x = \frac{1}{2}$

الحل:

$y_1 = \sin x$, $y_2 = \frac{1}{2}$

يوضح الشكل السابق أن التمثيلين البيانيان للدالتين:

$y_1 = \sin x$ و $y_2 = \frac{1}{2}$ يتقاطعان في عدة نقاط.

هذا يعني أن للمعادلة $\sin x = \frac{1}{2}$ عدة حلول.

(وهذا ما نتوقعه عندما تكون الدالة المثلثية مساوية لعدد ثابت ينتمي إلى مداها).

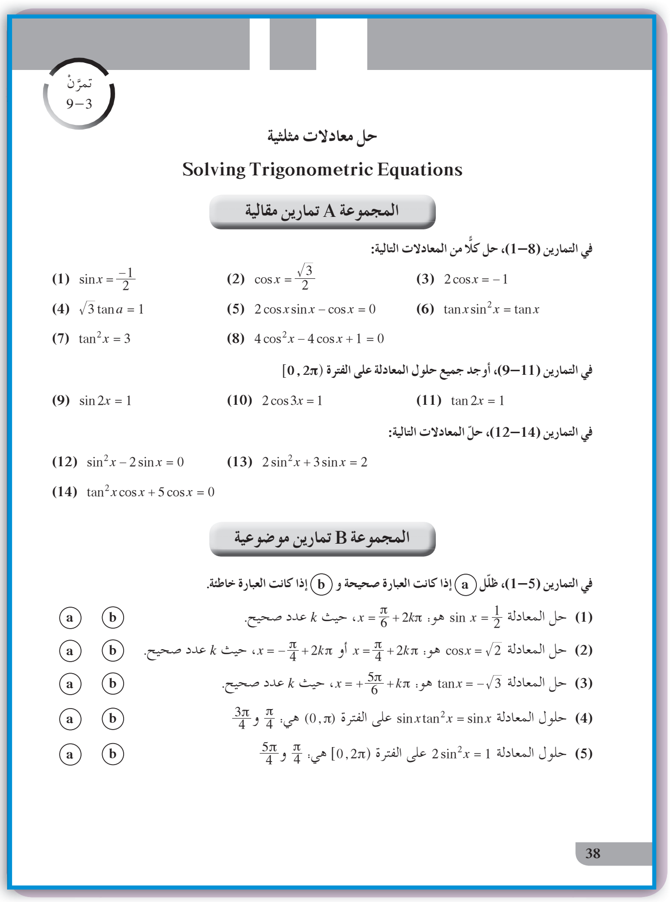
سوف تتعلم
- حل معادلات مثلثية.
- دور الدالة الدورية في عمليات حل المعادلات.

المفردات والمصطلحات:
- معادلة مثلثية Trigonometric Equation
- دالة دورية Periodic Function
- العامل الصفري Zero Factor
- مضاعفات الزاوية Multiples of an Angle

معلومة:

إذا كانت θ تقع في الربع الأول، فإن زاوية الإسناد α تساوي θ

92


تمرَّنْ 9–3

حل معادلات مثلثية

Solving Trigonometric Equations

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–8)، حل كلًّا من المعادلات التالية:

(1) $\sin x = \frac{-1}{2}$ (2) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $2\cos x = -1$

(4) $\sqrt{3}\tan a = 1$ (5) $2\cos x\sin x - \cos x = 0$ (6) $\tan x\sin^2 x = \tan x$

(7) $\tan^2 x = 3$ (8) $4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$

في التمارين (9–11)، أوجد جميع حلول المعادلة على الفترة $[0, 2\pi)$

(9) $\sin 2x = 1$ (10) $2\cos 3x = 1$ (11) $\tan 2x = 1$

في التمارين (12–14)، حلّ المعادلات التالية:

(12) $\sin^2 x - 2\sin x = 0$ (13) $2\sin^2 x + 3\sin x = 2$

(14) $\tan^2 x\cos x + 5\cos x = 0$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حل المعادلة $\sin x = \frac{1}{2}$ هو: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح. (a) (b)

(2) حل المعادلة $\cos x = \sqrt{2}$ هو: $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ أو $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح. (a) (b)

(3) حل المعادلة $\tan x = -\sqrt{3}$ هو: $x = +\frac{5\pi}{6} + k\pi$، حيث k عدد صحيح. (a) (b)

(4) حلول المعادلة $\sin x\tan^2 x = \sin x$ على الفترة $(0, \pi)$ هي: $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ (a) (b)

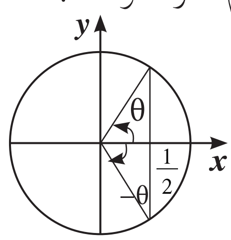
(5) حلول المعادلة $2\sin^2 x = 1$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي: $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$ (a) (b)

38

من النقطة $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ على محور الصادات نأخذ مستقيمًا موازيًا لمحور السينات حيث يقطع الدائرة في نقطتين ويكون لدينا قيمتان لِـ θ بحيث $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$، $\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ وهما $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

(b) إذا كان $\cos\theta = \frac{1}{2}$، فما هي قيمة θ؟

ساعدهم على رؤية الحل باستخدام دائرة الوحدة.



من نقطة $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ على محور السينات نأخذ مستقيمًا موازيًا لمحور الصادات حيث يقطع الدائرة في نقطتين ويكون لدينا زاوية θ بحيث $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ وزاوية أخرى $-\theta$ بحيث $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

أخبرهم أن هذه الحلول تحدث فقط على فترة واحدة وهي $[0, 2\pi)$

ولكن بما أن $\sin\theta$، $\cos\theta$ هما دالتان دوريتان وأن الرسم البياني لكل منهما له عدد لا ينتهي من القيم العظمى والقيم الصغرى فإن الحلول هي أيضًا غير منتهية كما يبدو على الرسم البياني.

في المثال (1)

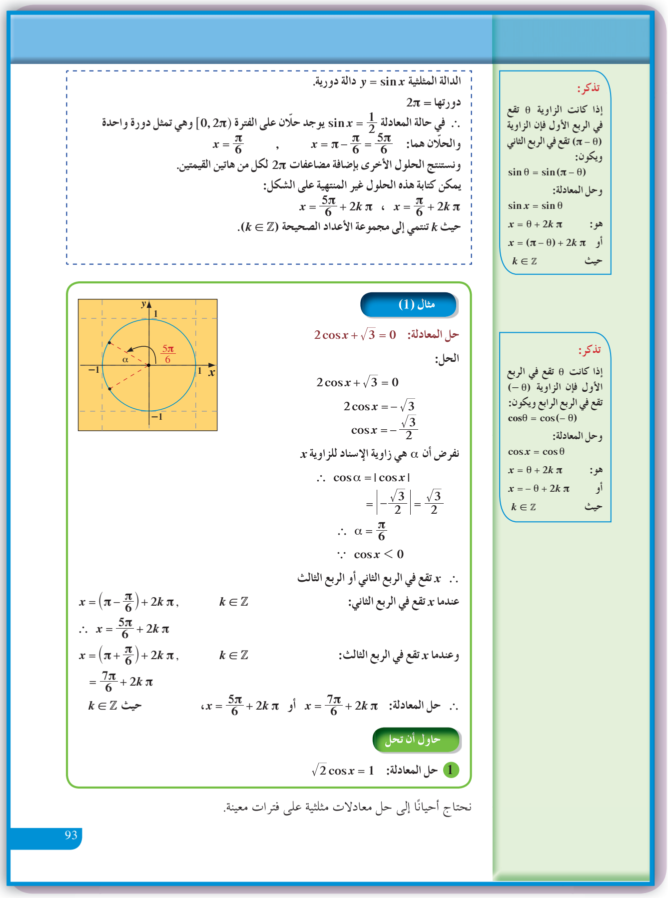
ذكّر الطلاب أن الزاوية تقع في الربع الثاني أو الربع الثالث لأن $\cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} < 0$ مما يعطي حلّين للمعادلة.

شدّد على إضافة $2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ على كل من الحلّين.

في المثال (2)

$\sin\theta = -\frac{1}{3} < 0$ $\therefore$ تقع الزاوية θ في الربع الثالث أو الربع الرابع مما يعطي حلّين للمعادلة.

الزاوية θ ليست من الزوايا الخاصة، على الطلاب استخدام الآلة الحاسبة لوضع حلول تقريبية تنتمي للفترة المحددة.



الدالة المثلثية $y = \sin x$ دالة دورية.

دورتها $= 2\pi$

$\therefore$ في حالة المعادلة $\sin x = \frac{1}{2}$ يوجد حلّان على الفترة $[0, 2\pi)$ وهي تمثل دورة واحدة

والحلّان هما: $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ ، $x = \frac{\pi}{6}$

ونستنتج الحلول الأخرى بإضافة مضاعفات 2π لكل من هاتين القيمتين.

يمكن كتابة هذه الحلول غير المنتهية على الشكل:

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ، $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

حيث k تنتمي إلى مجموعة الأعداد الصحيحة $(k \in \mathbb{Z})$.

تذكر:

إذا كانت الزاوية θ تقع في الربع الأول فإن الزاوية $(\pi - \theta)$ تقع في الربع الثاني ويكون:

$\sin\theta = \sin(\pi - \theta)$

وحل المعادلة:

$\sin x = \sin\theta$

هو: $x = \theta + 2k\pi$

أو $x = (\pi - \theta) + 2k\pi$

حيث $k \in \mathbb{Z}$

مثال (1)

حل المعادلة: $2\cos x + \sqrt{3} = 0$

الحل:

$$2\cos x + \sqrt{3} = 0$$
$$2\cos x = -\sqrt{3}$$
$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x

$$\therefore \cos\alpha = |\cos x|$$
$$= \left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}$$
$$\because \cos x < 0$$

$\therefore$ x تقع في الربع الثاني أو الربع الثالث

عندما x تقع في الربع الثاني: $x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\therefore x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

وعندما x تقع في الربع الثالث: $x = \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$= \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$

$\therefore$ حل المعادلة: $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ أو $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$، حيث $k \in \mathbb{Z}$

تذكر:

إذا كانت θ تقع في الربع الأول فإن الزاوية $(-\theta)$ تقع في الربع الرابع ويكون:

$\cos\theta = \cos(-\theta)$

وحل المعادلة:

$\cos x = \cos\theta$

هو: $x = \theta + 2k\pi$

أو $x = -\theta + 2k\pi$

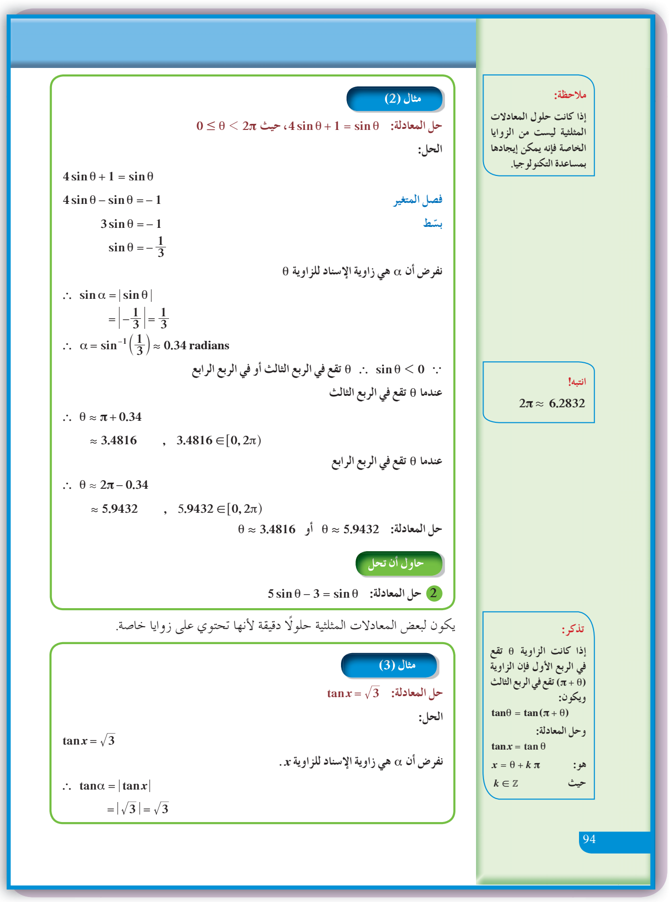
حيث $k \in \mathbb{Z}$

حاول أن تحل

1 حل المعادلة: $\sqrt{2}\cos x = 1$

نحتاج أحيانًا إلى حل معادلات مثلثية على فترات معينة.

93



مثال (2)

حل المعادلة: $4\sin\theta + 1 = \sin\theta$، حيث $0 \le \theta < 2\pi$

الحل:

$4\sin\theta + 1 = \sin\theta$

فصل المتغير: $4\sin\theta - \sin\theta = -1$

بسّط: $3\sin\theta = -1$

$\sin\theta = -\frac{1}{3}$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\therefore \sin\alpha = |\sin\theta|$$
$$= \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$$
$$\therefore \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0.34 \text{ radians}$$

$\because \sin\theta < 0$ $\therefore$ θ تقع في الربع الثالث أو في الربع الرابع

عندما θ تقع في الربع الثالث

$\therefore \theta \approx \pi + 0.34$

≈ 3.4816 , $3.4816 \in [0, 2\pi)$

عندما θ تقع في الربع الرابع

$\therefore \theta \approx 2\pi - 0.34$

≈ 5.9432 , $5.9432 \in [0, 2\pi)$

حل المعادلة: $\theta \approx 5.9432$ أو $\theta \approx 3.4816$

ملاحظة:

إذا كانت حلول المعادلات المثلثية ليست من الزوايا الخاصة فإنه يمكن إيجادها بمساعدة التكنولوجيا.

انتبه!

$2\pi \approx 6.2832$

حاول أن تحل

2 حل المعادلة: $5\sin\theta - 3 = \sin\theta$

يكون لبعض المعادلات المثلثية حلولًا دقيقة لأنها تحتوي على زوايا خاصة.

مثال (3)

حل المعادلة: $\tan x = \sqrt{3}$

الحل:

$\tan x = \sqrt{3}$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x.

$$\therefore \tan\alpha = |\tan x|$$
$$= |\sqrt{3}| = \sqrt{3}$$

تذكر:

إذا كانت الزاوية θ تقع في الربع الأول فإن الزاوية $(\pi + \theta)$ تقع في الربع الثالث ويكون:

$\tan\theta = \tan(\pi + \theta)$

وحل المعادلة:

$\tan x = \tan\theta$

هو: $x = \theta + k\pi$

حيث $k \in \mathbb{Z}$

94

في المثال (3)

دورة الدالة $\tan\theta$ هي π، وبالتالي هناك حلّان للمعادلة أحدهما في الربع الأول والثاني في الربع الثالث لكن نعوض عن ذلك بكتابة الحل في الربع الأول وإضافة $k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

في المثال (4)

يجب التعامل بدقة مع هذا المثال، وذكّر الطلاب بمتابعة الحل بكل تشعباته حتى النهاية مع إضافة $2k\pi$ إلى كل حل.

في المثال (5)

حلّ المعادلات المثلثية بالاستعانة بطريقة حل معادلات الدرجة الثانية بالتحليل أو استخدام المميز مما يعطي أيضًا حلّين مع إضافة $2k\pi$. مع التذكير برفض الحل إذا كان قيم $\cos x$، $\sin x$، لا تنتمي للفترة $[-1,1]$

في المثال (6)

هذا المثال هو تطبيق لحل معادلة مضاعفات الزاوية.

من المهم جدًّا تنبيه الطلاب إلى فترة المتغير x وهي $[0,\pi)$ ومن ثم إيجاد فترة المتغير $3x$ وهذا يتطلب الضرب بمعامل x والذي هو 3 لإيجاد الفترة $[0,3\pi)$.

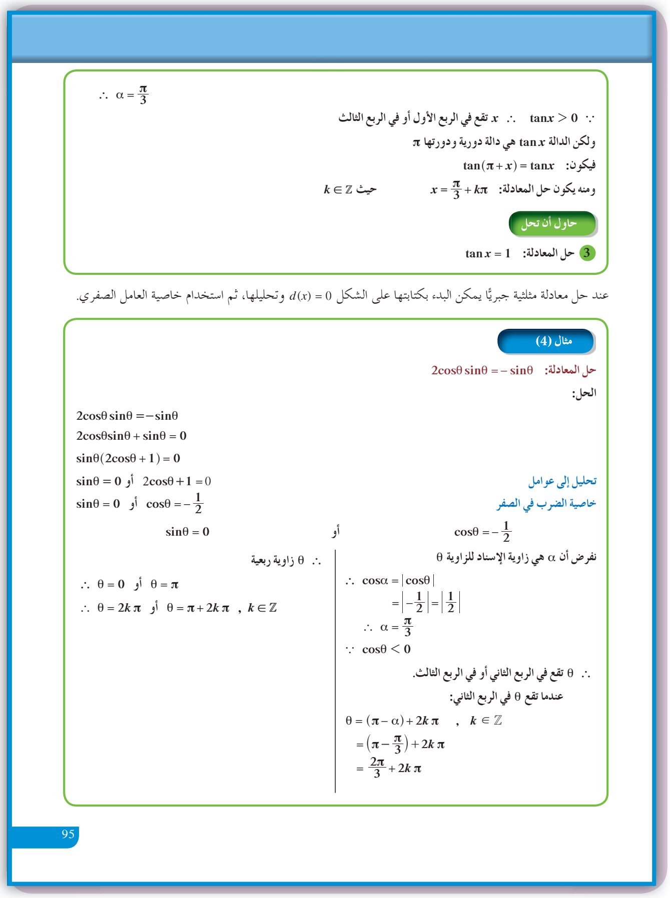
أخبرهم أن المعادلة تعطي قيمة المتغير $3x$ لذا يجب القسمة على 3 لإيجاد قيمة x.

6 الربط

يؤمن المثال (7) الربط بين الدوال المثلثية والنابض المتأرجح صعودًا ونزولًا بحركة تكرارية تندرج تحت تسمية الحركة التوافقية البسيطة.

اطلب إلى الطلاب رسم منحنى الدالة:

$y = -10\cos\frac{2\pi}{3}t$، حيث t تمثل الزمن بالثواني، y الارتفاع أو الانخفاض بالسنتيمتر ثم دراسة النتائج التي يلاحظونها.



$\therefore\ \alpha = \frac{\pi}{3}$

$\because\ \tan x > 0\quad \therefore$ x تقع في الربع الأول أو في الربع الثالث

ولكن الدالة $\tan x$ هي دالة دورية ودورتها π

فيكون: $\tan(\pi + x) = \tan x$

ومنه يكون حل المعادلة: $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

حاول أن تحل

3 حل المعادلة: $\tan x = 1$

عند حل معادلة مثلثية جبريًّا يمكن البدء بكتابتها على الشكل $d(x) = 0$ وتحليلها، ثم استخدام خاصية العامل الصفري.

مثال (4)

حل المعادلة: $2\cos\theta\sin\theta = -\sin\theta$

الحل:

$2\cos\theta\sin\theta = -\sin\theta$

$2\cos\theta\sin\theta + \sin\theta = 0$

$\sin\theta(2\cos\theta + 1) = 0$ تحليل إلى عوامل

$\sin\theta = 0$ أو $2\cos\theta + 1 = 0$ خاصية الضرب في الصفر

$\sin\theta = 0$ أو $\cos\theta = -\frac{1}{2}$

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$ أو $\sin\theta = 0$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$\therefore\ \cos\alpha = |\cos\theta| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{2}\right|$

$\therefore\ \alpha = \frac{\pi}{3}$

$\because\ \cos\theta < 0$

$\therefore$ θ تقع في الربع الثاني أو في الربع الثالث.

عندما تقع θ في الربع الثاني:

$\theta = (\pi - \alpha) + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

$= \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$

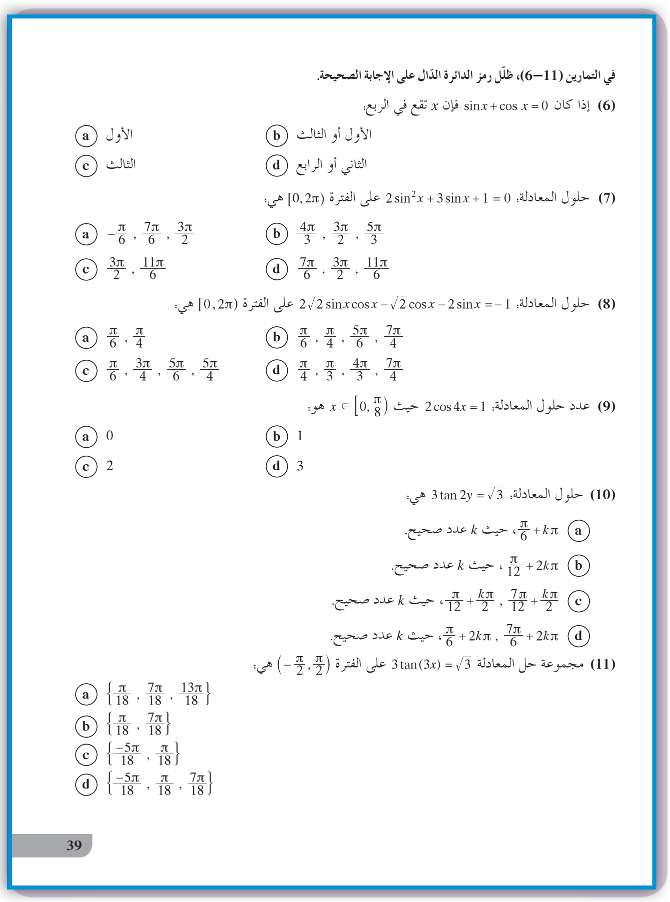
$= \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

$\therefore$ θ زاوية ربعية

$\therefore\ \theta = 0$ أو $\theta = \pi$

$\therefore\ \theta = 2k\pi$ أو $\theta = \pi + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

95



في التمارين (6–11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا كان $\sin x + \cos x = 0$ فإن x تقع في الربع:

(a) الأول　(b) الأول أو الثالث

(c) الثالث　(d) الثاني أو الرابع

(7) حلول المعادلة: $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي:

(a) $-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$　(b) $\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}$

(c) $\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$　(d) $\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

(8) حلول المعادلة: $2\sqrt{2}\sin x\cos x - \sqrt{2}\cos x - 2\sin x = -1$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي:

(a) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$　(b) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}$

(c) $\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}$　(d) $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}$

(9) عدد حلول المعادلة: $2\cos 4x = 1$ حيث $x \in \left[0, \frac{\pi}{8}\right)$ هو:

(a) 0　(b) 1

(c) 2　(d) 3

(10) حلول المعادلة: $3\tan 2y = \sqrt{3}$ هي:

(a) $\frac{\pi}{6} + k\pi$، حيث k عدد صحيح.

(b) $\frac{\pi}{12} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح.

(c) $\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \frac{7\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$، حيث k عدد صحيح.

(d) $\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح.

(11) مجموعة حل المعادلة $3\tan(3x) = \sqrt{3}$ على الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ هي:

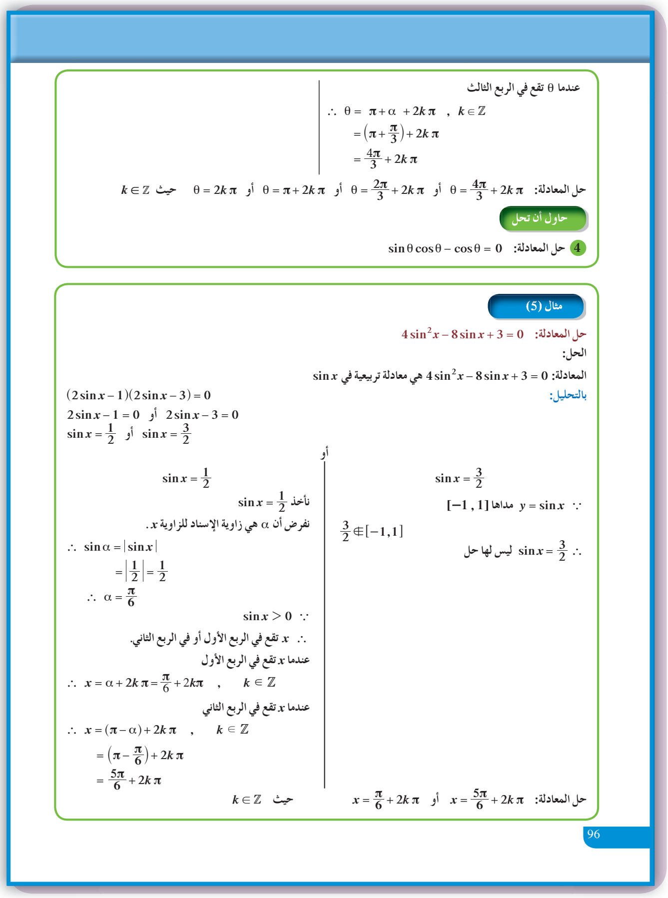
(a) $\left\{\frac{\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}\right\}$

(b) $\left\{\frac{\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}\right\}$

(c) $\left\{\frac{-5\pi}{18}, \frac{\pi}{18}\right\}$

(d) $\left\{\frac{-5\pi}{18}, \frac{\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}\right\}$

39


عندما θ تقع في الربع الثالث

$\therefore\ \theta = \pi + \alpha + 2k\pi \ ,\ k \in Z$

$= \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$

$= \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

حل المعادلة: $\theta = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ أو $\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ أو $\theta = \pi + 2k\pi$ أو $\theta = 2k\pi$ حيث $k \in Z$

حاول أن تحل

4 حل المعادلة: $\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$

مثال (5)

حل المعادلة: $4\sin^2 x - 8\sin x + 3 = 0$

الحل:

المعادلة: $4\sin^2 x - 8\sin x + 3 = 0$ هي معادلة تربيعية في $\sin x$

بالتحليل:

$(2\sin x - 1)(2\sin x - 3) = 0$

$2\sin x - 1 = 0$ أو $2\sin x - 3 = 0$

$\sin x = \frac{1}{2}$ أو $\sin x = \frac{3}{2}$

$\sin x = \frac{3}{2}$

$\because\ y = \sin x$ مداها $[-1, 1]$

$\frac{3}{2} \notin [-1, 1]$

$\therefore\ \sin x = \frac{3}{2}$ ليس لها حل

أو

$\sin x = \frac{1}{2}$

نأخذ $\sin x = \frac{1}{2}$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x.

$\therefore\ \sin\alpha = |\sin x|$

$= \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

$\therefore\ \alpha = \frac{\pi}{6}$

$\because\ \sin x > 0$

$\therefore$ x تقع في الربع الأول أو في الربع الثاني

عندما x تقع في الربع الأول

$\therefore\ x = \alpha + 2k\pi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ ,\ k \in Z$

عندما x تقع في الربع الثاني

$\therefore\ x = (\pi - \alpha) + 2k\pi \ ,\ k \in Z$

$= \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$

$= \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

حل المعادلة: $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ أو $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ حيث $k \in Z$

96

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في كتابة مجموعة الحل بين $\sin\theta$، $\cos\theta$، $\tan\theta$. أعد تذكيرهم بأن مجموعة الحل:

$\sin\theta = \sin\alpha$ هي: $\theta = \alpha + 2k\pi$ أو $\theta = (\pi - \alpha) + 2k\pi$

ولكن $\cos\theta = \cos\alpha$ تعطي:

$$\theta = \alpha + 2k\pi$$

أو

$$\theta = -\alpha + 2k\pi$$

$\tan\theta = \tan\alpha$ تعطي:

$$\theta = \alpha + k\pi$$

شدّد على الطلاب الانتباه إلى الفترة المعطاه.

8 التقييم

تابع الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من حسن أدائهم وأنهم قد استطاعوا إيجاد الحلول الصحيحة دون ارتكاب الأخطاء.

اختبار سريع

1 أوجد مجموعة حل المعادلة: $\cos^2 x - \frac{1}{4} = 0$

$\cos x = \frac{1}{2}$ أو $\cos x = -\frac{1}{2}$

إذا $\cos x = \frac{1}{2}$، $\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$

$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

أي $\cos x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$

إذا $\cos x = -\frac{1}{2}$، $\cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$

$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = \frac{-2\pi}{3} + 2k\pi$

أي $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

حيث k عدد صحيح.

2 أوجد مجموعة حل المعادلة: $4\sin\theta - 2 = \sin\theta$

$\sin\theta = \frac{2}{3}$، $3\sin\theta = 2$، $4\sin\theta - \sin\theta = 2$

باستخدام الآلة الحاسبة نجد $\sin\theta = \sin 41.8°$

أي $\theta = 41.8° + 360°k$

أو $\theta = 138.2° + 360°k$

حيث k عدد صحيح.

3 أوجد مجموعة حل المعادلة:

$$4\sin^2 x - 2(1+\sqrt{3})\sin x + \sqrt{3} = 0$$

نستخدم المميز: $\Delta = b^2 - 4ac = 4(\sqrt{3}-1)^2$

ومنه: $\sin x = \frac{1}{2}$ أو $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

إذا $\sin x = \frac{1}{2}$، $\sin x = \sin\frac{\pi}{6}$

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ، $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

إذا $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$، $\sin x = \sin\frac{\pi}{3}$

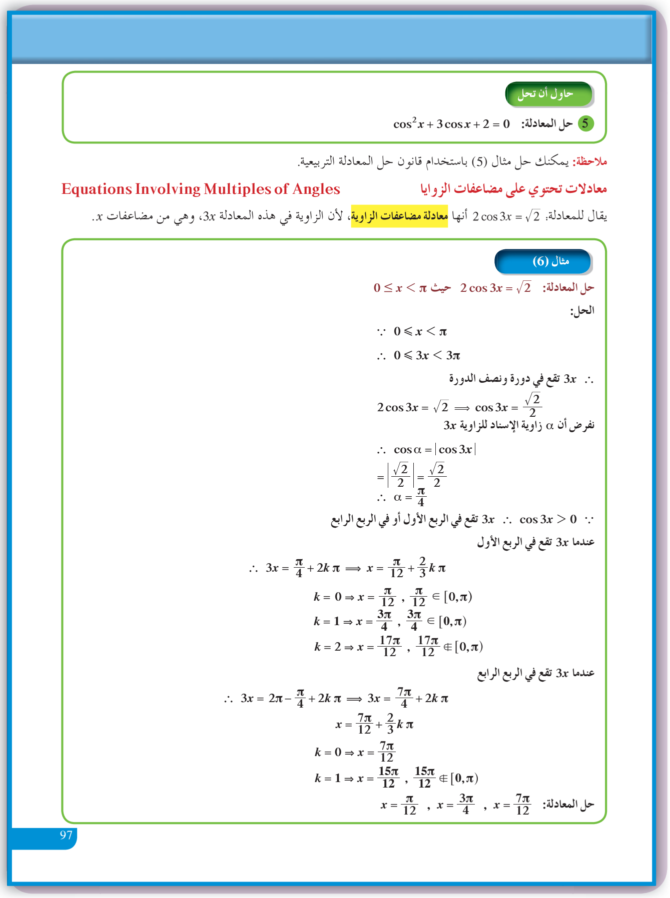
$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

أو $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح.

4 أوجد مجموعة حل المعادلة: $\tan 3\theta = \sqrt{3}$

$\tan 3\theta = \tan\frac{\pi}{3}$ ، $3\theta = \frac{\pi}{3} + k\pi$

$\theta = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}$



حاول أن تحل

5 حل المعادلة: $\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0$

ملاحظة: يمكنك حل مثال (5) باستخدام قانون حل المعادلة التربيعية.

معادلات تحتوي على مضاعفات الزوايا **Equations Involving Multiples of Angles**

يقال للمعادلة: $2\cos 3x = \sqrt{2}$ أنها **معادلة مضاعفات الزاوية**، لأن الزاوية في هذه المعادلة $3x$، وهي من مضاعفات x.

مثال (6)

حل المعادلة: $2\cos 3x = \sqrt{2}$ حيث $0 \le x < \pi$

الحل:

$\because\ 0 \leqslant x < \pi$

$\therefore\ 0 \leqslant 3x < 3\pi$

$\therefore$ $3x$ تقع في دورة ونصف الدورة

$2\cos 3x = \sqrt{2} \implies \cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

نفرض أن α زاوية الإسناد للزاوية $3x$

$\therefore\ \cos\alpha = |\cos 3x|$

$= \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ \alpha = \frac{\pi}{4}$

$\because\ \cos 3x > 0$ $\therefore$ $3x$ تقع في الربع الأول أو في الربع الرابع

عندما $3x$ تقع في الربع الأول

$\therefore\ 3x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \implies x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi$

$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{12}\ ,\ \frac{\pi}{12} \in [0,\pi)$

$k = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}\ ,\ \frac{3\pi}{4} \in [0,\pi)$

$k = 2 \Rightarrow x = \frac{17\pi}{12}\ ,\ \frac{17\pi}{12} \notin [0,\pi)$

عندما $3x$ تقع في الربع الرابع

$\therefore\ 3x = 2\pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \implies 3x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$

$x = \frac{7\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi$

$k = 0 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{12}$

$k = 1 \Rightarrow x = \frac{15\pi}{12}\ ,\ \frac{15\pi}{12} \notin [0,\pi)$

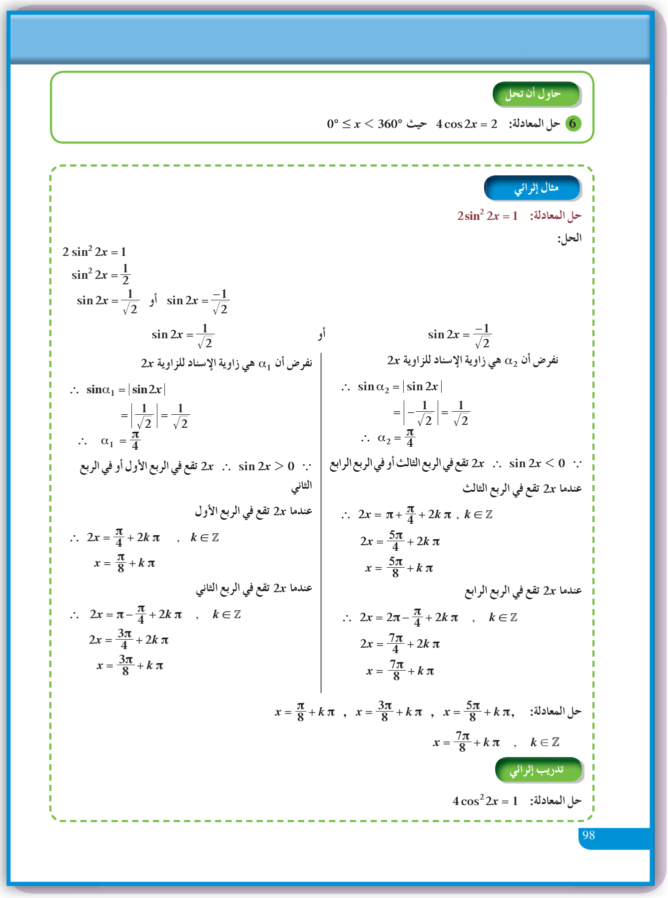
حل المعادلة: $x = \frac{7\pi}{12}$ ، $x = \frac{3\pi}{4}$ ، $x = \frac{\pi}{12}$

97

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

3	2	1
الرابع	الثالث	الثاني
$\alpha = 2\pi - \theta$	$\alpha = \theta - \pi$	$\alpha = \pi - \theta$
$\theta = 2\pi - \alpha$	$\theta = \pi + \alpha$	$\theta = \pi - \alpha$



حاول أن تحل

6 حل المعادلة: $4\cos 2x = 2$ حيث $0° \le x < 360°$

مثال إثرائي

حل المعادلة: $2\sin^2 2x = 1$

الحل:

$2\sin^2 2x = 1$

$\sin^2 2x = \frac{1}{2}$

$\sin 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ أو $\sin 2x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\sin 2x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$	أو	$\sin 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

نفرض أن α_2 هي زاوية الإسناد للزاوية $2x$

$\therefore \sin\alpha_2 = |\sin 2x| = \left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \alpha_2 = \frac{\pi}{4}$

$\because \sin 2x < 0 \quad \therefore$ $2x$ تقع في الربع الثالث أو في الربع الرابع

عندما $2x$ تقع في الربع الثالث

$\therefore 2x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

$2x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$

$x = \frac{5\pi}{8} + k\pi$

عندما $2x$ تقع في الربع الرابع

$\therefore 2x = 2\pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

$2x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$

$x = \frac{7\pi}{8} + k\pi$

نفرض أن α_1 هي زاوية الإسناد للزاوية $2x$

$\therefore \sin\alpha_1 = |\sin 2x| = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \alpha_1 = \frac{\pi}{4}$

$\because \sin 2x > 0 \quad \therefore$ $2x$ تقع في الربع الأول أو في الربع الثاني

عندما $2x$ تقع في الربع الأول

$\therefore 2x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{8} + k\pi$

عندما $2x$ تقع في الربع الثاني

$\therefore 2x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

$2x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

$x = \frac{3\pi}{8} + k\pi$

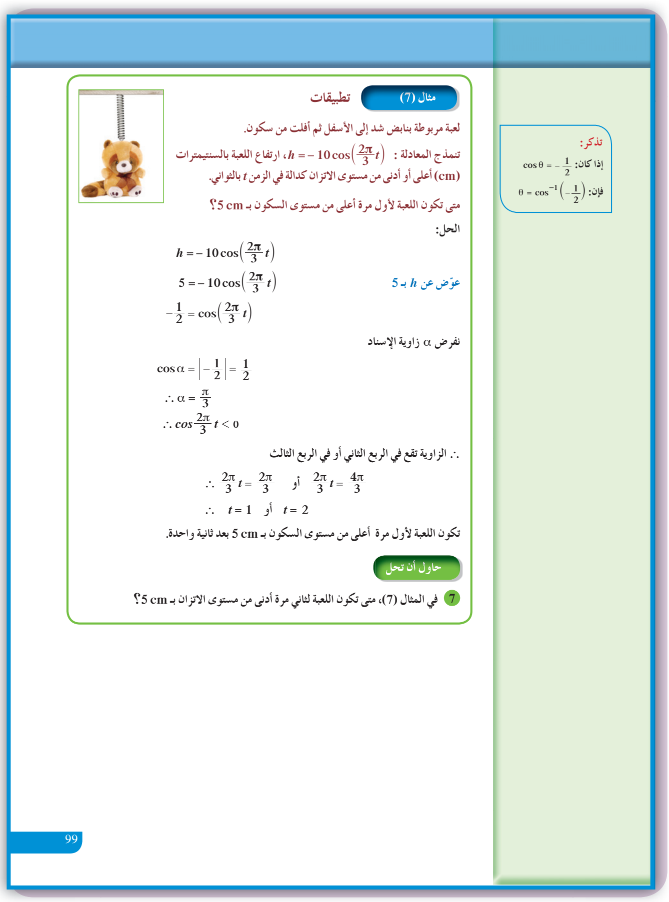
حل المعادلة: $x = \frac{5\pi}{8} + k\pi, \ x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \ , \ x = \frac{\pi}{8} + k\pi$

$x = \frac{7\pi}{8} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

تدريب إثرائي

حل المعادلة: $4\cos^2 2x = 1$

98



مثال (7) تطبيقات

لعبة مربوطة بنابض شد إلى الأسفل ثم أفلت من سكون.

تنمذج المعادلة: $h = -10\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$، ارتفاع اللعبة بالسنتيمترات (cm) أعلى أو أدنى من مستوى الاتزان كدالة في الزمن t بالثواني.

متى تكون اللعبة لأول مرة أعلى من مستوى السكون بـ 5 cm؟

الحل:

$h = -10\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$

عوّض عن h بـ 5 $\quad 5 = -10\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$

$-\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$

نفرض α زاوية الإسناد

$\cos\alpha = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$

$\therefore \cos\frac{2\pi}{3}t < 0$

$\therefore$ الزاوية تقع في الربع الثاني أو في الربع الثالث

$\therefore \frac{2\pi}{3}t = \frac{2\pi}{3}$ أو $\frac{2\pi}{3}t = \frac{4\pi}{3}$

$\therefore t = 1$ أو $t = 2$

تكون اللعبة لأول مرة أعلى من مستوى السكون بـ 5 cm بعد ثانية واحدة.

حاول أن تحل

7 في المثال (7)، متى تكون اللعبة لثاني مرة أدنى من مستوى الاتزان بـ 5 cm؟

تذكر:

إذا كان: $\cos\theta = -\frac{1}{2}$

فإن: $\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

99

«حاول أن تحل»

1 $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \ , \ \cos x = \cos\frac{\pi}{4}$

$x = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi$ أو $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

أي $x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح.

2 $\sin\theta = \frac{3}{4}$

$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 0.848 \text{ rad} + 2k\pi$

أو $\approx 2.292 \text{ rad} + 2k\pi$

حيث k عدد صحيح.

3 $\tan x = \tan\frac{\pi}{4} \ , \ x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

حيث k عدد صحيح.

4 $\cos\theta(\sin\theta - 1) = 0$

$\cos\theta = 0$ أو $\sin\theta = 1$

$\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$

حيث k عدد صحيح.

5 $\cos\theta = -1 \ , \ \cos\theta = -2$ مرفوضة

$\cos\theta = -1 \ , \ \theta = \pi + 2k\pi$

حيث k عدد صحيح.

6 $\cos(2x) = \frac{1}{2} = \cos 60°$

- $2x = 60° + 360k$

  $x = 30° + 180k$

  $x = 30° \ , \ x = 210°$

- $2x = -60° + 360k$

  $x = -30° + 180k$

  $x = 150° \ , \ x = 330°$

7 $t = \frac{5}{2}$

أي بعد ثانيتين ونصف الثانية

«تدريب إثرائي»

حل المعادلة $4\cos^2 2x = 1$ هو:

$x = \frac{\pi}{6} + k\pi \ , \ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \ , \ x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \ , \ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$

9–4: متطابقات المجموع والفرق

1 الأهداف

- يتعرف جيب مجموع زاويتين أو الفرق بينهما.
- يتعرف جيب تمام مجموع زاويتين أو الفرق بينهما.
- يستخدم متطابقة الدوال المتكافئة.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

جيب مجموع زاويتين – جيب الفرق بين زاويتين – جيب تمام مجموع زاويتين – جيب تمام الفرق بين زاويتين – دوال متكافئة.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

بسّط التعابير المثلثية التالية:

(a) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ **(b)** $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

(c) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$ **(d)** $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد:

$\sin 15^\circ$, $\sin 75^\circ$, $\sin 105^\circ$, $\cos 15^\circ$, $\cos 75^\circ$, $\cos 105^\circ$

5 التدريس

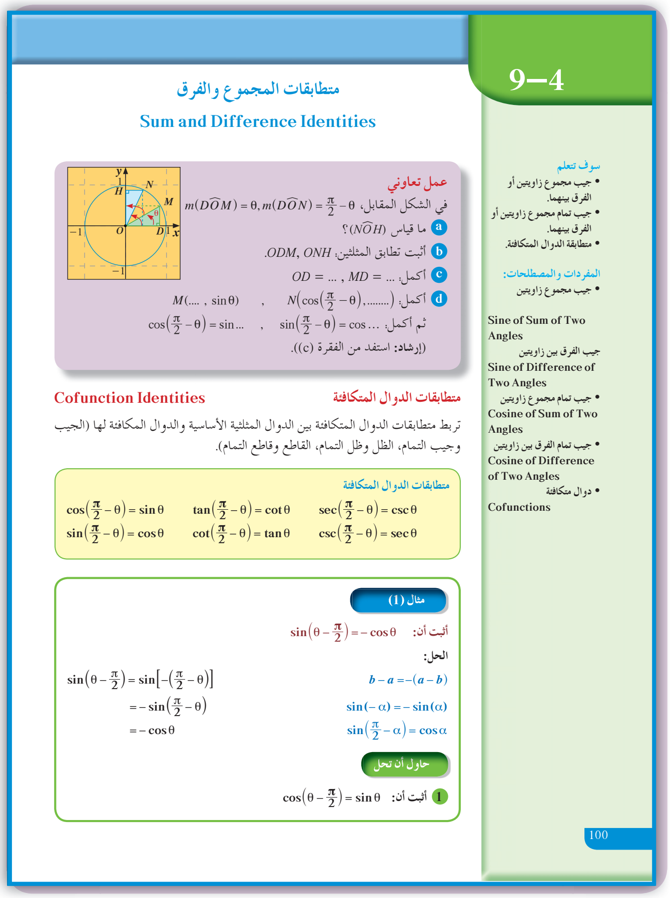
يتعرف الطلاب في هذا الدرس على متطابقات جديدة ترتكز على المتطابقات الأساسية التي رأيناها سابقًا ويمكن بواسطتها إيجاد قيم الجيب وجيب التمام والظل لزوايا خاصة مثل:

$15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$, $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$,

$105^\circ = 90^\circ + 15^\circ = 60^\circ + 45^\circ \ldots$

ساعد الطلاب على فهم كيفية إيجاد $\cos(\beta-\alpha)$،

اطلب إليهم كتابة طريقة إيجاد هذه المتطابقة.



9–4

متطابقات المجموع والفرق

Sum and Difference Identities

سوف تتعلم
- جيب مجموع زاويتين أو الفرق بينهما.
- جيب تمام مجموع زاويتين أو الفرق بينهما.
- متطابقة الدوال المتكافئة.

المفردات والمصطلحات:
- جيب مجموع زاويتين Sine of Sum of Two Angles
- جيب الفرق بين زاويتين Sine of Difference of Two Angles
- جيب تمام مجموع زاويتين Cosine of Sum of Two Angles
- جيب تمام الفرق بين زاويتين Cosine of Difference of Two Angles
- دوال متكافئة Cofunctions

عمل تعاوني

في الشكل المقابل، $m(D\widehat{O}M)=\theta, m(D\widehat{O}N)=\frac{\pi}{2}-\theta$

a ما قياس $(N\widehat{O}H)$؟

b أثبت تطابق المثلثين: ODM, ONH.

c أكمل: $OD = \ldots , MD = \ldots$

d أكمل: $N\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right), \ldots\ldots\right)$, $M(\ldots , \sin\theta)$

ثم أكمل: $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\ldots$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\ldots$

(**إرشاد:** استفد من الفقرة (c)).

متطابقات الدوال المتكافئة Cofunction Identities

تربط متطابقات الدوال المتكافئة بين الدوال المثلثية الأساسية والدوال المكافئة لها (الجيب وجيب التمام، الظل وظل التمام، القاطع وقاطع التمام).

متطابقات الدوال المتكافئة

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$ $\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\csc\theta$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta$ $\csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sec\theta$

مثال (1)

أثبت أن: $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\theta$

الحل:

$b-a=-(a-b)$ $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]$

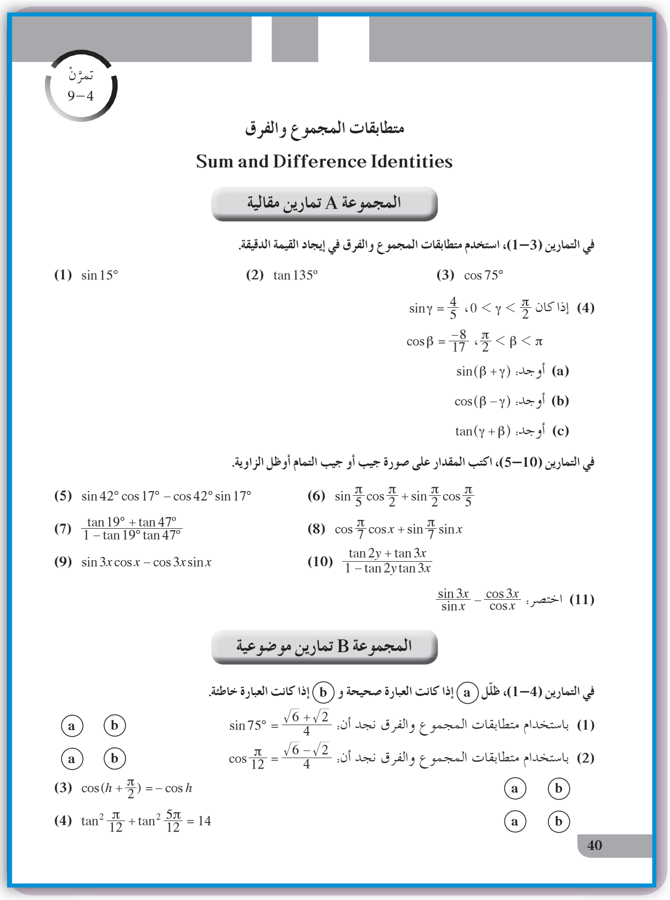
$\sin(-\alpha)=-\sin(\alpha)$ $=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$ $=-\cos\theta$

حاول أن تحل

1 أثبت أن: $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\theta$

100



تمرَّنْ 9–4

متطابقات المجموع والفرق

Sum and Difference Identities

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–3)، استخدم متطابقات المجموع والفرق في إيجاد القيمة الدقيقة.

(1) $\sin 15^\circ$ (2) $\tan 135^\circ$ (3) $\cos 75^\circ$

(4) إذا كان $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$، $\sin\gamma=\frac{4}{5}$

$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$، $\cos\beta=\frac{-8}{17}$

(a) أوجد: $\sin(\beta+\gamma)$

(b) أوجد: $\cos(\beta-\gamma)$

(c) أوجد: $\tan(\gamma+\beta)$

في التمارين (5–10)، اكتب المقدار على صورة جيب أو جيب التمام أوظل الزاوية.

(5) $\sin 42^\circ\cos 17^\circ-\cos 42^\circ\sin 17^\circ$ (6) $\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{5}$

(7) $\frac{\tan 19^\circ+\tan 47^\circ}{1-\tan 19^\circ\tan 47^\circ}$ (8) $\cos\frac{\pi}{7}\cos x+\sin\frac{\pi}{7}\sin x$

(9) $\sin 3x\cos x-\cos 3x\sin x$ (10) $\frac{\tan 2y+\tan 3x}{1-\tan 2y\tan 3x}$

(11) اختصر: $\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\cos x}$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) باستخدام متطابقات المجموع والفرق نجد أن: $\sin 75^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (a) (b)

(2) باستخدام متطابقات المجموع والفرق نجد أن: $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (a) (b)

(3) $\cos\left(h+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos h$ (a) (b)

(4) $\tan^2\frac{\pi}{12}+\tan^2\frac{5\pi}{12}=14$ (a) (b)

40

شجعهم على إيجاد $\cos(\beta+\alpha)$ باستخدام $\cos(\beta-\alpha)$ لأن ذلك سوف يساعدهم على الفهم بدلًا من الحفظ، وبالتالي يساعدهم على إيجاد $\sin(\beta-\alpha)$ ثم $\sin(\beta+\alpha)$ بتطبيق العلاقة بين $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ وَ $\sin\alpha$ أو $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ وَ $\sin\alpha$.

في المثال (1)

يساعد هذا المثال الطلاب على التدريب على كيفية الانتقال من $\sin\theta$ إلى $\cos\theta$ وبالعكس.

في المثال (2)

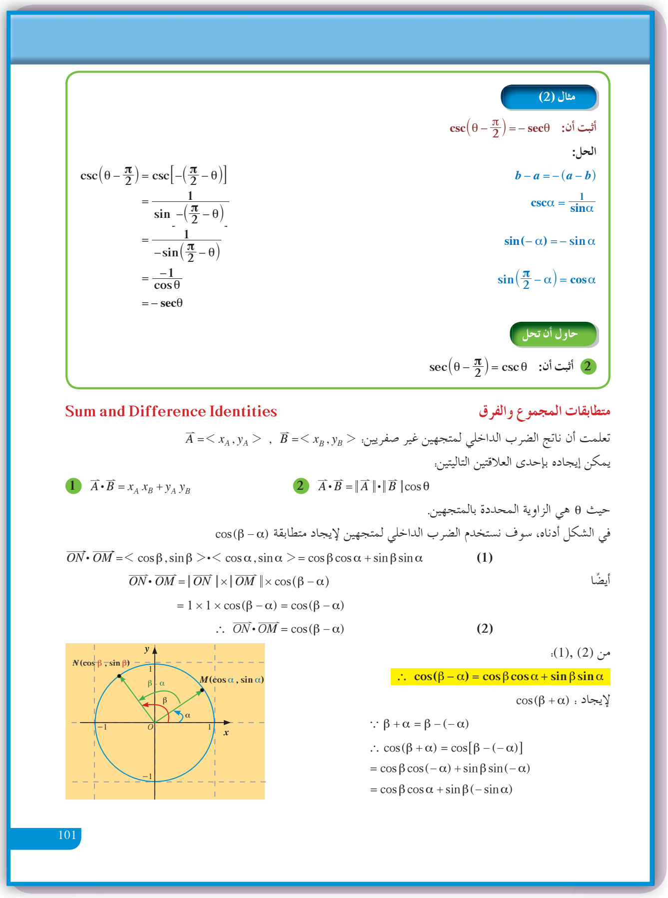
يبيّن هذا المثال للطلاب كيفية الانتقال من $\sec\theta$ إلى $\csc\theta$ وبالعكس أي من معكوس $\cos\theta$ إلى معكوس $\sin\theta$ وبالعكس.

في المثال (3)

يساعد هذا المثال الطلاب على استخدام جيب تمام الفرق بين زاويتين وإيجاد القيمة الصحيحة والدقيقة لجيب تمام الزاوية 15° وذلك دون استخدام الآلة الحاسبة.

في المثال (4)

يساعد هذا المثال الطلاب على استخدام جيب المجموع وجيب الفرق وإيجاد $\cos\theta$ بمعلومية $\sin\theta$ وبالعكس لإيجاد قيم مثلثية دقيقة لمجموع زاويتين أو الفرق بينهما.



مثال (2)

أثبت أن: $\csc\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\sec\theta$

الحل:

$b-a=-(a-b)$

$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$

$$\csc\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\csc\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]$$
$$=\frac{1}{\sin-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$
$$=\frac{1}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$
$$=\frac{-1}{\cos\theta}$$
$$=-\sec\theta$$

حاول أن تحل

2 أثبت أن: $\sec\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\csc\theta$

متطابقات المجموع والفرق Sum and Difference Identities

تعلمت أن ناتج الضرب الداخلي لمتجهين غير صفريين: $\vec{B}=<x_B,y_B>$, $\vec{A}=<x_A,y_A>$

يمكن إيجاده بإحدى العلاقتين التاليتين:

1 $\vec{A}\cdot\vec{B}=x_A x_B+y_A y_B$ 2 $\vec{A}\cdot\vec{B}=\|\vec{A}\|\cdot\|\vec{B}\|\cos\theta$

حيث θ هي الزاوية المحددة بالمتجهين.

في الشكل أدناه، سوف نستخدم الضرب الداخلي لمتجهين لإيجاد متطابقة $\cos(\beta-\alpha)$

(1) $\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{OM}=<\cos\beta,\sin\beta>\cdot<\cos\alpha,\sin\alpha>=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha$

أيضًا $\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{OM}=\|\overrightarrow{ON}\|\times\|\overrightarrow{OM}\|\times\cos(\beta-\alpha)$

$=1\times1\times\cos(\beta-\alpha)=\cos(\beta-\alpha)$

(2) $\therefore\ \overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{OM}=\cos(\beta-\alpha)$

من (1), (2):

$\therefore\ \cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha$

لإيجاد: $\cos(\beta+\alpha)$

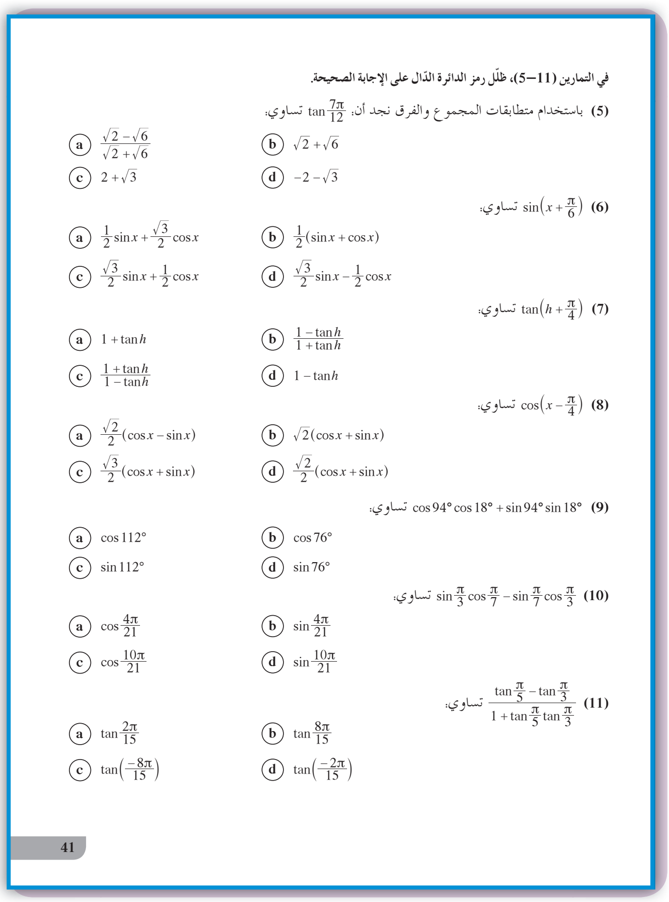
$\because\ \beta+\alpha=\beta-(-\alpha)$

$\therefore\ \cos(\beta+\alpha)=\cos[\beta-(-\alpha)]$

$=\cos\beta\cos(-\alpha)+\sin\beta\sin(-\alpha)$

$=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta(-\sin\alpha)$

101



في التمارين (5–11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) باستخدام متطابقات المجموع والفرق نجد أن: $\tan\frac{7\pi}{12}$ تساوي:

a $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ b $\sqrt{2}+\sqrt{6}$

c $2+\sqrt{3}$ d $-2-\sqrt{3}$

(6) $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ تساوي:

a $\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$ b $\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)$

c $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x$ d $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x$

(7) $\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)$ تساوي:

a $1+\tan h$ b $\frac{1-\tan h}{1+\tan h}$

c $\frac{1+\tan h}{1-\tan h}$ d $1-\tan h$

(8) $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ تساوي:

a $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)$ b $\sqrt{2}(\cos x+\sin x)$

c $\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos x+\sin x)$ d $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)$

(9) $\cos 94^\circ\cos 18^\circ+\sin 94^\circ\sin 18^\circ$ تساوي:

a $\cos 112^\circ$ b $\cos 76^\circ$

c $\sin 112^\circ$ d $\sin 76^\circ$

(10) $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{3}$ تساوي:

a $\cos\frac{4\pi}{21}$ b $\sin\frac{4\pi}{21}$

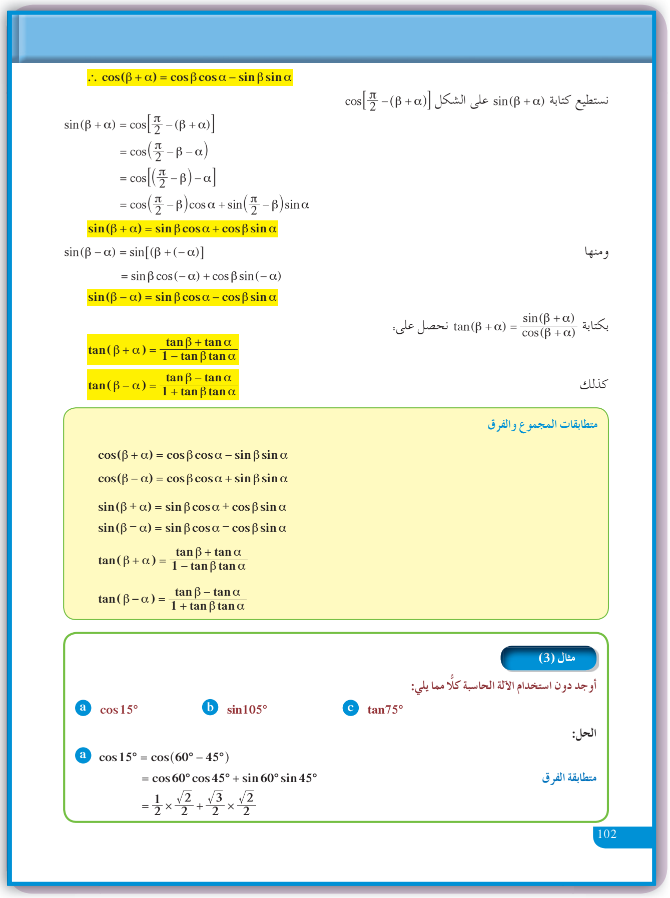
c $\cos\frac{10\pi}{21}$ d $\sin\frac{10\pi}{21}$

(11) $\frac{\tan\frac{\pi}{5}-\tan\frac{\pi}{3}}{1+\tan\frac{\pi}{5}\tan\frac{\pi}{3}}$ تساوي:

a $\tan\frac{2\pi}{15}$ b $\tan\frac{8\pi}{15}$

c $\tan\left(\frac{-8\pi}{15}\right)$ d $\tan\left(\frac{-2\pi}{15}\right)$

41



$\therefore \cos(\beta+\alpha) = \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha$

نستطيع كتابة $\sin(\beta+\alpha)$ على الشكل $\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\beta+\alpha)\right]$

$$\begin{aligned}\sin(\beta+\alpha) &= \cos\left[\frac{\pi}{2}-(\beta+\alpha)\right]\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta-\alpha\right)\\ &= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)-\alpha\right]\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\cos\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\sin\alpha\end{aligned}$$

$\sin(\beta+\alpha) = \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha$

ومنها

$$\begin{aligned}\sin(\beta-\alpha) &= \sin[(\beta+(-\alpha)]\\ &= \sin\beta\cos(-\alpha) + \cos\beta\sin(-\alpha)\end{aligned}$$

$\sin(\beta-\alpha) = \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha$

بكتابة $\tan(\beta+\alpha) = \dfrac{\sin(\beta+\alpha)}{\cos(\beta+\alpha)}$ نحصل على:

$\tan(\beta+\alpha) = \dfrac{\tan\beta+\tan\alpha}{1-\tan\beta\tan\alpha}$

كذلك

$\tan(\beta-\alpha) = \dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$

متطابقات المجموع والفرق

$\cos(\beta+\alpha) = \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha$

$\cos(\beta-\alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha$

$\sin(\beta+\alpha) = \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha$

$\sin(\beta-\alpha) = \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha$

$\tan(\beta+\alpha) = \dfrac{\tan\beta+\tan\alpha}{1-\tan\beta\tan\alpha}$

$\tan(\beta-\alpha) = \dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$

مثال (3)

أوجد دون استخدام الآلة الحاسبة كلًّا مما يلي:

a $\cos 15^\circ$ b $\sin 105^\circ$ c $\tan 75^\circ$

الحل:

a $\cos 15^\circ = \cos(60^\circ - 45^\circ)$

متطابقة الفرق

$$\begin{aligned}&= \cos 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \sin 45^\circ\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

102

6 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في كتابة المتطابقات فيستخدمون خاصية التوزيع مثل $\cos(\beta-\alpha) = \cos\beta - \cos\alpha$،

اطلب إليهم إعادة كتابة جيب وجيب التمام وظل مجموع وفرق زاويتين، ثم ركز أفكارهم على تغير الإشارة في $\cos(\beta+\alpha)$ و $\cos(\beta-\alpha)$.

7 التقييم

راقب الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من أنهم قد فهموا جيّدًا المتطابقات الجديدة.

اختبار سريع

1 أوجد: $\sin(-75^\circ)$، $\cos(-75^\circ)$، $\tan(255^\circ)$ دون استخدام الآلة الحاسبة.

$$\begin{aligned}\sin(-75^\circ) &= -\sin 75^\circ\\ &= -\sin(45^\circ+30^\circ)\\ &= -(\sin 45^\circ\cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ)\\ &= -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(-75^\circ) &= \cos 75^\circ\\ &= \cos(45^\circ+30^\circ)\\ &= \cos 45^\circ\cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan(255^\circ) &= \tan(180^\circ+75^\circ) = \tan 75^\circ\\ &= \tan(45^\circ+30^\circ)\\ &= \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ \tan 30^\circ}\\ &= 2+\sqrt{3}\end{aligned}$$

2 أوجد: $\tan 15^\circ$

$$\begin{aligned}\tan 15^\circ &= \tan(60^\circ-45^\circ)\\ &= \frac{\tan 60^\circ - \tan 45^\circ}{1+\tan 60^\circ \tan 45^\circ}\\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}\\ &= 2-\sqrt{3}\end{aligned}$$

8 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

(a) $m(\widehat{NOH}) = \theta$

(b) راجع عمل الطلاب.

(c) $OD = OH \; , \; MD = NH$

(d) $M(\cos\theta \; , \; \sin\theta) \; , \; N\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \; , \; \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta \; , \; \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$

«حاول أن تحل»

1 $\cos\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$

2 $\sec\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) = \sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$$= \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = \frac{1}{\sin\theta} = \csc\theta$$

3 **(a)** $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$

$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(b) $\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ)$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(c) $\tan 105^\circ = \tan(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\times 1}$

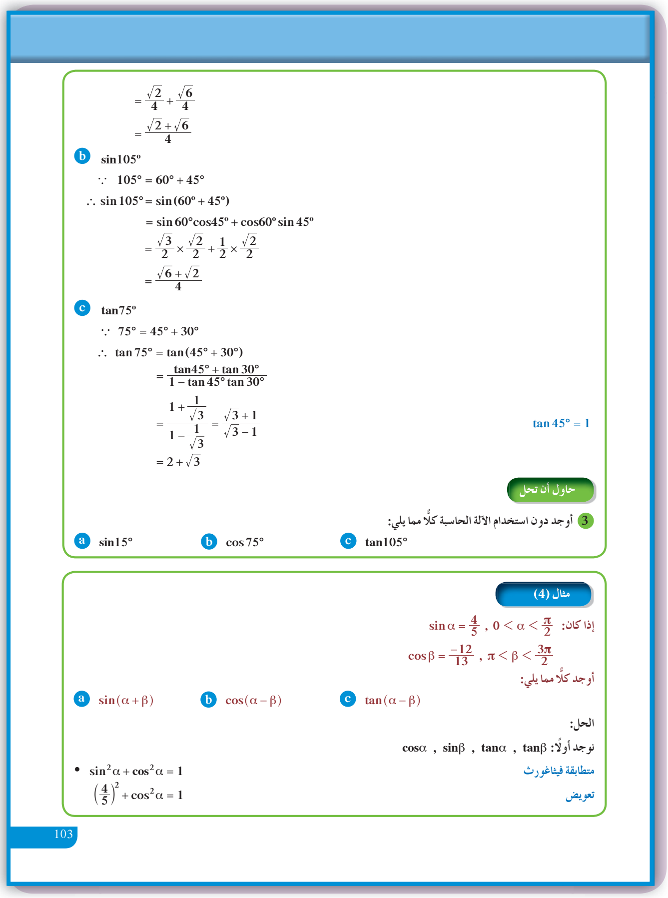
$$= \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = -2-\sqrt{3}$$

4 **(a)** $\cos(\alpha+\beta) = \frac{3}{5} \times \left(\frac{-12}{13}\right) - \frac{4}{5} \times \left(\frac{-5}{13}\right)$

$$= \frac{-16}{65}$$

(b) $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{-\frac{63}{65}}{-\frac{16}{65}} = \frac{63}{16}$

(c) $\sin(\beta-\alpha) = \frac{-5}{13} \times \frac{3}{5} - \left(\frac{-12}{13}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{33}{65}$



$= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$

$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

b $\sin 105^\circ$

$\because \; 105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$

$\therefore \sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ)$

$= \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

c $\tan 75^\circ$

$\because \; 75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$

$\therefore \; \tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ)$

$= \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$

$= \frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ — $\tan 45^\circ = 1$

$= 2+\sqrt{3}$

حاول أن تحل

3 أوجد دون استخدام الآلة الحاسبة كلًّا مما يلي:

a $\sin 15^\circ$ b $\cos 75^\circ$ c $\tan 105^\circ$

مثال (4)

إذا كان: $\sin\alpha = \frac{4}{5} \; , \; 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\cos\beta = \frac{-12}{13} \; , \; \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$

أوجد كلًّا مما يلي:

a $\sin(\alpha+\beta)$ b $\cos(\alpha-\beta)$ c $\tan(\alpha-\beta)$

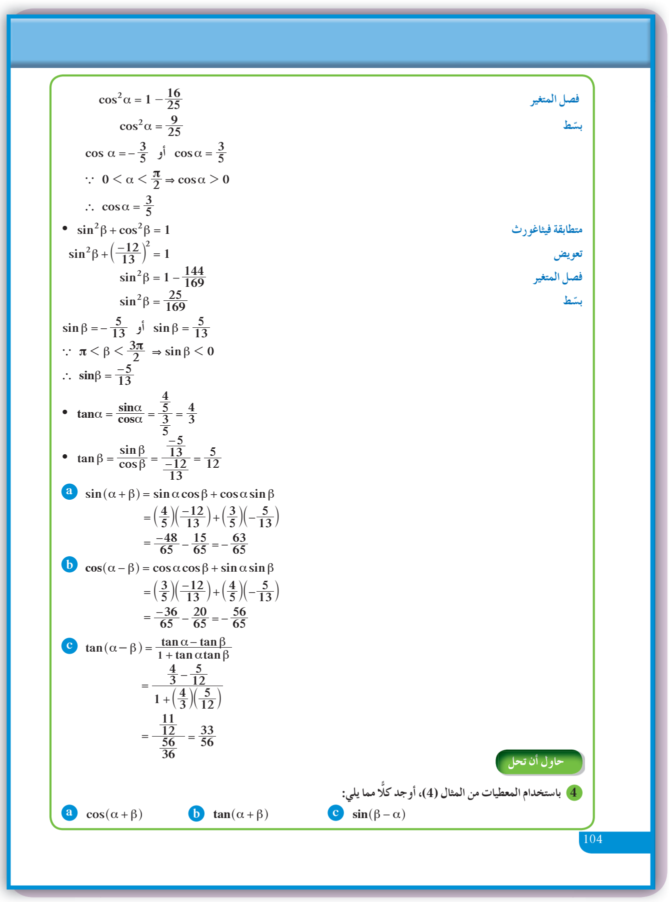
الحل:

نوجد أولًا: $\tan\beta \; , \; \tan\alpha \; , \; \sin\beta \; , \; \cos\alpha$

• $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ — متطابقة فيثاغورث

$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$ — تعويض

103



$\cos^2\alpha = 1 - \frac{16}{25}$ — فصل المتغير

$\cos^2\alpha = \frac{9}{25}$ — بسّط

$\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ أو $\cos\alpha = \frac{3}{5}$

$\because \; 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha > 0$

$\therefore \; \cos\alpha = \frac{3}{5}$

• $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$ — متطابقة فيثاغورث

$\sin^2\beta + \left(\frac{-12}{13}\right)^2 = 1$ — تعويض

$\sin^2\beta = 1 - \frac{144}{169}$ — فصل المتغير

$\sin^2\beta = \frac{25}{169}$ — بسّط

$\sin\beta = -\frac{5}{13}$ أو $\sin\beta = \frac{5}{13}$

$\because \; \pi < \beta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin\beta < 0$

$\therefore \; \sin\beta = \frac{-5}{13}$

• $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$

• $\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\frac{-5}{13}}{\frac{-12}{13}} = \frac{5}{12}$

a $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{-12}{13}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right)$

$= \frac{-48}{65} - \frac{15}{65} = -\frac{63}{65}$

b $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$= \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{-12}{13}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right)$

$= \frac{-36}{65} - \frac{20}{65} = -\frac{56}{65}$

c $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

$= \frac{\frac{4}{3} - \frac{5}{12}}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{5}{12}\right)}$

$= \frac{\frac{11}{12}}{\frac{56}{36}} = \frac{33}{56}$

حاول أن تحل

4 باستخدام المعطيات من المثال (4)، أوجد كلًّا مما يلي:

a $\cos(\alpha+\beta)$ b $\tan(\alpha+\beta)$ c $\sin(\beta-\alpha)$

104

5–9: متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

1 الأهداف

- يتعرف متطابقات ضعف الزاوية.
- يتعرف متطابقات نصف الزاوية.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

ضعف الزاوية – نصف الزاوية.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) أوجد $2\cos 30^\circ \sin 30^\circ$ ثم $\sin 60^\circ$، ماذا تلاحظ؟

(b) أوجد $\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ$ ثم $\cos 60^\circ$، ماذا تلاحظ؟

(c) أوجد $\tan 60^\circ$ ثم $\dfrac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ}$، ماذا تلاحظ؟

(d) بسّط ما يلي:

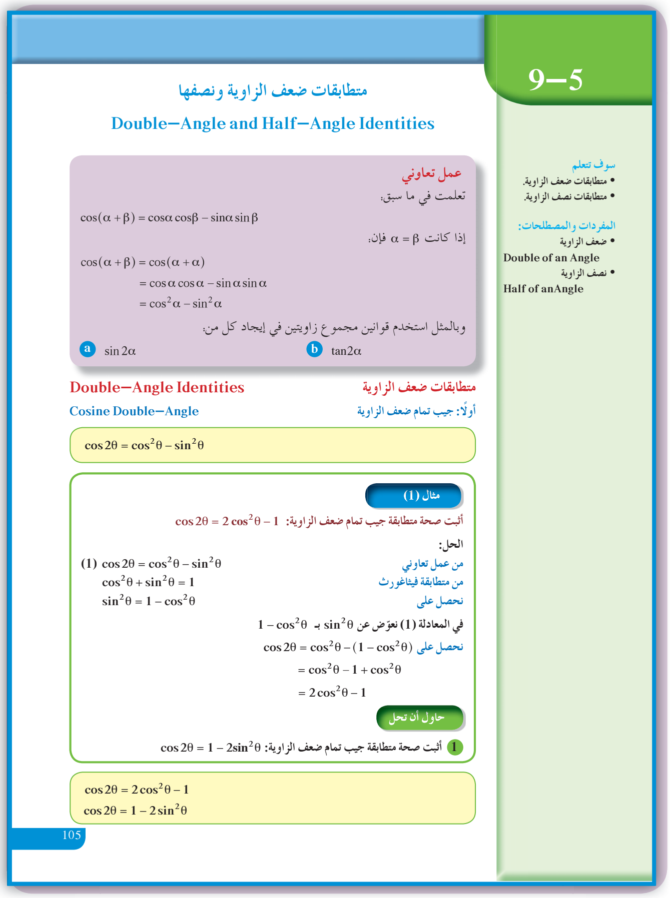
$$\cos^2 42^\circ + \cos^2 48^\circ \;,\; \sin^2 37^\circ + \sin^2 53^\circ$$

5 التدريس

يتعرف الطلاب على متطابقات ضعف الزاوية ومتطابقات نصف الزاوية إذ تساعد هذه المتطابقات على حل معادلات مثلثية من خلال تبسيطها بدلالة واحدة فقط من الدوال المثلثية. كما أنها تساعد على إيجاد قيم دقيقة لزوايا خاصة هي في الأساس ضعف زوايا معروفة أو نصف زوايا معروفة.

فمثلًا: $120^\circ = 2 \times 60^\circ \;,\; 22.5^\circ = \dfrac{45^\circ}{2} \;,\; 15^\circ = \dfrac{30^\circ}{2}$

راجع مع الطلاب متطابقات الدرس السابق وشجّعهم على إيجاد $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$, $\tan 2\theta$ بأنفسهم بدلًا من الحفظ.



9–5

متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

Double–Angle and Half–Angle Identities

سوف تتعلم
- متطابقات ضعف الزاوية.
- متطابقات نصف الزاوية.

المفردات والمصطلحات:
- ضعف الزاوية Double of an Angle
- نصف الزاوية Half of anAngle

عمل تعاوني

تعلمت في ما سبق:

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

إذا كانت $\alpha = \beta$ فإن:

$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

وبالمثل استخدم قوانين مجموع زاويتين في إيجاد كل من:

(a) $\sin 2\alpha$ (b) $\tan 2\alpha$

متطابقات ضعف الزاوية Double–Angle Identities

أولًا: جيب تمام ضعف الزاوية Cosine Double–Angle

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

مثال (1)

أثبت صحة متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية: $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

الحل:

من عمل تعاوني (1) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

من متطابقة فيثاغورث $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

نحصل على $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

في المعادلة (1) نعوّض عن $\sin^2\theta$ بـ $1-\cos^2\theta$

نحصل على $\cos 2\theta = \cos^2\theta - (1-\cos^2\theta) = \cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

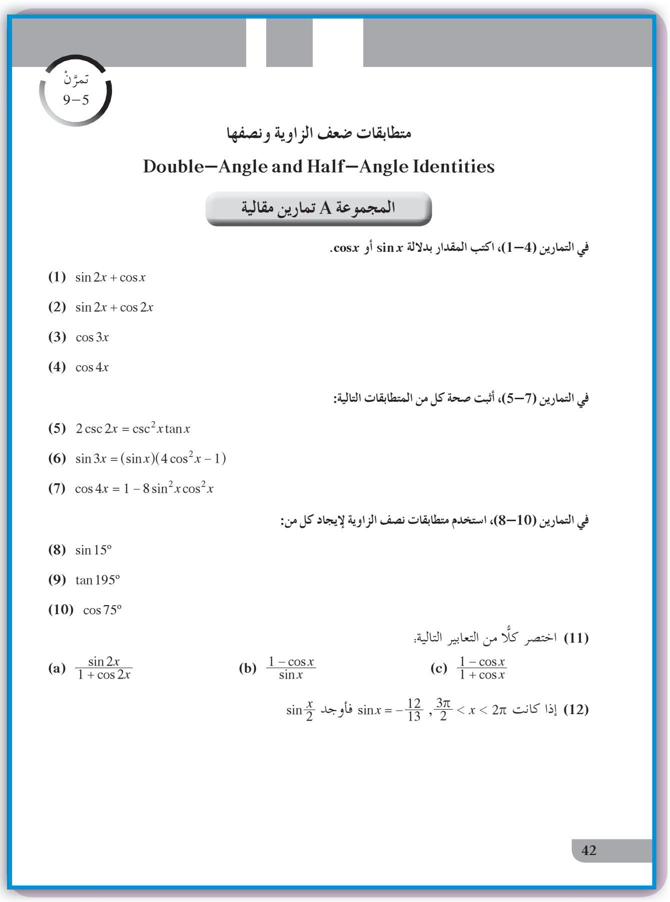
حاول أن تحل

1 أثبت صحة متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية: $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

105



تمرَّنْ 9–5

متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

Double–Angle and Half–Angle Identities

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–4)، اكتب المقدار بدلالة $\sin x$ أو $\cos x$.

(1) $\sin 2x + \cos x$

(2) $\sin 2x + \cos 2x$

(3) $\cos 3x$

(4) $\cos 4x$

في التمارين (5–7)، أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

(5) $2\csc 2x = \csc^2 x \tan x$

(6) $\sin 3x = (\sin x)(4\cos^2 x - 1)$

(7) $\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x\cos^2 x$

في التمارين (8–10)، استخدم متطابقات نصف الزاوية لإيجاد كل من:

(8) $\sin 15^\circ$

(9) $\tan 195^\circ$

(10) $\cos 75^\circ$

(11) اختصر كلًّا من التعابير التالية:

(a) $\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$ (b) $\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ (c) $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

(12) إذا كانت $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, $\sin x = -\dfrac{12}{13}$ فأوجد $\sin\dfrac{x}{2}$

42

في المثال (1)

هذا المثال هو تطبيق مباشر لجيب تمام ضعف الزاوية واستنتاج متطابقة ثانية.

في المثالين (2), (3)

يتم استخدام متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية ومتطابقة جيب ضعف الزاوية لحل مسائل مثلثية.

في المثالين (4), (5)

يتم استخدام متطابقات ضعف الزاوية في حل مسائل مثلثية. شدّد على ضرورة حفظ هذه المتطابقات.

في المثال (6)

يتم استخدام متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية لإيجاد معادلات ومتطابقات جديدة.

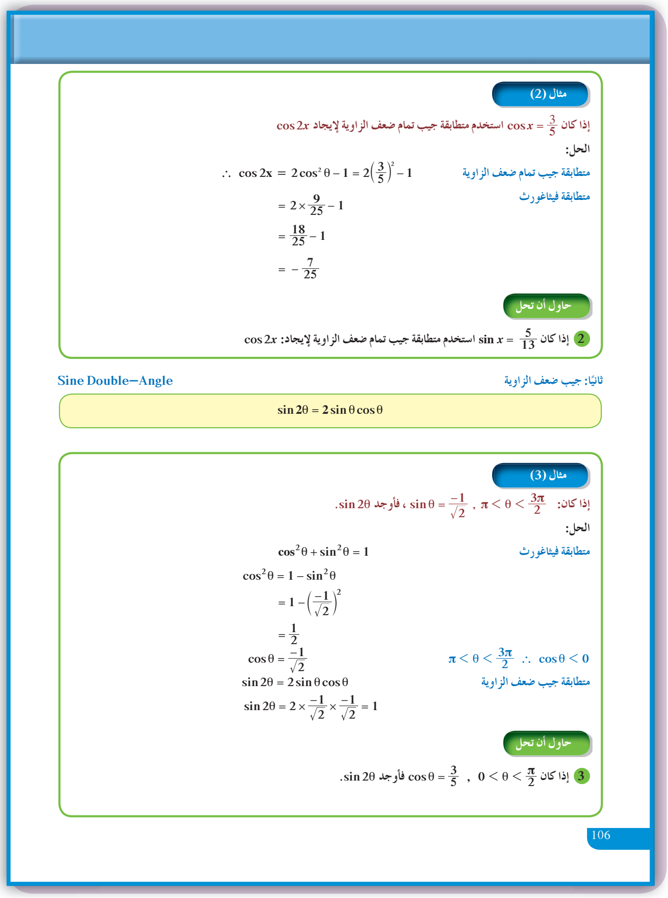
في المثالين (7), (8)

حل مسائل باستخدام متطابقات نصف الزاوية. أشر إلى أن الزاوية هي ضعف نصف الزاوية أيضًا.

6 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام متطابقات ضعف الزاوية ومتطابقات نصف الزاوية حفّزهم على إيجاد هذه المتطابقات كتابة عدة مرات انطلاقًا من متطابقات مجموع الزوايا.

نبّه الطلاب إلى أن بعض الحلول قد تحل باستخدام طرق أسهل وبخاصة باستخدام المطابقتين: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$، $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$، ولكن بالرغم من ذلك شدّد على استخدام متطابقات هذا الدرس لحفظها.



مثال (2)

إذا كان $\cos x = \frac{3}{5}$ استخدم متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية لإيجاد $\cos 2x$

الحل:

متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية
متطابقة فيثاغورث

$$\therefore\ \cos 2x = 2\cos^2\theta - 1 = 2\left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1$$
$$= 2\times\frac{9}{25} - 1$$
$$= \frac{18}{25} - 1$$
$$= -\frac{7}{25}$$

حاول أن تحل

2 إذا كان $\sin x = \frac{5}{13}$ استخدم متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية لإيجاد: $\cos 2x$

ثانيًا: جيب ضعف الزاوية — Sine Double–Angle

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

مثال (3)

إذا كان: $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ، $\sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ ، فأوجد $\sin 2\theta$.

الحل:

متطابقة فيثاغورث

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$
$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$
$$= 1 - \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2$$
$$= \frac{1}{2}$$

$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}\ \therefore\ \cos\theta < 0$

$$\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

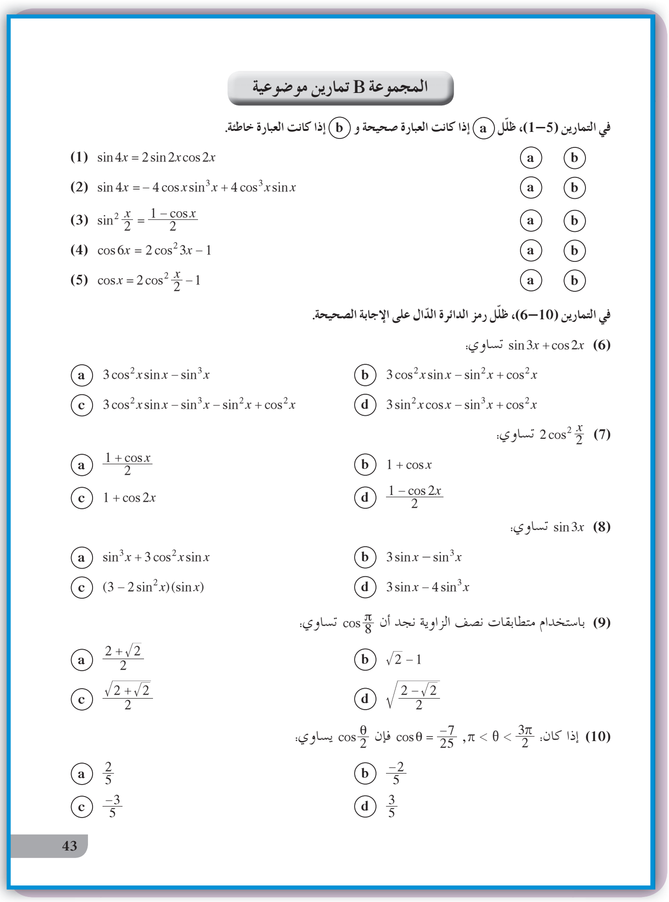
متطابقة جيب ضعف الزاوية

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\sin 2\theta = 2\times\frac{-1}{\sqrt{2}}\times\frac{-1}{\sqrt{2}} = 1$$

حاول أن تحل

3 إذا كان $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ، $\cos\theta = \frac{3}{5}$ فأوجد $\sin 2\theta$.

106



المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x$ (a) (b)

(2) $\sin 4x = -4\cos x\sin^3 x + 4\cos^3 x\sin x$ (a) (b)

(3) $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$ (a) (b)

(4) $\cos 6x = 2\cos^2 3x - 1$ (a) (b)

(5) $\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$ (a) (b)

في التمارين (6–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\sin 3x + \cos 2x$ تساوي:

(a) $3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x$
(b) $3\cos^2 x\sin x - \sin^2 x + \cos^2 x$
(c) $3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x - \sin^2 x + \cos^2 x$
(d) $3\sin^2 x\cos x - \sin^3 x + \cos^2 x$

(7) $2\cos^2\frac{x}{2}$ تساوي:

(a) $\frac{1+\cos x}{2}$
(b) $1+\cos x$
(c) $1+\cos 2x$
(d) $\frac{1-\cos 2x}{2}$

(8) $\sin 3x$ تساوي:

(a) $\sin^3 x + 3\cos^2 x\sin x$
(b) $3\sin x - \sin^3 x$
(c) $(3-2\sin^2 x)(\sin x)$
(d) $3\sin x - 4\sin^3 x$

(9) باستخدام متطابقات نصف الزاوية نجد أن $\cos\frac{\pi}{8}$ تساوي:

(a) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$
(b) $\sqrt{2}-1$
(c) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
(d) $\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$

(10) إذا كان: $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, $\cos\theta = \frac{-7}{25}$ فإن $\cos\frac{\theta}{2}$ يساوي:

(a) $\frac{2}{5}$
(b) $\frac{-2}{5}$
(c) $\frac{-3}{5}$
(d) $\frac{3}{5}$

43

7 التقييم

تابع عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من حسن أدائهم وفهمهم لهذه المتطابقات.

اختبار سريع

1 **(a)** أثبت أن:

$$\sin\theta + \cos\theta + 1 = 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right)$$

نبدأ من اليسار:

$$\sin\theta + \cos\theta + 1 = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + 2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$= 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right)$$

(b) أثبت أن:

$$2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right) = \sin\theta - \cos\theta + 1$$

نبدأ من اليمين:

$$\sin\theta - \cos\theta + 1 = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$= 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right)$$

(c) استنتج أن: $\dfrac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta + 1} = \tan\dfrac{\theta}{2}$

باستخدام (a), (b) نكتب:

$$\frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta + 1} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right)}$$

بشرط $\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2} \neq 0$ يمكن التبسيط

ونحصل على: $\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \tan\dfrac{\theta}{2}$

(d) أوجد مجموعة حل المعادلة:

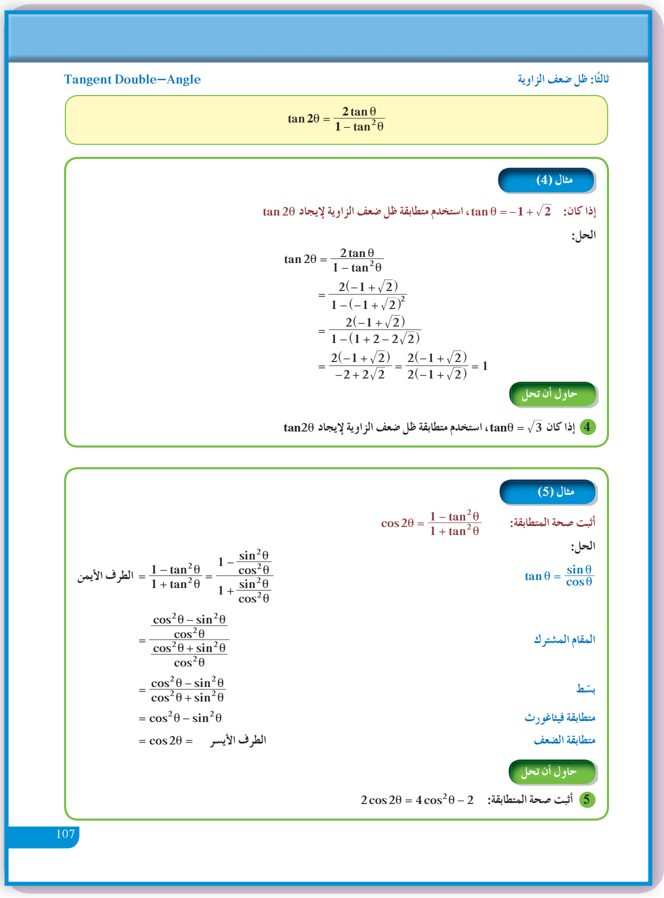
$$\frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta + 1} = 1$$

باستخدام (c) نكتب: $\tan\dfrac{\theta}{2} = 1$

نحصل على: $\tan\dfrac{\theta}{2} = \tan\dfrac{\pi}{4}$

أي $\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$

$\theta = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح.



ثالثًا: ظل ضعف الزاوية — Tangent Double–Angle

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

مثال (4)

إذا كان: $\tan\theta = -1+\sqrt{2}$، استخدم متطابقة ظل ضعف الزاوية لإيجاد $\tan 2\theta$

الحل:

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2(-1+\sqrt{2})}{1-(-1+\sqrt{2})^2} = \frac{2(-1+\sqrt{2})}{1-(1+2-2\sqrt{2})} = \frac{2(-1+\sqrt{2})}{-2+2\sqrt{2}} = \frac{2(-1+\sqrt{2})}{2(-1+\sqrt{2})} = 1$$

حاول أن تحل

4 إذا كان $\tan\theta = \sqrt{3}$، استخدم متطابقة ظل ضعف الزاوية لإيجاد $\tan 2\theta$

مثال (5)

أثبت صحة المتطابقة: $\cos 2\theta = \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

الحل:

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ — الطرف الأيمن $= \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \dfrac{1-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$

المقام المشترك $= \dfrac{\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$

بسّط $= \dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$

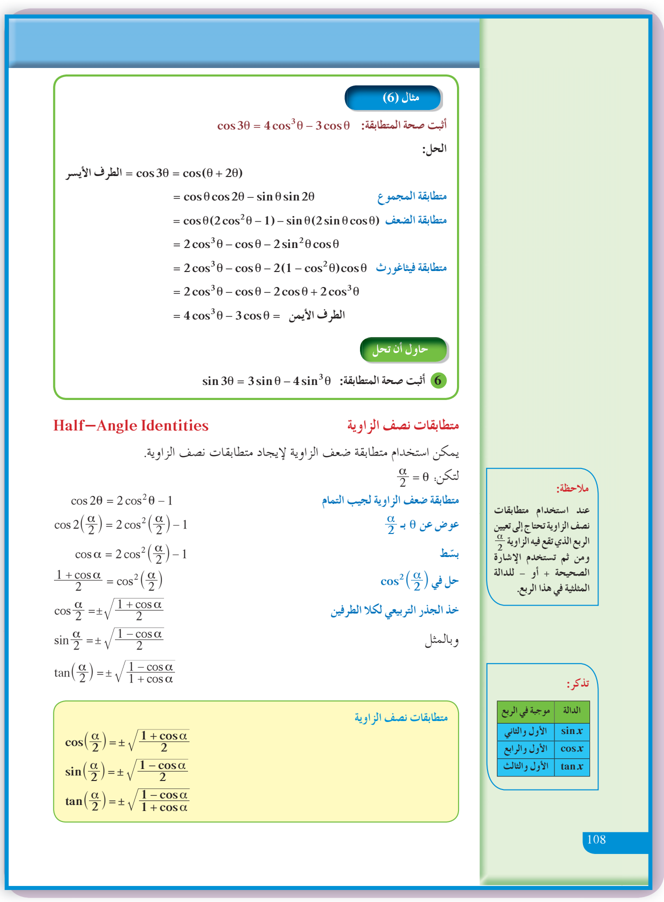
متطابقة فيثاغورث $= \cos^2\theta-\sin^2\theta$

متطابقة الضعف $= \cos 2\theta =$ الطرف الأيسر

حاول أن تحل

5 أثبت صحة المتطابقة: $2\cos 2\theta = 4\cos^2\theta - 2$

107



مثال (6)

أثبت صحة المتطابقة: $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

الحل:

الطرف الأيسر $= \cos 3\theta = \cos(\theta+2\theta)$

متطابقة المجموع $= \cos\theta\cos 2\theta - \sin\theta\sin 2\theta$

متطابقة الضعف $= \cos\theta(2\cos^2\theta-1) - \sin\theta(2\sin\theta\cos\theta)$

$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta$

متطابقة فيثاغورث $= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta$

$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta + 2\cos^3\theta$

$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta =$ الطرف الأيمن

حاول أن تحل

6 أثبت صحة المتطابقة: $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

متطابقات نصف الزاوية — Half–Angle Identities

يمكن استخدام متطابقة ضعف الزاوية لإيجاد متطابقات نصف الزاوية.

لتكن: $\theta = \dfrac{\alpha}{2}$

متطابقة ضعف الزاوية لجيب التمام: $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

عوض عن θ بـ $\dfrac{\alpha}{2}$: $\cos 2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) - 1$

بسّط: $\cos\alpha = 2\cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) - 1$

حل في $\cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$: $\dfrac{1+\cos\alpha}{2} = \cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$

خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين: $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$

وبالمثل: $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$

$\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

متطابقات نصف الزاوية

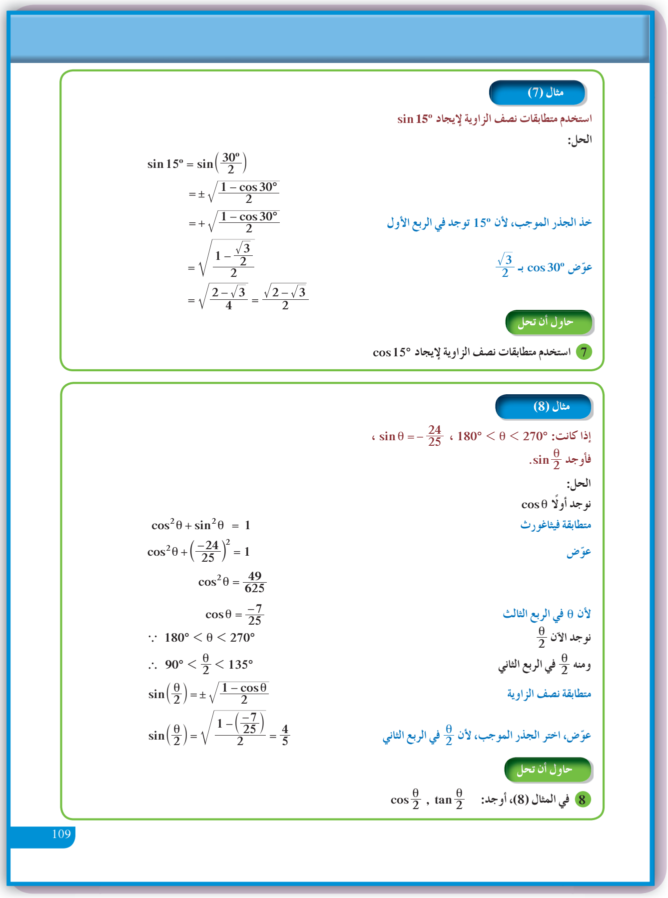
$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$
$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$
$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

ملاحظة: عند استخدام متطابقات نصف الزاوية تحتاج إلى تعيين الربع الذي تقع فيه الزاوية $\frac{\alpha}{2}$ ومن ثم تستخدم الإشارة الصحيحة + أو – للدالة المثلثية في هذا الربع.

تذكر:

الدالة	موجبة في الربع
$\sin x$	الأول والثاني
$\cos x$	الأول والرابع
$\tan x$	الأول والثالث

108



مثال (7)

استخدم متطابقات نصف الزاوية لإيجاد $\sin 15^\circ$

الحل:

$$\sin 15^\circ = \sin\left(\frac{30^\circ}{2}\right)$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}}$$

خذ الجذر الموجب، لأن 15° توجد في الربع الأول

$$= +\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}}$$

عوّض $\cos 30^\circ$ بـ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$= \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

حاول أن تحل

7 استخدم متطابقات نصف الزاوية لإيجاد $\cos 15^\circ$

مثال (8)

إذا كانت: $180^\circ < \theta < 270^\circ$ ، $\sin\theta = -\frac{24}{25}$ ،

فأوجد $\sin\frac{\theta}{2}$.

الحل:

نوجد أولًا $\cos\theta$

متطابقة فيثاغورث

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

عوّض

$$\cos^2\theta + \left(\frac{-24}{25}\right)^2 = 1$$

$$\cos^2\theta = \frac{49}{625}$$

لأن θ في الربع الثالث

$$\cos\theta = \frac{-7}{25}$$

نوجد الآن $\frac{\theta}{2}$

$$\because\ 180^\circ < \theta < 270^\circ$$

ومنه $\frac{\theta}{2}$ في الربع الثاني

$$\therefore\ 90^\circ < \frac{\theta}{2} < 135^\circ$$

متطابقة نصف الزاوية

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

عوّض، اختر الجذر الموجب، لأن $\frac{\theta}{2}$ في الربع الثاني

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{-7}{25}\right)}{2}} = \frac{4}{5}$$

حاول أن تحل

8 في المثال (8)، أوجد: $\cos\frac{\theta}{2}$, $\tan\frac{\theta}{2}$

109

② أوجد مجموعة حل المعادلة:

$$\sin 2\theta + \cos 2\theta + 1 = 0$$

$$2\sin\theta\cos\theta + 2\cos^2\theta = 0$$

$$2\cos\theta(\sin\theta + \cos\theta) = 0$$

$\cos\theta = 0$ أو $\sin\theta + \cos\theta = 0$

(a) إذا $\cos\theta = 0$ فيكون $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{2}$

أي $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$

(b) إذا $\sin\theta + \cos\theta = 0\ ;\ \sin\theta = -\cos\theta$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\pi - \theta) \Rightarrow$$

- $\pi - \theta = \frac{\pi}{2} - \theta + 2k\pi$

لا يوجد حلول

- $\pi - \theta = -\frac{\pi}{2} + \theta + 2k\pi$

$\theta = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ k عدد صحيح

8 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

(a) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

(b) $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

«حاول أن تحل»

1 $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$$= (1-\sin^2\theta) - \sin^2\theta$$

$$= 1 - 2\sin^2\theta$$

2 $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$$= 1 - 2\left(\frac{5}{13}\right)^2$$

$$= \frac{119}{169}$$

3 $\sin^2\theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

$\sin\theta = \frac{4}{5}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$$= 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$$

4 $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \dfrac{2\sqrt{3}}{1-(\sqrt{3})^2} = -\sqrt{3}$

5 $2\cos 2\theta = 2(2\cos^2\theta - 1) = 4\cos^2\theta - 2$

6 $\sin(3\theta) = \sin(2\theta + \theta)$

$$= \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta$$

$$= 2\sin\theta\cos^2\theta + \sin\theta(1-2\sin^2\theta)$$

$$= 2\sin\theta(1-\sin^2\theta) + \sin\theta(1-2\sin^2\theta)$$

$$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

7 $\cos 15^\circ = \sqrt{\dfrac{1+\cos 30^\circ}{2}}$

$$= \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

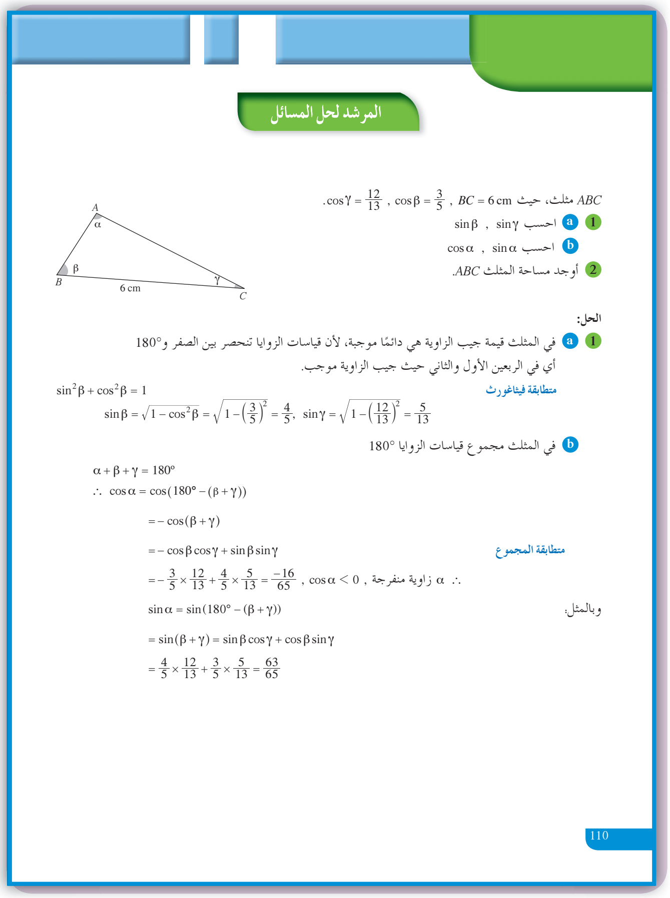
8 $\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}$, $90^\circ < \frac{\theta}{2} < 135^\circ$

$$= -\sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{2}} = -\sqrt{\frac{18}{25\times 2}} = -\frac{3}{5}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

$$= -\sqrt{\frac{1+\frac{7}{25}}{1-\frac{7}{25}}} = -\sqrt{\frac{32}{18}} = -\frac{4}{3}$$

المرشد لحل المسائل



المرشد لحل المسائل

ABC مثلث، حيث $BC = 6\,\text{cm}$ ، $\cos\beta = \frac{3}{5}$ ، $\cos\gamma = \frac{12}{13}$.

1 a احسب $\sin\gamma$ ، $\sin\beta$

b احسب $\sin\alpha$ ، $\cos\alpha$

2 أوجد مساحة المثلث ABC.

الحل:

1 a في المثلث قيمة جيب الزاوية هي دائمًا موجبة، لأن قياسات الزوايا تنحصر بين الصفر و°180 أي في الربعين الأول والثاني حيث جيب الزاوية موجب.

متطابقة فيثاغورث

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$$

$$\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5},\ \sin\gamma = \sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}$$

b في المثلث مجموع قياسات الزوايا °180

$$\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$$

$$\therefore\ \cos\alpha = \cos(180^\circ-(\beta+\gamma))$$

$$= -\cos(\beta+\gamma)$$

متطابقة المجموع

$$= -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma$$

$$= -\frac{3}{5}\times\frac{12}{13}+\frac{4}{5}\times\frac{5}{13} = \frac{-16}{65}$$ ، $\cos\alpha < 0$ ، $\therefore$ α زاوية منفرجة

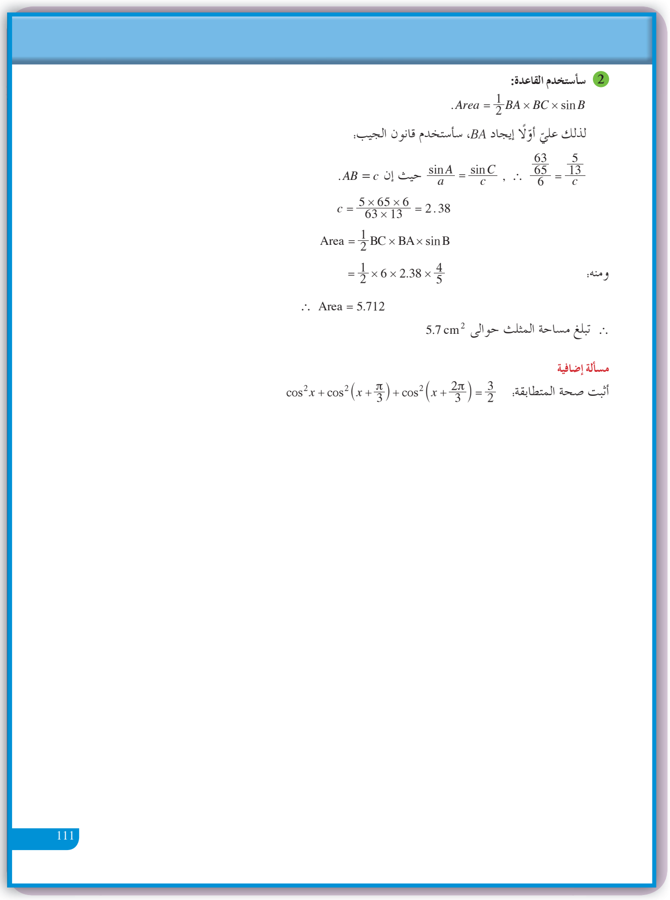
وبالمثل:

$$\sin\alpha = \sin(180^\circ-(\beta+\gamma))$$

$$= \sin(\beta+\gamma) = \sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma$$

$$= \frac{4}{5}\times\frac{12}{13}+\frac{3}{5}\times\frac{5}{13} = \frac{63}{65}$$

110



2 **سأستخدم القاعدة:**

$Area = \frac{1}{2}BA \times BC \times \sin B$.

لذلك عليّ أوّلًا إيجاد BA، سأستخدم قانون الجيب:

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$ حيث إن $AB = c$ ، $\therefore\ \frac{\frac{63}{65}}{6} = \frac{\frac{5}{13}}{c}$

$$c = \frac{5\times65\times6}{63\times13} = 2.38$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\text{BC}\times\text{BA}\times\sin\text{B}$$

ومنه:

$$= \frac{1}{2}\times6\times2.38\times\frac{4}{5}$$

$$\therefore\ \text{Area} = 5.712$$

$\therefore$ تبلغ مساحة المثلث حوالى $5.7\,\text{cm}^2$

مسألة إضافية

أثبت صحة المتطابقة: $\cos^2x+\cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$

111

إجابة «مسألة إضافية»

$$\cos^2x + \left(\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)^2$$

$$= \cos^2x + \frac{1}{4}\cos^2x + \frac{3}{4}\sin^2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x$$

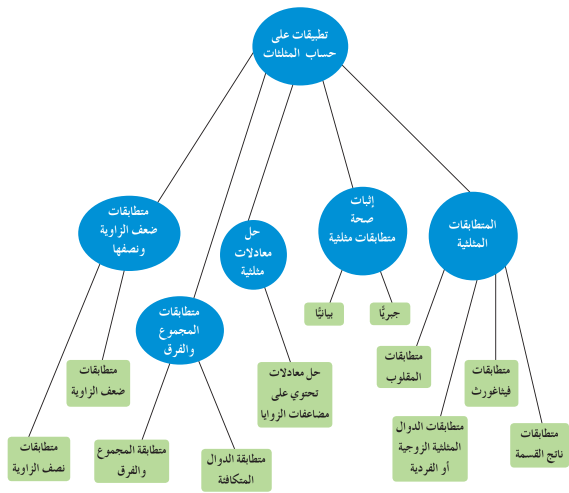
$$+\frac{1}{4}\cos^2x + \frac{3}{4}\sin^2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x$$

$$= \cos^2x + \frac{1}{2}\cos^2x + \frac{3}{2}\sin^2x$$

$$= \frac{3}{2}\cos^2x + \frac{3}{2}\sin^2x = \frac{3}{2}(\cos^2x + \sin^2x)$$

$$= \frac{3}{2}$$

مخطط تنظيمي للوحدة التاسعة



ملخص

- متطابقات ناتج القسمة: $\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$, $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
- متطابقات المقلوب: $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$, $\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}$, $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$
- متطابقات فيثاغورث: $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$, $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$, $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$
- متطابقات الدوال الزوجية أو الفردية:

$$\tan(-\theta)=-\tan\theta \qquad \cos(-\theta)=\cos\theta \qquad \sin(-\theta)=-\sin\theta$$
$$\cot(-\theta)=-\cot\theta \qquad \sec(-\theta)=\sec\theta \qquad \csc(-\theta)=-\csc\theta$$

- طرق إثبات أن المعادلة متطابقة:

دمج الحدود، فصل الحدود، ضرب العوامل، التحليل، استخدام متطابقات معلومة، تبسيط الكسور، التحويل إلى الجيب وجيب التمام فقط.

- متطابقة الدوال المتكافئة:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta \qquad \sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\csc\theta$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sec\theta$$

- متطابقات المجموع والفرق:

$$\cos(\beta+\alpha)=\cos\beta\cos\alpha-\sin\beta\sin\alpha$$
$$\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha$$
$$\sin(\beta+\alpha)=\sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha$$
$$\sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha$$
$$\tan(\beta+\alpha)=\frac{\tan\beta+\tan\alpha}{1-\tan\beta\tan\alpha}$$
$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

- متطابقات ضعف الزاوية:

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta \qquad \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1 \qquad \tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$
$$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$$

- متطابقات نصف الزاوية:

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \ , \ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \ , \ \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

اختبار الوحدة التاسعة

في التمارين (3—1)، حوّل المقادير إلى sin وcos. اكتب إجابتك على صورة كسر واحد.

(1) $\tan x+\cot x$

(2) $\sin x\cot x-\cos x\tan x$

(3) $\frac{\sec y}{\cos y}-\frac{\sin y}{\csc y\cos^2 y}$

في التمارين (8—4)، أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

(4) $\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{\cos x}{1-\sin x}=2\sec x$

(5) $\frac{1-3\cos x-4\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{1-4\cos x}{1-\cos x}$

(6) $\sqrt{1-\cos x}\times\sqrt{1+\cos x}=\sin x \quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

(7) $\frac{2\sin x\times\cos x}{1+\cos^2 x-\sin^2 x}=\tan x$

(8) $\frac{1+2\sin x\times\cos x}{\sin x+\cos x}=\sin x+\cos x$

في التمارين (13—9)، استخدم متطابقات المجموع والفرق في إيجاد القيمة الدقيقة.

(9) $\tan\frac{5\pi}{12}$

(10) $\sin\frac{-\pi}{12}$

(11) $\cos(x-y)-\cos(x+y)$

(12) $\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

(13) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$

(14) **(a)** أوجد ناتج: $\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}$

(b) أوجد القيمة الصحيحة لكلّ مما يلي دون استخدام الآلة الحاسبة:

(1) $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ **(2)** $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

(15) أوجد قيمة $\sin 2x$، إذا كان $\sin x-\cos x=\frac{1}{5}$

(16) أوجد: $\cos 2x$، إذا كان $\cos x=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

تمارين إثرائية

في التمرينين (2—1)، حدّد ما إذا كانت الدالتان r , f متساويتين. إذا كانتا كذلك فاذكر سببًا مقنعًا. وإذا لم تكونا كذلك، فأوجد قيمة x التي تجعل $r(x) \neq f(x)$.

(1) $f(x) = \sqrt{x^2}\ ,\ r(x) = x$

(2) $f(x) = \sqrt{1-\cos^2 x}\ ,\ r(x) = \sin x$

في التمارين (5—3)، أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

(3) $\dfrac{\tan x}{1-\cot x} + \dfrac{\cot x}{1-\tan x} = 1 + \sec x \csc x$

(4) $\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x} + \dfrac{1}{2\cos^2 x - 1} = \dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$

(5) $\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\sin^2 x}} - \dfrac{1+\tan^2 x}{\tan x} = 0\ ,\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

(6) لتكن: $\tan x = \dfrac{\sin y - \cos y}{\sin y + \cos y}$

(a) أثبت أن: $2\cos^2 x = (\sin y + \cos y)^2$

(b) أثبت أن: $2\sin^2 x = (\sin y - \cos y)^2$

في التمارين (10—7)، حلّ كلًّا من المعادلات التالية:

(7) $\cos x = \cos\dfrac{\pi}{4}$

(8) $\sin^2 x - \dfrac{1}{2} = 0$

(9) $2\sin^2 x + 3\sin x - 5 = 0$

(10) $4\cos^2 x - 2(\sqrt{2}+\sqrt{3})\cos x + \sqrt{6} = 0$

(11) أوجد حلول المعادلة التالية: $2\sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0$ على الفترة $[0\,,\,2\pi)$

(12) حلّ المعادلة: $\cos^2 x - \sin^2 x + \sin x = 0$

(13) استخدم متطابقات المجموع والفرق لإيجاد القيمة الدقيقة لِـ: $\tan\dfrac{11\pi}{12}$

(14) أوجد قيمة $\cos(x+y)\times\cos(x-y)$ بدلالة $\cos x$، $\cos y$

(15) **(a)** أثبت أن: $\tan 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(b) مستندًا إلى النتيجة في **(a)**،

أثبت أن: $\cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos(x+30°)$

(16) أثبت صحة المتطابقة: $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} + \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = 4\cos 2x$

(17) **(a)** أوجد قيمة $\cos(x+y+z)$ بدلالة: $\cos x\ ,\ \cos y\ ,\ \cos z\ ,\ \sin x\ ,\ \sin y\ ,\ \sin z$

(b) استنتج قيمة $\cos 3x$ بدلالة $\cos x$ فقط **(مساعدة:** $x = y = z$**).**

(18) أوجد قيمة x إذا كان $\cos x = 1 + \sqrt{3}\sin x$

(19) حلّ المعادلة: $2\cos x\tan x + \tan x - 2\cos x - 1 = 0$

(20) حلّ المعادلة: $2\cos^2 2x + \cos 2x = 1$

(21) لتكن: $y(x) = \dfrac{\sin^2 x + \sin x\cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$، حيث $0 < x < \dfrac{\pi}{2}, x \neq \dfrac{\pi}{4}$

أوجد قيمة $\tan x$ إذا كانت $y = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

(**مساعدة:** اكتب $y(x)$ بدلالة $\tan x$)

(22) **(a)** أثبت أن: $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

(b) اختصر: $\dfrac{1}{\tan x} - \dfrac{2}{\tan 2x}$

(23) أثبت صحة المتطابقة: $1 - \sin x + \cos x = 2\cos\dfrac{x}{2}\left(\cos\dfrac{x}{2} - \sin\dfrac{x}{2}\right)$

(24) **(a)** أوجد قيمة $\cos 2x$، إذا كان $\cos x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$، $0 < x < \pi$

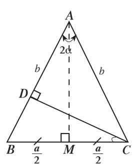
(b) أوجد قيمة $\cos 4x$

(c) أوجد قيمة x

(25) أوجد قيمة $\cos 18°$، $\sin 36°$، $\sin 9°$، إذا كان $\sin 18° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

(26) ABC مثلث متطابق الضلعين فيه $AB = AC$، $m(\widehat{A}) = 2\alpha$، حيث $\alpha \in \left(0\,,\,\dfrac{\pi}{4}\right)$،

M منتصف $\overline{BC}$، D الإسقاط العمودي للنقطة C على $\overline{AB}$



(a) أوجد BM باستخدام $\sin\alpha$ وبيّن أن $a = 2b\sin\alpha$

(b) استنتج $m(D\widehat{C}B)$

(c) أوجد CD باستخدام $\cos\alpha$

(d) استنتج أن مساحة المثلث ABC هي $b^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

(e) أثبت أن مساحة ΔABC هي $\dfrac{1}{2}b^2\sin(2\alpha)$

(f) أثبت أن: $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$

الوحدة العاشرة: الهندسة الفراغية (هندسة الفضاء) Space Geometry

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

1 – 10: المستقيمات والمستويات في الفضاء

جزء 1: النقطة والمستقيم والمستوي في الفضاء.

جزء 2: المسلمات (موضوعات) الفضاء.

جزء 3: حالات تعيين المستوى من الفضاء.

جزء 4: أوضاع المستقيمات في الفضاء.

جزء 5: أوضاع مستقيم ومستوٍ في الفضاء.

جزء 6: أوضاع مستويين في الفضاء.

2 – 10: المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء

جزء 1: توازي المستقيمات في الفضاء.

جزء 2: توازي مستقيم ومستوٍ في الفضاء.

جزء 3: توازي مستويين في الفضاء.

3 – 10: تعامد مستقيم مع مستوٍ

جزء 1: الزاوية بين مستقيمين متخالفين.

جزء 2: تعامد مستقيم مع مستوٍ.

4 – 10: الزاوية الزوجية

جزء 1: الزاوية بين مستويين (الزاوية الزوجية).

5 – 10: المستويات المتعامدة

جزء 1: المستويات المتعامدة.

مقدمة الوحدة

الوحدة العاشرة

الهندسة الفراغية (هندسة الفضاء)

Space Geometry

مشروع الوحدة: المجسمات

1 مقدمة المشروع: ما أنواع الأشكال ثلاثية الأبعاد التي تشاهدها كل يوم؟ بينما تسير داخل أحد المحلات التجارية الكبرى ترى العديد من العلب والعبوات... معروضة على الرفوف. يمكنك وصف العديد من الأشكال في الفضاء على أنها أهرامات أو أسطوانات أو مخاريط أو مناشير. يأخذ المصنعون بالاعتبار العديد من العوامل قبل اعتماد الشكل الملائم للمنتج.

2 الهدف: تصميم مجسمات متعددة السطوح وصنعها وفق شروط معينة.

3 اللوازم: ورق مقوى (كرتون)، شريط لاصق، مقص، مسطرة.

4 أسئلة حول التطبيق:

a على ورقة مقواة، ارسم نسختين من الشبكة المقابلة. كل الأشكال هي مضلعات خماسية منتظمة متطابقة. اطو كل شبكة وفق الخطوط المنقطة. ألصق الأضلاع المتلاصقة بالشريط اللاصق. ثم طبق الشبكتين على بعضهما بعضًا وألصقهما.
ما الشكل الذي حصلت عليه؟

b خذ علبة على شكل شبه مكعب أو أسطوانة. أوجد مساحتها الكلية. قصّها حول أحد حروفها وسطحها.
ما مساحة الورق المقوى غير المستخدم الذي قصصته من العلبة؟
ما نسبة مساحة الورق المقوى غير المستخدم (المهدور) إلى مساحة السطح؟

c انسخ الجدول التالي وأكمله لأربعة أشباه مكعبات حجم كل منها $216\ cm^3$.

الطول (cm)	العرض (cm)	الارتفاع (cm)	الحجم (cm^3)	المساحة الكلية (cm^2)	الحجم : المساحة الكلية
6	6	■	216	■	■ : ■
■	■	■	216	■	■ : ■

أي نسبة تختارها لتحصل على أقل تكلفة ممكنة؟

d خذ بعض علب رقائق الذرة للأطفال. ما النسبة بين الحجم والمساحة الكلية؟ كيف تفسر ذلك؟

5 التقرير: اكتب تقريرًا مفصلًا يبيّن خطوات العمل الذي قمت به ويجيب عن الأسئلة المطروحة.
أرفق التقرير بملصق يبيّن الجدول في الفقرة c واعرض المجسم الذي حصلت عليه في الفقرة a .

دروس الوحدة

المستقيمات والمستويات في الفضاء	المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء	تعامد مستقيم مع مستو	الزاوية الزوجية	المستويات المتعامدة
10–1	10–2	10–3	10–4	10–5

114

منذ القدم وحتى اليوم برزت دراسة علم الهندسة في المناهج المدرسية كمعاناة يواجهها المتعلمون في معظم المراحل. وقد تنبه التربويون لهذه الظاهرة فحاولوا إيجاد الطرائق والأساليب والأدوات الحسية والنماذج للمساعدة على تسهيل المهمة لدى المعلمين والمتعلمين.

ومن هنا كان التوجه إلى دراسة المجسمات كخطوة أولى حيث يشاهد المتعلم هذه النماذج في بيئته ومن حوله: في المنزل، في المدرسة، في المحلات التجارية، يشاهد الصناديق على شكل شبه مكعبات والعلب على شكل أسطوانات والقسم الأعلى من المآذن على شكل مخروطي والكرة وهي شغله الشاغل.

ومهما كانت المواقف من دراسة مادة الهندسة يبقى وجودها أساسيًّا في مناهج التعليم لأن تطبيق مفاهيم هندسية يساعد كثيرًا المتعلم على تطوير مهاراته واستخدامها في مواقف حياتية متنوعة.

إن دراسة مادة الهندسة المستوية أو الهندسة الفراغية تزود المتعلم بمقدرة فائقة لتحسين التحليل المنطقي والتفكير الاستنتاجي لنمذجة مسائل مجردة.

منذ وجد الإنسان على سطح الأرض، وقف في حيرة متسائلًا عن أبعاد هذا الكون الفسيح وما يدور حوله من أحداث ومظاهر طبيعية حيث الشمس والكواكب والنجوم والعلاقة بينها والقوانين التي تربط حركتها فاستخدم الهندسة المستوية والهندسة الفراغية لدراسة النظام الشمسي، فاكتشف أن مسار الكواكب حول الشمس يشكل قطعًا ناقصًا، وصنع المناظير البعيدة المدى مستندًا إلى القطع المكافئ لمراقبة حركة الكواكب وتعقب النجوم في الفضاء الواسع. وأخيرًا لا بد من الإشارة إلى دور الهندسة في الإبداعات التي نشاهدها في الأبنية والأبراج والجسور حيث ساهمت جميعها في تسهيل حياة الإنسان.


الوحدة العاشرة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)
- تعرفت الأشكال الهندسية المستوية.
- تعلمت إيجاد مساحة بعض الأشكال المستوية مثل المثلثات وبعض المضلعات الرباعية والمضلعات المنتظمة.
- تعلمت العلاقة بين محيطات الأشكال المتشابهة والعلاقة بين مساحاتها.

ماذا سوف تتعلم؟
- ميزات الأشكال ثلاثية الأبعاد.
- المسلمات الرياضية للنقطة والمستقيم والمستوي.
- أوضاع المستقيمات والمستويات في الفضاء.
- إيجاد قياس مختلف أنواع الزوايا.

المصطلحات الأساسية

هندسة الفضاء – ثلاثية الأبعاد – المسلمات – مستقيمان متخالفان – المستقيم العمودي – المستقيم المائل – زاوية زوجية – حافة الزاوية الزوجية – وجه الزاوية الزوجية – الزاوية المستوية – مستويات متعامدة

أضف إلى معلوماتك

إن دراسة الأشكال ثلاثية الأبعاد تسمى «الهندسة الفراغية أو هندسة الفضاء». للأشكال ثنائية الأبعاد ما يماثلها في الفراغ ثلاثي الأبعاد.

أشكال ثنائية الأبعاد	أشكال ثلاثية الأبعاد
مضلعات: مثلث Triangle، رباعي Quadrilateral	لها أسطح مستوية: هرم Pyramid، منشور Prism
منحنيات: قطع ناقص Ellipse، دائرة Circle	لها أسطح منحنية: كرة Sphere، مخروط Cone، أسطوانة Cylinder

115

مشروع الوحدة

يوفر مشروع الوحدة فرصة أمام الطلاب للتعرف على كيفية صنع بعض المجسمات البسيطة والتي يتعاملون معها يوميًّا.

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

4 (c)

الطول (cm)	العرض (cm)	الارتفاع (cm)	الحجم (cm^3)	المساحة الكلية (cm^2)	الحجم: المساحة الكلية
6	6	6	216	216	1:1
6	4	9	216	228	18:19
4	3	18	216	276	18:23
8	3	9	216	246	36:41
27	4	2	216	340	54:85

من الجدول يبدو أن النسبة 1:1 هي الاختيار الأفضل للحصول على أقل تكلفة ممكنة أي عندما يكون المجسم على شكل مكعب.

التقرير

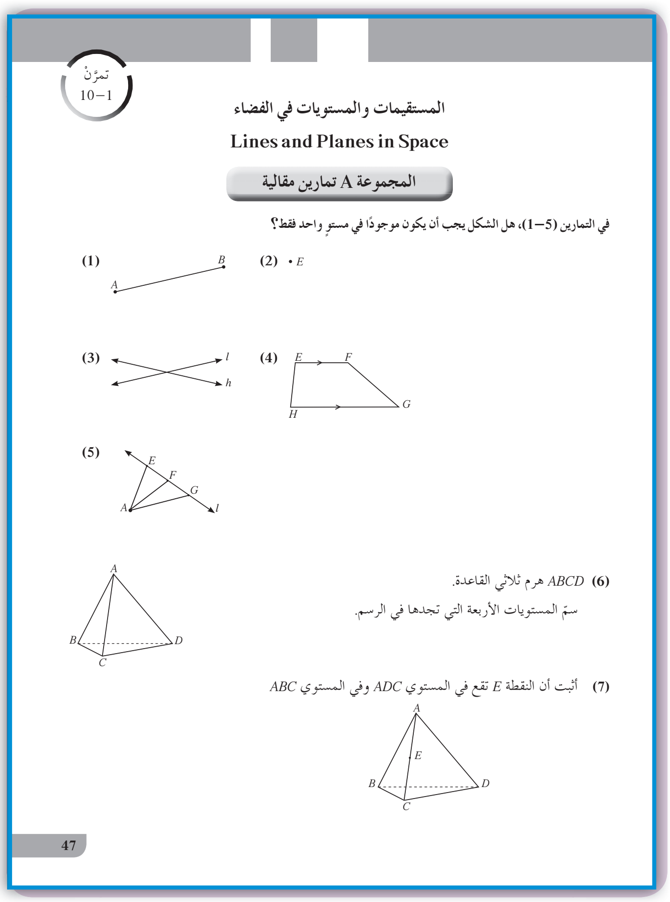
يجب أن يتضمن التقرير وصفًا دقيقًا ومفصلًا عن خطوات العمل التي قمت بها والنتائج التي توصلت إليها وجدولًا مفصلًا يتضمن الأبعاد الثلاثة الممكنة لشبه مكعب حجمه $216\ cm^3$، اعرض عملك على زملائك في غرفة الصف. ناقش معهم حساباتك، أعد النظر ببعض النتائج إذا كان ذلك ضروريًّا.

سلّم التقييم

4	الحسابات بكاملها صحيحة – الجدول صحيح – النتائج دقيقة – التقرير مفصل وواضح.
3	معظم الحسابات صحيحة – أخطاء قليلة في الجدول – معظم النتائج دقيقة – التقرير مفصل مع بعض النقاط الغامضة.
2	بعض الحسابات صحيحة – أخطاء متعددة في الجدول – النتائج غير واقعية – التقرير بحاجة إلى تنظيم وإعادة صياغة.
1	معظم عناصر المشروع غير كاملة.

10–1: المستقيمات والمستويات في الفضاء


10–1
المستقيمات والمستويات في الفضاء
Lines and Planes in Space
سوف تتعلم
• المسلمات الرياضية للنقطة والمستقيم والمستوى.
• المستقيمات والمستويات في الفضاء.
المفردات والمصطلحات:
• هندسة الفضاء Space Geometry
• ثلاثية الأبعاد Three–Dimensional
• مسلمة Postulate
• نقطة Point
• مستقيم Straight Line
• مستوٍ Plane
• مستقيمان متخالفان Two Skew Lines
• مستقيمان متقاطعان Two Intersecting Lines
• مستقيمان متوازيان Two Parallel Lines
معلومة: سوف نستخدم الحروف الكبيرة مثل A, B, C للدلالة على النقاط والحروف الصغيرة مثل l, m, h للدلالة على المستقيمات، ونكتب المستقيم l أو T.
معلومة: وحيد تعني واحد وواحد فقط.
دعنا نفكر ونتناقش
الصورة المقابلة هي لأحد مجمعات دولة الكويت. حدّد في الصورة:
a نقطة، مستقيم، مستوى.
b مستقيمان متوازيان، مستقيمان متقاطعان، مستقيمان متخالفان.
c زاوية (حدّد نوعها إن أمكن).
d سطح غير مستوٍ.
النقطة والمستقيم والمستوى في الفضاء
Point, Straight Line and Plane in Space
استخدمت في دراستك السابقة بعض المسميات الأولية مثل النقطة، المستقيم، المستوى وذلك لتعريف بعض المفاهيم أو وصف أشياء معينة.
وعلمت أن المستوى هو سطح يمتد إلى ما لا نهاية في جميع الاتجاهات مثل سطح الطاولة أو سطح السبورة وغيرها.
يمثل المستوى هندسيًا بشكل رباعي أو أي منحنى مغلق (غالبًا ما يكون متوازي أضلاع) ويرمز له بالرمز π أو بثلاث نقاط على هذا المستوى ليست على استقامة واحدة A, B, C مثلًا ويرمز إليه بالرمز (ABC). يضم المستوى مجموعة غير منتهية من النقاط. الأشكال المستوية مثل المثلث، المستطيل، شبه المنحرف، الدائرة وغيرها هي أشكال ذات بعدين.
كذلك سبق لك دراسة بعض المجسمات مثل المكعب، المنشور، الهرم، الأسطوانة، المخروط، الكرة وغيرها وهذه المجسمات تشغل حيزًا من الفراغ وتوصف بأنها أشكال هندسية ذات ثلاثة أبعاد (ثلاثية الأبعاد).
لذلك تسمى أشكال الفراغ الثلاثي.
تهتم الهندسة الفراغية (هندسة الفضاء) بدراسة:
• الأشكال الهندسية ثلاثية الأبعاد
• تقاطع المستقيمات، تقاطع المستويات وتقاطع المستقيمات والمستويات.
• الحجوم.
• مساحات الأسطح.
116


تمرّن 10–1
المستقيمات والمستويات في الفضاء
Lines and Planes in Space
المجموعة A تمارين مقالية
في التمارين (1–5)، هل الشكل يجب أن يكون موجودًا في مستوٍ واحد فقط؟
(1) (2) (3) (4) (5)
(6) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.
سمّ المستويات الأربعة التي تجدها في الرسم.
(7) أثبت أن النقطة E تقع في المستوى ADC وفي المستوى ABC
47

1 الأهداف

- يتعرف المسلمات الرياضية للنقطة والمستقيم والمستوي.
- يتعرف حالات تعيين المستوى.
- يتعرف أوضاع المستقيمات والمستويات في الفضاء.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

هندسة الفضاء – ثلاثية الأبعاد – مستوٍ – مسلمة – نقطة – مستقيم – مستقيمان متخالفان – مستقيمان متقاطعان – مستقيمان متوازيان.

3 الأدوات والوسائل

حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) ما عدد نقاط التقاطع بين مستقيمين؟

(b) اذكر متى يكون مستقيمان متوازيين في المستوي.

(c) كيف يكون شكل رباعي متوازي أضلاع؟

(d) في المجموعة: $E=\{2,3,4,5,6\}$

أكمل ما يلي مستخدمًا: $\not\subset$, $\subset$, $\notin$, $\in$

$3 \ldots E \; ; \; 9 \ldots E$

$\{3,4\} \ldots E \; ; \; \{1,5\} \ldots E$

5 التدريس

يعتبر هذا الدرس مدخلًا مهمًّا ليتعرف الطالب الهندسة في الفراغ أو المجسمات ثلاثية الأبعاد.

من المهم تركيز انتباههم إلى أن الهندسة في الفضاء هي امتداد للهندسة المستوية حيث إن الركيزة الأساسية للهندسة الفضائية هي النقطة والمستقيم والمستوي يصاحبها مسلمات وبديهيات ونظريات تساعد كثيرًا الطالب على فهم هذا الجزء المهم من الهندسة.

ركّز انتباه الطلاب إلى أن النقطة هي عنصر من المستوي أي نستخدم الرمز $\in$ لنعبّر عن انتماء نقطة إلى مستوٍ ولكن

المستقيم هو جزء من المستوي أي نستخدم الرمز $\subset$ لنعبّر عن انتماء مستقيم إلى مستوٍ.

اطلب إليهم كتابة تقاطع مستقيم مع مستوٍ باستخدام الرموز التي تعلموها سابقًا أي $\overleftrightarrow{\ell} \cap \pi = \{A\}$ أي مجموعة من عنصر واحد.

اطلب إليهم أيضًا كتابة تقاطع مستويين باستخدام الرموز أي $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{\ell}$ حيث ℓ هو مستقيم.

ناقش معهم مسألة تعيين المستوي ودلالاته في الواقع. اطلب إليهم تحريك كرسي من ثلاثة قوائم، ثم اسألهم عن ثباته على الأرض المسطحة. بعد ذلك اطلب إليهم تحريك طاولة بأربع قوائم، ثم اسألهم عن ثباتها على الأرض المسطحة. ناقش معهم الملاحظات التي توصلوا إليها. اطلب إليهم قراءة المعطيات الأربعة لتعيين مستوٍ في الفضاء بصوت مرتفع.

في المثال (1)

هذا المثال هو تطبيق مباشر لتعيين مستوٍ بمستقيمين متوازيين قاعدتا شبه المنحرف، والتركيز على أن كل مستقيم له نقطتان في المستوي ينتمي إلى هذا المستوي.

في المثال (2)

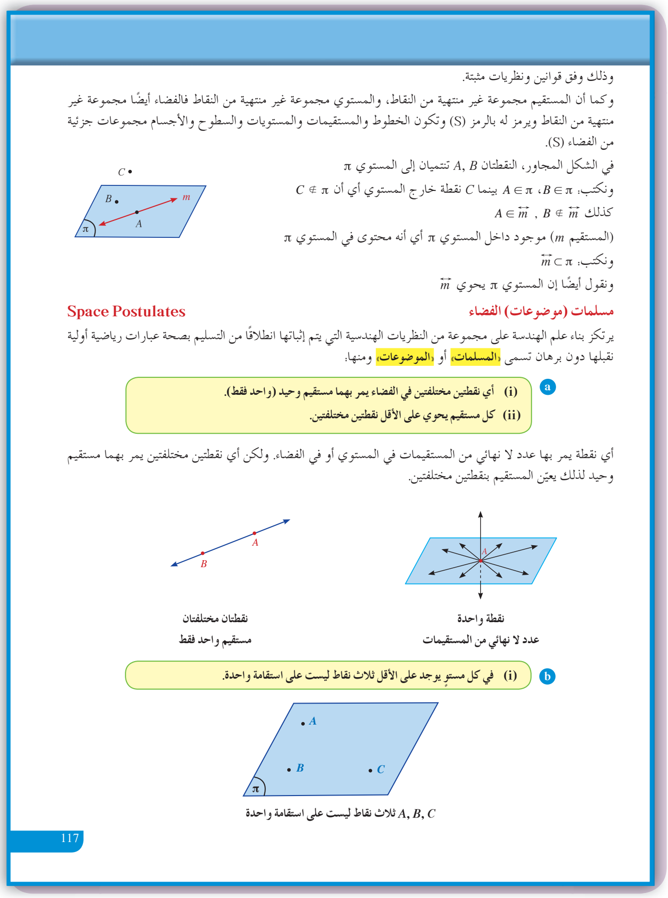
يتعامل الطلاب في هذا المثال مع الأشكال ثلاثية الأبعاد للمرة الأولى. أشر إلى أن القطعتين $\overline{BD}$، $\overline{EF}$ منقطتان لأنهما غير مرئيتين. ركّز معهم على فكرة التقاطع بين مستقيمين في الفضاء من حيث تقاطعهما على نفس المستوي وبالتالي إمكانية تقاطع $\overleftrightarrow{EF}$ مع (ACD).

في المثال (3)

يؤكّد هذا المثال على حقيقة يراها كل طالب أمامه: في غرفة الصف، أو في المنزل أو في أي مجسم يصادفه. إذا نظر إلى كل ركن من أركان هذه المجسمات فإنه يلاحظ وجود ثلاثة مستقيمات لا تقع في مستوٍ واحد ولكنّها تتقاطع في نقطة واحدة.

6 الربط

اطلب إلى كل طالب أن يأخذ الكتاب الموجود أمامه وأن يفتح أوراقه مشرعة في الفضاء. سوف يرى أن كل ورقة تمثّل مستويًا في الفضاء.


وذلك وفق قوانين ونظريات مثبتة.

وكما أن المستقيم مجموعة غير منتهية من النقاط، والمستوي مجموعة غير منتهية من النقاط فالفضاء أيضًا مجموعة غير منتهية من النقاط ويرمز له بالرمز (S) وتكون الخطوط والمستقيمات والمستويات والسطوح والأجسام مجموعات جزئية من الفضاء (S).

في الشكل المجاور، النقطتان A, B تنتميان إلى المستوي π

ونكتب: $B \in \pi$، $A \in \pi$ بينما C نقطة خارج المستوي أي أن $C \notin \pi$

كذلك $A \in \overleftrightarrow{m}$, $B \notin \overleftrightarrow{m}$

(المستقيم m) موجود داخل المستوي π أي أنه محتوى في المستوي π

ونكتب: $\overleftrightarrow{m} \subset \pi$

ونقول أيضًا إن المستوي π يحوي $\overleftrightarrow{m}$

مسلمات (موضوعات) الفضاء **Space Postulates**

يرتكز بناء علم الهندسة على مجموعة من النظريات الهندسية التي يتم إثباتها انطلاقًا من التسليم بصحة عبارات رياضية أولية نقبلها دون برهان تسمى «المسلمات» أو «الموضوعات» ومنها:

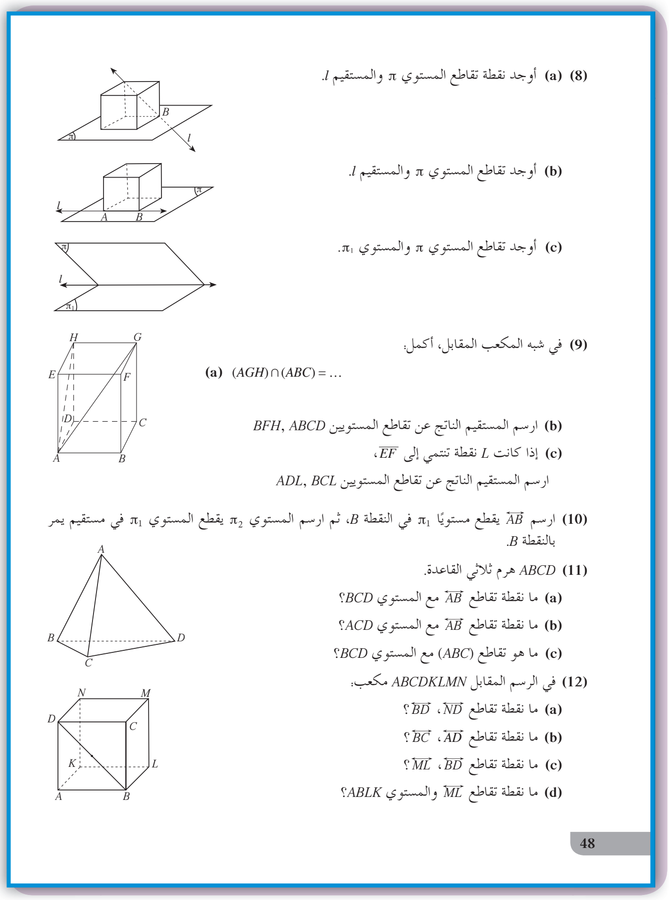
a
(i) أي نقطتين مختلفتين في الفضاء يمر بهما مستقيم وحيد (واحد فقط).
(ii) كل مستقيم يحوي على الأقل نقطتين مختلفتين.

أي نقطة يمر بها عدد لا نهائي من المستقيمات في المستوي أو في الفضاء. ولكن أي نقطتين مختلفتين يمر بهما مستقيم وحيد لذلك يعيّن المستقيم بنقطتين مختلفتين.

b
(i) في كل مستوٍ يوجد على الأقل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.

A, B, C ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة

117


(8) **(a)** أوجد نقطة تقاطع المستوي π والمستقيم l.

(b) أوجد تقاطع المستوي π والمستقيم l.

(c) أوجد تقاطع المستوي π والمستوي π_1.

(9) في شبه المكعب المقابل، أكمل:

(a) $(AGH) \cap (ABC) = \dots$

(b) ارسم المستقيم الناتج عن تقاطع المستويين $BFH, ABCD$

(c) إذا كانت L نقطة تنتمي إلى $\overline{EF}$،

ارسم المستقيم الناتج عن تقاطع المستويين ADL, BCL

(10) ارسم $\overleftrightarrow{AB}$ يقطع مستويًا π_1 في النقطة B، ثم ارسم المستوي π_2 يقطع المستوي π_1 في مستقيم يمر بالنقطة B.

(11) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.

(a) ما نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{AB}$ مع المستوي BCD؟

(b) ما نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{AB}$ مع المستوي ACD؟

(c) ما هو تقاطع (ABC) مع المستوي BCD؟

(12) في الرسم المقابل $ABCDKLMN$ مكعب:

(a) ما نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{ND}$، $\overleftrightarrow{BD}$؟

(b) ما نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{AD}$، $\overleftrightarrow{BC}$؟

(c) ما نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{BD}$، $\overleftrightarrow{ML}$؟

(d) ما نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{ML}$ والمستوي $ABLK$؟

48

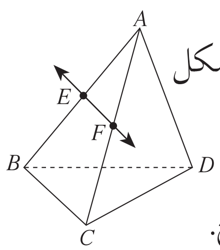
7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام المستوي فيعتقدون أن متوازي الأضلاع هو حدود بالنسبة إلى هذا المستوي. أخبرهم أن متوازي الأضلاع هو ممثل للمستوي فقط ولكن ليس للمستوي حدود حيث هو مساحة مسطحة يمتد في الاتجاهات كافة إلى اللا نهاية.

8 التقييم

اسأل الطلاب إعادة تعريف كل ما ورد في هذا الدرس وخاصة تلك التي تحدّد المستوي في الفضاء لتتأكد من أنهم سوف يفهمون أهمية استخدام المستوي وأن الفرق موجود بين الهندسة المستوية والهندسة الفراغية.

اختبار سريع



1 الصورة تمثّل علبة عصير على شكل هرم ثلاثي القاعدة.

(a) كم مستويًا يمكن تعيينه على هذا المجسم؟ اشرح.

4؛ (ABC)؛ (ACD)؛ (ABD)؛ (BCD).
ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تعيّن مستويًا واحدًا فقط.

(b) في أي مستوٍ يوجد $\overleftrightarrow{EF}$؟ اشرح.

في المستوي ABC، لأن له نقطتين في هذا المستوي.

(c) متى يكون مستقيمان متوازيين في الفضاء؟

إذا تواجدا في مستوٍ واحد من دون أن يتقاطعا أبدًا.

(d) متى يكون مستقيمان متخالفين في الفضاء؟

إذا كانا غير متقاطعين ولا يمكن أن يحويهما مستو واحد

(e) كيف يتقاطع مستويان في الفضاء؟

بخط مستقيم.

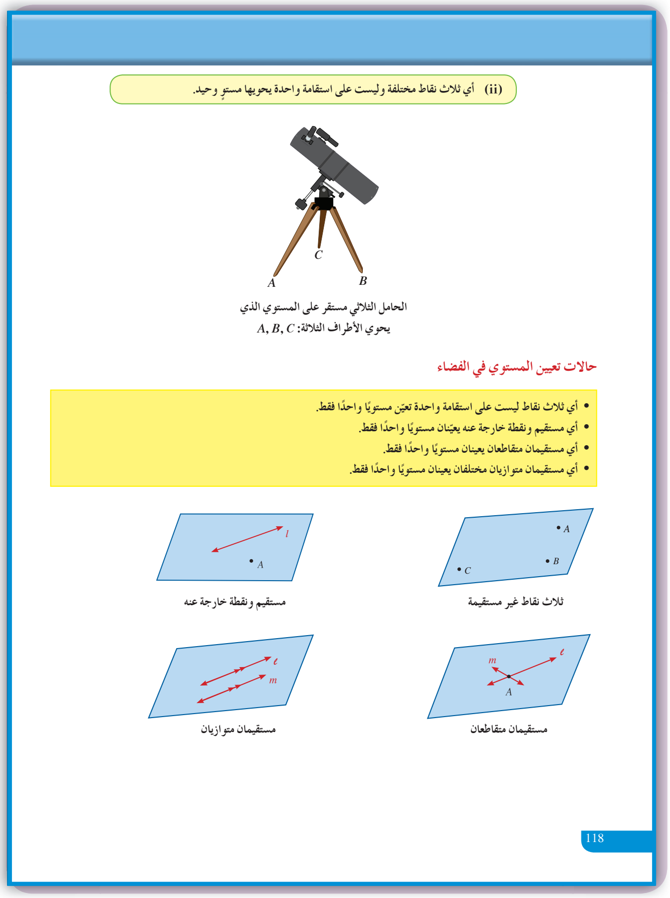
2 كيف يتعين مستويًا في الفضاء؟ اشرح.

(a) 3 نقاط ليست على استقامة واحدة (مثلث).

(b) مستقيمان متقاطعان.

(c) مستقيم ونقطة خارج المستقيم.

(d) مستقيمان متوازيان مختلفان.



(ii) أي ثلاث نقاط مختلفة وليست على استقامة واحدة يحويها مستوٍ وحيد.

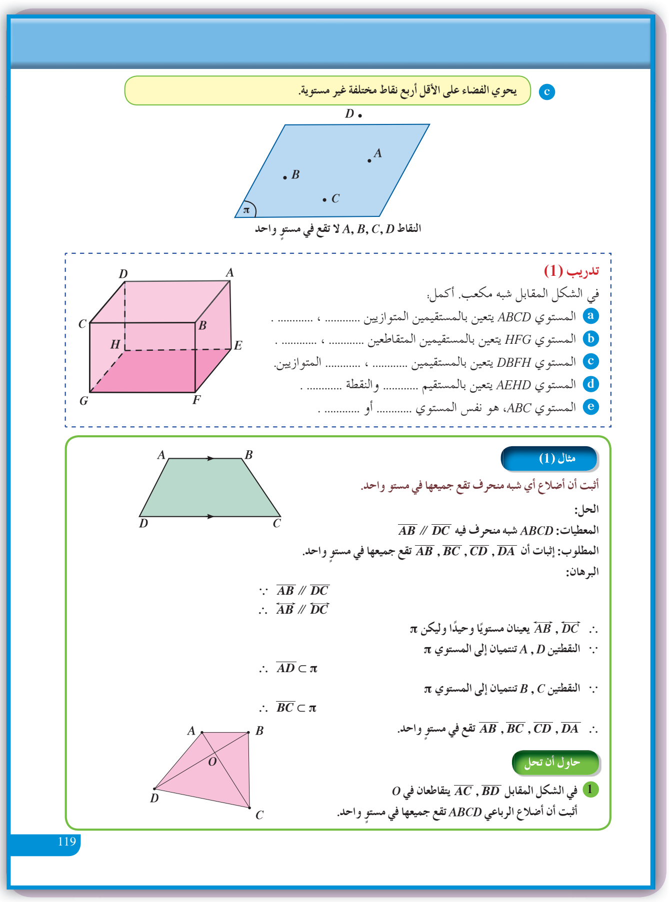
الحامل الثلاثي مستقر على المستوي الذي يحوي الأطراف الثلاثة: A, B, C

حالات تعيين المستوي في الفضاء

- أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تعيّن مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيم ونقطة خارجة عنه يعيّنان مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيمان متقاطعان يعينان مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيمان متوازيان مختلفان يعينان مستويًا واحدًا فقط.

ثلاث نقاط غير مستقيمة — مستقيم ونقطة خارجة عنه — مستقيمان متقاطعان — مستقيمان متوازيان

118



c يحوي الفضاء على الأقل أربع نقاط مختلفة غير مستوية.

النقاط A, B, C, D لا تقع في مستوٍ واحد

تدريب (1)

في الشكل المقابل شبه مكعب. أكمل:

a المستوي $ABCD$ يتعين بالمستقيمين المتوازيين .... ، ....
b المستوي HFG يتعين بالمستقيمين المتقاطعين .... ، ....
c المستوي $DBFH$ يتعين بالمستقيمين .... ، .... المتوازيين.
d المستوي $AEHD$ يتعين بالمستقيم .... والنقطة ....
e المستوي ABC، هو نفس المستوي .... أو ....

مثال (1)

أثبت أن أضلاع أي شبه منحرف تقع جميعها في مستو واحد.

الحل:

المعطيات: $ABCD$ شبه منحرف فيه $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

المطلوب: إثبات أن $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ تقع جميعها في مستوٍ واحد.

البرهان:

$\because \overline{AB} \parallel \overline{DC}$
$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$
$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{DC}$ يعينان مستويًا وحيدًا وليكن π
$\because$ النقطتين A , D تنتميان إلى المستوي π
$\therefore \overline{AD} \subset \pi$
$\because$ النقطتين B , C تنتميان إلى المستوي π
$\therefore \overline{BC} \subset \pi$
$\therefore$ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ تقع في مستوٍ واحد.

حاول أن تحل

1 في الشكل المقابل $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ يتقاطعان في O
أثبت أن أضلاع الرباعي $ABCD$ تقع جميعها في مستوٍ واحد.

119

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

راجع عمل الطلاب.

«حاول أن تحل»

1 $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{BD}$ متقاطعان ∴ يعينان مستويًا واحدًا.

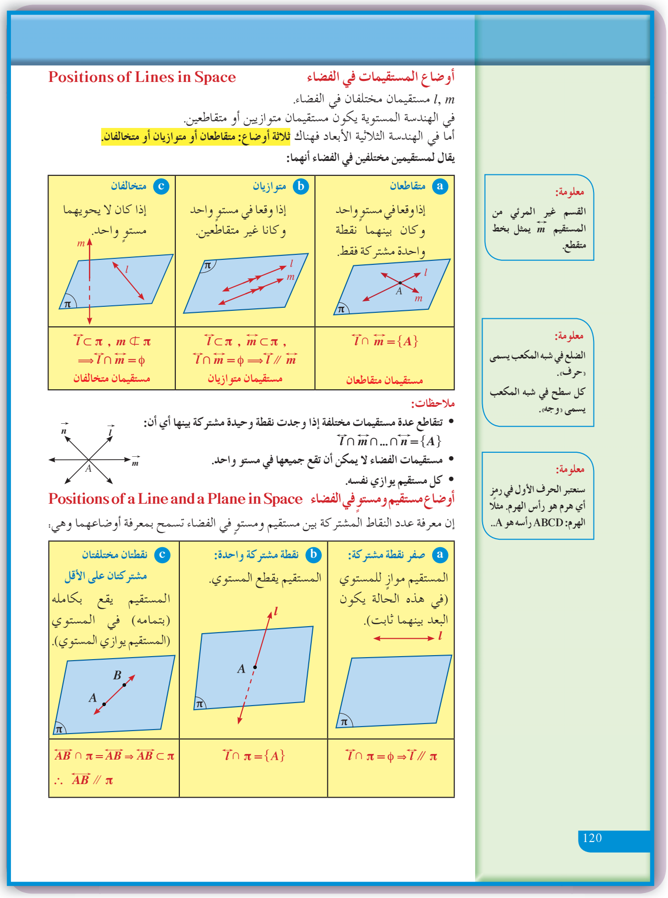
النقاط A, B, C, D تنتمي إلى هذا المستوي

∴ أضلاع الرباعي $ABCD$ تقع جميعًا في هذا المستوي.

2 $\overleftrightarrow{EF}$ لا يوازي $\overleftrightarrow{BD}$.

∵ $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{EF}$ يقعان في المستوي ABD

∴ $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{EF}$ يتقاطعان، ونقطة تقاطعهما تنتمي إلى $\overleftrightarrow{BD}$ وبالتالي إلى (BCD).


أوضاع المستقيمات في الفضاء Positions of Lines in Space

l, m مستقيمان مختلفان في الفضاء.

في الهندسة المستوية يكون مستقيمان متوازيين أو متقاطعين.

أما في الهندسة الثلاثية الأبعاد فهناك ثلاثة أوضاع: متقاطعان أو متوازيان أو متخالفان.

يقال لمستقيمين مختلفين في الفضاء أنهما:

a متقاطعان	b متوازيان	c متخالفان
إذا وقعا في مستوٍ واحد وكان بينهما نقطة واحدة مشتركة فقط.	إذا وقعا في مستوٍ واحد وكانا غير متقاطعين.	إذا كان لا يحويهما مستوٍ واحد.
$\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \{A\}$ مستقيمان متقاطعان	$\overleftrightarrow{l} \subset \pi$, $\overleftrightarrow{m} \subset \pi$, $\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \phi \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ مستقيمان متوازيان	$\overleftrightarrow{l} \subset \pi$, $m \not\subset \pi$ $\Rightarrow \overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \phi$ مستقيمان متخالفان

ملاحظات:
- تتقاطع عدة مستقيمات مختلفة إذا وجدت نقطة وحيدة مشتركة بينها أي أن: $\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} \cap ... \cap \overleftrightarrow{n} = \{A\}$
- مستقيمات الفضاء لا يمكن أن تقع جميعها في مستوٍ واحد.
- كل مستقيم يوازي نفسه.

أوضاع مستقيم ومستوٍ في الفضاء Positions of a Line and a Plane in Space

إن معرفة عدد النقاط المشتركة بين مستقيم ومستوٍ في الفضاء تسمح بمعرفة أوضاعهما وهي:

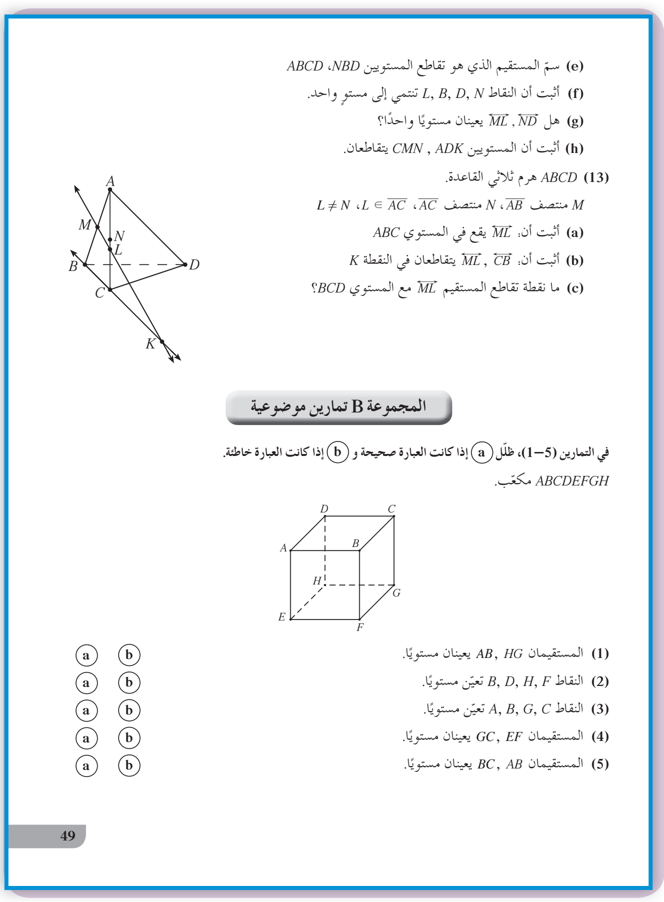
a صفر نقطة مشتركة	b نقطة مشتركة واحدة	c نقطتان مختلفتان مشتركتان على الأقل
المستقيم موازٍ للمستوي (في هذه الحالة يكون البعد بينهما ثابت).	المستقيم يقطع المستوي.	المستقيم يقع بكامله (بتمامه) في المستوي (المستقيم يوازي المستوي).
$\overleftrightarrow{l} \cap \pi = \phi \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \parallel \pi$	$\overleftrightarrow{l} \cap \pi = \{A\}$	$\overleftrightarrow{AB} \cap \pi = \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \subset \pi$ ∴ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \pi$

معلومة: القسم غير المرئي من المستقيم m يمثل بخط متقطع.

معلومة: الضلع في شبه المكعب يسمى «حرف»، كل سطح في شبه المكعب يسمى «وجه».

معلومة: سنعتبر الحرف الأول في رمز الهرم هو رأس الهرم. مثلًا الهرم $ABCD$ رأسه هو A.

120


(e) سمّ المستقيم الذي هو تقاطع المستويين NBD ، $ABCD$

(f) أثبت أن النقاط L, B, D, N تنتمي إلى مستوٍ واحد.

(g) هل $\overleftrightarrow{ND}$ ، $\overleftrightarrow{ML}$ يعينان مستويًا واحدًا؟

(h) أثبت أن المستويين ADK ، CMN يتقاطعان.

(13) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.

M منتصف $\overline{AB}$ ، N منتصف $\overline{AC}$ ، $L \in \overline{AC}$ ، $L \neq N$

(a) أثبت أن $\overleftrightarrow{ML}$ يقع في المستوي ABC

(b) أثبت أن $\overleftrightarrow{CB}$ ، $\overleftrightarrow{ML}$ يتقاطعان في النقطة K

(c) ما نقطة تقاطع المستقيم $\overleftrightarrow{ML}$ مع المستوي BCD؟

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

$ABCDEFGH$ مكعّب.

(1) المستقيمان AB, HG يعينان مستويًا. (a) (b)

(2) النقاط B, D, H, F تعيّن مستويًا. (a) (b)

(3) النقاط A, B, G, C تعيّن مستويًا. (a) (b)

(4) المستقيمان GC, EF يعينان مستويًا. (a) (b)

(5) المستقيمان BC, AB يعينان مستويًا. (a) (b)

49


تدريب (2)

في الصورة المقابلة، أشر إلى:

a مستقيمين متخالفين.

b مستقيم موازٍ لمستوٍ.

c مستقيم يقطع مستوٍ.

d مستقيم يقع في مستوٍ.

مثال (2)

إذا كان $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.

النقطة E تنتمي إلى $\overline{AB}$ ، النقطة F تنتمي إلى $\overline{AD}$.

$\overleftrightarrow{EF}$ لا يوازي $\overleftrightarrow{BD}$.

أثبت أن: a $\overleftrightarrow{EF} \subseteq (ABD)$

b $\overleftrightarrow{EF}$ يقطع (ACD)

المعطيات: $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.

النقطة E تنتمي إلى $\overline{AB}$ والنقطة F تنتمي إلى $\overline{AD}$ بحيث $\overleftrightarrow{EF}$ لا يوازي $\overleftrightarrow{BD}$.

a المطلوب: إثبات أن $\overleftrightarrow{EF} \subseteq (ABD)$

البرهان:

$\because E \in \overline{AB}, \overleftrightarrow{AB} \subseteq (ABD)$

$\therefore E \in (ABD)$

$\because F \in \overline{AD}, \overleftrightarrow{AD} \subseteq (ABD)$

$\therefore F \in (ABD)$

النقطتان E, F تنتميان إلى (ABD)

$\therefore \overleftrightarrow{EF} \subseteq (ABD)$

b المطلوب: $\overleftrightarrow{EF}$ يقطع (ACD)

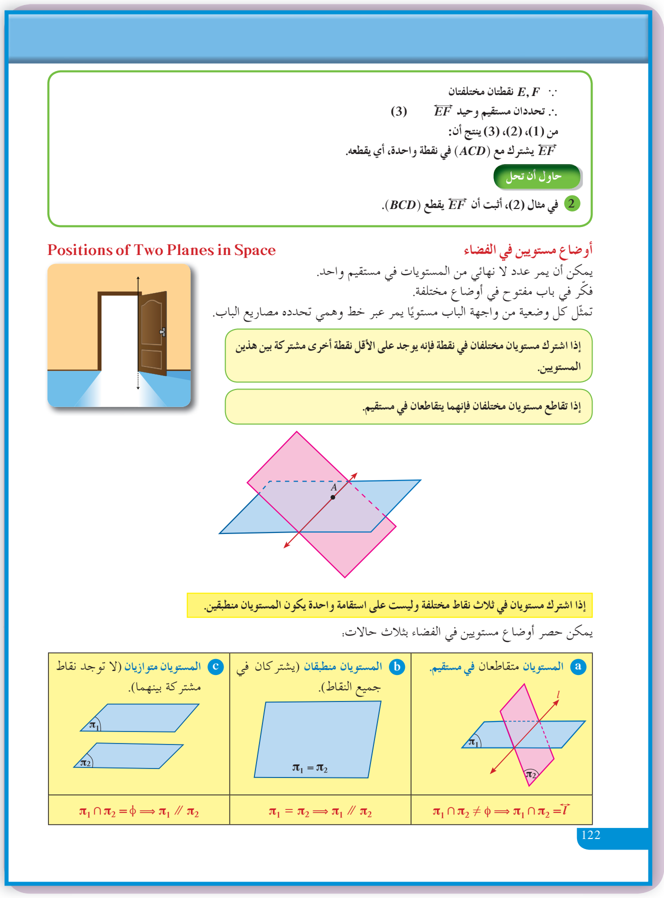
البرهان:

$\because F \in \overline{AD}, \overleftrightarrow{AD} \subseteq (ACD)$

$\therefore F \in (ACD)$ (1)

$E \notin (ACD)$ (2)

121



∵ E, F نقطتان مختلفتان

∴ $\overleftrightarrow{EF}$ تحددان مستقيم وحيد (3)

من (1)، (2)، (3) ينتج أن:

$\overleftrightarrow{EF}$ يشترك مع (ACD) في نقطة واحدة، أي يقطعه.

حاول أن تحل

2 في مثال (2)، أثبت أن $\overleftrightarrow{EF}$ يقطع (BCD).

أوضاع مستويين في الفضاء Positions of Two Planes in Space

يمكن أن يمر عدد لا نهائي من المستويات في مستقيم واحد.

فكّر في باب مفتوح في أوضاع مختلفة.

تمثّل كل وضعية من واجهة الباب مستويًا يمر عبر خط وهمي تحدده مصاريع الباب.

إذا اشترك مستويان مختلفان في نقطة فإنه يوجد على الأقل نقطة أخرى مشتركة بين هذين المستويين.

إذا تقاطع مستويان مختلفان فإنهما يتقاطعان في مستقيم.

إذا اشترك مستويان في ثلاث نقاط مختلفة وليست على استقامة واحدة يكون المستويان منطبقين.

يمكن حصر أوضاع مستويين في الفضاء بثلاث حالات:

c المستويان متوازيان (لا توجد نقاط مشتركة بينهما).	b المستويان منطبقان (يشتركان في جميع النقاط).	a المستويان متقاطعان في مستقيم.
$\pi_1 \cap \pi_2 = \phi \Longrightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$	$\pi_1 = \pi_2 \Longrightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$	$\pi_1 \cap \pi_2 \neq \phi \Longrightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l}$

122

مثال (3)

l, m, n ثلاثة مستقيمات لا تقع في مستوٍ واحد تتقاطع مثنى مثنى.

أثبت أن المستقيمات الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة فقط.

الحل:

المعطيات:

l, m, n ثلاثة مستقيمات لا تقع في مستوٍ واحد بحيث إن:

$\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} \neq \phi$ ، $\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{n} \neq \phi$ ، $\overleftrightarrow{m} \cap \overleftrightarrow{n} \neq \phi$

المطلوب:

إثبات أن المستقيمات الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة فقط.

البرهان:

∵ المستقيمان m, n متقاطعان

∴ يعينان مستويًا وحيدًا وليكن π_1

∵ المستقيمان l, n متقاطعان

∴ يعينان مستويًا وحيدًا وليكن π_2

ولتكن O نقطة تقاطع المستقيمين l, m

$O \in \overleftrightarrow{m}$ ∴ $O \in \pi_1$ (1)

$O \in \overleftrightarrow{l}$ ∴ $O \in \pi_2$ (2)

من (1)، (2) $O \in \pi_1 \cap \pi_2$

∵ $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{n}$

∴ $O \in \overleftrightarrow{n}$

∴ O نقطة مشتركة بين المستقيمات الثلاثة وبالتالي تتقاطع المستقيمات l, m, n في نقطة واحدة.

حاول أن تحل

3 $\overleftrightarrow{l}, \overleftrightarrow{m}, \overleftrightarrow{n}$ ثلاثة مستقيمات مختلفة تتقاطع في A.

المستقيم t يقطع المستقيمات الثلاثة في B, C, D على الترتيب.

أثبت أن المستقيمات l, m, n, t تقع في مستوٍ واحد.

معلومة: تقاطع عدة مستقيمات مثنى مثنى تعني أن كل مستقيمين يتقاطعان في نقطة.

معلومة: يرسم الجزء غير المرئي من الشكل بخط متقطع.

123

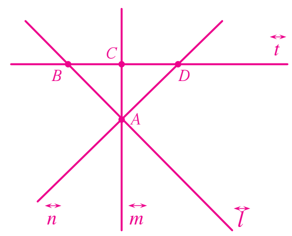
3 المستقيم t يحتوي على النقاط الثلاث B, C, D

ولكن هذه النقاط الموجودة على $\overleftrightarrow{t}$ تشكل مع

النقطة A مستويًا واحدًا وكل مستقيم له نقطتان

في نفس المستوي ينتمي بكامله إلى هذا المستوي

∴ $\overleftrightarrow{l}, \overleftrightarrow{m}, \overleftrightarrow{n}, \overleftrightarrow{t}$ تقع جميعها في نفس المستوي.



«تدريب (1)»

(a) $\overleftrightarrow{CD}$، $\overleftrightarrow{AB}$ أو $\overleftrightarrow{AD}$، $\overleftrightarrow{BC}$

(b) $\overleftrightarrow{HG}$، $\overleftrightarrow{HF}$ أو $\overleftrightarrow{HG}$، $\overleftrightarrow{FG}$ أو $\overleftrightarrow{FH}$، $\overleftrightarrow{GH}$

(c) $\overleftrightarrow{DH}$، $\overleftrightarrow{BF}$

(d) $\overleftrightarrow{AD}, H$ أو $\overleftrightarrow{AD}, E$ أو غيرها

(e) $(ABCD)$ أو (ADC) أو (ADB) أو غيرها

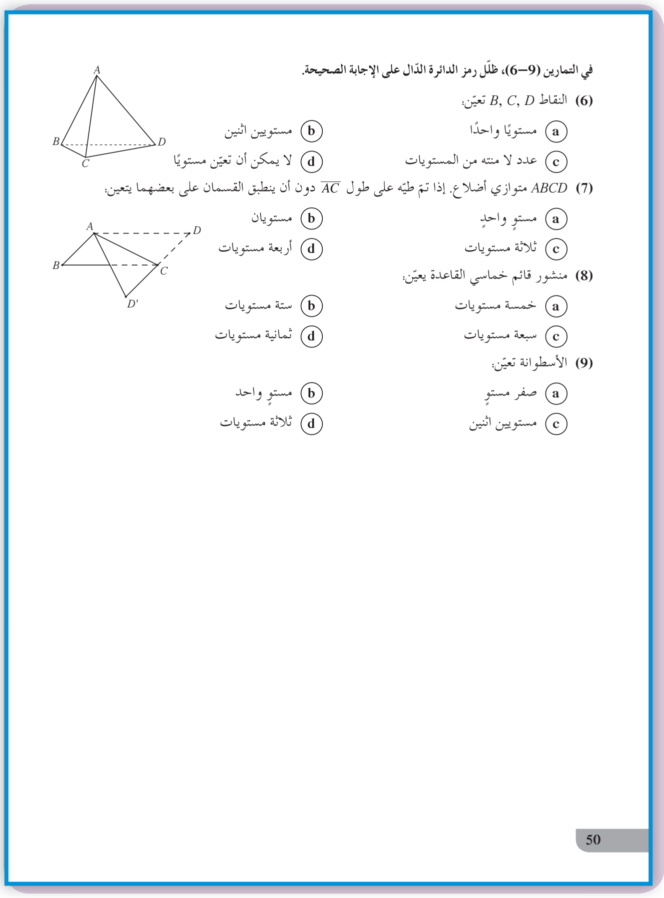
«تدريب (2)»

(a) حافة الواجهة الأمامية من المنزل والحرف العمودي من المنزل في الجهة المقابلة.

(b) الفواصل البيضاء الأفقية موازية لمستوى الأرض.

(c) كل تقاطع بين جدارين في المنزل يتقاطع مع الأرض أو مع السقف.

(d) فواصل الشبابيك تقع في مستوى الواجهة الأمامية للمنزل.



في التمارين (9–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) النقاط B, C, D تعيّن:

ⓐ مستويًا واحدًا ⓑ مستويين اثنين

ⓒ عدد لا منته من المستويات ⓓ لا يمكن أن تعيّن مستويًا

(7) $ABCD$ متوازي أضلاع. إذا تمّ طيّه على طول $\overline{AC}$ دون أن ينطبق القسمان على بعضهما يتعين:

ⓐ مستوٍ واحدٍ ⓑ مستويان

ⓒ ثلاثة مستويات ⓓ أربعة مستويات

(8) منشور قائم خماسي القاعدة يعيّن:

ⓐ خمسة مستويات ⓑ ستة مستويات

ⓒ سبعة مستويات ⓓ ثمانية مستويات

(9) الأسطوانة تعيّن:

ⓐ صفر مستوٍ ⓑ مستوٍ واحد

ⓒ مستويين اثنين ⓓ ثلاثة مستويات

50

10–2: المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء

1 الأهداف

- يتعرف المستقيمات في الفضاء.
- يتعرف المستويات في الفضاء.
- يتعرف أوضاع المستقيمات والمستويات في الفضاء.
- يتعرف توازي مستقيم مع مستوٍ.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

تقاطع المستويات – مستويان متقاطعان – مستويان متوازيان – حرف – وجه.

3 الأدوات والوسائل

حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show) – نماذج مجسمات.

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

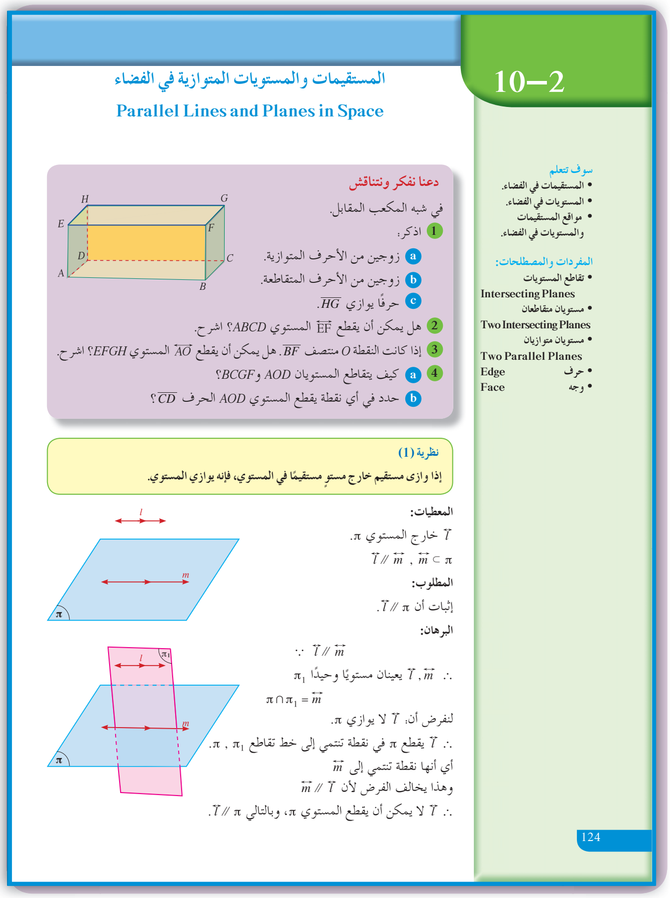
(a) كيف تحدد مستويًا في الفضاء؟

(b) ما عدد نقاط تقاطع مستقيم ومستوٍ؟

(c) ما شرط احتواء مستوٍ لمستقيم؟

(d) إذا تقاطع مستويان في نقطة.

فما هو وضع المستويين؟



10–2

المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء

Parallel Lines and Planes in Space

سوف تتعلم
- المستقيمات في الفضاء.
- المستويات في الفضاء.
- مواقع المستقيمات والمستويات في الفضاء.

المفردات والمصطلحات:
- تقاطع مستويين Intersecting Planes
- مستويان متقاطعان Two Intersecting Planes
- مستويان متوازيان Two Parallel Planes
- حرف Edge
- وجه Face

دعنا نفكر ونتناقش

في شبه المكعب المقابل:

1 اذكر:

a زوجين من الأحرف المتوازية.

b زوجين من الأحرف المتقاطعة.

c حرفًا يوازي $\overleftrightarrow{HG}$.

2 هل يمكن أن يقطع $\overleftrightarrow{EF}$ المستوي $ABCD$؟ اشرح.

3 إذا كانت النقطة O منتصف $\overline{BF}$. هل يمكن أن يقطع $\overleftrightarrow{AO}$ المستوي $EFGH$؟ اشرح.

4 a كيف يتقاطع المستويان AOD و $BCGF$؟

b حدد في أي نقطة يقطع المستوي AOD الحرف $\overleftrightarrow{CD}$؟

نظرية (1)

إذا وازى مستقيم خارج مستوٍ مستقيمًا في المستوي، فإنه يوازي المستوي.

المعطيات:

$\overleftrightarrow{l}$ خارج المستوي π.

$\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ ، $\overleftrightarrow{m} \subset \pi$

المطلوب:

إثبات أن $\overleftrightarrow{l} \parallel \pi$.

البرهان:

$\because \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{l}$ ، $\overleftrightarrow{m}$ يعينان مستويًا وحيدًا π_1

$\pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{m}$

لنفرض أن $\overleftrightarrow{l}$ لا يوازي π.

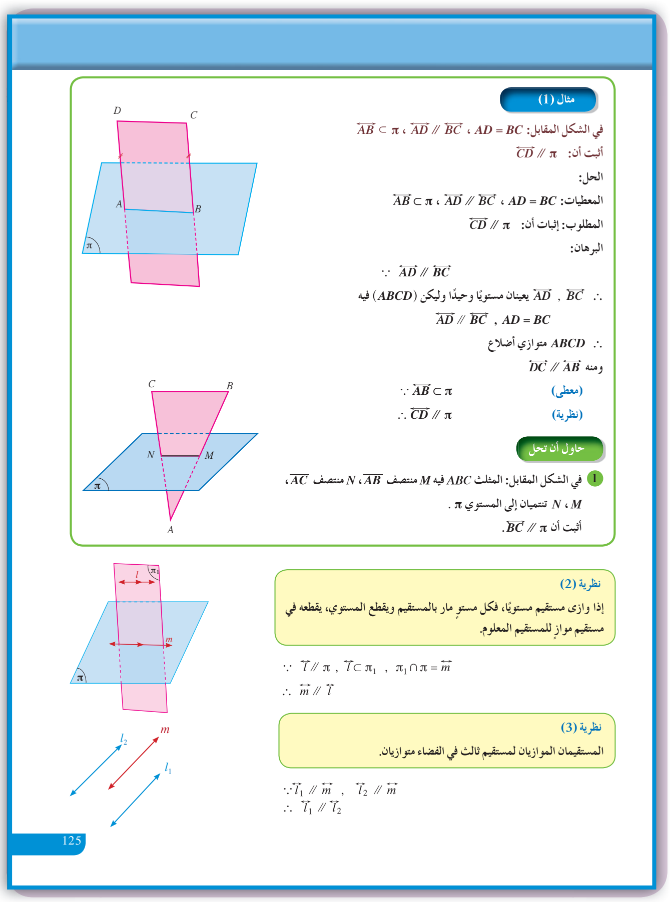
$\therefore$ $\overleftrightarrow{l}$ يقطع π في نقطة تنتمي إلى خط تقاطع π_1 ، π.

أي أنها نقطة تنتمي إلى $\overleftrightarrow{m}$

وهذا يخالف الفرض لأن $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{l}$ لا يمكن أن يقطع المستوي π، وبالتالي $\overleftrightarrow{l} \parallel \pi$.

124



مثال (1)

في الشكل المقابل: $AD = BC$ ، $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ ، $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$

الحل:

المعطيات: $AD = BC$ ، $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ ، $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi$

المطلوب: إثبات أن: $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$

البرهان:

$\because \overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{BC}$ ، $\overleftrightarrow{AD}$ يعينان مستويًا وحيدًا وليكن $(ABCD)$ فيه

$AD = BC$ ، $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$

$\therefore$ $ABCD$ متوازي أضلاع

ومنه $\overleftrightarrow{DC} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

$\because \overleftrightarrow{AB} \subset \pi$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$ (نظرية)

حاول أن تحل

1 في الشكل المقابل: المثلث ABC فيه M منتصف $\overline{AB}$، N منتصف $\overline{AC}$،

M ، N تنتميان إلى المستوي π.

أثبت أن $\overleftrightarrow{BC} \parallel \pi$.

نظرية (2)

إذا وازى مستقيم مستويًا، فكل مستوٍ مار بالمستقيم ويقطع المستوي، يقطعه في مستقيم موازٍ للمستقيم المعلوم.

$\because \overleftrightarrow{l} \parallel \pi$ ، $\overleftrightarrow{l} \subset \pi_1$ ، $\pi_1 \cap \pi = \overleftrightarrow{m}$

$\therefore \overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{l}$

نظرية (3)

المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث في الفضاء متوازيان.

$\because \overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{m}$ ، $\overleftrightarrow{l_2} \parallel \overleftrightarrow{m}$

$\therefore \overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{l_2}$

125

5 التدريس

من المفيد جدًّا أن يعرض المعلم أمام الطلاب نماذج لمجسمات مثل صناديق على شكل مكعب أو شبه مكعب أو هرم ثلاثي القاعدة أو رباعي القاعدة ليروا بشكل جلي وواضح أوضاع المستقيمات في التقاطع والتوازي والتخالف، كما أنهم سوف يتحققون جيّدًا من توازي مستقيم مع مستوٍ وتقاطع مستقيم مع مستوٍ في نقطة واحدة وانتماء مستقيم إلى مستوٍ في حال انتماء نقطتين من المستقيم إلى المستوي. يمكنهم أيضًا مشاهدة مستويين متقاطعين والتقاطع بينهما وهو المستقيم وأيضًا التأكد من توازي المستويين وذلك على النماذج أو في غرفة الصف بين الجدران أو سقف الغرفة وأرضها.

ساعد الطلاب على استكشاف نظرية (1) والتي تتحدث عن توازي مستقيم مع مستوٍ.

اطلب إليهم معاينة تقاطع المستويات في الغرفة، مثلًا السقف والأرض مع كل جدار سوف يتأكدون من توازي مستقيمات التقاطع.

ويمكنهم التأكد من النماذج التي أشرنا إليها مثل المكعب أو شبه المكعب من النظرية (2) والنظرية (3) والنتيجة المرفقة بهاتين النظريتين.

في المثال (1)

هذا المثال هو تطبيق لنظرية (1). ذكّر الطلاب أنه في الشكل الرباعي إذا توازى مستقيمان متقابلان وتطابقا فإنّ هذا الشكل هو متوازي أضلاع، وبالتالي $ABCD$ متوازي أضلاع.

في المثال (2)

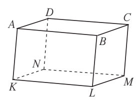
هذا المثال هو تطبيق لنظرية (2): توازي مستقيم ومستوٍ، وللنظرية (3): المستقيمات المتوازية.

تمرَّن 10−2

المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء

Parallel Lines and Planes in Space

المجموعة A تمارين مقالية



(1) $ABCDKLMN$ شبه مكعب.

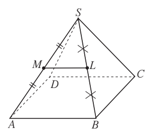
(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{AK} \parallel \overleftrightarrow{CM}$

(b) أثبت أن النقاط A, K, M, C تنتمي إلى مستو واحد.

(c) أثبت أن: $\overleftrightarrow{AD}$ يوازي المستوي MKN

(2) **(a)** متى يكون المستقيم l موازيًا للمستوي π؟ وضح ذلك بالرسم.

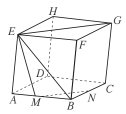
(b) ارسم مستقيمًا آخرًا يوازي المستوي π



(3) $SABCD$ هرم قاعدته $ABCD$ مربعة الشكل.

M منتصف $\overline{SA}$، L منتصف $\overline{SB}$

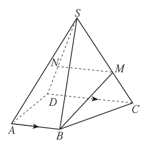
أثبت أن: $\overleftrightarrow{ML} \parallel (ABCD)$



(4) $ABCDEFGH$ مكعب.

$M \in \overline{AB}$، المستوي GEM يقطع $\overline{BC}$ في النقطة N

أثبت أن: $\overleftrightarrow{GE} \parallel \overleftrightarrow{MN}$



(5) $SABCD$ هرم قاعدته شبه المنحرف $ABCD$ حيث إن $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$

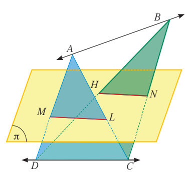
$M \in \overline{SC}$، المستوي ABM يقطع $\overleftrightarrow{SD}$ في N

(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{AB}$ يوازي المستوي SDC

(b) أثبت أن: $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

51

مثال (2)



في الشكل المقابل: إذا كان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متخالفان، $\pi \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

$\overleftrightarrow{AD}$ تقطع π في M، $\overleftrightarrow{AC}$ تقطع π في L .

$\overleftrightarrow{BD}$ تقطع π في H، $\overleftrightarrow{BC}$ تقطع π في N .

أثبت أن: $\overleftrightarrow{LM} \parallel \overleftrightarrow{NH}$

الحل:

المعطيات: $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$

$\overleftrightarrow{AD} \cap \pi = \{M\}$

$\overleftrightarrow{AC} \cap \pi = \{L\}$

$\overleftrightarrow{BD} \cap \pi = \{H\}$

$\overleftrightarrow{BC} \cap \pi = \{N\}$

المطلوب: إثبات $\overleftrightarrow{LM} \parallel \overleftrightarrow{NH}$

البرهان:

$\because \overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{AC} = \{A\}$ (معطى)

$\therefore$ المستقيمان يعينان مستويًا وحيدًا وهو (ADC)

$\because \overleftrightarrow{AD} \cap \pi = \{M\}\ ,\ \overleftrightarrow{AC} \cap \pi = \{L\}$ (معطى)

$\therefore (ADC) \cap \pi = \overleftrightarrow{ML}$ (1)

$\because \overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$ (2) (معطى)

$\overleftrightarrow{CD} \subset (ACD)$ (3)

من (1), (2), (3) نجد أن:

$\overleftrightarrow{LM} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (4) نظرية

$\because \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{BD} = \{B\}$ (معطى)

$\therefore$ المستقيمان يعينان مستويًا وحيدًا وهو (BCD)

$\because \overleftrightarrow{BD} \cap \pi = \{H\}\ ,\ \overleftrightarrow{BC} \cap \pi = \{N\}$ (معطى)

$\because (BCD) \cap \pi = \overleftrightarrow{HN}$ (5)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$ (6)

$\overleftrightarrow{CD} \subset (BCD)$ (7)

من (7), (6), (5) نجد أن:

$\overleftrightarrow{HN} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (8) نظرية

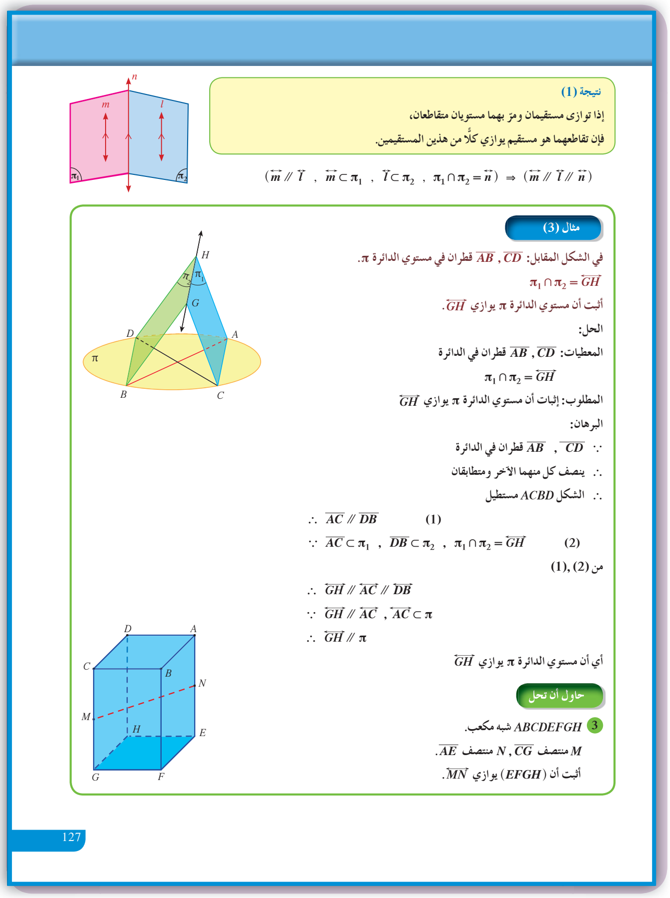
من (8), (4) نستنتج أن:

$\overleftrightarrow{ML} \parallel \overleftrightarrow{HN}$ نظرية

حاول أن تحل

2 في المثال (2)، إذا كان $\pi \parallel \overleftrightarrow{AB}$ فأثبت أن $LMHN$ متوازي أضلاع.

126



نتيجة (1)

إذا توازى مستقيمان ومرّ بهما مستويان متقاطعان،
فإن تقاطعهما هو مستقيم يوازي كلًّا من هذين المستقيمين.

$(\overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{l}\ ,\ \overleftrightarrow{m} \subset \pi_1\ ,\ \overleftrightarrow{l} \subset \pi_2\ ,\ \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{n}) \Rightarrow (\overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{n})$

مثال (3)

في الشكل المقابل: $\overline{AB}\ ,\overline{CD}$ قطران في مستوي الدائرة π.

$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$

أثبت أن مستوي الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$.

الحل:

المعطيات: $\overline{AB}\ ,\overline{CD}$ قطران في الدائرة

$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$

المطلوب: إثبات أن مستوي الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$

البرهان:

$\because$ $\overline{AB}\ ,\ \overline{CD}$ قطران في الدائرة

$\therefore$ ينصف كل منهما الآخر ومتطابقان

$\therefore$ الشكل $ACBD$ مستطيل

$\therefore \overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{DB}$ (1)

$\because \overleftrightarrow{AC} \subset \pi_1\ ,\ \overleftrightarrow{DB} \subset \pi_2\ ,\ \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$ (2)

من (1), (2)

$\therefore \overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{DB}$

$\because \overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{AC}\ ,\overleftrightarrow{AC} \subset \pi$

$\therefore \overleftrightarrow{GH} \parallel \pi$

أي أن مستوي الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$

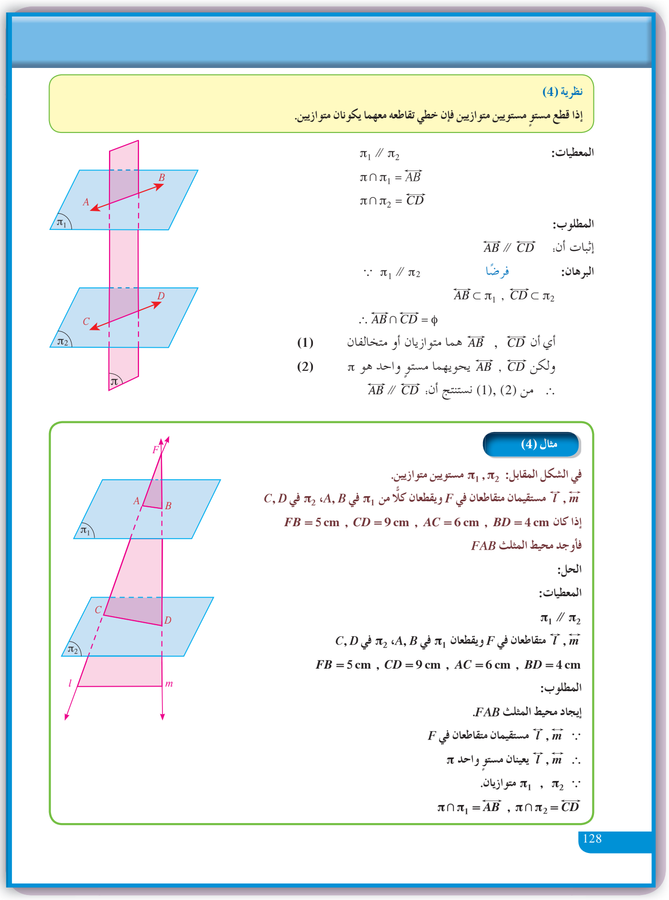
حاول أن تحل

3 $ABCDEFGH$ شبه مكعب.

M منتصف $\overline{CG}$, N منتصف $\overline{AE}$.

أثبت أن $(EFGH)$ يوازي $\overleftrightarrow{MN}$.

127



نظرية (4)

إذا قطع مستوٍ مستويين متوازيين فإن خطي تقاطعه معهما يكونان متوازيين.

المعطيات: $\pi_1 \parallel \pi_2$

$\pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{AB}$

$\pi \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{CD}$

المطلوب:

إثبات أن: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

البرهان: $\because \pi_1 \parallel \pi_2$ فرضًا

$\overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1\ ,\ \overleftrightarrow{CD} \subset \pi_2$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \phi$

أي أن $\overleftrightarrow{CD}\ ,\ \overleftrightarrow{AB}$ هما متوازيان أو متخالفان (1)

ولكن $\overleftrightarrow{CD}\ ,\ \overleftrightarrow{AB}$ يحويهما مستوٍ واحد هو π (2)

$\therefore$ من (1), (2) نستنتج أن: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

مثال (4)

في الشكل المقابل: $\pi_1\ ,\pi_2$ مستويين متوازيين.

$\overleftrightarrow{m}\ ,\overleftrightarrow{l}$ مستقيمان متقاطعان في F ويقطعان كلًّا من π_1 في A, B، π_2 في C, D

إذا كان $BD = 4\text{ cm}\ ,\ AC = 6\text{ cm}\ ,\ CD = 9\text{ cm}\ ,\ FB = 5\text{ cm}$

فأوجد محيط المثلث FAB

الحل:

المعطيات:

$\pi_1 \parallel \pi_2$

$\overleftrightarrow{m}\ ,\overleftrightarrow{l}$ متقاطعان في F ويقطعان π_1 في A, B، π_2 في C, D

$BD = 4\text{ cm}\ ,\ AC = 6\text{ cm}\ ,\ CD = 9\text{ cm}\ ,\ FB = 5\text{ cm}$

المطلوب:

إيجاد محيط المثلث FAB.

$\because$ $\overleftrightarrow{m}\ ,\overleftrightarrow{l}$ مستقيمان متقاطعان في F

$\therefore$ $\overleftrightarrow{m}\ ,\overleftrightarrow{l}$ يعينان مستوٍ واحد π

$\because$ $\pi_2\ ,\ \pi_1$ متوازيان.

$\pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{AB}\ ,\ \pi \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{CD}$

128

في المثال (3)

هذا المثال هو تطبيق مباشر لنتيجة (1)، فهو يساعد على تثبيت هذه النتيجة عند الطالب مما يساعده لاحقًا على حل مسائل بتطبيقها. ذكّر الطلاب أنه يكفي إثبات توازي المستقيم مع مستقيم يقع في المستوي لكي يصبح هذا المستقيم موازيًا للمستوي.

في المثال (4)

يساعد هذا المثال على تركيز نظرية (4)، ويذكر الطالب بنظريات طاليس التي سيستخدمها في حل مسائل في الهندسة الفراغية.

6 الربط

يمكن لأي طالب أن يعاين كل ما ورد في هذا الدرس على نموذج مجسم في المنزل، مثل صندوق كرتون على شكل مكعب أو على شكل شبه مكعب.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في تحديد تقاطع المستويات خاصة إذا كانت تحتوي على مستقيمات متوازية.

اطلب إليهم إعادة رسم الشكل ثلاثي الأبعاد واستخدام الألوان للمساعدة على رؤية المستويات وتحديد المستقيمات.

8 التقييم

تابع مع الطلاب كيفية تعاملهم مع فقرات «حاول أن تحل» وملاحظاتهم وإجاباتهم في غرفة الصف عند طرح الأسئلة حول النماذج والعمل عليها. تأكد من صحة إجاباتهم.

اختبار سريع

❶ اسأل الطلاب الإجابة عما يلي:

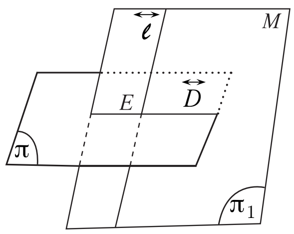
(a) متى يكون مستقيم موازيًا لمستوٍ؟

إذا لم يكن هناك أي نقطة تقاطع بينهما أو يقع بكامله في المستوى.

(b) متى يكون مستويان متوازيين؟

إذا لم توجد نقاط مشتركة بينهما أو منطبقان.

❷ π مستوٍ في الفضاء، ℓ مستقيم يقطع π في نقطة E. M نقطة في الفضاء لا تنتمي إلى π ولا تنتمي إلى $\overleftrightarrow{\ell}$. ارسم شكلًا يبيّن تقاطع المستوي π مع المستوي المحدد بالمستقيم ℓ والنقطة M.



M مع المستقيم ℓ تحدد مستويًا π_1 حيث E هي نقطة مشتركة بين π_1، π لذا يوجد مستقيم D يمر بالنقطة E حيث $\pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{D}$

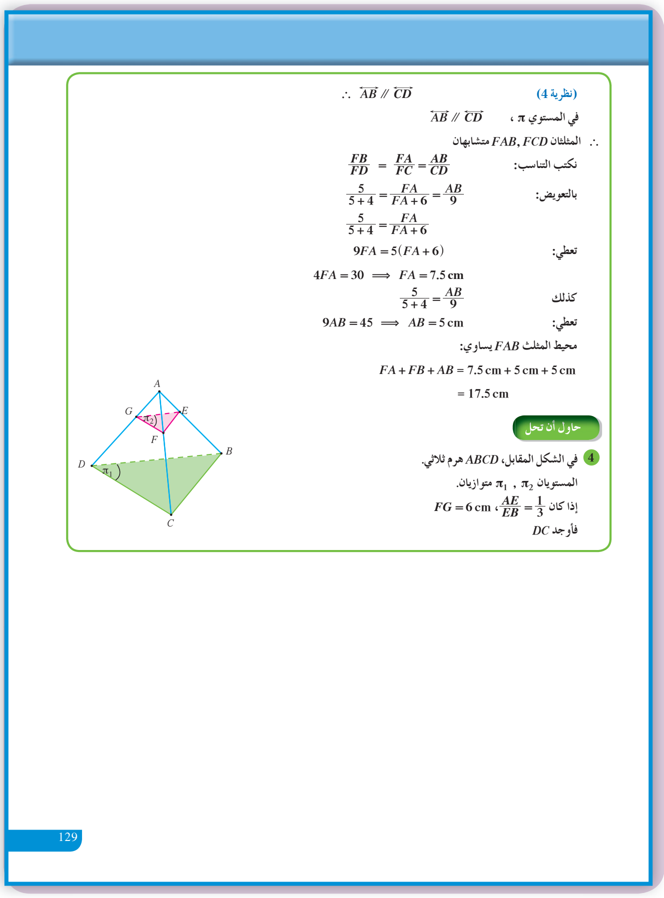
❾ إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

1 **(a)** $\overleftrightarrow{AB} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{DH} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{CG}$

(b) $\overleftrightarrow{FG}, \overleftrightarrow{CG}$, $\overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{CD}$

(c) $\overleftrightarrow{EF}$



(نظرية 4) $\therefore\ \overleftrightarrow{AB} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{CD}$

في المستوي π ، $\overleftrightarrow{AB} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{CD}$

∴ المثلثان FAB, FCD متشابهان

نكتب التناسب: $\frac{FB}{FD} = \frac{FA}{FC} = \frac{AB}{CD}$

بالتعويض: $\frac{5}{5+4} = \frac{FA}{FA+6} = \frac{AB}{9}$

$\frac{5}{5+4} = \frac{FA}{FA+6}$

تعطي: $9FA = 5(FA+6)$

$4FA = 30 \implies FA = 7.5\text{ cm}$

كذلك $\frac{5}{5+4} = \frac{AB}{9}$

تعطي: $9AB = 45 \implies AB = 5\text{ cm}$

محيط المثلث FAB يساوي:

$FA + FB + AB = 7.5\text{ cm} + 5\text{ cm} + 5\text{ cm}$

$= 17.5\text{ cm}$

حاول أن تحل

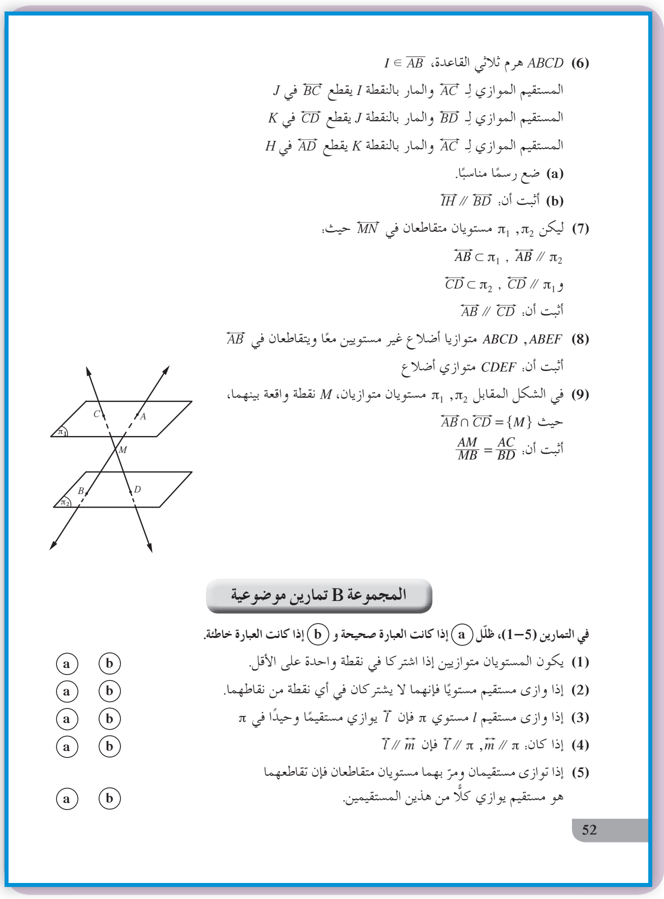
4 في الشكل المقابل، $ABCD$ هرم ثلاثي.

المستويان π_2 , π_1 متوازيان.

إذا كان $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$ ، $FG = 6\text{ cm}$

فأوجد DC

129



(6) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة، $I \in \overline{AB}$

المستقيم الموازي لِـ $\overleftrightarrow{AC}$ والمار بالنقطة I يقطع $\overleftrightarrow{BC}$ في J

المستقيم الموازي لِـ $\overleftrightarrow{BD}$ والمار بالنقطة J يقطع $\overleftrightarrow{CD}$ في K

المستقيم الموازي لِـ $\overleftrightarrow{AC}$ والمار بالنقطة K يقطع $\overleftrightarrow{AD}$ في H

(a) ضع رسمًا مناسبًا.

(b) أثبت أن: $\overleftrightarrow{IH} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{BD}$

(7) ليكن π_1, π_2 مستويان متقاطعان في $\overleftrightarrow{MN}$ حيث:

$\overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1$, $\overleftrightarrow{AB} \mathbin{/\!/} \pi_2$

و $\overleftrightarrow{CD} \subset \pi_2$, $\overleftrightarrow{CD} \mathbin{/\!/} \pi_1$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{AB} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{CD}$

(8) $ABCD$, $ABEF$ متوازيا أضلاع غير مستويين معًا ويتقاطعان في $\overleftrightarrow{AB}$

أثبت أن: $CDEF$ متوازي أضلاع

(9) في الشكل المقابل π_1, π_2 مستويان متوازيان، M نقطة واقعة بينهما،

حيث $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{M\}$

أثبت أن: $\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) يكون المستويان متوازيين إذا اشتركا في نقطة واحدة على الأقل. (a) (b)

(2) إذا وازى مستقيم مستويًا فإنهما لا يشتركان في أي نقطة من نقاطهما. (a) (b)

(3) إذا وازى مستقيم l مستوي π فإن $\overleftrightarrow{l}$ يوازي مستقيمًا وحيدًا في π (a) (b)

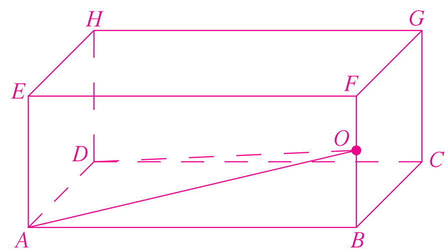
(4) إذا كان: $\overleftrightarrow{m} \mathbin{/\!/} \pi$, $\overleftrightarrow{l} \mathbin{/\!/} \pi$ فإن $\overleftrightarrow{l} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{m}$ (a) (b)

(5) إذا توازى مستقيمان ومرّ بهما مستويان متقاطعان فإن تقاطعهما هو مستقيم يوازي كلًّا من هذين المستقيمين. (a) (b)

52

2 لا، لأنه إذا قطعت $\overleftrightarrow{EF}$ المستوى $ABCD$ فينطبق وجها شبه المكعب.

3



نعم. $\overleftrightarrow{AO}$ تقع في $(ABFE)$ وهي ليست متوازية مع $\overleftrightarrow{EF}$ لذا $\overleftrightarrow{AO}$, $\overleftrightarrow{EF}$ يتقاطعان وبالتالي $\overleftrightarrow{AO}$ يقطع $EFGH$.

4 **(a)** بما أن O نقطة مشتركة بين (AOD)، $(BCGF)$ لذا يوجد تقاطع بين هذين المستويين وهو مستقيم يمر بالنقطة O ويقطع $\overleftrightarrow{GC}$ بنقطة ولتكن S بحيث $\overleftrightarrow{SO} \parallel \overleftrightarrow{AD}$

(b) يتقاطعان عند النقطة D

حاول أن تحل

1 $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$

(نظرية القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث وطولها يساوي نصف طوله)

$\overline{MN} \subset \pi \quad \therefore \quad \overline{BC} \parallel \pi$

2 $\overleftrightarrow{AB} \parallel \pi \quad \therefore \quad \overleftrightarrow{MH} \parallel \overleftrightarrow{AB} \; , \; \overleftrightarrow{LN} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

أي $\overleftrightarrow{MH} \parallel \overleftrightarrow{LN}$ وبما أن $\overleftrightarrow{ML} \parallel \overleftrightarrow{HN}$

يصبح $LMHN$ متوازي أضلاع.

3 في متوازي الأضلاع $AEGC$

$\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AC} \parallel \overline{GE}$

$\because \quad \overline{GE} \subset (EFGH)$

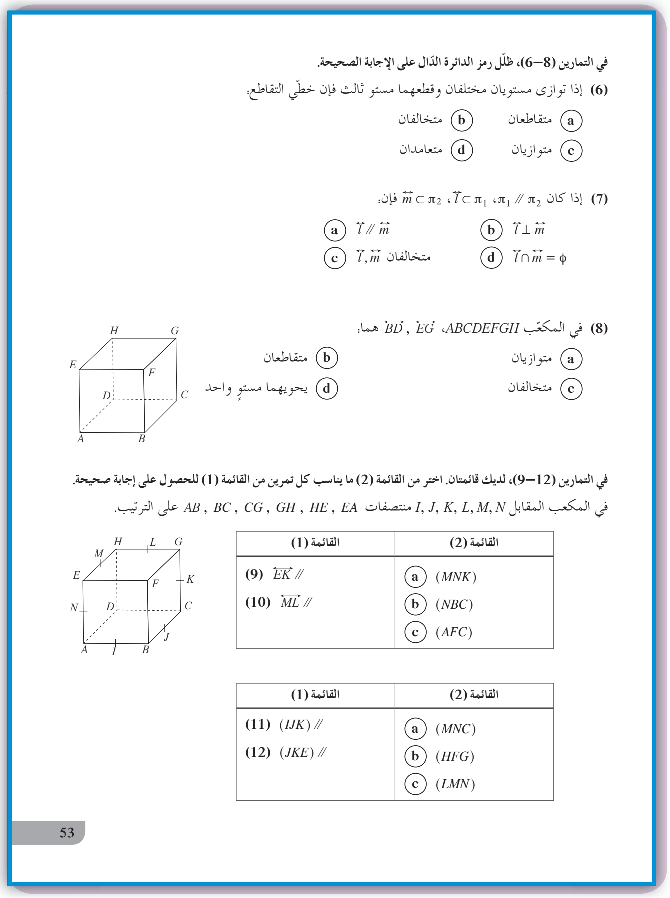
$\therefore \quad \overleftrightarrow{MN} \parallel (EFGH)$

4 $\dfrac{AF}{AC} = \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{1}{4}$

$\therefore \quad \dfrac{GF}{DC} = \dfrac{1}{4}$

$\dfrac{6}{DC} = \dfrac{1}{4}$

$DC = 24 \text{ cm}$



في التمارين (8–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا توازى مستويان مختلفان وقطعهما مستوٍ ثالث فإن خطّي التقاطع:

(a) متقاطعان (b) متخالفان

(c) متوازيان (d) متعامدان

(7) إذا كان $\pi_1 \parallel \pi_2$، $\overleftrightarrow{l} \subset \pi_1$، $\overleftrightarrow{m} \subset \pi_2$ فإن:

(a) $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ (b) $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{m}$

(c) $\overleftrightarrow{l}, \overleftrightarrow{m}$ متخالفان (d) $\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \phi$

(8) في المكعّب $ABCDEFGH$، $\overleftrightarrow{EG}$, $\overleftrightarrow{BD}$ هما:

(a) متوازيان (b) متقاطعان

(c) متخالفان (d) يحويهما مستوٍ واحد

في التمارين (12–9)، لديك قائمتان. اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين من القائمة (1) للحصول على إجابة صحيحة.

في المكعب المقابل I, J, K, L, M, N منتصفات $\overline{EA}$, $\overline{HE}$, $\overline{GH}$, $\overline{CG}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ على الترتيب.

القائمة (1)	القائمة (2)
(9) $\overleftrightarrow{EK} \parallel$	(a) (MNK)
(10) $\overleftrightarrow{ML} \parallel$	(b) (NBC)
	(c) (AFC)

القائمة (1)	القائمة (2)
(11) $(IJK) \parallel$	(a) (MNC)
(12) $(JKE) \parallel$	(b) (HFG)
	(c) (LMN)

53

3–10: تعامد مستقيم مع مستوٍ

1 الأهداف

- يوجد قياس الزاوية بين مستقيمين متخالفين.
- يتعرف تعامد مستقيم مع مستوٍ.
- يطبق نظريات التعامد في حلّ المسائل.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

مستقيم عمودي – مستقيمان متخالفان.

3 الأدوات والوسائل

نماذج لمجسمات – علبة من كرتون – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

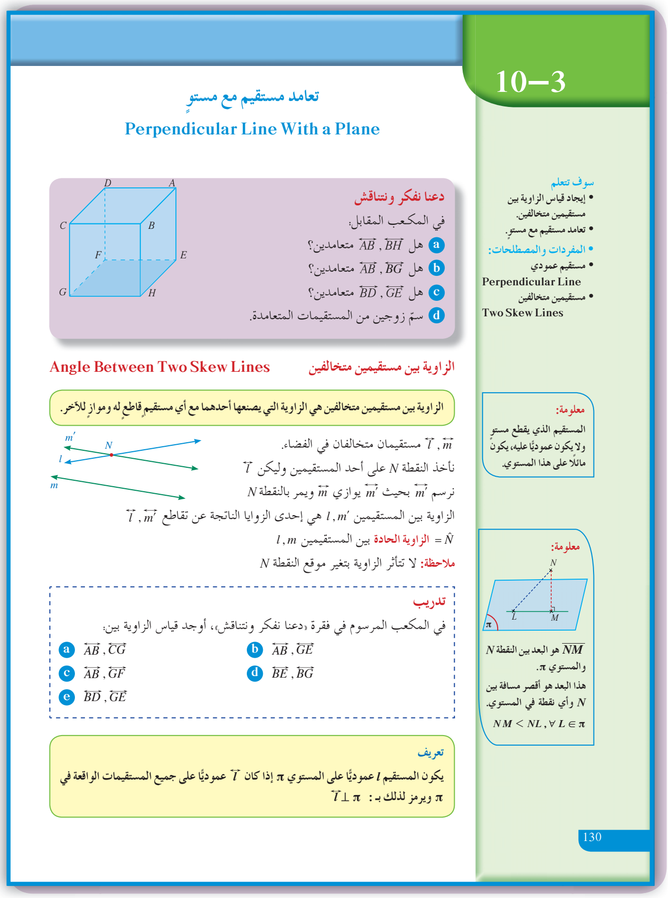
استخدم علبة من كرتون أو من البلاستيك المقوى.

اطلب إلى الطلاب الإشارة إلى حروف متعامدة وبالتالي أزواج من المستقيمات المتعامدة.

أسألهم: هل يمكن لمستقيمين متخالفين أن يكونا متعامدين؟

دعهم يدعمون إجاباتهم بتبيان ذلك على علبة الكرتون.

اطلب إلى أحد الطلاب أن يأخذ مثلث قائم الزاوية من أدواته الهندسية ويحاول قياس الزوايا التي يصنعها حرف رأسي في العلبة مع قاعدة العلبة وذلك بتحريك الزاوية القائمة بحيث يبقى أحد ضلعيها متطابقًا مع حرف العلبة.



10–3

تعامد مستقيم مع مستوٍ

Perpendicular Line With a Plane

سوف تتعلم
- إيجاد قياس الزاوية بين مستقيمين متخالفين.
- تعامد مستقيم مع مستوٍ.

- المفردات والمصطلحات:
- مستقيم عمودي Perpendicular Line
- مستقيمين متخالفين Two Skew Lines

دعنا نفكر ونتناقش

في المكعب المقابل:

a هل $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BH}$ متعامدين؟

b هل $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BG}$ متعامدين؟

c هل $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{GE}$ متعامدين؟

d سمّ زوجين من المستقيمات المتعامدة.

الزاوية بين مستقيمين متخالفين Angle Between Two Skew Lines

الزاوية بين مستقيمين متخالفين هي الزاوية التي يصنعها أحدهما مع أي مستقيمٍ قاطعٍ له وموازٍ للآخر.

$\overleftrightarrow{l}$, $\overleftrightarrow{m}$ مستقيمان متخالفان في الفضاء.

نأخذ النقطة N على أحد المستقيمين وليكن $\overleftrightarrow{l}$

نرسم $\overleftrightarrow{m'}$ بحيث $\overleftrightarrow{m'}$ يوازي $\overleftrightarrow{m}$ ويمر بالنقطة N

الزاوية بين المستقيمين l, m' هي إحدى الزوايا الناتجة عن تقاطع $\overleftrightarrow{l}$, $\overleftrightarrow{m'}$

$\hat{N}$ = الزاوية الحادة بين المستقيمين l, m

ملاحظة: لا تتأثر الزاوية بتغير موقع النقطة N

معلومة: المستقيم الذي يقطع مستوٍ ولا يكون عموديًّا عليه، يكون مائلًا على هذا المستوي.

تدريب

في المكعب المرسوم في فقرة «دعنا نفكر ونتناقش»، أوجد قياس الزاوية بين:

a $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CG}$

b $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{GE}$

c $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{GF}$

d $\overleftrightarrow{BE}$, $\overleftrightarrow{BG}$

e $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{GE}$

معلومة:

$\overline{NM}$ هو البعد بين النقطة N والمستوي π.

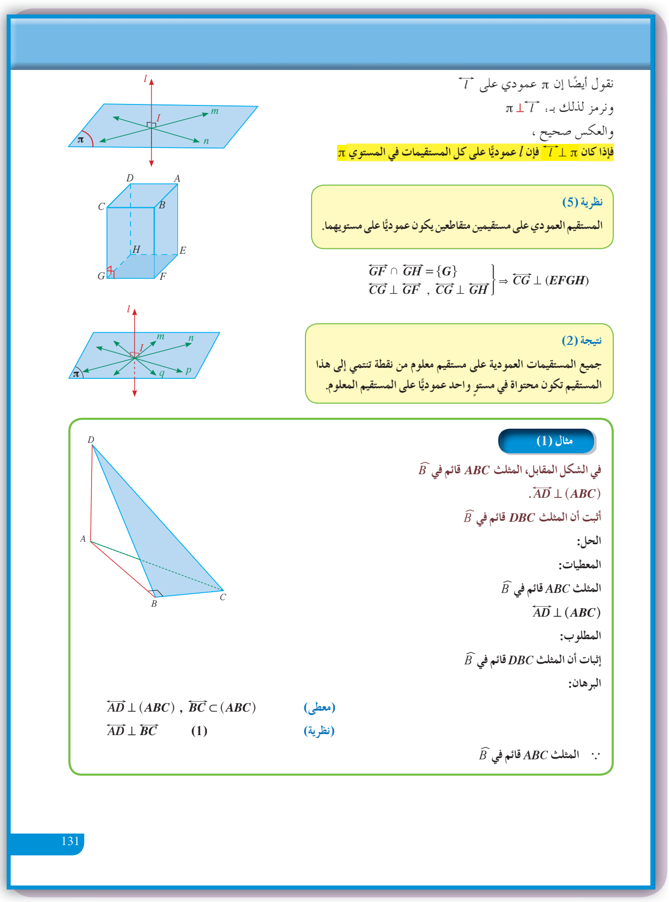
هذا البعد هو أقصر مسافة بين N وأي نقطة في المستوي.

$NM < NL, \forall L \in \pi$

تعريف

يكون المستقيم l عموديًّا على المستوي π إذا كان $\overleftrightarrow{l}$ عموديًّا على جميع المستقيمات الواقعة في π ويرمز لذلك بـ: $\overleftrightarrow{l} \perp \pi$

130



نقول أيضًا إن π عمودي على $\overleftrightarrow{l}$

ونرمز لذلك بـ: $\pi \perp \overleftrightarrow{l}$

والعكس صحيح ،

فإذا كان $\pi \perp \overleftrightarrow{l}$ فإن l عموديًّا على كل المستقيمات في المستوي π

نظرية (5)

المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين يكون عموديًّا على مستويهما.

$$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{GF} \cap \overleftrightarrow{GH} = \{G\} \\ \overleftrightarrow{CG} \perp \overleftrightarrow{GF} \ , \ \overleftrightarrow{CG} \perp \overleftrightarrow{GH}\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{CG} \perp (EFGH)$$

نتيجة (2)

جميع المستقيمات العمودية على مستقيم معلوم من نقطة تنتمي إلى هذا المستقيم تكون محتواة في مستوٍ واحد عموديًّا على المستقيم المعلوم.

مثال (1)

في الشكل المقابل، المثلث ABC قائم في $\widehat{B}$

$\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$.

أثبت أن المثلث DBC قائم في $\widehat{B}$

الحل:

المعطيات:

المثلث ABC قائم في $\widehat{B}$

$\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$

المطلوب:

إثبات أن المثلث DBC قائم في $\widehat{B}$

البرهان:

$\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$, $\overleftrightarrow{BC} \subset (ABC)$ (معطى)

$\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}$ (1) (نظرية)

$\because$ المثلث ABC قائم في $\widehat{B}$

131

5 التدريس

استفد من التمهيد وخاصة قياس الزوايا في العلبة الكرتونية لطرح تعريف تعامد مستقيم مع مستوٍ. حاول مع الطلاب إعطاء أمثلة مناسبة من غرفة الصف أو من أي شكل مناسب في الغرفة.

يمكن مناقشة الفكرة إذا وضعنا علمًا في ملعب المدرسة فإن العلم يكون متعامدًا مع أرض الملعب.

شدّد على النظريات في هذا الدرس واطلب إلى الطلاب كتابتها مرفقين كل نظرية برسم مناسب.

في المثال (1)

أشر في هذا المثال إلى أن الشكل يمثّل هرمًا مثلث القاعدة، أوجهه الأربعة مثلثات قائمة. ناقش مع الطلاب صحة هذه النتيجة وكيفية الحصول عليها.

في المثال (2)

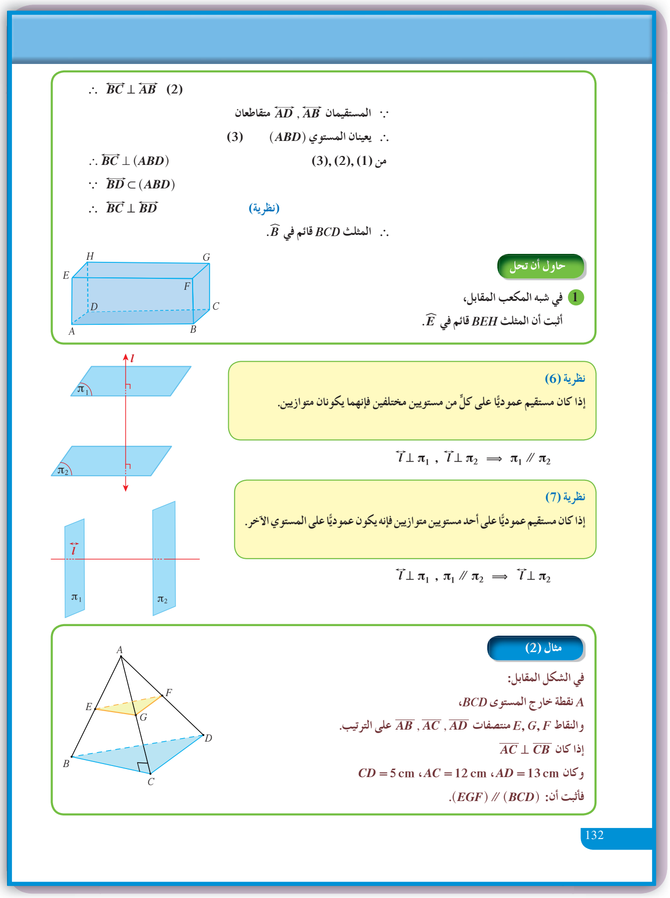
يتم استخدام النظريتين (6), (3) في حل المسائل.

في المثال (3)

هذا المثال هو تطبيق مباشر للنظرية (7) واستخدام لنظرية أقليدس كما ويسمح بتركيز هذه النظرية عند الطالب مما يسمح له لاحقًا باستخدامها في حلّ المسائل. ويمكن الإشارة إلى حرف جانبي من مجسم على شكل مكعب أو شبه مكعب.

في المثال (4)

يتم استخدام معكوس نظرية طاليس وتعامد مستقيم ومستوٍ في حلّ مسائل.



$\therefore \overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (2)

∵ المستقيمان $\overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{AB}$ متقاطعان

∴ يعينان المستوى (ABD) (3)

من (1), (2), (3) $\therefore \overleftrightarrow{BC} \perp (ABD)$

$\because \overleftrightarrow{BD} \subset (ABD)$

$\therefore \overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{BD}$ (نظرية)

∴ المثلث BCD قائم في B.

حاول أن تحل

1 في شبه المكعب المقابل، أثبت أن المثلث BEH قائم في E.

نظرية (6)

إذا كان مستقيم عموديًا على كلٍّ من مستويين مختلفين فإنهما يكونان متوازيين.

$\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1 \,,\, \overleftrightarrow{l} \perp \pi_2 \Longrightarrow \pi_1 // \pi_2$

نظرية (7)

إذا كان مستقيم عموديًا على أحد مستويين متوازيين فإنه يكون عموديًا على المستوى الآخر.

$\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1 \,,\, \pi_1 // \pi_2 \Longrightarrow \overleftrightarrow{l} \perp \pi_2$

مثال (2)

في الشكل المقابل:

A نقطة خارج المستوى BCD،

والنقاط E, G, F منتصفات $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ على الترتيب.

إذا كان $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{CB}$

وكان $AD = 13\text{ cm}$، $AC = 12\text{ cm}$، $CD = 5\text{ cm}$

فأثبت أن: $(EGF) // (BCD)$.

132

الحل:

المعطيات:

E منتصف $\overline{AB}$، G منتصف $\overline{AC}$، F منتصف $\overline{AD}$

$AD = 13\text{ cm}\,,\ AC = 12\text{ cm}\,,\ CD = 5\text{ cm}$

المطلوب:

إثبات أن: $(EGF) // (BCD)$

البرهان:

في $\Delta\, ACD$:

$(AC)^2 + (CD)^2 = (12)^2 + (5)^2 = 169$ (1)

$(AD)^2 = (13)^2 = 169$ (2)

من (1), (2) نجد أن $\Delta\, ACD$ قائم الزاوية في C.

$\therefore \overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{CD}$

ولكن $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{CB}$ (معطى)

وحيث إن $\overleftrightarrow{CB}\,,\ \overleftrightarrow{CD}$ متقاطعان

$\therefore \overleftrightarrow{AC} \perp (BCD)$ (نظرية 3)

في $\Delta\, ABC$

∵ E منتصف $\overline{AB}$، G منتصف $\overline{AC}$

$\therefore \overleftrightarrow{EG} // \overleftrightarrow{CB}$

ولكن $m(B\hat{C}A) = 90^\circ$

$\therefore m(A\hat{G}E) = 90^\circ \Rightarrow \overleftrightarrow{AG} \perp \overleftrightarrow{EG}$

وبالمثل $\overleftrightarrow{AG} \perp \overleftrightarrow{GF}$

$\therefore \overleftrightarrow{AG} \perp (EGF)$

أي أن: $\overleftrightarrow{AC} \perp (EGF)$ (4)

من (3), (4) ينتج أن: $\therefore (EGF) // (BCD)$ نظرية (6)

حاول أن تحل

2 في الشكل المقابل:

$ABEF, ABCD$ مستطيلان

أثبت أن: $(AFD) // (BEC)$

تذكر:

• إذا كان مجموع مربعي طولي ضلعين في مثلث يساوي مربع طول الضلع الثالث فإن هذا المثلث يكون قائم الزاوية.

• القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث.

معلومة:

مركز المربع هو نقطة تقاطع قطرية.

مركز المثلث المتطابق الأضلاع هي نقطة تلاقي محاور أضلاعه.

تذكر:

إذا كان ΔABC قائم الزاوية في A و H المسقط العمودي لـ A على $\overleftrightarrow{BC}$ فإن:

$(AB)^2 = BH \times BC$

$(AC)^2 = CH \times CB$

$(AH)^2 = BH \times CH$

133

6 أخطاء متوقعة ومعالجتها

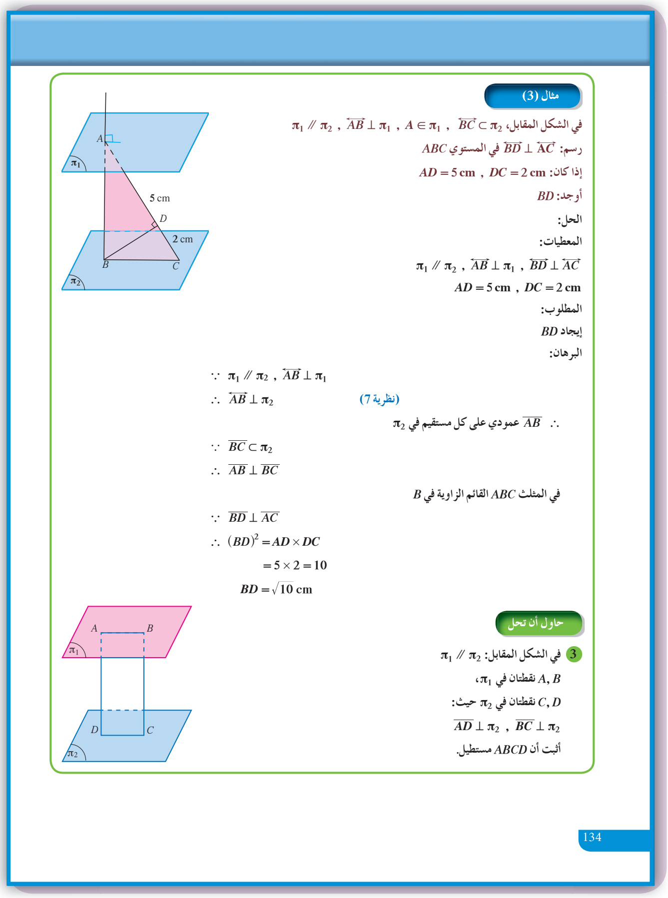
قد يخطئ الطلاب في تطبيق تعريف التعامد ويكتفون بأن يكون مستقيم عموديًّا على مستقيم واحد في مستوٍ لاستنتاج أن المستقيم عمودي على المستوي.

شدّد على ضرورة أن يكون المستقيم متعامدًا على الأقل مع مستقيمين متقاطعين في المستوي.

يمكن استخدام المثلث القائم من أدواتك الهندسية لتبيّن للطلاب كيف يكون مستقيم متعامدًا مع مستقيم في مستوٍ دون أن يكون متعامدًا مع المستوي.

7 التقييم

راقب الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من فهمهم لما ورد في هذا الدرس.



مثال (3)

في الشكل المقابل، $\pi_1 \parallel \pi_2$ ، $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$ ، $A \in \pi_1$ ، $\overleftrightarrow{BC} \subset \pi_2$

رسم: $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$ في المستوي ABC

إذا كان: $AD = 5\text{ cm}$ ، $DC = 2\text{ cm}$

أوجد: BD

الحل:

المعطيات:

$\pi_1 \parallel \pi_2$ ، $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$ ، $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$

$AD = 5\text{ cm}$ ، $DC = 2\text{ cm}$

المطلوب:

إيجاد BD

البرهان:

$\because\ \pi_1 \parallel \pi_2\ ,\ \overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$

$\therefore\ \overleftrightarrow{AB} \perp \pi_2$ (نظرية 7)

$\therefore$ $\overline{AB}$ عمودي على كل مستقيم في π_2

$\because\ \overline{BC} \subset \pi_2$

$\therefore\ \overline{AB} \perp \overline{BC}$

في المثلث ABC القائم الزاوية في B

$\because\ \overline{BD} \perp \overline{AC}$

$\therefore\ (BD)^2 = AD \times DC$

$= 5 \times 2 = 10$

$BD = \sqrt{10}\text{ cm}$

حاول أن تحل

3 في الشكل المقابل: $\pi_1 \parallel \pi_2$

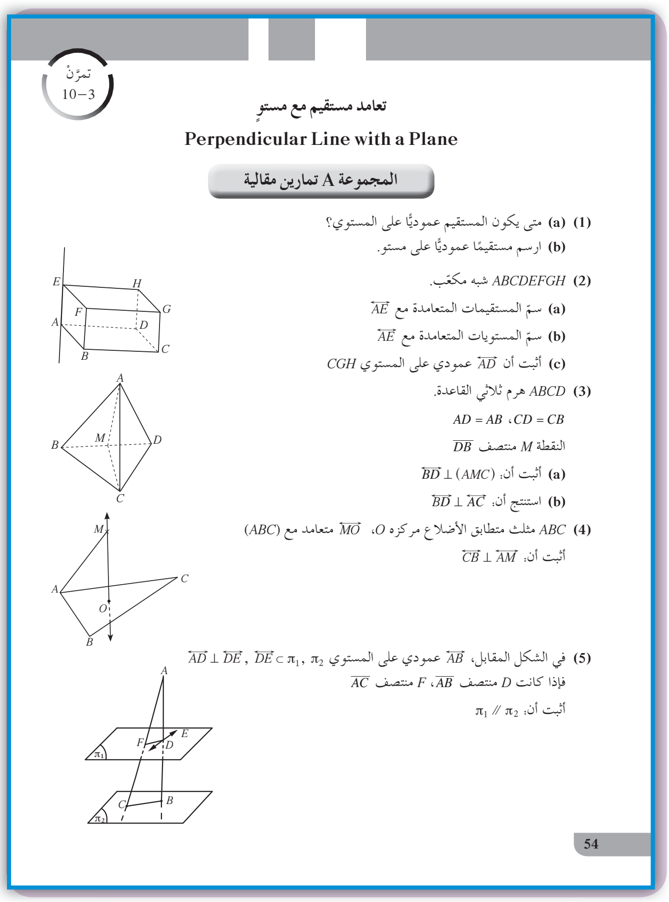
A, B نقطتان في π_1،

C, D نقطتان في π_2 حيث:

$\overline{AD} \perp \pi_2$ ، $\overline{BC} \perp \pi_2$

أثبت أن $ABCD$ مستطيل.

134



تمرَّنْ 10-3

تعامد مستقيم مع مستوٍ

Perpendicular Line with a Plane

المجموعة A تمارين مقالية

(1) (a) متى يكون المستقيم عموديًّا على المستوي؟

(b) ارسم مستقيمًا عموديًّا على مستوٍ.

(2) $ABCDEFGH$ شبه مكعّب.

(a) سمّ المستقيمات المتعامدة مع $\overleftrightarrow{AE}$

(b) سمّ المستويات المتعامدة مع $\overleftrightarrow{AE}$

(c) أثبت أن $\overleftrightarrow{AD}$ عمودي على المستوي CGH

(3) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.

$AD = AB$ ، $CD = CB$

النقطة M منتصف $\overline{DB}$

(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{BD} \perp (AMC)$

(b) استنتج أن: $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$

(4) ABC مثلث متطابق الأضلاع مركزه O، $\overleftrightarrow{MO}$ متعامد مع (ABC)

أثبت أن: $\overleftrightarrow{CB} \perp \overleftrightarrow{AM}$

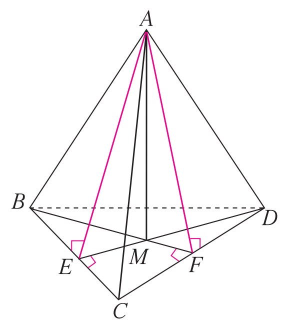
(5) في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{AB}$ عمودي على المستوي π_1, π_2 ، $\overleftrightarrow{DE} \subset \pi_1$ ، $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{DE}$

فإذا كانت D منتصف $\overline{AB}$، F منتصف $\overline{AC}$

أثبت أن: $\pi_1 \parallel \pi_2$

54

اختبار سريع



1 $ABCD$ هرم ثلاثي، حيث:

$AB = AC = AD = BC$

$= CD = DB$

F منتصف $\overline{DC}$،

E منتصف $\overline{BC}$،

$\overline{BF} \cap \overline{DE} = \{M\}$

أثبت أن $\overleftrightarrow{AM}$ عمودي على (BCD).

كل مثلث في الهرم الثلاثي المنتظم هو متطابق الأضلاع $\overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{AF}$ ، $\overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{BF}$

فيكون $\overleftrightarrow{DC} \perp (BFA)$ ومنه $\overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{AM}$ (1)

وأيضًا $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AE}$ ، $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{DE}$

فيكون $\overleftrightarrow{BC} \perp (AED)$ ومنه $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AM}$ (2)

النتيجتان (1), (2) تعطيان:

$\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{DC}$ ، $\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{BC}$

فيكون $\overleftrightarrow{AM} \perp (BCD)$

8 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

(a) نعم، $ABHE$ مربع.

(b) نعم، $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCGH)$، $\overleftrightarrow{BG} \subset (BCGH)$،
لذا $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BG}$

(c) نعم، $\overleftrightarrow{GE} // \overleftrightarrow{CA}$، في المربع $ABCD$
$\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BD}$ لذا $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{GE}$

(d) $\overleftrightarrow{GE} \perp \overleftrightarrow{FH}$، $\overleftrightarrow{BH} \perp \overleftrightarrow{CD}$

«حاول أن تحل»

1 $\overleftrightarrow{HE} \perp (ABFE)$

$\therefore\ \overleftrightarrow{HE} \perp \overleftrightarrow{EB}$

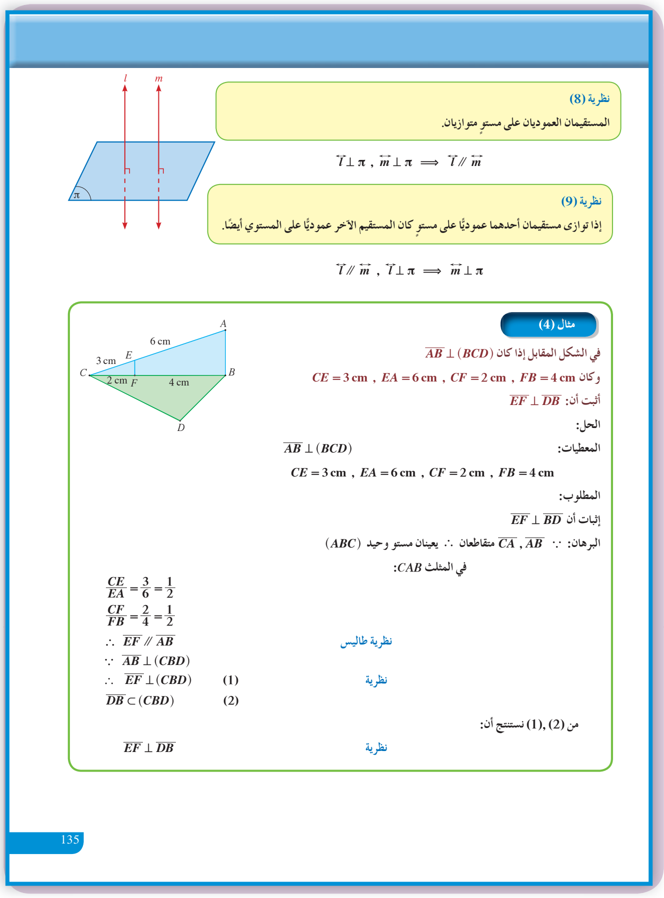
$\therefore$ $\Delta\ HEB$ قائم في $\widehat{E}$

2 $(AFD) \perp \overleftrightarrow{FE}\ ;\ (BEC) \perp \overleftrightarrow{FE}$

$\therefore\ (AFD)//(BEC)$

3 $\overleftrightarrow{BC} \perp \pi_2\ ,\ \overleftrightarrow{AD} \perp \pi_2$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BC}$ ومنه $ABCD$ هو مستوٍ وبما أن
$\overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1$ و $\pi_1 // \pi_2$ فيكون $\overleftrightarrow{AB} // \pi_2$
وبالتالي $(ABCD)$ يتقاطع مع π_2 بالمستقيم DC
بحيث إن $\overleftrightarrow{DC} // \overleftrightarrow{AB}$ وبالتالي $ABCD$ هو متوازي
أضلاع فيه زاوية قائمة
$\therefore$ $ABCD$ مستطيل.


نظرية (8)

المستقيمان العموديان على مستوٍ متوازيان.

$\overleftrightarrow{l} \perp \pi\ ,\ \overleftrightarrow{m} \perp \pi \implies \overleftrightarrow{l} // \overleftrightarrow{m}$

نظرية (9)

إذا توازى مستقيمان أحدهما عموديًا على مستوٍ كان المستقيم الآخر عموديًا على المستوي أيضًا.

$\overleftrightarrow{l} // \overleftrightarrow{m}\ ,\ \overleftrightarrow{l} \perp \pi \implies \overleftrightarrow{m} \perp \pi$

مثال (4)

في الشكل المقابل إذا كان $\overline{AB} \perp (BCD)$

وكان $CE = 3\text{ cm}\ ,\ EA = 6\text{ cm}\ ,\ CF = 2\text{ cm}\ ,\ FB = 4\text{ cm}$

أثبت أن: $\overline{EF} \perp \overline{DB}$

الحل:

المعطيات: $\overline{AB} \perp (BCD)$

$CE = 3\text{ cm}\ ,\ EA = 6\text{ cm}\ ,\ CF = 2\text{ cm}\ ,\ FB = 4\text{ cm}$

المطلوب:

إثبات أن $\overline{EF} \perp \overline{BD}$

البرهان: $\because$ $\overline{CA}\ ,\ \overline{AB}$ متقاطعان $\therefore$ يعينان مستوٍ وحيد (ABC)

في المثلث CAB:

$\frac{CE}{EA} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\frac{CF}{FB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\therefore\ \overline{EF} // \overline{AB}$ نظرية طاليس

$\because\ \overline{AB} \perp (CBD)$

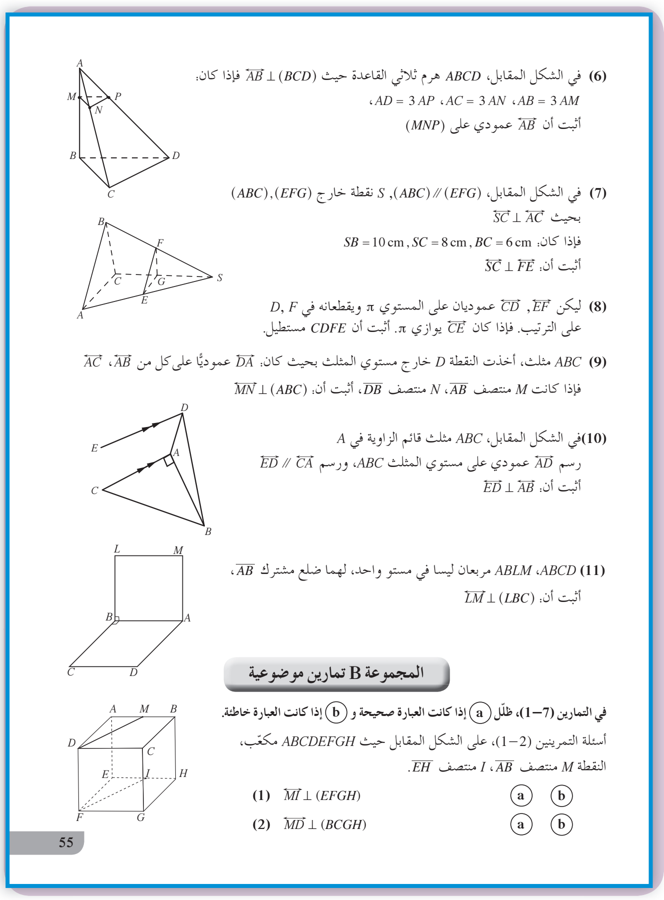
$\therefore\ \overline{EF} \perp (CBD)$ (1) نظرية

$\overline{DB} \subset (CBD)$ (2)

من (2) ,(1) نستنتج أن:

$\overline{EF} \perp \overline{DB}$ نظرية

135


(6) في الشكل المقابل، $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة حيث $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$ فإذا كان:
$AB = 3\,AM$ ،$AC = 3\,AN$ ،$AD = 3\,AP$،
أثبت أن $\overleftrightarrow{AB}$ عمودي على (MNP)

(7) في الشكل المقابل، $(ABC) // (EFG)$, S نقطة خارج $(ABC),(EFG)$
بحيث $\overleftrightarrow{SC} \perp \overleftrightarrow{AC}$
فإذا كان: $SB = 10\text{ cm}\ , SC = 8\text{ cm}\ , BC = 6\text{ cm}$
أثبت أن: $\overleftrightarrow{SC} \perp \overleftrightarrow{FE}$

(8) ليكن $\overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{CD}$ عموديان على المستوي π ويقطعانه في D, F
على الترتيب. فإذا كان $\overleftrightarrow{CE}$ يوازي π. أثبت أن $CDFE$ مستطيل.

(9) ABC مثلث، أخذت النقطة D خارج مستوي المثلث بحيث كان: $\overleftrightarrow{DA}$ عموديًا على كل من $\overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{AC}$
فإذا كانت M منتصف $\overline{AB}$، N منتصف $\overline{DB}$، أثبت أن: $\overleftrightarrow{MN} \perp (ABC)$

(10) في الشكل المقابل، ABC مثلث قائم الزاوية في A
رسم $\overleftrightarrow{AD}$ عمودي على مستوي المثلث ABC، ورسم $\overleftrightarrow{ED} // \overleftrightarrow{CA}$
أثبت أن: $\overleftrightarrow{ED} \perp \overleftrightarrow{AB}$

(11) $ABCD$، $ABLM$ مربعان ليسا في مستوٍ واحد، لهما ضلع مشترك $\overline{AB}$،
أثبت أن: $\overleftrightarrow{LM} \perp (LBC)$

المجموعة B تمارين موضوعية

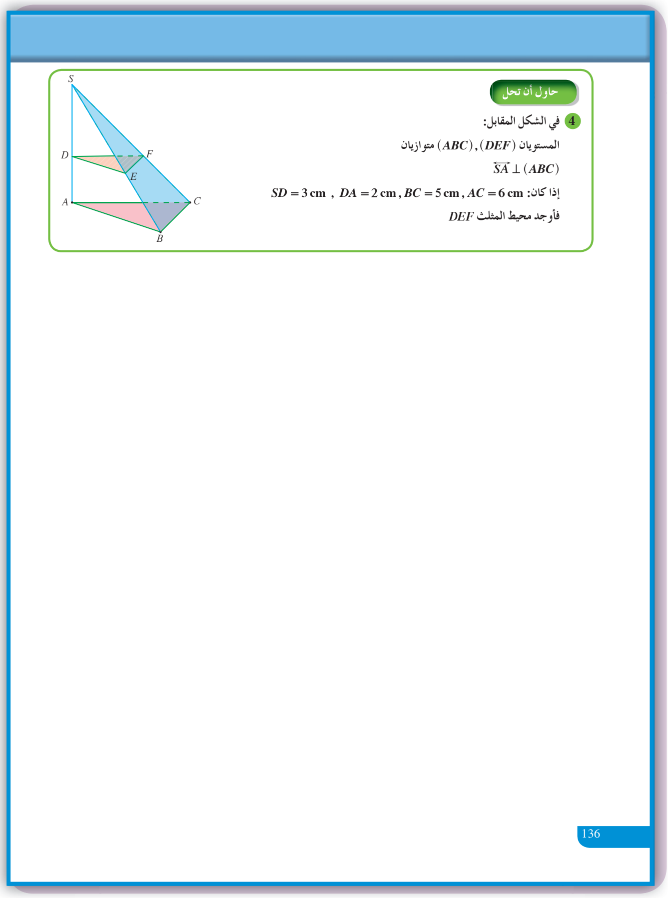
في التمارين (1–7)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

أسئلة التمرينين (1–2)، على الشكل المقابل حيث $ABCDEFGH$ مكعّب،
النقطة M منتصف $\overline{AB}$، I منتصف $\overline{EH}$.

(1) $\overleftrightarrow{MI} \perp (EFGH)$ (a) (b)

(2) $\overleftrightarrow{MD} \perp (BCGH)$ (a) (b)

55



حاول أن تحل

4 في الشكل المقابل:

المستويان $(ABC), (DEF)$ متوازيان

$\overleftrightarrow{SA} \perp (ABC)$

إذا كان: $SD = 3\text{ cm}\ ,\ DA = 2\text{ cm}, BC = 5\text{ cm}, AC = 6\text{ cm}$

فأوجد محيط المثلث DEF

136

4 $\dfrac{SD}{SA} = \dfrac{EF}{BC} = \dfrac{DF}{AC}$

$\dfrac{3}{5} = \dfrac{EF}{5} = \dfrac{DF}{6}\ ;\ EF = 3\text{ cm}, DF = 3.6\text{ cm}$

(نبّه الطلاب أنّ المثلث ABC قائم في $\widehat{B}$)

$AB^2 = AC^2 - BC^2 = 36 - 25 = 11\ ;\ AB = \sqrt{11}$

$\dfrac{DE}{AB} = \dfrac{3}{5}\ ;\ DE = \dfrac{3\sqrt{11}}{5}\ cm$

محيط المثلث DEF يساوي:

$3 + 3.6 + \dfrac{3\sqrt{11}}{5} \approx 8.6\text{ cm}$

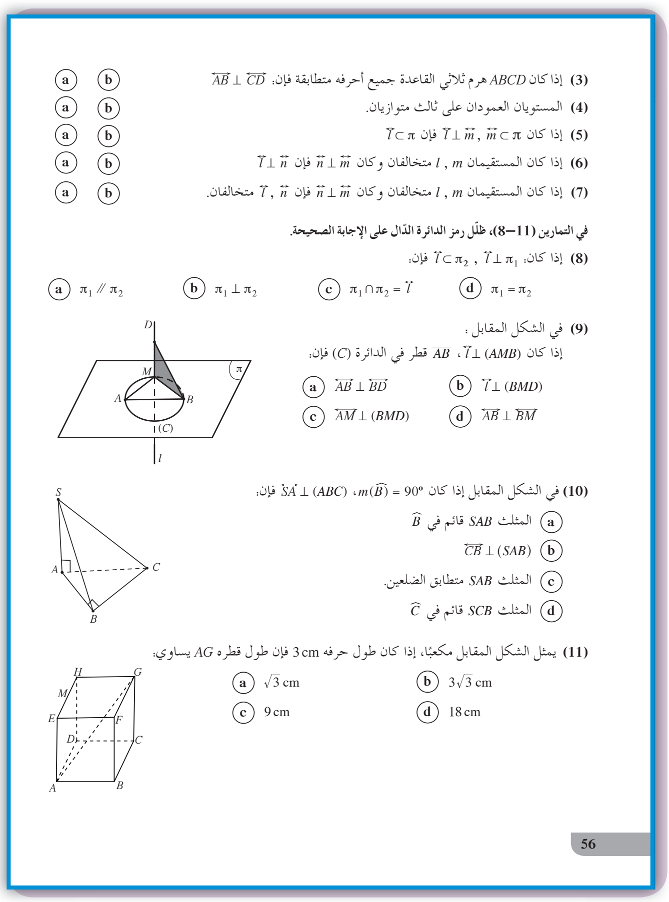
(a) 90°

(b) 45°

(c) 0°

(d) 60°

(e) 90°



(3) إذا كان $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة جميع أحرفه متطابقة فإن: $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (a) (b)

(4) المستويان العمودان على ثالث متوازيان. (a) (b)

(5) إذا كان $\overleftrightarrow{m} \subset \pi$, $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{m}$ فإن $\overleftrightarrow{l} \subset \pi$ (a) (b)

(6) إذا كان المستقيمان l , m متخالفان وكان $\overleftrightarrow{n} \perp \overleftrightarrow{m}$ فإن $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{n}$ (a) (b)

(7) إذا كان المستقيمان l , m متخالفان وكان $\overleftrightarrow{n} \perp \overleftrightarrow{m}$ فإن $\overleftrightarrow{l}$, $\overleftrightarrow{n}$ متخالفان. (a) (b)

في التمارين (8—11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(8) إذا كان: $\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1$, $\overleftrightarrow{l} \subset \pi_2$ فإن:

(a) $\pi_1 \parallel \pi_2$ (b) $\pi_1 \perp \pi_2$ (c) $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l}$ (d) $\pi_1 = \pi_2$

(9) في الشكل المقابل :

إذا كان $\overleftrightarrow{l} \perp (AMB)$، $\overline{AB}$ قطر في الدائرة (C) فإن:

(a) $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BD}$ (b) $\overleftrightarrow{l} \perp (BMD)$

(c) $\overleftrightarrow{AM} \perp (BMD)$ (d) $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BM}$

(10) في الشكل المقابل إذا كان $m(\widehat{B}) = 90^{\circ}$، $\overleftrightarrow{SA} \perp (ABC)$ فإن:

(a) المثلث SAB قائم في $\widehat{B}$

(b) $\overleftrightarrow{CB} \perp (SAB)$

(c) المثلث SAB متطابق الضلعين.

(d) المثلث SCB قائم في $\widehat{C}$

(11) يمثل الشكل المقابل مكعبًا، إذا كان طول حرفه 3 cm فإن طول قطره AG يساوي:

(a) $\sqrt{3}\text{ cm}$ (b) $3\sqrt{3}\text{ cm}$

(c) 9 cm (d) 18 cm

56

10–4: الزاوية الزوجية

1 الأهداف

- يوجد الزاوية بين مستويين وقياسها (الزاوية الزوجية).

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

زاوية – زاوية زوجية – قياس الزاوية.

3 الأدوات والوسائل

نماذج لمجسمات – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) إذا توازى مستقيم مع مستقيم محتوى في مستوٍ فهل يكون هذا المستقيم موازيًا للمستوي؟

(b) إذا توازى مستقيمان مع مستقيم ثالث فهل يكون هذان المستقيمان متوازيين؟

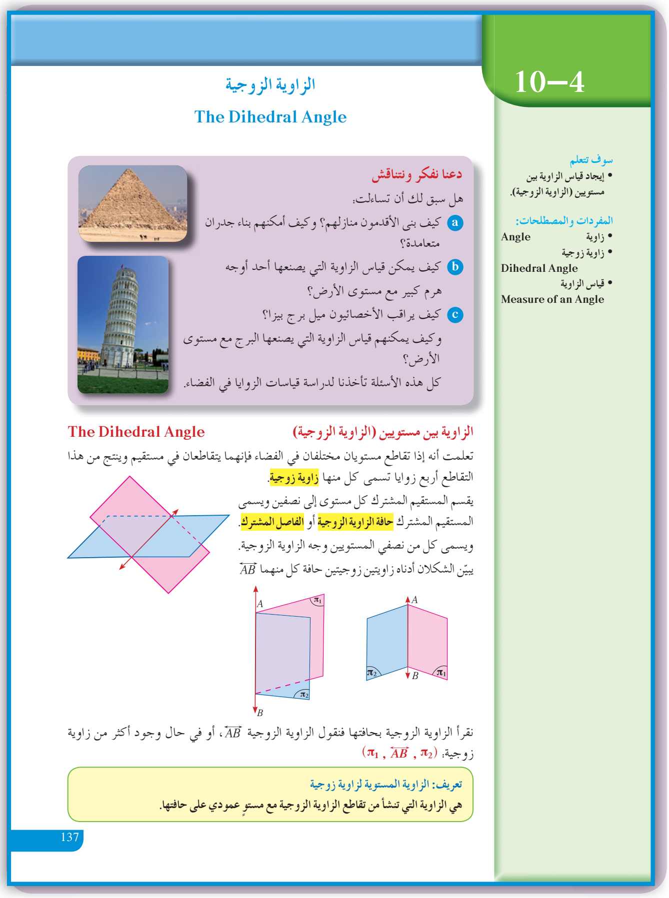
(c) اطلب إليهم كتابة قانون الجيب وقانون جيب التمام في المثلث.

(d) إذا تعامد مستقيم مع مستقيم ينتمي إلى مستوٍ فهل يكون هذا المستقيم متعامدًا مع المستوي؟

(e) متى يكون المستقيم عموديًا على مستوٍ؟

5 التدريس

رأينا ان المستويات تتقاطع في الفضاء وأن التقاطع بين مستويين هو مستقيم، وفي هذا الدرس سوف يتعرف الطالب كيفية ايجاد زاوية بين مستويين واذا امكن ايجاد قياس لهذه الزاوية.



10–4

الزاوية الزوجية

The Dihedral Angle

سوف تتعلم

- إيجاد قياس الزاوية بين مستويين (الزاوية الزوجية).

المفردات والمصطلحات:

- زاوية Angle
- زاوية زوجية Dihedral Angle
- قياس الزاوية Measure of an Angle

دعنا نفكر ونتناقش

هل سبق لك أن تساءلت:

a كيف بنى الأقدمون منازلهم؟ وكيف أمكنهم بناء جدران متعامدة؟

b كيف يمكن قياس الزاوية التي يصنعها أحد أوجه هرم كبير مع مستوى الأرض؟

c كيف يراقب الأخصائيون ميل برج بيزا؟

وكيف يمكنهم قياس الزاوية التي يصنعها البرج مع مستوى الأرض؟

كل هذه الأسئلة تأخذنا لدراسة قياسات الزوايا في الفضاء.

الزاوية بين مستويين (الزاوية الزوجية) The Dihedral Angle

تعلمت أنه إذا تقاطع مستويان مختلفان في الفضاء فإنهما يتقاطعان في مستقيم وينتج من هذا التقاطع أربع زوايا تسمى كل منها **زاوية زوجية**.

يقسم المستقيم المشترك كل مستوى إلى نصفين ويسمى المستقيم المشترك **حافة الزاوية الزوجية** أو **الفاصل المشترك**.

ويسمى كل من نصفي المستويين وجه الزاوية الزوجية.

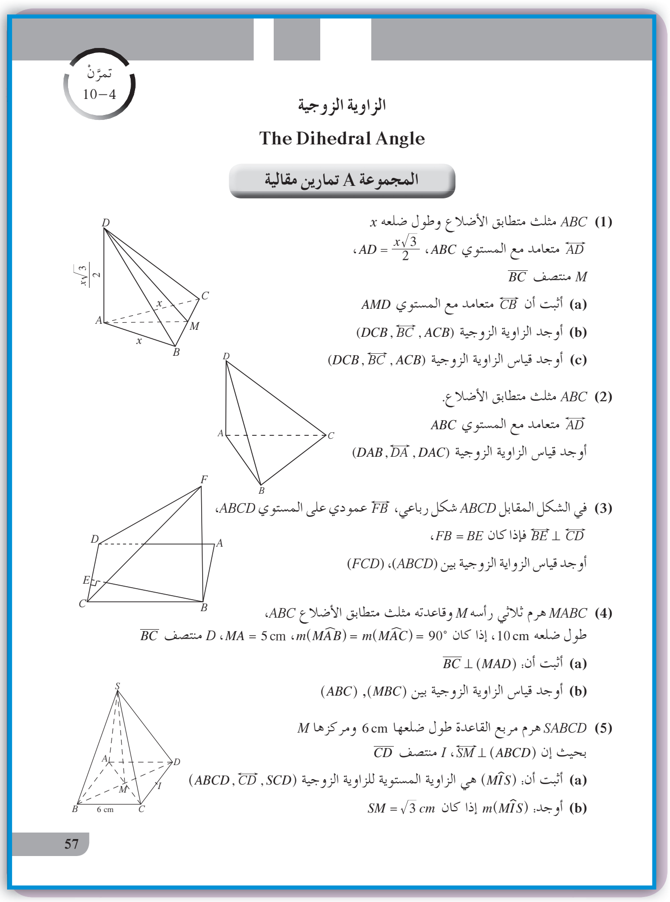
يبيّن الشكلان أدناه زاويتين زوجيتين حافة كل منهما $\overleftrightarrow{AB}$

نقرأ الزاوية الزوجية بحافتها فنقول الزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{AB}$، أو في حال وجود أكثر من زاوية زوجية: $(\pi_1 , \overleftrightarrow{AB} , \pi_2)$

تعريف: الزاوية المستوية لزاوية زوجية

هي الزاوية التي تنشأ من تقاطع الزاوية الزوجية مع مستوٍ عمودي على حافتها.

137



تمرَّنْ 10–4

الزاوية الزوجية

The Dihedral Angle

المجموعة A تمارين مقالية

(1) ABC مثلث متطابق الأضلاع وطول ضلعه x

$\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع المستوي ABC، $AD = \frac{x\sqrt{3}}{2}$،

M منتصف $\overline{BC}$

(a) أثبت أن $\overleftrightarrow{CB}$ متعامد مع المستوي AMD

(b) أوجد الزاوية الزوجية $(DCB , \overleftrightarrow{BC} , ACB)$

(c) أوجد قياس الزاوية الزوجية $(DCB , \overleftrightarrow{BC} , ACB)$

(2) ABC مثلث متطابق الأضلاع.

$\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع المستوي ABC

أوجد قياس الزاوية الزوجية $(DAB , \overleftrightarrow{DA} , DAC)$

(3) في الشكل المقابل $ABCD$ شكل رباعي، $\overleftrightarrow{FB}$ عمودي على المستوي $ABCD$، $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$ فإذا كان $FB = BE$،

أوجد قياس الزواية الزوجية بين $(ABCD)$، (FCD)

(4) $MABC$ هرم ثلاثي رأسه M وقاعدته مثلث متطابق الأضلاع ABC، طول ضلعه 10 cm، إذا كان $m(M\hat{A}B) = m(M\hat{A}C) = 90°$، $MA = 5\text{ cm}$، D منتصف $\overline{BC}$

(a) أثبت أن: $\overline{BC} \perp (MAD)$

(b) أوجد قياس الزاوية الزوجية بين (MBC), (ABC)

(5) $SABCD$ هرم مربع القاعدة طول ضلعها 6 cm ومركزها M بحيث إن $\overleftrightarrow{SM} \perp (ABCD)$، I منتصف $\overline{CD}$

(a) أثبت أن: $(M\hat{I}S)$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(ABCD , \overleftrightarrow{CD} , SCD)$

(b) أوجد: $m(M\hat{I}S)$ إذا كان $SM = \sqrt{3}\ cm$

57

في المثال (1)

اشرح لهم جيدًّا في هذا المثال معنى هرم ثلاثي أوجهه مثلثات متطابقة. أخبرهم أن بإمكانهم صنع مثل هذا الهرم إذا كان لديهم 6 قطع خشبية صغيرة متساوية الطول فيكون لديهم: $AB = AC = AD = BC = CD = BD$

وأن قياس زاوية المستويين ACD , BCD بحاجة إلى عملية حسابية متعددة الخطوات نستخدم في النهاية قانون جيب التمام.

في المثالين (2), (3)

يستخدم الطالب معطيات المسألة لإيجاد قياس الزاوية بين مستويين.

أكد للطلاب على التحقق من الشروط الضرورية للزاوية الزوجية و كيفية إيجاد قياسها.

6 الربط

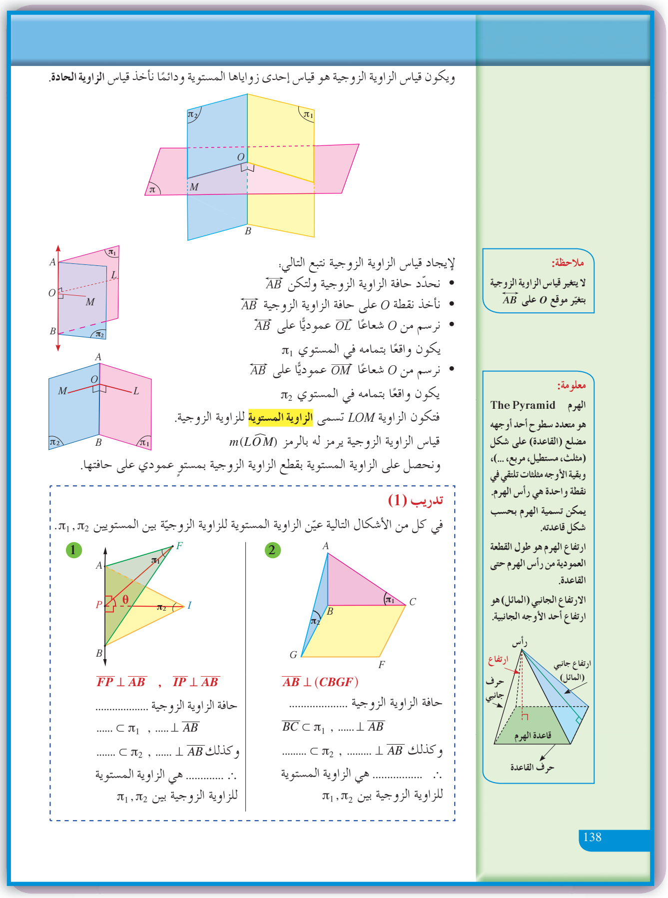
يمثل برج بيزا في إيطاليا ظاهرة مهمة إذ إنه منذ فترة طويلة بدأ يميل ولم يعد كبقية الأبنية يقف عموديًّا على سطح الأرض بل يصنع زاوية انحناء تقدّر حتى الآن بحوالي 85°

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطالب في تحديد الزاوية المستوية لزاوية زوجية. اطلب إلى كل طالب أن يفتح الكتاب أمامه، أخبرهم أن فتحة الكتاب تشكل الزاوية الزوجية ولكن زاوية المستويين هي الناتجة عن تقاطع مستقيمين عمودين عند نقطة على تقاطع المستويين على أن يكون كل عمود في مستو.

8 التقييم

تابع بدقة عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من فهمهم لما ورد في هذا الدرس.



ويكون قياس الزاوية الزوجية هو قياس إحدى زواياها المستوية ودائمًا نأخذ قياس **الزاوية الحادة**.

لإيجاد قياس الزاوية الزوجية نتبع التالي:
- نحدّد حافة الزاوية الزوجية ولتكن $\overleftrightarrow{AB}$
- نأخذ نقطة O على حافة الزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{AB}$
- نرسم من O شعاعًا $\overrightarrow{OL}$ عموديًّا على $\overleftrightarrow{AB}$ يكون واقعًا بتمامه في المستوي π_1
- نرسم من O شعاعًا $\overrightarrow{OM}$ عموديًّا على $\overleftrightarrow{AB}$ يكون واقعًا بتمامه في المستوي π_2

فتكون الزاوية LOM تسمى **الزاوية المستوية** للزاوية الزوجية.

قياس الزاوية الزوجية يرمز له بالرمز $m(L\widehat{O}M)$

ونحصل على الزاوية المستوية بقطع الزاوية الزوجية بمستوٍ عمودي على حافتها.

ملاحظة: لا يتغير قياس الزاوية الزوجية بتغيّر موقع O على $\overleftrightarrow{AB}$

معلومة:
الهرم The Pyramid
هو متعدد سطوح أحد أوجهه مضلع (القاعدة) على شكل (مثلث، مستطيل، مربع، ...)، وبقية الأوجه مثلثات تلتقي في نقطة واحدة هي رأس الهرم.
يمكن تسمية الهرم بحسب شكل قاعدته.
ارتفاع الهرم هو طول القطعة العمودية من رأس الهرم حتى القاعدة.
الارتفاع الجانبي (المائل) هو ارتفاع أحد الأوجه الجانبية.

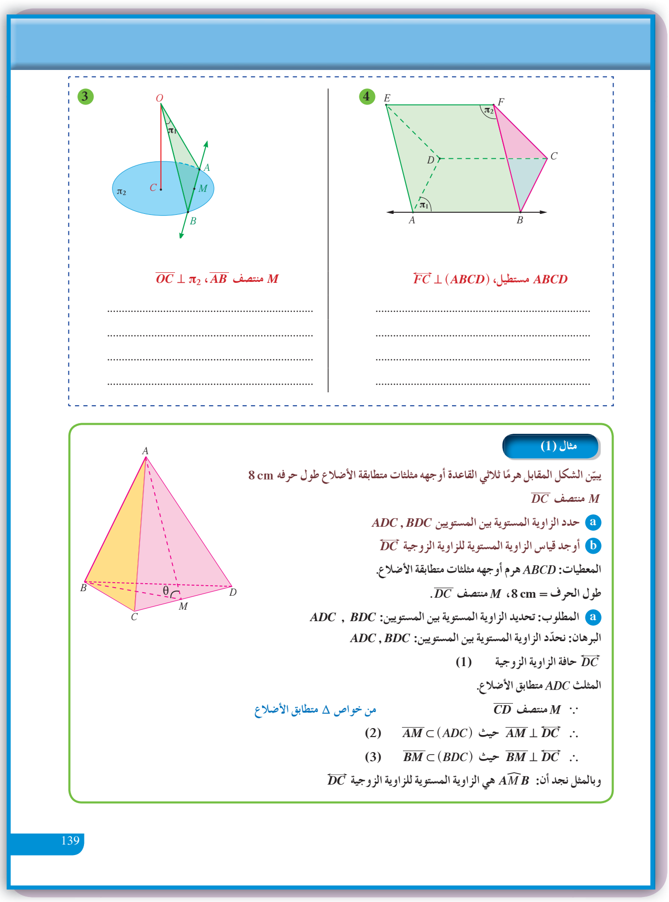
تدريب (1)

في كل من الأشكال التالية عيّن الزاوية المستوية للزاوية الزوجيّة بين المستويين π_1 , π_2.

1. $\overline{FP} \perp \overline{AB}$, $\overline{IP} \perp \overline{AB}$
حافة الزاوية الزوجية ....
...... $\subset \pi_1$, ... $\perp \overline{AB}$
وكذلك ...... $\subset \pi_2$, ... $\perp \overline{AB}$
$\therefore$ .... هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين π_1 , π_2

2. $\overline{AB} \perp (CBGF)$
حافة الزاوية الزوجية ....
$\overline{BC} \subset \pi_1$, ... $\perp \overline{AB}$
وكذلك .... $\subset \pi_2$, ... $\perp \overline{AB}$
$\therefore$ .... هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين π_1 , π_2

138



3. M منتصف $\overline{AB}$، $\overline{OC} \perp \pi_2$
....
....
....
....

4. $ABCD$ مستطيل، $\overleftrightarrow{FC} \perp (ABCD)$
....
....
....
....

مثال (1)

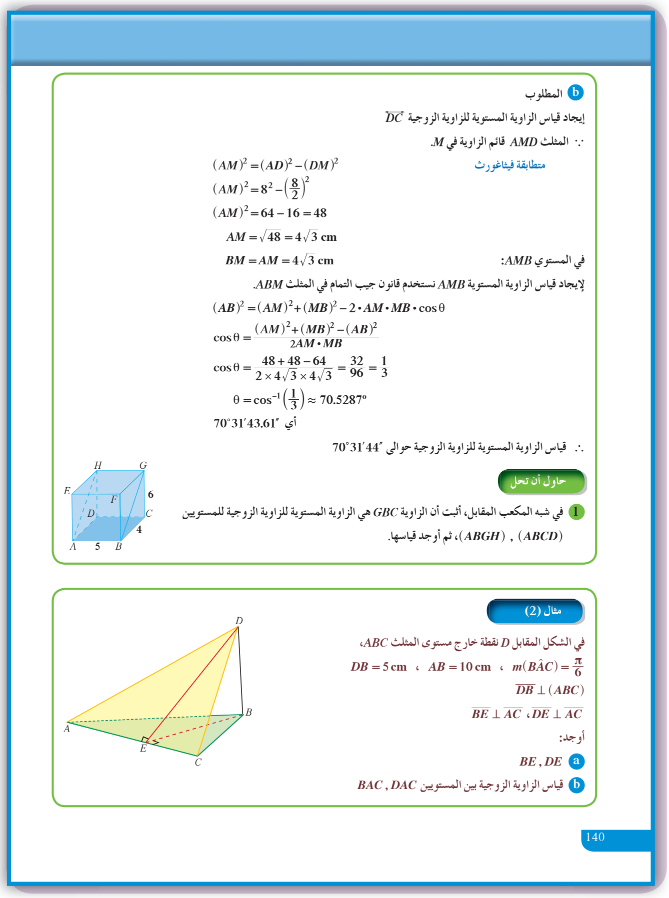
يبيّن الشكل المقابل هرمًا ثلاثي القاعدة أوجهه مثلثات متطابقة الأضلاع طول حرفه 8 cm
M منتصف $\overline{DC}$

a. حدد الزاوية المستوية بين المستويين ADC , BDC
b. أوجد قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{DC}$

المعطيات: $ABCD$ هرم أوجهه مثلثات متطابقة الأضلاع.
طول الحرف = 8 cm، M منتصف $\overline{DC}$.

a. المطلوب: تحديد الزاوية المستوية بين المستويين: ADC , BDC
البرهان: نحدّد الزاوية المستوية بين المستويين: ADC , BDC
$\overleftrightarrow{DC}$ حافة الزاوية الزوجية (1)
المثلث ADC متطابق الأضلاع.
$\because$ M منتصف $\overline{CD}$ — من خواص Δ متطابق الأضلاع
$\therefore$ $\overline{AM} \perp \overleftrightarrow{DC}$ حيث $\overline{AM} \subset (ADC)$ (2)
$\therefore$ $\overline{BM} \perp \overleftrightarrow{DC}$ حيث $\overline{BM} \subset (BDC)$ (3)
وبالمثل نجد أن: $A\widehat{M}B$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{DC}$

139



b المطلوب

إيجاد قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{DC}$

$\because$ المثلث AMD قائم الزاوية في M.

متطابقة فيثاغورث

$$(AM)^2=(AD)^2-(DM)^2$$
$$(AM)^2=8^2-\left(\frac{8}{2}\right)^2$$
$$(AM)^2=64-16=48$$
$$AM=\sqrt{48}=4\sqrt{3}\text{ cm}$$

في المستوي AMB:

$$BM=AM=4\sqrt{3}\text{ cm}$$

لإيجاد قياس الزاوية المستوية AMB نستخدم قانون جيب التمام في المثلث ABM.

$$(AB)^2=(AM)^2+(MB)^2-2\cdot AM\cdot MB\cdot\cos\theta$$
$$\cos\theta=\frac{(AM)^2+(MB)^2-(AB)^2}{2AM\cdot MB}$$
$$\cos\theta=\frac{48+48-64}{2\times4\sqrt{3}\times4\sqrt{3}}=\frac{32}{96}=\frac{1}{3}$$
$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\approx70.5287^\circ$$

أي $70^\circ31'43.61''$

$\therefore$ قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية حوالى $70^\circ31'44''$

حاول أن تحل

1 في شبه المكعب المقابل، أثبت أن الزاوية GBC هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية للمستويين $(ABCD)$, $(ABGH)$، ثم أوجد قياسها.

مثال (2)

في الشكل المقابل D نقطة خارج مستوى المثلث ABC،

$m(B\hat{A}C)=\frac{\pi}{6}$ ، $AB=10\text{ cm}$ ، $DB=5\text{ cm}$

$\overline{DB}\perp(ABC)$

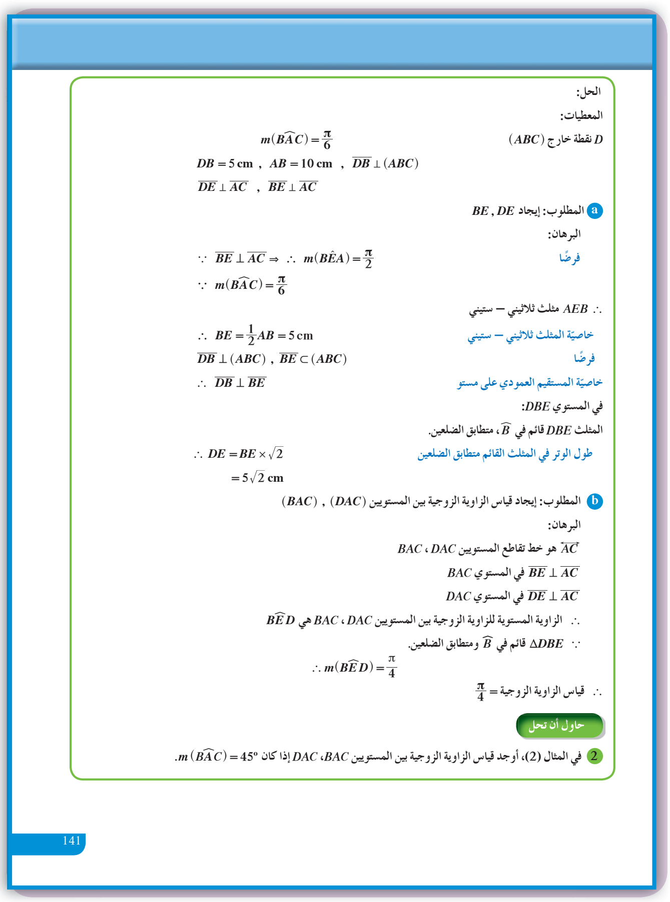
$\overline{DE}\perp\overline{AC}$ ، $\overline{BE}\perp\overline{AC}$

أوجد:

a BE , DE

b قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC , DAC

140



الحل:

المعطيات:

D نقطة خارج (ABC) $\qquad m(\widehat{BAC})=\frac{\pi}{6}$

$DB=5\text{ cm}$, $AB=10\text{ cm}$, $\overline{DB}\perp(ABC)$

$\overline{DE}\perp\overline{AC}$, $\overline{BE}\perp\overline{AC}$

a المطلوب: إيجاد BE , DE

البرهان:

فرضًا $\qquad \because\ \overline{BE}\perp\overline{AC}\Rightarrow\ \therefore\ m(B\hat{E}A)=\frac{\pi}{2}$

$\because\ m(\widehat{BAC})=\frac{\pi}{6}$

$\therefore$ AEB مثلث ثلاثيني – ستيني

خاصيّة المثلث ثلاثيني – ستيني $\qquad \therefore\ BE=\frac{1}{2}AB=5\text{ cm}$

فرضًا $\qquad \overline{DB}\perp(ABC)$, $\overline{BE}\subset(ABC)$

خاصيّة المستقيم العمودي على مستو $\qquad \therefore\ \overline{DB}\perp\overline{BE}$

في المستوي DBE:

المثلث DBE قائم في $\widehat{B}$، متطابق الضلعين.

طول الوتر في المثلث القائم متطابق الضلعين $\qquad \therefore\ DE=BE\times\sqrt{2}$

$=5\sqrt{2}\text{ cm}$

b المطلوب: إيجاد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين (DAC) , (BAC)

البرهان:

$\overleftrightarrow{AC}$ هو خط تقاطع المستويين DAC ، BAC

$\overline{BE}\perp\overline{AC}$ في المستوي BAC

$\overline{DE}\perp\overline{AC}$ في المستوي DAC

$\therefore$ الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين DAC ، BAC هي $B\widehat{E}D$

$\because$ ΔDBE قائم في $\widehat{B}$ ومتطابق الضلعين.

$\therefore m(B\widehat{E}D)=\frac{\pi}{4}$

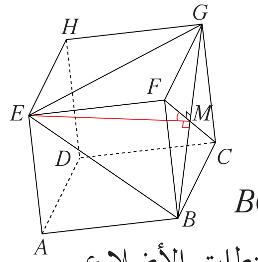
$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $=\frac{\pi}{4}$

حاول أن تحل

2 في المثال (2)، أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC، DAC إذا كان $m(B\widehat{A}C)=45^\circ$.

141

اختبار سريع



1 $ABCDEFGH$ مكعب

طول ضلعه يساوي 4 cm

النقطة M مركز المربع $BCGF$

(a) أثبت أن BEG مثلث متطابق الأضلاع.

$BE=BG=GE=4\sqrt{2}$ cm

لذا BEG هو مثلث متطابق الأضلاع.

(b) أثبت أن: $\overleftrightarrow{GB}\perp(CEF)$

$\overleftrightarrow{GB}\perp\overleftrightarrow{FC}$ ، $\overleftrightarrow{GB}\perp\overleftrightarrow{EM}$

لذا $\overleftrightarrow{GB}\perp(EFC)$

(c) أوجد قياس زاوية المستويين:

$BEG, BCGF$

$\overleftrightarrow{FC}\perp\overleftrightarrow{GB}$ ، $\overleftrightarrow{EM}\perp\overleftrightarrow{GB}$

وبالتالي زاوية المستويين $BEG, BCGF$ هي: $E\widehat{M}F$ حيث إن المثلث EFM قائم الزاوية F

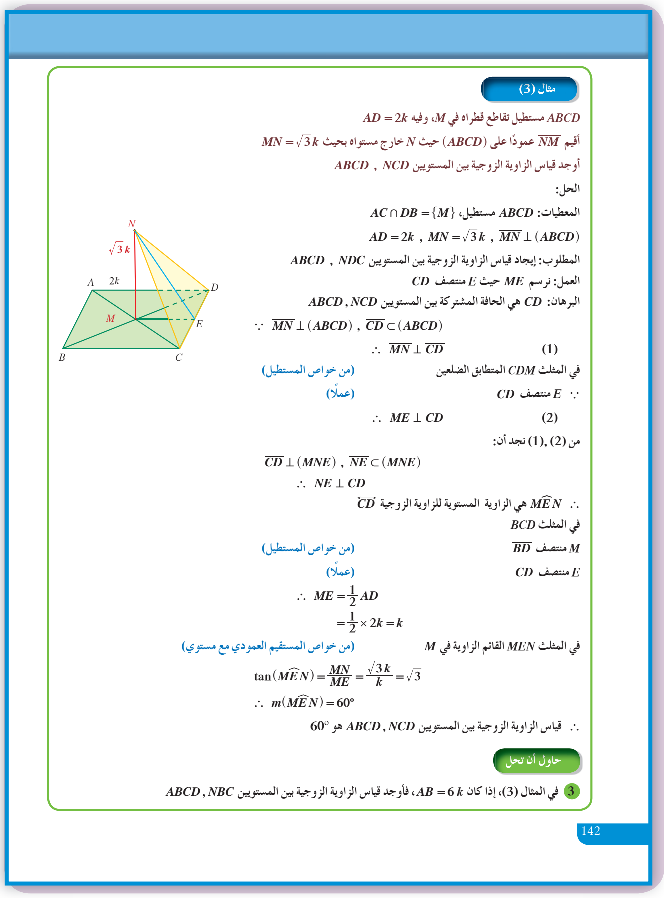
$$\tan(E\widehat{M}F)=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

$$m(E\widehat{M}F)=54^\circ44'$$

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

(a) بنى الأقدمون منازلهم بحسب البيئة التي تواجدوا فيها وأكثر ما استخدموا الحجارة والطين المكوّن من تراب ممزوجًا مع الحصى والتبن ولكي تتعامد الجدران مع الأرض المسطحة استخدموا «الشاقول» وهو قطعة معدنية مربوطة بخيط طويل يتدلى عموديًّا.


مثال (3)

$ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M، وفيه $AD = 2k$

أقيم $\overline{NM}$ عمودًا على $(ABCD)$ حيث N خارج مستواه بحيث $MN = \sqrt{3}k$

أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين NCD , $ABCD$

الحل:

المعطيات: $ABCD$ مستطيل، $\overline{AC} \cap \overline{DB} = \{M\}$

$AD = 2k$, $MN = \sqrt{3}k$, $\overline{MN} \perp (ABCD)$

المطلوب: إيجاد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين NDC , $ABCD$

العمل: نرسم $\overline{ME}$ حيث E منتصف $\overline{CD}$

البرهان: $\overline{CD}$ هي الحافة المشتركة بين المستويين NCD, $ABCD$

$\because \overline{MN} \perp (ABCD)$, $\overline{CD} \subset (ABCD)$

$\therefore \overline{MN} \perp \overline{CD}$ (1)

في المثلث CDM المتطابق الضلعين (من خواص المستطيل)

$\because$ E منتصف $\overline{CD}$ (عملًا)

$\therefore \overline{ME} \perp \overline{CD}$ (2)

من (2) ,(1) نجد أن:

$\overline{CD} \perp (MNE)$, $\overline{NE} \subset (MNE)$

$\therefore \overline{NE} \perp \overline{CD}$

$\therefore$ $M\widehat{E}N$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{CD}$

في المثلث BCD

M منتصف $\overline{BD}$ (من خواص المستطيل)

E منتصف $\overline{CD}$ (عملًا)

$\therefore ME = \frac{1}{2}AD$

$= \frac{1}{2} \times 2k = k$

في المثلث MEN القائم الزاوية في M (من خواص المستقيم العمودي مع مستوي)

$\tan(M\widehat{E}N) = \frac{MN}{ME} = \frac{\sqrt{3}k}{k} = \sqrt{3}$

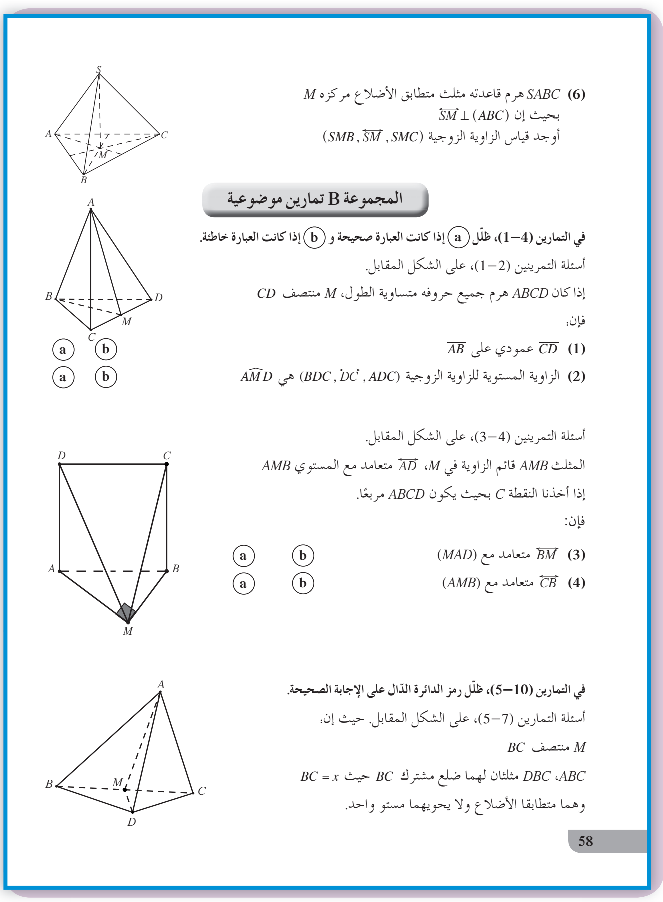
$\therefore m(M\widehat{E}N) = 60°$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية بين المستويين NCD, $ABCD$ هو $60°$

حاول أن تحل

3 في المثال (3)، إذا كان $AB = 6k$، فأوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين NBC, $ABCD$

142


(6) $SABC$ هرم قاعدته مثلث متطابق الأضلاع مركزه M
بحيث إن $\overleftrightarrow{SM} \perp (ABC)$
أوجد قياس الزاوية الزوجية $(SMB, \overleftrightarrow{SM}, SMC)$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

أسئلة التمرينين (2—1)، على الشكل المقابل.

إذا كان $ABCD$ هرم جميع حروفه متساوية الطول، M منتصف $\overline{CD}$

فإن:

(1) $\overline{CD}$ عمودي على $\overline{AB}$ — a b

(2) الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(BDC, \overleftrightarrow{DC}, ADC)$ هي $A\widehat{M}D$ — a b

أسئلة التمرينين (4—3)، على الشكل المقابل.

المثلث AMB قائم الزاوية في M، $\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع المستوي AMB

إذا أخذنا النقطة C بحيث يكون $ABCD$ مربعًا.

فإن:

(3) $\overleftrightarrow{BM}$ متعامد مع (MAD) — a b

(4) $\overleftrightarrow{CB}$ متعامد مع (AMB) — a b

في التمارين (10—5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

أسئلة التمارين (7—5)، على الشكل المقابل. حيث إن:

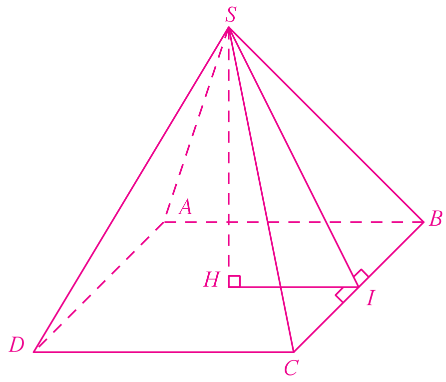
M منتصف $\overline{BC}$

ABC، DBC مثلثان لهما ضلع مشترك $\overline{BC}$ حيث $BC = x$

وهما متطابقا الأضلاع ولا يحويهما مستو واحد.

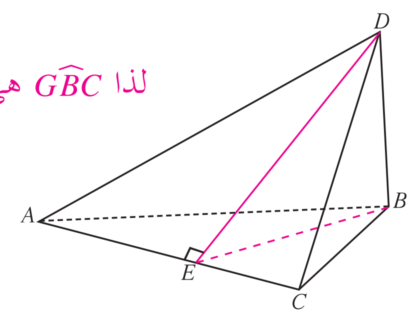
58

(b) من المعروف أن وجه الهرم الجانبي هو مثلث وللهرم ارتفاع وهو العمود النازل من الرأس إلى القاعدة وفي المثلث يوجد ارتفاع جانبي وهو العمود النازل من الرأس إلى القاعدة المقابلة والزاوية هي (SIH) فإذا عرفت أطوال $\overline{SH}$ ،$\overline{SI}$ يمكن إيجاد قياس الزاوية (SIH).



(c) بالطريقة نفسها المستخدمة في الفقرة **(b)**.

«حاول أن تحل»



1 $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BG}$

$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$

لذا $G\widehat{B}C$ هي زاوية المستويين

$m(G\widehat{B}C) = 45°$

2 $\overleftrightarrow{DB} \perp (ABC)$

$\overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AC}$

$\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{AC}$

المطلوب إيجاد $m(B\widehat{E}D)$

AEB مثلث قائم الزاوية E ومتطابق الضلعين

لأن $m(\widehat{A}) = 45°$ فيكون $2(BE)^2 = 100$

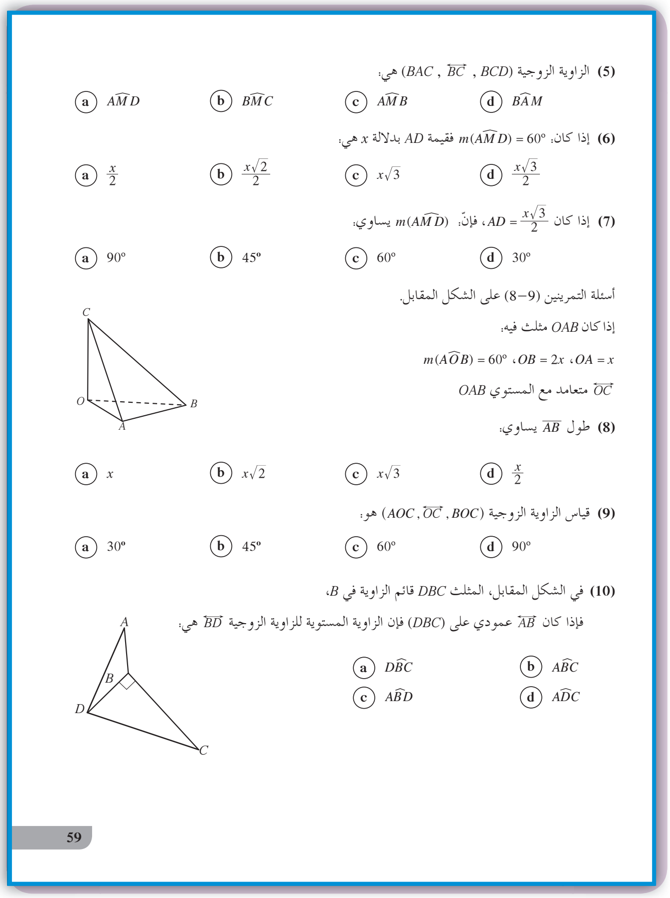
ومنه: $BE = 5\sqrt{2}$ cm

أي $BE = AE = 5\sqrt{2}$ cm

ثم $\overleftrightarrow{DB} \perp (ABC)$ نحصل على $\overleftrightarrow{DB} \perp \overleftrightarrow{BE}$

$\tan(B\widehat{E}D) = \frac{BD}{BE} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$m(B\widehat{E}D) = 35°16'$



(5) الزاوية الزوجية $(BAC\ ,\ \overleftrightarrow{BC}\ ,\ BCD)$ هي:

ⓐ $A\widehat{M}D$ ⓑ $B\widehat{M}C$ ⓒ $A\widehat{M}B$ ⓓ $B\widehat{A}M$

(6) إذا كان: $m(A\widehat{M}D) = 60^\circ$ فقيمة AD بدلالة x هي:

ⓐ $\frac{x}{2}$ ⓑ $\frac{x\sqrt{2}}{2}$ ⓒ $x\sqrt{3}$ ⓓ $\frac{x\sqrt{3}}{2}$

(7) إذا كان $AD = \frac{x\sqrt{3}}{2}$، فإنّ: $m(A\widehat{M}D)$ يساوي:

ⓐ 90° ⓑ 45° ⓒ 60° ⓓ 30°

أسئلة التمرينين (9–8) على الشكل المقابل.

إذا كان OAB مثلث فيه:

$m(A\widehat{O}B) = 60^\circ$ ،$OB = 2x$ ،$OA = x$

$\overleftrightarrow{OC}$ متعامد مع المستوي OAB

(8) طول $\overline{AB}$ يساوي:

ⓐ x ⓑ $x\sqrt{2}$ ⓒ $x\sqrt{3}$ ⓓ $\frac{x}{2}$

(9) قياس الزاوية الزوجية $(AOC\ ,\overleftrightarrow{OC}\ ,BOC)$ هو:

ⓐ 30° ⓑ 45° ⓒ 60° ⓓ 90°

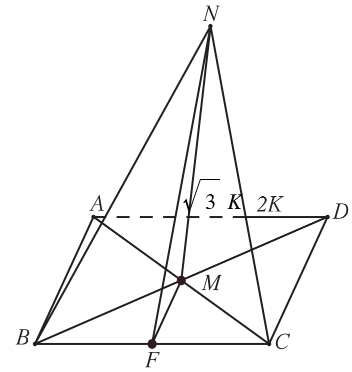
(10) في الشكل المقابل، المثلث DBC قائم الزاوية في B،

فإذا كان $\overleftrightarrow{AB}$ عمودي على (DBC) فإن الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{BD}$ هي:

ⓐ $D\widehat{B}C$ ⓑ $A\widehat{B}C$ ⓒ $A\widehat{B}D$ ⓓ $A\widehat{D}C$

59

3



نأخذ F منتصف $\overline{BC}$ فيكون $MF = \frac{AB}{2} = \frac{6k}{2} = 3k$

المثلث NMF قائم الزاوية في M

$N\widehat{F}M$ هي الزاوية المستوية بين $(NBC), (ABCD)$

لذا:

$$\tan(N\widehat{F}M) = \frac{\sqrt{3k}}{3k} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

وبالتالي: $m(N\widehat{F}M) = 30^\circ$

«تدريب(1)»

1 $\overleftrightarrow{AB}$

$\overline{FP} \subset \pi_1 , \overline{FP} \perp \overline{AB}$

$\overline{IP} \subset \pi_2 , \overline{IP} \perp \overline{AB}$

$\therefore$ $F\widehat{P}I$

2 $\overleftrightarrow{AB}$

$\overline{CB} \subset \pi_1 , \overline{CB} \perp \overline{AB}$

$\overline{GB} \subset \pi_2 , \overline{GB} \perp \overline{AB}$

$\therefore$ $G\widehat{B}C$

3 حافة الزاوية الزوجية هي $\overleftrightarrow{AB}$

$\overline{CM} \subset \pi_2 , \overline{CM} \perp \overline{AB}$

وكذلك $\overline{OM} \subset \pi_1 , \overline{OM} \perp \overline{AB}$

$\therefore$ $C\widehat{M}O$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين π_1 , π_2

4 حافة الزاوية الزوجية هي $\overleftrightarrow{AB}$

$\overline{CB} \subset \pi_1 , \overline{CB} \perp \overline{AB}$

وكذلك $(\overline{AB} \perp (FBC))$ $\overline{FB} \subset \pi_2 , \overline{FB} \perp \overline{AB}$

$\therefore$ $F\widehat{B}C$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين π_1 , π_2

10–5: المستويات المتعامدة

1 الأهداف

- يتعرف تعامد المستويات.
- يستخدم نظرية التعامد ونتيجتها في حل المسائل.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

مستويات متعامدة.

3 الأدوات والوسائل

نماذج مجسمات (مكعب، شبه مكعب، علبة) – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

دع الطلاب يشاهدون في غرفة الصف أو على نماذج المجسمات كيف يتعامد مستويان في الفضاء. اطلب إليهم قياس الزاوية بينهما:

- اسأل: هل يتغير قياس الزاوية إذا تغير موضع النقطة التي نقيس فيها الزاوية؟

5 التدريس

هناك طريقتان لإثبات تعامد مستويين.

الطريقة الأولى هي إذا كان مستقيم عموديًّا على مستوٍ فكل مستوٍ يمر بذلك المستقيم يكون عموديًّا على المستوي. أشر إلى أنه إذا كان مستقيم عموديًّا على مستوٍ فإن عددًا كبيرًا من المستويات يكون متعامدًا مع ذلك المستوي ويكفي أن تمرّ هذه المستويات في المستقيم.

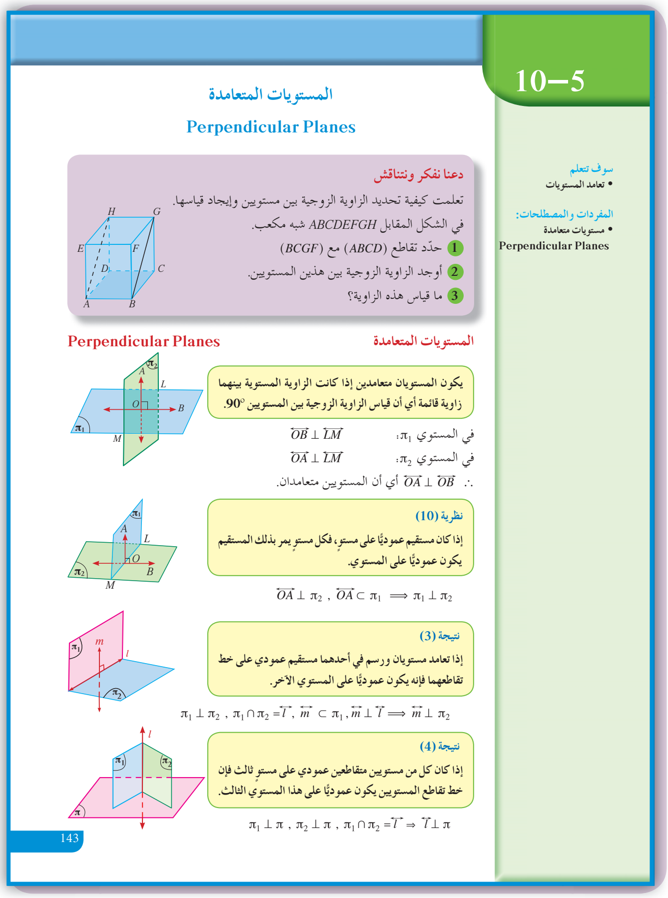
الطريقة الثانية هي أن يكون قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية يساوي 90°.

في المثال (1)

ذكّر الطلاب في هذا المثال بالخاصية: كل مستقيم يمر في مركز الدائرة وفي منتصف وتر يكون خط تناظر للدائرة وبالتالي يكون متعامدًا مع الوتر.

في المثال (2)

راجع مع الطلاب نظرية فيثاغورث وعكسها في المثلث القائم الزاوية. ارسم مثلثًا قائم الزاوية مع الخط العمودي النازل


10–5

سوف تتعلم
• تعامد المستويات

المفردات والمصطلحات:
• مستويات متعامدة
Perpendicular Planes

المستويات المتعامدة
Perpendicular Planes

دعنا نفكر ونتناقش
تعلمت كيفية تحديد الزاوية الزوجية بين مستويين وإيجاد قياسها.
في الشكل المقابل $ABCDEFGH$ شبه مكعب.
1 حدّد تقاطع $(ABCD)$ مع $(BCGF)$
2 أوجد الزاوية الزوجية بين هذين المستويين.
3 ما قياس هذه الزاوية؟

المستويات المتعامدة Perpendicular Planes

يكون المستويان متعامدين إذا كانت الزاوية المستوية بينهما زاوية قائمة أي أن قياس الزاوية الزوجية بين المستويين 90°.

في المستوى π_1: $\overline{OB} \perp \overleftrightarrow{LM}$
في المستوى π_2: $\overline{OA} \perp \overleftrightarrow{LM}$
$\therefore$ $\overline{OA} \perp \overline{OB}$ أي أن المستويين متعامدان.

نظرية (10)
إذا كان مستقيم عموديًا على مستوٍ، فكل مستوٍ يمر بذلك المستقيم يكون عموديًا على المستوي.

$\overleftrightarrow{OA} \perp \pi_2$, $\overleftrightarrow{OA} \subset \pi_1 \Longrightarrow \pi_1 \perp \pi_2$

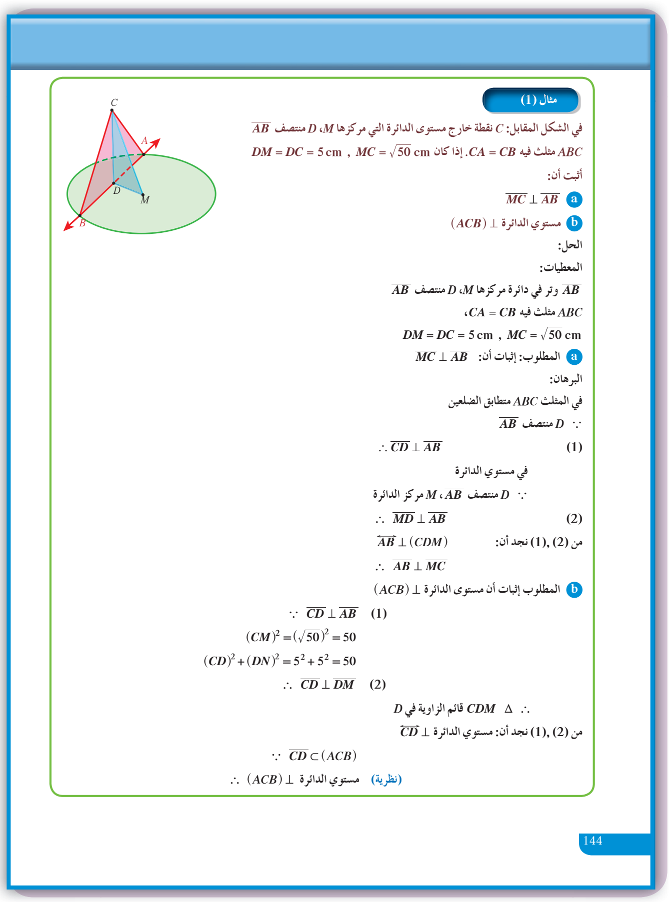
نتيجة (3)
إذا تعامد مستويان ورسم في أحدهما مستقيم عمودي على خط تقاطعهما فإنه يكون عموديًا على المستوي الآخر.

$\pi_1 \perp \pi_2$, $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l}$, $\overleftrightarrow{m} \subset \pi_1$, $\overleftrightarrow{m} \perp \overleftrightarrow{l} \Longrightarrow \overleftrightarrow{m} \perp \pi_2$

نتيجة (4)
إذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودي على مستوٍ ثالث فإن خط تقاطع المستويين يكون عموديًا على هذا المستوي الثالث.

$\pi_1 \perp \pi$, $\pi_2 \perp \pi$, $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l} \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \perp \pi$

143


مثال (1)
في الشكل المقابل: C نقطة خارج مستوى الدائرة التي مركزها M، D منتصف $\overline{AB}$، ABC مثلث فيه $CA = CB$. إذا كان $MC = \sqrt{50}$ cm ، $DM = DC = 5$ cm
أثبت أن:
a $\overline{MC} \perp \overline{AB}$
b مستوى الدائرة $\perp (ACB)$

الحل:
المعطيات:
$\overline{AB}$ وتر في دائرة مركزها M، D منتصف $\overline{AB}$
ABC مثلث فيه $CA = CB$،
$DM = DC = 5$ cm , $MC = \sqrt{50}$ cm
a المطلوب: إثبات أن: $\overline{MC} \perp \overline{AB}$
البرهان:
في المثلث ABC متطابق الضلعين
$\because$ D منتصف $\overline{AB}$
$\therefore \overline{CD} \perp \overline{AB}$ (1)
في مستوى الدائرة
$\because$ D منتصف $\overline{AB}$، M مركز الدائرة
$\therefore \overline{MD} \perp \overline{AB}$ (2)
من (1), (2) نجد أن: $\overleftrightarrow{AB} \perp (CDM)$
$\therefore \overline{AB} \perp \overline{MC}$
b المطلوب إثبات أن مستوى الدائرة $\perp (ACB)$
$\because \overline{CD} \perp \overline{AB}$ (1)
$(CM)^2 = (\sqrt{50})^2 = 50$
$(CD)^2 + (DN)^2 = 5^2 + 5^2 = 50$
$\therefore \overline{CD} \perp \overline{DM}$ (2)
$\therefore \triangle CDM$ قائم الزاوية في D
من (1), (2) نجد أن: $\overleftrightarrow{CD} \perp$ مستوى الدائرة
$\because \overline{CD} \subset (ACB)$
$\therefore (ACB) \perp$ مستوى الدائرة (نظرية)

144

من الزاوية القائمة إلى الوتر واطلب إليهم كتابة العلاقات التي يمكن استنتاجها من الرسم.

6 الربط

معظم الأشكال الهندسية القائمة مثل المكعب وشبه المكعب تتضمن العديد من المستويات المتعامدة.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

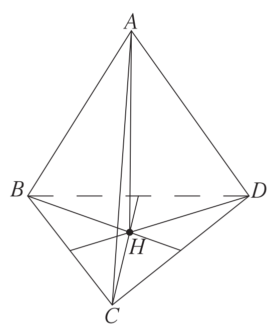
قد يخطئ بعض الطلاب باستنتاج تعامد مستويين من تعامد مستقيم مع مستقيم واحد في المستوي. راجع مع الطلاب شروط تعامد مستقيم ومستوٍ.

أشر إلى أنه لإثبات تعامد مستويين يكفي إيجاد مستقيم في أحد المستويين متعامد مع المستوي الآخر.

8 التقييم

راقب الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل» وتحقق من تمكنهم من النظرية والنتائج.

اختبار سريع



$ABCD$ هرم ثلاثي أوجهه مثلثات متطابقة الأضلاع.
ليكن H مركز القاعدة BCD.
أثبت تعامد المستويين AHC, BCD.

في الهرم ثلاثي القاعدة الذي أوجهه مثلثات متطابقة الأضلاع كل زوج من الأحرف المتقابلة هو متعامد لذا تكون $\overleftrightarrow{AH} \perp (BCD)$ وبالتالي كل مستوٍ يمر بالمستقيم AH هو عمودي على (BCD).

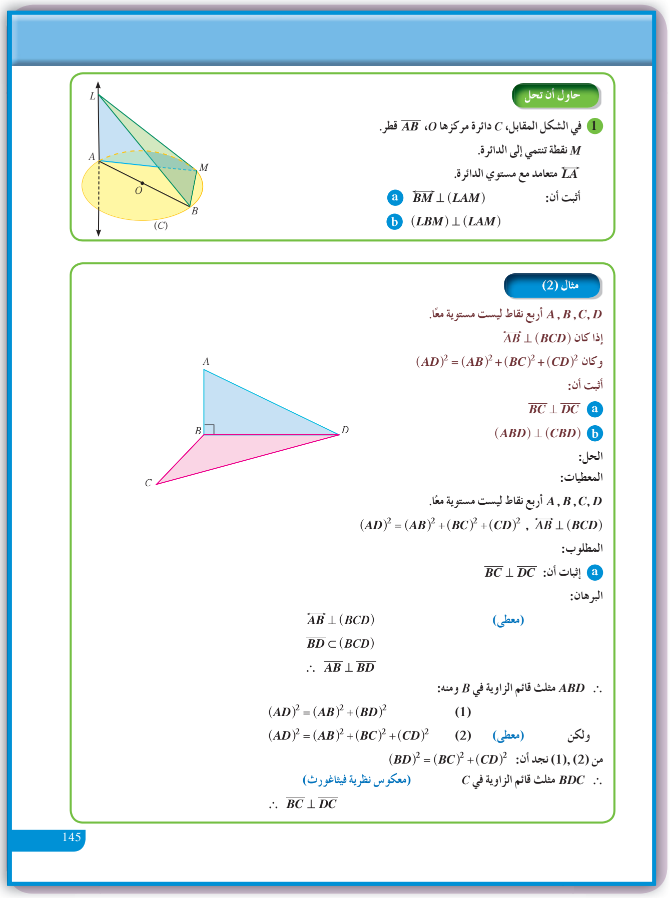
9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

1. $\overleftrightarrow{BC}$
2. $\overleftrightarrow{CB} \perp \overleftrightarrow{AB}$

   $\overleftrightarrow{FB} \perp \overleftrightarrow{AB}$

   الزاوية الزوجية هي $(F\widehat{B}C)$
3. $m(F\widehat{B}C) = \frac{\pi}{2}$



حاول أن تحل

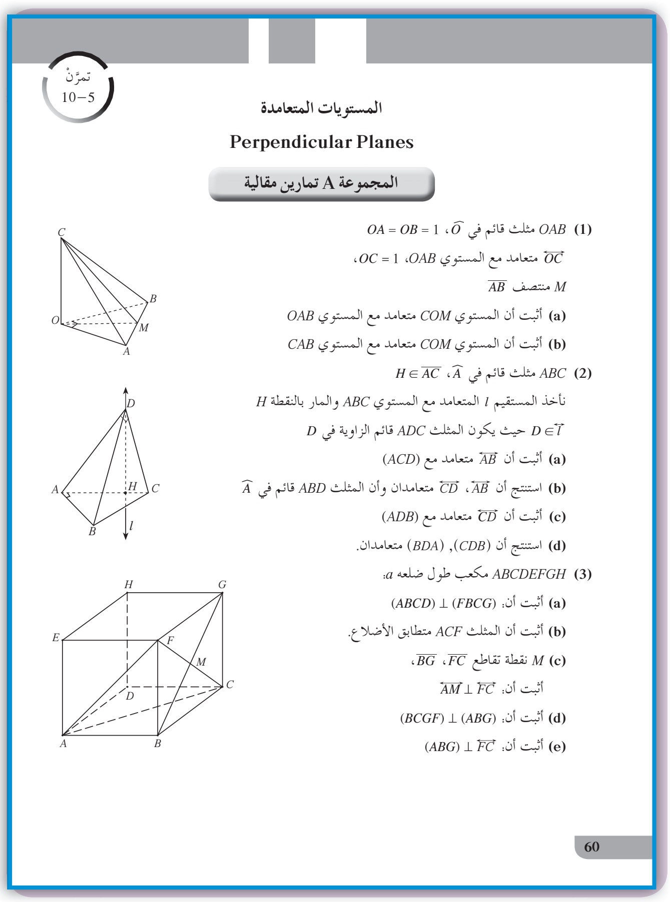
1 في الشكل المقابل، C دائرة مركزها O، $\overline{AB}$ قطر.
M نقطة تنتمي إلى الدائرة.
$\overleftrightarrow{LA}$ متعامد مع مستوي الدائرة.
أثبت أن:
a $\overleftrightarrow{BM} \perp (LAM)$
b $(LBM) \perp (LAM)$

مثال (2)

A, B, C, D أربع نقاط ليست مستوية معًا.
إذا كان $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$
وكان $(AD)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2$
أثبت أن:
a $\overline{BC} \perp \overline{DC}$
b $(ABD) \perp (CBD)$

الحل:
المعطيات:
A, B, C, D أربع نقاط ليست مستوية معًا.
$(AD)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2$, $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$
المطلوب:
a إثبات أن: $\overline{BC} \perp \overline{DC}$
البرهان:
$\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$ (معطى)
$\overline{BD} \subset (BCD)$
$\therefore\ \overline{AB} \perp \overline{BD}$
$\therefore$ ABD مثلث قائم الزاوية في B ومنه:
(1) $(AD)^2 = (AB)^2 + (BD)^2$
ولكن (معطى) (2) $(AD)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2$
من (1), (2) نجد أن: $(BD)^2 = (BC)^2 + (CD)^2$
$\therefore$ BDC مثلث قائم الزاوية في C (معكوس نظرية فيثاغورث)
$\therefore\ \overline{BC} \perp \overline{DC}$

145



تمرَّنْ 10–5

المستويات المتعامدة

Perpendicular Planes

المجموعة A تمارين مقالية

(1) OAB مثلث قائم في $\widehat{O}$، $OA = OB = 1$
$\overleftrightarrow{OC}$ متعامد مع المستوي OAB، $OC = 1$،
M منتصف $\overline{AB}$
(a) أثبت أن المستوي COM متعامد مع المستوي OAB
(b) أثبت أن المستوي COM متعامد مع المستوي CAB

(2) ABC مثلث قائم في $\widehat{A}$، $H \in \overline{AC}$
نأخذ المستقيم l المتعامد مع المستوي ABC والمار بالنقطة H
$D \in \overleftrightarrow{l}$ حيث يكون المثلث ADC قائم الزاوية في D
(a) أثبت أن $\overleftrightarrow{AB}$ متعامد مع (ACD)
(b) استنتج أن $\overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{CD}$ متعامدان وأن المثلث ABD قائم في $\widehat{A}$
(c) أثبت أن $\overleftrightarrow{CD}$ متعامد مع (ADB)
(d) استنتج أن (CDB), (BDA) متعامدان.

(3) $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه a:
(a) أثبت أن: $(ABCD) \perp (FBCG)$
(b) أثبت أن المثلث ACF متطابق الأضلاع.
(c) M نقطة تقاطع $\overline{FC}$، $\overline{BG}$،
أثبت أن: $\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{FC}$
(d) أثبت أن: $(BCGF) \perp (ABG)$
(e) أثبت أن: $(ABG) \perp \overleftrightarrow{FC}$

60

«حاول أن تحل»

1 **(a)** $\overline{AB}$ قطر في الدائرة $\therefore$ ΔABM قائم في $\widehat{M}$.

$\overleftrightarrow{MB} \perp \overleftrightarrow{MA}$ (1)

$\overleftrightarrow{LA}$ متعامد مع مستوي الدائرة

$\therefore$ $\overleftrightarrow{LA} \perp \overleftrightarrow{MB}$ (2)

من (1), (2) نستنتج أن $\overleftrightarrow{BM} \perp (LAM)$

(b) (LMB) يحتوي المستقيم $\overleftrightarrow{BM}$

$\overleftrightarrow{BM} \perp (LAM)$

$\therefore$ $(LBM) \perp (LAM)$

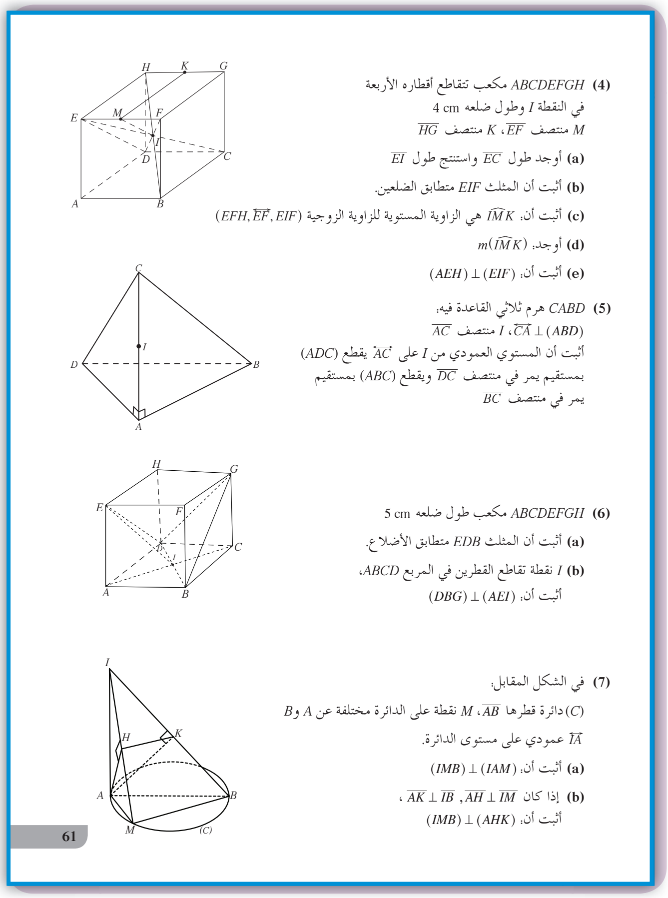
2 **(a)** $\overline{AK} \perp \overleftrightarrow{\ell}$, $\overline{AE} \perp \overleftrightarrow{\ell}$

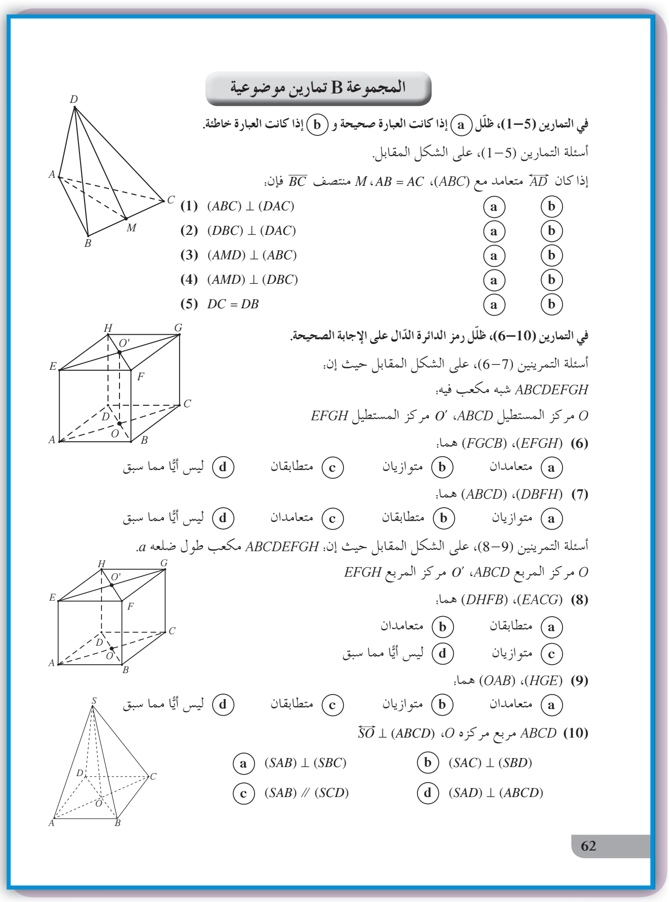
$\therefore$ $\overleftrightarrow{\ell} \perp (AEK) \Longrightarrow \overleftrightarrow{\ell} \perp \overline{EK}$

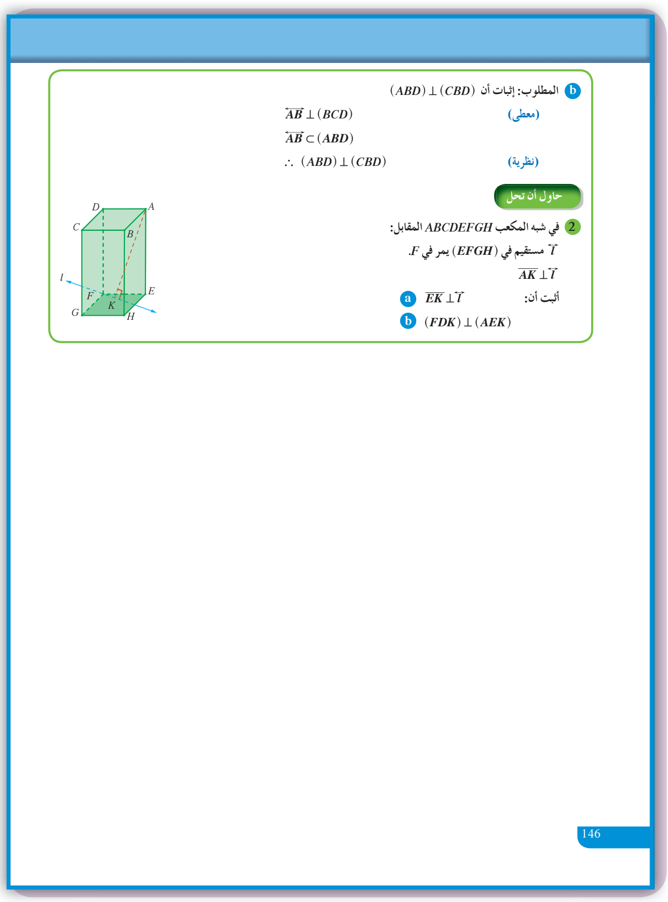
(b) $\overleftrightarrow{\ell} \subset (FDK)$

ولكن $\overleftrightarrow{\ell} \perp (AEK)$

لذا: $(FDK) \perp (AEK)$


(4) $ABCDEFGH$ مكعب تتقاطع أقطاره الأربعة في النقطة I وطول ضلعه 4 cm
M منتصف $\overline{EF}$، K منتصف $\overline{HG}$
(a) أوجد طول $\overline{EC}$ واستنتج طول $\overline{EI}$
(b) أثبت أن المثلث EIF متطابق الضلعين.
(c) أثبت أن: $\widehat{IMK}$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(EFH, \overleftrightarrow{EF}, EIF)$
(d) أوجد: $m(\widehat{IMK})$
(e) أثبت أن: $(AEH) \perp (EIF)$
(5) $CABD$ هرم ثلاثي القاعدة فيه:
$\overleftrightarrow{CA} \perp (ABD)$، I منتصف $\overline{AC}$
أثبت أن المستوي العمودي من I على $\overleftrightarrow{AC}$ يقطع (ADC) بمستقيم يمر في منتصف $\overline{DC}$ ويقطع (ABC) بمستقيم يمر في منتصف $\overline{BC}$
(6) $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه 5 cm
(a) أثبت أن المثلث EDB متطابق الأضلاع.
(b) I نقطة تقاطع القطرين في المربع $ABCD$،
أثبت أن: $(DBG) \perp (AEI)$
(7) في الشكل المقابل:
(C) دائرة قطرها $\overline{AB}$، M نقطة على الدائرة مختلفة عن A و B
$\overleftrightarrow{IA}$ عمودي على مستوى الدائرة.
(a) أثبت أن: $(IMB) \perp (IAM)$
(b) إذا كان $\overline{AH} \perp \overline{IM}$, $\overline{AK} \perp \overline{IB}$،
أثبت أن: $(IMB) \perp (AHK)$
61

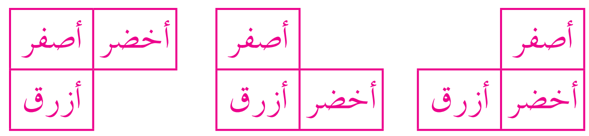

المجموعة B تمارين موضوعية
في التمارين (1—5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.
أسئلة التمارين (1—5)، على الشكل المقابل.
إذا كان $\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع (ABC)، $AB = AC$، M منتصف $\overline{BC}$ فإن:
(1) $(ABC) \perp (DAC)$ (a) (b)
(2) $(DBC) \perp (DAC)$ (a) (b)
(3) $(AMD) \perp (ABC)$ (a) (b)
(4) $(AMD) \perp (DBC)$ (a) (b)
(5) $DC = DB$ (a) (b)
في التمارين (6—10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.
أسئلة التمرينين (6—7)، على الشكل المقابل حيث إن:
$ABCDEFGH$ شبه مكعب فيه:
O مركز المستطيل $ABCD$، O' مركز المستطيل $EFGH$
(6) $(EFGH)$، $(FGCB)$ هما:
(a) متعامدان (b) متوازيان (c) متطابقان (d) ليس أيًّا مما سبق
(7) $(DBFH)$، $(ABCD)$ هما:
(a) متوازيان (b) متطابقان (c) متعامدان (d) ليس أيًّا مما سبق
أسئلة التمرينين (8—9)، على الشكل المقابل حيث إن: $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه a.
O مركز المربع $ABCD$، O' مركز المربع $EFGH$
(8) $(EACG)$، $(DHFB)$ هما:
(a) متطابقان (b) متعامدان
(c) متوازيان (d) ليس أيًّا مما سبق
(9) (HGE)، (OAB) هما:
(a) متعامدان (b) متوازيان (c) متطابقان (d) ليس أيًّا مما سبق
(10) $ABCD$ مربع مركزه O، $\overleftrightarrow{SO} \perp (ABCD)$
(a) $(SAB) \perp (SBC)$ (b) $(SAC) \perp (SBD)$
(c) $(SAB) \parallel (SCD)$ (d) $(SAD) \perp (ABCD)$
62


b المطلوب: إثبات أن $(ABD) \perp (CBD)$
(معطى) $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$
$\overleftrightarrow{AB} \subset (ABD)$
(نظرية) $\therefore$ $(ABD) \perp (CBD)$
حاول أن تحل
2 في شبه المكعب $ABCDEFGH$ المقابل:
$\overleftrightarrow{l}$ مستقيم في $(EFGH)$ يمر في F.
$\overline{AK} \perp \overleftrightarrow{l}$
أثبت أن:
a $\overline{EK} \perp \overleftrightarrow{l}$
b $(FDK) \perp (AEK)$
146

المرشد لحل المسائل

إجابة «مسائل إضافية»

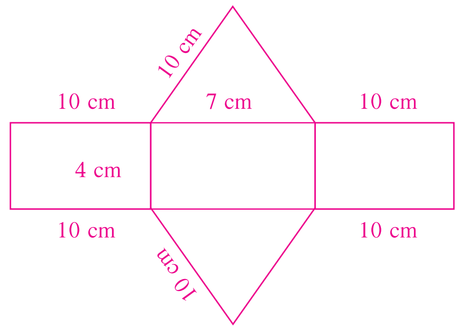
1

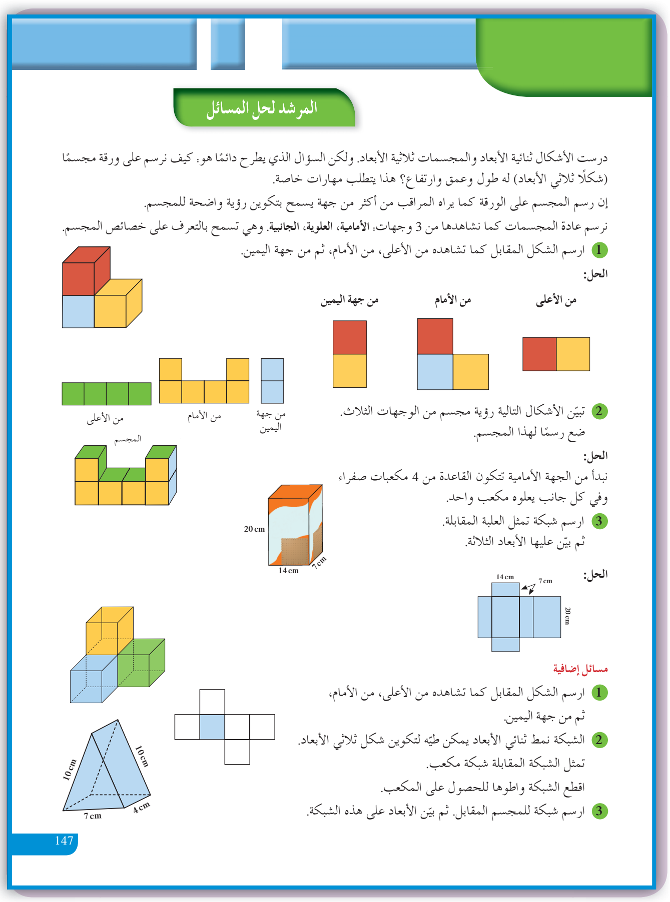


من جهة اليمين　　من الأمام　　من الأعلى

2 تحقق من عمل الطلاب.

3





المرشد لحل المسائل

درست الأشكال ثنائية الأبعاد والمجسمات ثلاثية الأبعاد. ولكن السؤال الذي يطرح دائمًا هو: كيف نرسم على ورقة مجسمًا (شكلًا ثلاثي الأبعاد) له طول وعمق وارتفاع؟ هذا يتطلب مهارات خاصة.

إن رسم المجسم على الورقة كما يراه المراقب من أكثر من جهة يسمح بتكوين رؤية واضحة للمجسم.

نرسم عادة المجسمات كما نشاهدها من 3 وجهات: **الأمامية، العلوية، الجانبية**. وهي تسمح بالتعرف على خصائص المجسم.

1 ارسم الشكل المقابل كما تشاهده من الأعلى، من الأمام، ثم من جهة اليمين.

الحل:

من جهة اليمين　　من الأمام　　من الأعلى

2 تبيّن الأشكال التالية رؤية مجسم من الوجهات الثلاث. ضع رسمًا لهذا المجسم.

من الأعلى　　من الأمام　　من جهة اليمين

المجسم

الحل:

نبدأ من الجهة الأمامية تتكون القاعدة من 4 مكعبات صفراء وفي كل جانب يعلوه مكعب واحد.

3 ارسم شبكة تمثل العلبة المقابلة. ثم بيّن عليها الأبعاد الثلاثة.

20 cm　14 cm　7 cm

الحل:

14 cm　7 cm　20 cm

مسائل إضافية

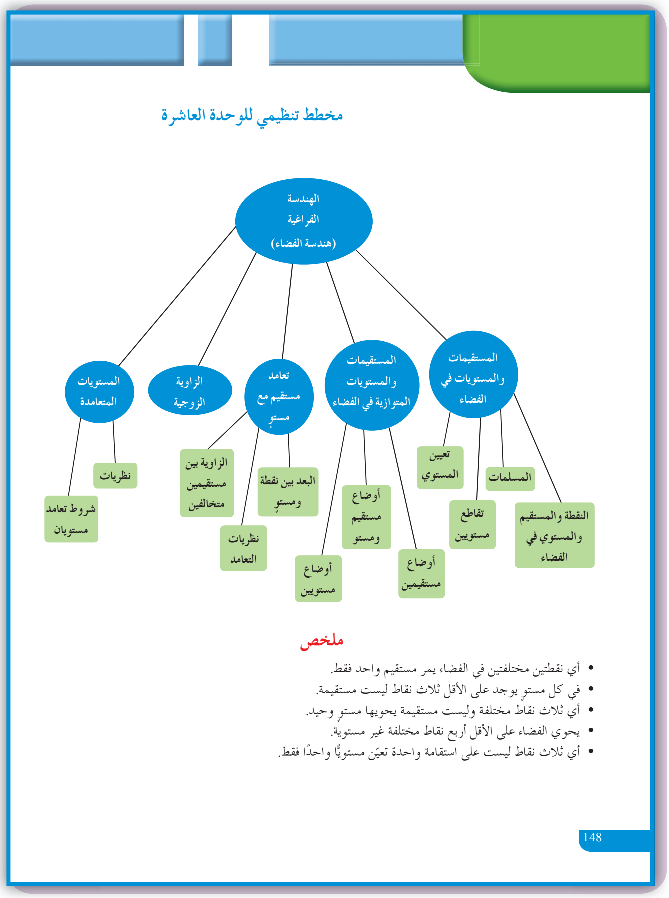
1 ارسم الشكل المقابل كما تشاهده من الأعلى، من الأمام، ثم من جهة اليمين.

2 الشبكة نمط ثنائي الأبعاد يمكن طيّه لتكوين شكل ثلاثي الأبعاد. تمثل الشبكة المقابلة شبكة مكعب. اقطع الشبكة واطوها للحصول على المكعب.

3 ارسم شبكة للمجسم المقابل. ثم بيّن الأبعاد على هذه الشبكة.

10 cm　10 cm　7 cm　4 cm

147



مخطط تنظيمي للوحدة العاشرة

ملخص

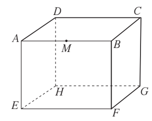
- أي نقطتين مختلفتين في الفضاء يمر مستقيم واحد فقط.
- في كل مستوٍ يوجد على الأقل ثلاث نقاط ليست مستقيمة.
- أي ثلاث نقاط مختلفة وليست مستقيمة يحويها مستوٍ وحيد.
- يحوي الفضاء على الأقل أربع نقاط مختلفة غير مستوية.
- أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تعيّن مستويًّا واحدًا فقط.

148

- أي مستقيم ونقطة خارجة عنه يعيّنان مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيمان متقاطعان يعيّنان مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيمان متوازيان مختلفان يعيّنان مستويًا واحدًا فقط.
- يكون مستقيمان في الفضاء:
  - **(i)** متقاطعين إذا كان بينهما نقطة واحدة مشتركة.
  - **(ii)** متوازيين إذا كانا في مستوٍ واحد وكانا غير متقاطعين.
  - **(iii)** متخالفين إذا كان لا يحويهما مستوٍ واحد.
- المستقيم موازٍ للمستوي إذا لم يكن بينهما نقاط مشتركة.
- المستقيم يقطع المستوي إذا كان بينهما نقطة واحدة مشتركة.
- المستقيم يقع في المستوي إذا كان بينهما نقطتين مختلفتين على الأقل.
- يتقاطع مستويان في خط مستقيم.
- إذا وازى مستقيم خارج مستوٍ مستقيمًا في المستوي، فإنه يوازي المستوي.
- إذا قطع مستوٍ مستويين متوازيين فإن خطي تقاطعه معهما يكونان متوازيين.
- يكون $\overleftrightarrow{l}$ عموديًّا على المستوي π إذا كان $\overleftrightarrow{l}$ عموديًّا على جميع المستقيمات الواقعة في المستوي.
- المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين يكون عموديًّا على مستوييهما.
- جميع المستقيمات العمودية على مستقيم معلوم من نقطة تنتمي إلى هذا المستقيم تكون محتواة في مستوٍ واحد عموديًّا على المستقيم المعلوم.
- إذا كان مستقيم عموديًّا على كل من مستويين فإنهما يكونان متوازيين.
- إذا كان مستقيم عموديًّا على أحد مستويين متوازيين فإنه يكون عموديًّا على المستوي الآخر.
- المستقيمان العموديان على مستوٍ متوازيان.
- إذا توازى مستقيمان أحدهما عمودي على مستوٍ كان المستقيم الآخر عموديًّا على المستوي أيضًا.
- الزاوية المستوية لزاوية زوجية هي الزاوية التي تنشأ من تقاطع الزاوية الزوجية مع مستوٍ عمودي على حافتها.
- يكون مستويان متعامدين إذا كانت الزاوية المستوية الزوجية بينهما زاوية قائمة.
- إذا كان مستقيم عموديًّا على مستوٍ، فكل مستوٍ يمر بذلك المستقيم يكون عموديًّا على المستوي.

149

اختبار الوحدة العاشرة

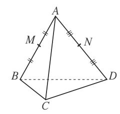


(1) $ABCDEFGH$ مكعب، M منتصف $\overline{AB}$

(a) هل $\overleftrightarrow{AB}$ والنقطة M تعينان مستويًا واحدًا؟

(b) هل $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{GH}$ يعينان مستويًا واحدًا؟

(c) سمّ ثلاثة مستويات تحتوي كل منها على النقطة M



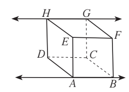
(2) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة. النقطة M منتصف $\overline{AB}$ والنقطة N منتصف $\overline{AD}$

أكمل:

(a) $\overleftrightarrow{BD}$ .... $\overleftrightarrow{NM}$

(b) $(ABD) \cap (CNM) =$ ....

(c) $(CNB) \cap (ABD) =$ ....

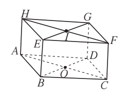


(3) $ABCDEFGH$ شبه مكعب.

(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

(b) أثبت أن: $BDHF$ هو مستطيل.

(c) أثبت أن: $\overleftrightarrow{HF}$ موازٍ للمستوي $ABCD$



(4) $ABCDEFGH$ شبه مكعب.

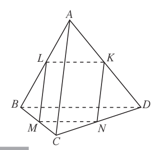
النقطة O مركز المربع $ABCD$،

النقطة I مركز المربع $EFGH$

(a) أثبت أن النقاط: D، G، E تقع في المستوي $EGDB$

(b) أكمل: $(BEGD) \cap (AHFC) =$ ....

(c) أثبت أن: $\overleftrightarrow{AH} \parallel \overleftrightarrow{CF} \parallel \overleftrightarrow{OI}$



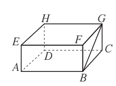
(5) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة؛ L منتصف $\overline{AB}$، M منتصف $\overline{CB}$،

N منتصف $\overline{CD}$، K منتصف $\overline{AD}$

(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{NK} \parallel \overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{LM}$

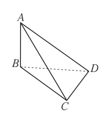
(b) أثبت أن: $KLMN$ هو متوازي أضلاع.

(c) أثبت أن: $\overleftrightarrow{NL}$ يتقاطع مع $\overleftrightarrow{KM}$



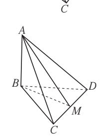
(6) $ABCDEFGH$ شبه مكعب.

أثبت أن: $\overleftrightarrow{GH}$ متعامد مع $\overleftrightarrow{GB}$



(7) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة $BC = BD$، $\overleftrightarrow{AB}$ متعامد مع المستوي BCD

أثبت أن: $m(A\widehat{C}B) = m(A\widehat{D}B)$

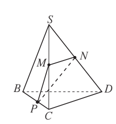


(8) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة، قاعدته BCD مثلث متطابق الأضلاع، $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$؛

M منتصف $\overline{CD}$

(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{DC} \perp (ABM)$

(b) استنتج أن: $\overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{AM}$

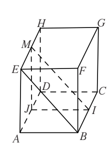


(9) $SBCD$ هرم ثلاثي قاعدته BCD، M منتصف $\overline{SC}$، N منتصف $\overline{SD}$ ، P نقطة على $\overline{BC}$

(a) أثبت أن $\overleftrightarrow{MN}$ موازٍ للمستوي BCD

(b) (PMN) يقطع $\overleftrightarrow{BD}$ في النقطة L

أثبت أن: $\overleftrightarrow{PL} \parallel \overleftrightarrow{CD}$



(10) $ABCDEFGH$ مكعب. I منتصف $\overline{BC}$،

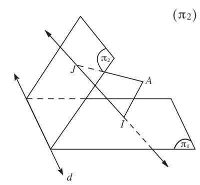
J منتصف $\overline{AD}$، M منتصف $\overline{EH}$

(a) أثبت أن $\overline{AD} \perp (IJM)$

(b) أثبت أن $\overline{AD} \perp (AEB)$

(c) أثبت أن (IJM)، (ABE) متوازيان

(d) أثبت أن: $\overline{IJ} \perp (ADHE)$



(11) (π_1) ، (π_2) يتقاطعان في $\vec{d}$، A نقطة خارج (π_1) وخارج (π_2)

$\overleftrightarrow{AI} \perp (\pi_1)$ ، $\overleftrightarrow{AJ} \perp (\pi_2)$

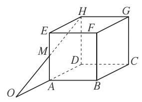
(a) أثبت أن $(AIJ) \perp (\pi_1)$

وأن $(AIJ) \perp (\pi_2)$

(b) أثبت أن $\vec{d} \perp (AIJ)$

(c) أثبت أن: $\vec{d} \perp \overleftrightarrow{IJ}$

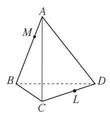
تمارين إثرائية



(1) $ABCDEFGH$ مكعب، M منتصف AE

$\overleftrightarrow{HM}$ يقطع المستوي $ABCD$ في O

أثبت أن النقاط A, D, O تقع على استقامة واحدة.

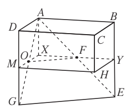


(2) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.

النقطة M تنتمي إلى $\overline{AB}$ وتنتمي النقطة L إلى $\overline{CD}$

(a) أثبت أن L تنتمي إلى كل من (ABL)، (CDM)

(b) أكمل: .... $= (ABL) \cap (CDM)$



(3) $ABCDXYHM$ شبه مكعب،

O منتصف $\overline{XM}$، F منتصف $\overline{XY}$

$\overleftrightarrow{DM}$، $\overleftrightarrow{AO}$ يتقاطعان في G

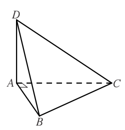
$\overleftrightarrow{BY}$، $\overleftrightarrow{AF}$ يتقاطعان في E

(a) أثبت أن النقطة O هي منتصف $\overline{AG}$

(b) أثبت أن النقطة F هي منتصف $\overline{AE}$

(c) أثبت أن: $\overleftrightarrow{OF} \parallel \overleftrightarrow{EG}$

(d) أثبت أن: $\overleftrightarrow{EG}$ يوازي المستوي $XYHM$

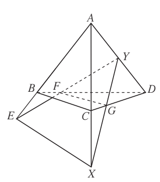


(4) $DABC$ هرم فيه المثلثات ABC ، ACD ، ABD قائمة الزاوية في A

(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$

(b) استنتج أن: $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AD}$

(c) أثبت أن: $\overleftrightarrow{AB} \perp (ADC)$



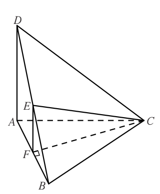
(5) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.

$Y \in \overline{AD}$, $\overleftrightarrow{FG} \parallel \overleftrightarrow{BC}$

$\overleftrightarrow{FY}$ يقطع $\overleftrightarrow{AB}$ في E، $\overleftrightarrow{GY}$ يقطع $\overleftrightarrow{AC}$ في X

(a) أثبت أن: $(ABC) \cap (FYG) = \overleftrightarrow{XE}$

(b) أثبت أن: $\overleftrightarrow{XE} \parallel \overleftrightarrow{FG}$



(6) ABC مثلث متطابق الأضلاع.

$\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع المستوي ABC

F منتصف $\overline{AB}$

(a) أثبت أن: $\overline{CF}$ متعامد مع المستوي DAB

(b) أثبت أن: $\overleftrightarrow{CF}$ متعامد مع $\overleftrightarrow{BD}$

(c) أثبت أن: (ABC) متعامد مع (ABD)

(d) ليكن $\overleftrightarrow{FE}$ متعامدًا مع $\overleftrightarrow{BD}$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{CE}$ متعامد مع $\overleftrightarrow{BD}$

(e) إذا كان: $FE = 4\,\text{cm}, CE = 6\,\text{cm}$

فأوجد قياس الزاوية الزوجية $(DBA, \overleftrightarrow{DB}, DBC)$

الوحدة الحادية عشرة: الجبر المتقطع Discrete Algebra

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

1 – 11: مبدأ العد والتباديل والتوافيق

جزء 1: مبدأ العد.

جزء 2: التباديل

جزء 3: التوافيق.

2 – 11: نظرية ذات الحدين

جزء 1: مفكوك ذات الحدين.

جزء 2: مثلث باسكال.

جزء 3: نظرية ذات الحدين.

جزء 4: خواص نظرية ذات الحدين.

3 – 11: الاحتمال

جزء 1: التجربة العشوائية وفضاء العينة.

جزء 2: أنواع الأحداث.

جزء 3: خواص الاحتمال.

جزء 4: احتمال ذات الحدين.

مقدمة الوحدة

يعتبر الجبر المتقطع فرعًا مهمًّا جدًّا في مجال الرياضيات المتقطعة. يتضمن الجبر المتقطع:

- الجبر البولياني (Boolean Algebra) المستخدم في توزيع الدارة الكهربائية والبرمجة.
- الجبر المرتبط المستخدم في قواعد البيانات.
- الجبر المنتهي والذي يتناول دراسة الزمر (Groups)، الحلقات (Rings) والحقول (Fields).
- نظرية المجموعات (Sets Theory) التي تهتم بتجميع العناصر المنتهية مثل {أحمر، أخضر، أصفر} أو غير المنتهية مثل الأعداد الكلية.
- التباديل والتوافيق تستخدم في عملية العد وهي طرائق ترتكز على اختيار عدد من العناصر وإذا أُخذ بالاعتبار ترتيب موقع كل عنصر في هذا الاختيارتسمى بعملية (التباديل) ومن جهة ثانية إذا لم يأخذ بالاعتبار ترتيب موقع العنصر في هذا الاختيار تسمى العملية (التوافيق).
- الاحتمال وهو يستخدم لدراسة أحداث معينة تظهر في فضاء عينة محددة، مثل احتمال الحصول على عدد أصغر من 3 عند إلقاء حجر النرد.

ولكن من أين بدأت فكرة الجبر المتقطع؟

في سنة 1852 م طرح فرنسيس غوثري المسألة التالية وقد عرفت في ما بعد بـ «مسألة الألوان الأربعة»: هل من الممكن تلوين أي خريطة جغرافية للدول باستخدام أربعة ألوان فقط بشرط أساسي وهو ألا نلوّن دولتين متجاورتين بالألوان نفسها؟

الوحدة
الحادية عشرة

الجبر المتقطع

Discrete Algebra

مشروع الوحدة: لوحة غالتون (Galton).

1 مقدمة المشروع: هي آلة اخترعها السير فرنسيس غالتون Galton (1911–1822).
وتتألف من لوحة مستطيلة الشكل غرزت فيها مسامير على مسافات متساوية ومرتبة كما في الشكل.
بحيث إذا أفلتت كرة ما على هذه اللوحة، فهي لا بد من أن تمر إما عن يمين مسمار أو عن يساره، ولكلتا الحالتين الاحتمال نفسه، حيث إنها تنهي مسارها بوصولها إلى إحدى الخانات الموجودة في أسفل هذه اللوحة.

2 الهدف: إيجاد ومقارنة احتمال وصول الكرة إلى كل خانة من الخانات.

3 اللوازم: ورق مقوى، لوحة خشبية، مسامير، أقلام تلوين، كرات متماثلة، مادة لاصقة، حاسوب، جهاز إسقاط (Data Show).

4 أسئلة حول التطبيق:

a ارسم مخطط الشجرة البيانية ممثلًا كل الطرق التي يمكن أن تسلكها الكرة عند إفلاتها من أعلى اللوحة (أي من أعلى النقطة A).

b نفذ لوحة غالتون أي اللوحة المبينة أعلاه.

c أفلت كرة من أعلى النقطة A، ثم دوّن رقم الخانة التي تقع فيها. كرر العملية نفسها 49 مرّة.

d ارسم تمثيلًا بيانيًّا بالأعمدة يبيّن النسب المئوية لوقوع الكرة في كل خانة من الخانات المرقمة من صفر إلى أربعة.

e مستخدمًا مخطط الشجرة البيانية، أوجد احتمال سقوط الكرة في كل خانة من الخانات الخمس.

f قارن بين الاحتمال الذي وجدته والنسب المئوية التي حصلت عليها في d .

إذا كنت متمكنًا من البرمجة، ضع برنامجًا على الحاسوب يحاكي لوحة غالتون التي صنعتها، ثم ارسم تمثيلًا بيانيًّا بالأعمدة يبيّن النسب المئوية إذا أفلتت الكرة 500 مرّة، وقارن النسب التي حصلت عليها بما حصلت عليه في e .

5 التقرير: ضعْ تقريرًا مفصلًا حول تنفيذ المشروع مستفيدًا من دروس الوحدة.
اعرض اللوحة التي نفذتها، وضع ملصقًا يبيّن التمثيل البياني الذي رسمته.

نموذج لآلة غالتون

دروس الوحدة

11-1	11-2	11-3
مبدأ العد والتباديل والتوافيق	نظرية ذات الحدين	الاحتمال

150

لقد اهتم الرياضيون كثيرًا بهذه المسألة واستمروا في محاولة حلها بعمل جماعي وجهد متواصل لمدة 124 سنة، حيث توصلوا إلى برهان أثار كثيرًا من النقاشات لأنه ألحق أضرارًا بمفهوم البرهان الرياضي كونهم استخدموا الحاسوب ليجدوا الحل في سنة 1976 م. وهنا لا بد من الإشارة إلى أن عالمي الرياضيات آبل وهاكن توصلا إلى الحل باستخدام عمليات حسابية معقدة، حيث إن الخطوة الأخيرة في البرهان تطلبت ثلاثة من الحواسيب السريعة ولمدة 1 200 ساعة.

مشروع الوحدة

يتناول مشروع الوحدة آلة بسيطة يمكن استخدامها لإيجاد احتمال لحدث معين. والمطلوب في هذا المشروع استخدام طرائق متعددة لإيجاد الاحتمال منها طريقة العد وطريقة مخطط الشجرة البيانية.

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

تتنوّع بحسب مسار الكرة على اللوحة.

(تحقق من إجابات الطلاب).

التقرير

يجب أن يتضمن التقرير شرحًا مفصلًا لكل الخطوات المتبعة والطرائق المستخدمة لإيجاد النواتج الممكنة ونواتج الحدث الملائم. كما يجب أن يتضمن التمثيل البياني بالأعمدة.

اعرض تقريرك أمام زملائك في الصف. ناقش معهم النواتج كافة التي حصلت عليها. استمع جيدًا إلى ملاحظاتهم.

أعد النظر في بعض الحسابات والنتائج إذا كان ذلك ضروريًّا.

الوحدة الحادية عشرة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت رسم مخطط الشجرة البيانية واستخدامه في العد.
- تعرفت طرائق العد ومنها التباديل والتوافيق.
- حللت مسائل باستخدام طرائق العد.
- تعرفت الاحتمالات المشروطة.

ماذا سوف تتعلم؟

- حل مسائل باستخدام مبدأ العد والتباديل والتوافيق.
- استخدام مثلث باسكال.
- استخدام نظرية ذات الحدين.
- تتعرف التجربة العشوائية وفضاء العينة.
- تعيين احتمالات بعض الأحداث.
- تعيين احتمال ذات الحدّين.

المصطلحات الأساسية

مبدأ العد – التباديل – الحالة الخاصة – التوافيق – مفكوك ذات الحدين – مثلث باسكال – نظرية ذات الحدين – التجربة العشوائية – فضاء العينة – الحدث – الحدث البسيط – الحدث المركب – الحدث المستحيل – الحدث المؤكد – الحدثان المتنافيان – الحدث المتمم – الحدثان المستقلان – التقاطع – الاتحاد – المتمم – احتمال ذات الحدين.

أضف إلى معلوماتك

قام عالم الرياضيات السويسري جاكوب برنولي Jacob Bernouilli (1667–1784) بدراسة التجارب العشوائية المستقلة لأول مرة وذلك في كتابه «فن الحدس Ars Conjectandi»، الذي نشره حفيده نقولا Nicolas بعد 8 سنوات من وفاته.

يبيّن برنويي النتيجة التالية: إن تكرار ظهور ناتج في جملة تجارب يقترب كثيرًا من احتمال حدوث هذا الحدث.

على سبيل المثال، إذا رميت مكعبًا منتظمًا مرقمًا، فإن احتمال ظهور الرقم 2 هو $\frac{1}{6}$. إذا كررنا رميه المكعب عددًا n كبيرًا من المرات فإنه من شبه المؤكد أن ظهور الرقم 2 هو m من المرات يحقق العلاقة $\frac{m}{n} = \frac{1}{6}$.

وقد سُمِّي هذا التعبير الرياضي بقانون الأعداد الكبيرة.

أما حاليًّا فتستخدم المحاكاة على الحاسوب للتحقق مما جاء في كتاب برنولي.

151

سلّم التقييم

4	جميع الطرائق دقيقة وهادفة – الحسابات صحيحة – التمثيل البياني واضح ودقيق – التقرير مفصل وواضح ويعبر عن جهد كبير.
3	معظم الطرائق دقيقة – أخطاء طفيفة في الحسابات – التمثيل البياني واضح – التقرير مفصل ولكن ينقصه بعض الوضوح.
2	بعض الطرائق دقيق – أخطاء كثيرة في الحسابات – التمثيل البياني غير واضح – التقرير مبهم وبحاجة إلى تنظيم ووضوح.
1	معظم عناصر المشروع ناقصة وبحاجة إلى إعادة.

11–1: مبدأ العد والتباديل والتوافيق

1 الأهداف

- يستخدم مبدأ العد في حل مسائل.
- يستخدم التباديل والتوافيق لعد الطرائق الممكنة والطرائق الملائمة لحدث معين.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

مبدأ العد – التباديل – التوافيق – قانون التباديل – قانون التوافيق – المضروب.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

استخدم الآلة الحاسبة لتوجد ما يلي:

(a) $7!\ ,\ 9!\ ,\ \dfrac{12!}{8!}$

(b) أوجد الأزواج المرتبة بين عناصر $X \times Y$،
حيث $X = \{a, b, c\},\ Y = \{1, 2\}$

(c) نأخذ المجموعة: $H = \{a, b, c, d\}$،
اكتب كل المجموعات الجزئية من H المؤلفة من عنصرين.

(d) نأخذ المجموعة: $X = \{1, 2, 3\}$،
اكتب كل الأزواج المرتبة من X.

5 التدريس

يعتبر هذا الدرس مدخلاً مهمًّا للطلاب بحيث إنه يوفر لهم فرصة لاختبار قدراتهم في فهم عملية العد ضمن مجموعة من عناصر عددها محدود وذلك بشروط واضحة تعبّر عن حدث معيّن.

11–1

مبدأ العد والتباديل والتوافيق

Counting Principle, Permutations and Combinations

سوف تتعلم
- استخدام مبدأ العد في حل مسائل عملية.
- استخدام التباديل والتوافيق لعد الطرائق الممكنة في عملية ما.

المفردات والمصطلحات:
- مبدأ العد Counting Principle
- التباديل Permutations
- المضروب Factorial
- قانون التباديل Law of Permutations
- التوافيق Combinations

دعنا نفكر ونتناقش

يوجد في فصلكم 24 طالبًا وتريدون تشكيل وفد من n طالب ليمثل الفصل.

1. هل ترتيب طلاب الوفد مهم؟ متى يصبح الترتيب مهمًّا؟
2. هل يمكن اختيار الطالب نفسه لأكثر من مرّة في الوفد نفسه؟
3. ما قيمة n التي تسمح بتشكيل أكبر عدد ممكن من الوفود؟ بيّن طريقة عملك.
4. ما قيمة n التي تسمح بتشكيل أكبر عدد ممكن من الوفود إذا كان عدد طلاب الفصل 25؟

مبدأ العد Counting Principle

تريد تنفيذ عمل على 3 مراحل متتابعة. هناك 3 طرائق مختلفة لتنفيذ المرحلة الأولى، و4 طرائق مختلفة لتنفيذ المرحلة الثانية، وطريقة واحدة لتنفيذ المرحلة الثالثة.

ما عدد الطرائق الممكنة لتنفيذ هذا العمل؟

عدد الطرائق الممكنة: طريقة $3 \times 4 \times 1 = 12$

مبدأ العد Counting Principle

لإجراء عملية على عدد من المراحل المتتابعة، كما يلي:

المرحلة الأولى بـ r_1 طريقة مختلفة،

المرحلة الثانية بـ r_2 طريقة مختلفة،

المرحلة الثالثة بـ r_3 طريقة مختلفة،

.....وهكذا حتى المرحلة n بـ r_n طريقة مختلفة

فإن عدد طرائق إجراء هذه العملية هو: $r_1 \times r_2 \times r_3 \times ... \times r_n$

مثال (1)

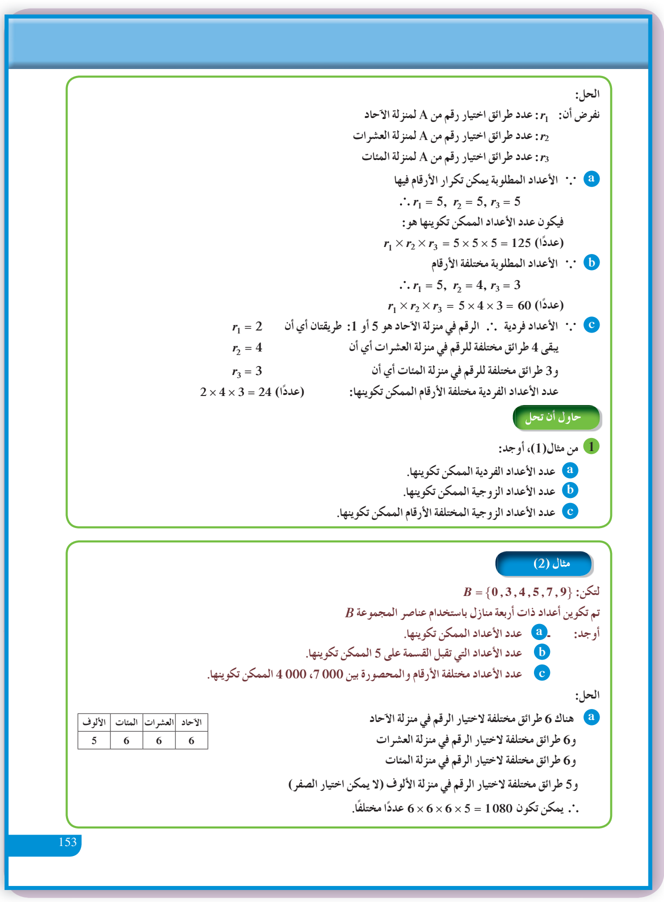
لتكن: $A = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

يراد تكوين أعداد ذات ثلاثة منازل باستخدام عناصر A

أوجد:

a. عدد الأعداد الممكن تكوينها.
b. عدد الأعداد مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.
c. عدد الأعداد الفردية مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

152



الحل:

نفرض أن: r_1: عدد طرائق اختيار رقم من A لمنزلة الآحاد

r_2: عدد طرائق اختيار رقم من A لمنزلة العشرات

r_3: عدد طرائق اختيار رقم من A لمنزلة المئات

a. ∵ الأعداد المطلوبة يمكن تكرار الأرقام فيها

$\therefore r_1 = 5,\ r_2 = 5,\ r_3 = 5$

فيكون عدد الأعداد الممكن تكوينها هو:

$r_1 \times r_2 \times r_3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$ (عددًا)

b. ∵ الأعداد المطلوبة مختلفة الأرقام

$\therefore r_1 = 5,\ r_2 = 4,\ r_3 = 3$

$r_1 \times r_2 \times r_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ (عددًا)

c. ∵ الأعداد فردية ∴ الرقم في منزلة الآحاد هو 5 أو 1: طريقتان أي أن $r_1 = 2$

يبقى 4 طرائق مختلفة للرقم في منزلة العشرات أي أن $r_2 = 4$

و3 طرائق مختلفة للرقم في منزلة المئات أي أن $r_3 = 3$

عدد الأعداد الفردية مختلفة الأرقام الممكن تكوينها: $2 \times 4 \times 3 = 24$ (عددًا)

حاول أن تحل

1. من مثال(1)، أوجد:
   a. عدد الأعداد الفردية الممكن تكوينها.
   b. عدد الأعداد الزوجية الممكن تكوينها.
   c. عدد الأعداد الزوجية المختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

مثال (2)

لتكن: $B = \{0, 3, 4, 5, 7, 9\}$

تم تكوين أعداد ذات أربعة منازل باستخدام عناصر المجموعة B

أوجد:
a. عدد الأعداد الممكن تكوينها.
b. عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 5 الممكن تكوينها.
c. عدد الأعداد مختلفة الأرقام والمحصورة بين 000 7، 000 4 الممكن تكوينها.

الحل:

a. هناك 6 طرائق مختلفة لاختيار الرقم في منزلة الآحاد

و6 طرائق مختلفة لاختيار الرقم في منزلة العشرات

و6 طرائق مختلفة لاختيار الرقم في منزلة المئات

و5 طرائق مختلفة لاختيار الرقم في منزلة الألوف (لا يمكن اختيار الصفر)

∴ يمكن تكون $6 \times 6 \times 6 \times 5 = 1080$ عددًا مختلفًا.

الآحاد	العشرات	المئات	الألوف
6	6	6	5

153

في المثال (1)

اطلب إلى الطلاب وضع لوائح منظمة للإجابة منعًا للسهو والخطأ. أشر إلى أن العدد الفردي من المجموعة ينتهي بـ 1 أو 5.

في المثال (2)

ذكّر الطلاب بأن العدد ذو أربع منازل لا يمكن أن يتضمن الصفر في منزلة الآلاف. ذكّرهم أيضًا بقابلية القسمة على 5.

في المثال (3)

تعتبر عملية تنظيم القوائم مهمة جدًّا عندما يكون عدد العناصر في مجموعة منتهية صغيرًا. تساعد القائمة المنظمة على فهم مبدأ العد ضمن الشروط التي ذكرناها. يمكن للمعلم عرض أمثلة بديلة تساعد الطلاب على تنظيم قوائم بشكل سريع.

في المثال (4)

يجب ترتيب اليخوت الثلاثة الأولى، وبالتالي يعتبر هذا المثال تطبيقًا مباشرًا لمفهوم التراتيب.
ساعدهم على استخدام الآلة الحاسبة نظرًا لأهمية الوقت.

في المثال (5)

يساعد قانون التباديل على حل بعض المعادلات.

ركّز مع الطلاب أن r , n في القانون هما عددان صحيحان موجبان (غير الصفر) حيث $n \geq r$.

ففي (a) أشر إلى أن $n \geq 5$ وفي (b) $r \leq 6$.

اطلب إليهم إيجاد الحل بالتبسيط أولًا بين البسط والمقام.

في المثال (6)

وضّح للطلاب أن اختيار 4 كتب للمطالعة من بين 15 كتابًا لا يستند إلى قانون الترتيب، كما أن كل كتاب يختلف عن الآخر، وبالتالي فإن هذا الاختيار هو توافيق أي 4 كتب من بين 15 كتابًا.

---

b يقبل عدد القسمة على 5 إذا كان الرقم في منزلة الآحاد 5 أو 0

∴ 5 طرائق مختلفة لاختيار الرقم في منزلة الألوف

و6 طرائق مختلفة لاخيار الرقم في منزلة المئات

و6 طرائق مختلفة لاختيار الرقم في منزلة العشرات

وطريقتان لاختيار الرقم في منزلة الآحاد

الآحاد	العشرات	المئات	الألوف
2	6	6	5

∴ يمكن تكوين $360 = 2 \times 6 \times 6 \times 5$ عددًا مختلفًا.

c لكي يكون العدد محصورًا بين 4 000, 7 000 فإن الرقم في منزلة الألوف هو 5 أو 4

(لا يمكن أن يكون 7 لأن العدد في هذه الحالة يكون أكبر من 7 000).

∴ توجد طريقتان لاختيار الرقم في منزلة الألوف

يبقى 5 طرائق مختلفة لاختيار الرقم في منزلة المئات

و4 طرائق مختلفة لاختيار الرقم في منزلة العشرات

و3 طرائق مختلفة لاختيار الرقم في منزلة الآحاد

الآحاد	العشرات	المئات	الألوف
3	4	5	2

∴ يمكن تكوين $120 = 3 \times 4 \times 5 \times 2$ عددًا مختلفًا محصورًا بين 7 000، 4 000

حاول أن تحل

2 من المثال (2) أوجد:

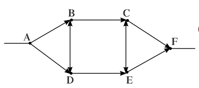
a عدد الأعداد مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

b عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 10 الممكن تكوينها.

c عدد الأعداد مختلفة الأرقام والأكبر من 5 000 الممكن تكوينها.

يمكن وضع قائمة منظمة لمعرفة عدد طرائق إجراء العملية.

مثال (3)



بكم طريقة مختلفة يمكن الانتقال من المحطة A إلى المحطة F، باتباع (الأسهم) ومن دون المرور بالمحطة نفسها مرتين في كل طريقة انتقال؟

الحل:

نستخدم القوائم المنظمة:

A B C F   A D E F

A B C E F   A D E C F

154

تمرَّنْ 11–1

مبدأ العد والتباديل والتوافيق

Counting Principle, Permutations and Combinations

المجموعة A تمارين مقالية

(1) لتكن $A = \{2, 3, 4, 6, 7, 9\}$. تم تكوين أعداد ذات أربع منازل باستخدام عناصر A . أوجد:

(a) عدد الأعداد الممكن تكوينها.

(b) عدد الأعداد مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

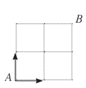
(c) عدد الأعداد الزوجية مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

(2) لتكن $B = \{2, 4, 5, 7, 8\}$. تم تكوين أعداد ذات أربع منازل باستخدام عناصر B . أوجد:

(a) عدد الأعداد مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

(b) عدد الأعداد مختلفة الأرقام التي تقبل القسمة على 5 الممكن تكوينها.

(c) عدد الأعداد مختلفة الأرقام والأصغر من 5000 الممكن تكوينها.



(3) على ورقة المربعات المقابلة، ما عدد الخطوات التي تسمح بالانتقال من A إلى B بالاتجاه فقط إلى اليمين أو إلى الأعلى؟

(4) **السيّارات:** تقترح بعض الشركات على زبائنها تبديل مواقع إطارات السيارة كل مسافة معينة.

(a) بكم طريقة مختلفة يمكن تبديل مواقع الإطارات الأربعة؟

(b) إذا استخدم الإطار الاحتياطي، فكم يصبح عدد طرائق تبديل الإطارات؟

(5) أوجد قيمة كل مقدار مما يلي:

(a) ${}_8P_1$ **(b)** ${}_3P_2$ **(c)** ${}_8P_3$ **(d)** ${}_9P_6$

(6) طلب 15 طالبًا موعدًا للتحدث مع مدير المدرسة، كلًّا بمفرده. بكم طريقة مختلفة يمكن للمدير استقبال الطلاب؟

(7) لقضاء سهرة يمكن لعائلة اختيار مطعم من بين 4 مطاعم وصالة سينما من بين 3 صالات.
فما عدد طرق اختيار لمطعم وصالة سينما؟

(8) حلّ المعادلات التالية:

(a) ${}_nP_4 = 5 \times {}_nP_3\ ,\ \ n \geq 4$ **(b)** ${}_5P_r = 12 \times {}_5P_{r-2}$ **(c)** $\dfrac{{}_nP_{n-2}}{{}_nP_{n-4}} = \dfrac{n^2}{12}$

(9) بكم طريقة مختلفة يمكن لثلاثة طلاب الجلوس في صف واحد يحوي 8 مقاعد؟

67

قدّم لهم أمثلة بديلة توضّح بها عملية ترتيب n عنصر في مجموعة من n عنصر في هذه المجموعة حيث هي حالة خاصة من التباديل. لإيضاح فكرة التوافيق

مثل: ترتيب عناصر المجموعة: $\{a, b\}$

اثنين اثنين يكون: (a, b) , (b, a)

وترتيب عناصر المجموعة: $\{a, b, c\}$ ثلاثة ثلاثة يكون:

$\{a, b, c\}$, $\{a, c, b\}$, $\{c, b, a\}$, $\{c, a, b\}$, $\{b, c, a\}$, $\{b, a, c\}$

وعددها 6 تراتيب.

في المثال (7)

أهمية هذا المثال أنه وللمرة الأولى يعطى الطالب مثالًا حيث يتم اختيار 3 أو أقل وهذا يعني اختيار 3 أو 2 أو 1 أو الصفر، ثم يجمع النواتج.

في المثال (8)

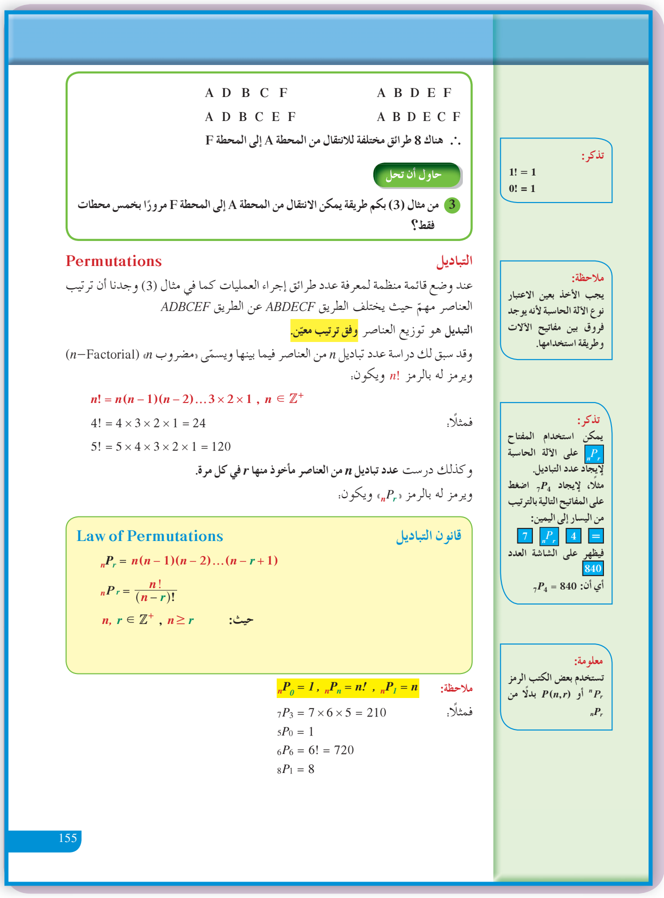
هذا المثال تعميم لعملية الاختيار وعلى الطالب أخذ عدة اختيارات، ثم تحضيره للاحتمالات المشروطة لاحقًا.

في المثال (9)

هذا المثال تعبير عن التوافيق أي أن ترتيب العناصر ليس مهمًّا في كل جزء نأخذه من مجموعة معينة.

في المثال (10)

يتم في هذا المثال استخدام قاعدة التوافيق لحل معادلات تتضمن متغيرًا على أن تكون الإجابة عددًا كليًّا. شجع الطلاب على توسيع مضروب العدد بما يتناسب مع تبسيط الكسر وإيجاد الإجابة المقبولة.



A B D E F   A D B C F

A B D E C F   A D B C E F

∴ هناك 8 طرائق مختلفة للانتقال من المحطة A إلى المحطة F

حاول أن تحل

3 من مثال (3) بكم طريقة يمكن الانتقال من المحطة A إلى المحطة F مرورًا بخمس محطات فقط؟

التباديل Permutations

عند وضع قائمة منظمة لمعرفة عدد طرائق إجراء العمليات كما في مثال (3) وجدنا أن ترتيب العناصر مهمّ حيث يختلف الطريق $ABDECF$ عن الطريق $ADBCEF$

التبديل هو توزيع العناصر **وفق ترتيب معيّن.**

وقد سبق لك دراسة عدد تباديل n من العناصر فيما بينها ويسمّى «مضروب n» (n−Factorial) ويرمز له بالرمز $n!$ ويكون:

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots 3\times 2\times 1 \ , \ n\in \mathbb{Z}^+$$

فمثلًا:

$4! = 4\times 3\times 2\times 1 = 24$

$5! = 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 120$

وكذلك درست **عدد تباديل n من العناصر مأخوذ منها r في كل مرة.**

ويرمز له بالرمز «${}_nP_r$» ويكون:

قانون التباديل Law of Permutations

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$$

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

حيث: $n, r\in \mathbb{Z}^+ \ , \ n\geq r$

ملاحظة: ${}_nP_0 = 1 \ , \ {}_nP_n = n! \ , \ {}_nP_1 = n$

فمثلًا:

${}_7P_3 = 7\times 6\times 5 = 210$

${}_5P_0 = 1$

${}_6P_6 = 6! = 720$

${}_8P_1 = 8$

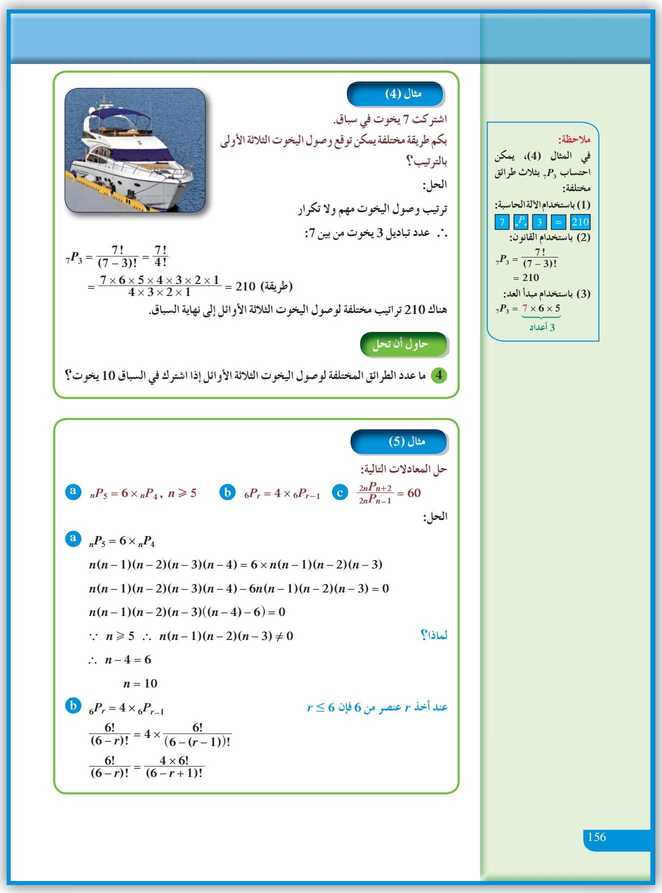
تذكر:
$1! = 1$
$0! = 1$

ملاحظة:
يجب الأخذ بعين الاعتبار نوع الآلة الحاسبة لأنه يوجد فروق بين مفاتيح الآلات وطريقة استخدامها.

تذكر:
يمكن استخدام المفتاح ${}_nP_r$ على الآلة الحاسبة لإيجاد عدد التباديل.
مثلًا، لإيجاد ${}_7P_4$ اضغط على المفاتيح التالية بالترتيب من اليسار إلى اليمين:
7 ${}_nP_r$ 4 =
فيظهر على الشاشة العدد 840
أي أن: ${}_7P_4 = 840$

معلومة:
تستخدم بعض الكتب الرمز ${}^nP_r$ أو $P(n,r)$ بدلًا من ${}_nP_r$

155



مثال (4)

اشتركت 7 يخوت في سباق.

بكم طريقة مختلفة يمكن توقع وصول اليخوت الثلاثة الأولى بالترتيب؟

الحل:

ترتيب وصول اليخوت مهم ولا تكرار

∴ عدد تباديل 3 يخوت من بين 7:

$${}_7P_3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!}$$

$$= \frac{7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{4\times 3\times 2\times 1} = 210 \ \text{(طريقة)}$$

هناك 210 تراتيب مختلفة لوصول اليخوت الثلاثة الأوائل إلى نهاية السباق.

حاول أن تحل

4 ما عدد الطرائق المختلفة لوصول اليخوت الثلاثة الأوائل إذا اشترك في السباق 10 يخوت؟

مثال (5)

حل المعادلات التالية:

a ${}_nP_5 = 6\times {}_nP_4 \ , \ n\geqslant 5$ b ${}_6P_r = 4\times {}_6P_{r-1}$ c $\frac{{}_{2n}P_{n+2}}{{}_{2n}P_{n-1}} = 60$

الحل:

a ${}_nP_5 = 6\times {}_nP_4$

$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 6\times n(n-1)(n-2)(n-3)$

$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) - 6n(n-1)(n-2)(n-3) = 0$

$n(n-1)(n-2)(n-3)((n-4)-6) = 0$

$\because \ n\geqslant 5 \ \therefore \ n(n-1)(n-2)(n-3)\neq 0$ لماذا؟

$\therefore \ n-4 = 6$

$n = 10$

b ${}_6P_r = 4\times {}_6P_{r-1}$ عند أخذ r عنصر من 6 فإن $r\leq 6$

$$\frac{6!}{(6-r)!} = 4\times \frac{6!}{(6-(r-1))!}$$

$$\frac{6!}{(6-r)!} = \frac{4\times 6!}{(6-r+1)!}$$

ملاحظة:
في المثال (4)، يمكن احتساب ${}_7P_3$ بثلاث طرائق مختلفة:
(1) باستخدام الآلة الحاسبة:
7 ${}_nP_r$ 3 = 210
(2) باستخدام القانون:
${}_7P_3 = \frac{7!}{(7-3)!}$
$= 210$
(3) باستخدام مبدأ العد:
${}_7P_3 = \underbrace{7\times 6\times 5}_{\text{3 أعداد}}$

156

6 الربط

من الملاحظ أن معظم الأمثلة في هذا الدرس هي ربط بين مفاهيم هذا الدرس ومهاراته وبين مواقف حياتية يمكن مصادفتها.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في تحديد الفرق بين التباديل والتوافيق. ساعدهم في التركيز على فهم معطيات المسألة ليتعرفوا نوعية السؤال يحتاج إلى ترتيب أم لا.

8 التقييم

من المهم جدًّا متابعة الطلاب بدقة وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» للتأكد من أنهم يميّزون بين التباديل والتوافيق ويستخدمون القانون المناسب.

اختبار سريع

1 في الصف 15 طاولة، تتسع كل طاولة لطالبين. بكم طريقة مختلفة يمكن توزيع 30 طالبًا على هذه الطاولات؟

كل طاولة تتسع لطالبين يمكن لهذين الطالبين الجلوس على الطاولة بطريقتين مختلفتين إذًا فهي عملية ترتيب اثنين ويكون عدد الطرائق:

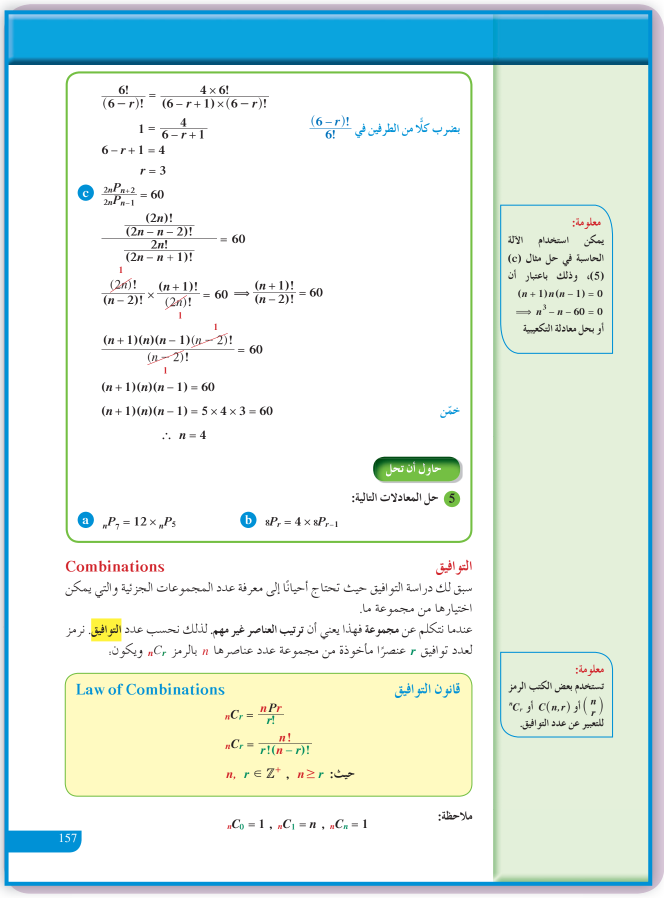
$$_{30}P_2 = \frac{30!}{(30-2)!} = \frac{30!}{28!}$$
$$= 30 \times 29$$
$$= 870$$

870 ترتيب زوج مختلف من الطلاب يمكن توزيعهم على 15 طاولة.

2 في الصف 12 كرسيًّا، لكل طالب كرسيّ واحد. بكم طريقة مختلفة يمكن توزيع 12 طالبًا للجلوس على 12 كرسيًّا.

إنها عملية تباديل خاصة $_{12}P_{12} = 12!$

أي يوجد 479 001 600 طريقة مختلفة.



$$\frac{6!}{(6-r)!} = \frac{4 \times 6!}{(6-r+1)\times(6-r)!}$$

بضرب كلًّا من الطرفين في $\frac{(6-r)!}{6!}$

$$1 = \frac{4}{6-r+1}$$
$$6-r+1 = 4$$
$$r = 3$$

c $\frac{_{2n}P_{n+2}}{_{2n}P_{n-1}} = 60$

$$\frac{\frac{(2n)!}{(2n-n-2)!}}{\frac{2n!}{(2n-n+1)!}} = 60$$

$$\frac{\cancel{(2n)!}}{(n-2)!} \times \frac{(n+1)!}{\cancel{(2n)!}} = 60 \Longrightarrow \frac{(n+1)!}{(n-2)!} = 60$$

$$\frac{(n+1)(n)(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 60$$

$$(n+1)(n)(n-1) = 60$$

خمّن

$$(n+1)(n)(n-1) = 5 \times 4 \times 3 = 60$$
$$\therefore \ n = 4$$

معلومة:
يمكن استخدام الآلة الحاسبة في حل مثال (c) (5)، وذلك باعتبار أن
$(n+1)n(n-1) = 0$
$\Longrightarrow n^3 - n - 60 = 0$
أو بحل معادلة التكعيبية

حاول أن تحل

5 حل المعادلات التالية:

a $_nP_7 = 12 \times {_nP_5}$ b $_8P_r = 4 \times {_8P_{r-1}}$

التوافيق **Combinations**

سبق لك دراسة التوافيق حيث تحتاج أحيانًا إلى معرفة عدد المجموعات الجزئية والتي يمكن اختيارها من مجموعة ما.

عندما نتكلم عن **مجموعة** فهذا يعني أن **ترتيب العناصر غير مهم**. لذلك نحسب عدد **التوافيق**. نرمز لعدد توافيق r عنصرًا مأخوذة من مجموعة عدد عناصرها n بالرمز $_nC_r$ ويكون:

قانون التوافيق **Law of Combinations**

$$_nC_r = \frac{_nP_r}{r!}$$
$$_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

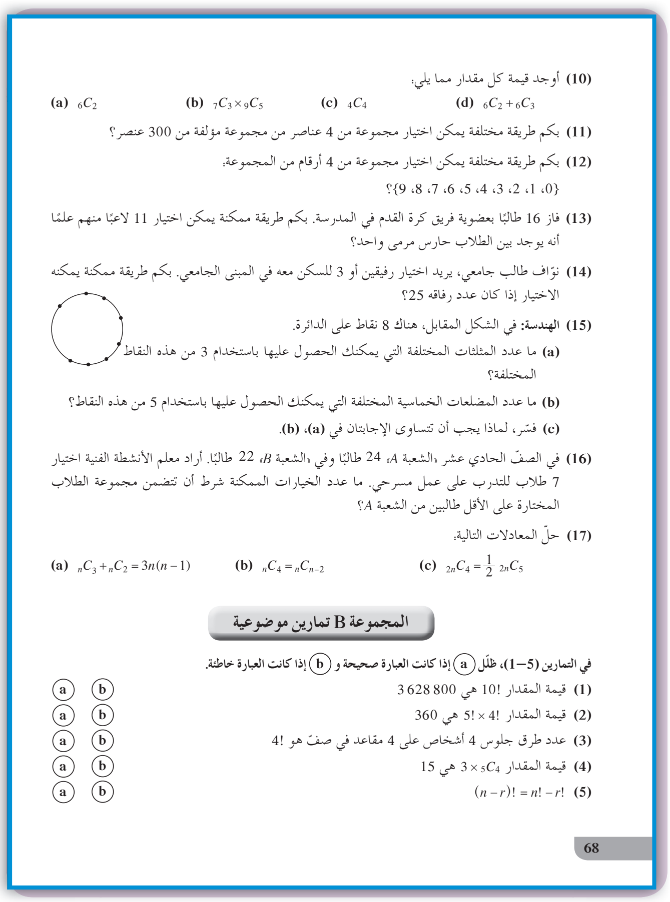
حيث: $n \geq r \ , \ n, \ r \in \mathbb{Z}^+$

معلومة:
تستخدم بعض الكتب الرمز $\binom{n}{r}$ أو $C(n,r)$ أو ^nC_r للتعبير عن عدد التوافيق.

ملاحظة:

$$_nC_0 = 1 \ , \ _nC_1 = n \ , \ _nC_n = 1$$

157



(10) أوجد قيمة كل مقدار مما يلي:

(a) $_6C_2$ (b) $_7C_3 \times {_9C_5}$ (c) $_4C_4$ (d) $_6C_2 + {_6C_3}$

(11) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار مجموعة من 4 عناصر من مجموعة مؤلفة من 300 عنصر؟

(12) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار مجموعة من 4 أرقام من المجموعة:
{0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9}؟

(13) فاز 16 طالبًا بعضوية فريق كرة القدم في المدرسة. بكم طريقة ممكنة يمكن اختيار 11 لاعبًا منهم علمًا أنه يوجد بين الطلاب حارس مرمى واحد؟

(14) نوّاف طالب جامعي، يريد اختيار رفيقين أو 3 للسكن معه في المبنى الجامعي. بكم طريقة ممكنة يمكنه الاختيار إذا كان عدد رفاقه 25؟

(15) **الهندسة:** في الشكل المقابل، هناك 8 نقاط على الدائرة.
(a) ما عدد المثلثات المختلفة التي يمكنك الحصول عليها باستخدام 3 من هذه النقاط المختلفة؟
(b) ما عدد المضلعات الخماسية المختلفة التي يمكنك الحصول عليها باستخدام 5 من هذه النقاط؟
(c) فسّر، لماذا يجب أن تتساوى الإجابتان في (a)، (b).

(16) في الصفّ الحادي عشر «الشعبة A» 24 طالبًا وفي «الشعبة B» 22 طالبًا. أراد معلم الأنشطة الفنية اختيار 7 طلاب للتدرب على عمل مسرحي. ما عدد الخيارات الممكنة شرط أن تتضمن مجموعة الطلاب المختارة على الأقل طالبين من الشعبة A؟

(17) حلّ المعادلات التالية:

(a) $_nC_3 + {_nC_2} = 3n(n-1)$ (b) $_nC_4 = {_nC_{n-2}}$ (c) $_{2n}C_4 = \frac{1}{2}\ {_{2n}C_5}$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) قيمة المقدار !10 هي 800 628 3	a	b
(2) قيمة المقدار $4! \times 5!$ هي 360	a	b
(3) عدد طرق جلوس 4 أشخاص على 4 مقاعد في صفّ هو !4	a	b
(4) قيمة المقدار $3 \times {_5C_4}$ هي 15	a	b
(5) $(n-r)! = n! - r!$	a	b

68

3 كم عددًا يوجد أكبر من 100 وأصغر من 1 000 مكوّن كل منها من أرقام مختلفة؟

الأعداد أكبر من 100 وأصغر من 1 000 جميعها مكونة من ثلاثة أرقام وهذه الأرقام مأخوذة من بين 10 أرقام هي:

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ وبما أنها مكوّنة من أرقام مختلفة لذا فهي تباديل ثلاثة ثلاثة من بين 10 ولكن عندما يكون الصفر في منزلة المئات فلن يكون لدينا عدد من ثلاثة أرقام بل سيصبح من رقمين مثل 032 وبالتالي عدد الأعداد هو:

$${}_{10}P_3 - {}_{9}P_3 = \frac{10!}{7!} - \frac{9!}{6!} = 216$$

4 في كيس 5 أقراص حمراء اللون و4 أقراص زرقاء اللون. سحبت من الكيس عشوائيًّا 3 أقراص. بكم طريقة يمكن الحصول على اثنين من اللون الأحمر وواحد من اللون الأزرق أو اثنين من اللون الأزرق وواحد من اللون الأحمر؟

$${}_{5}C_2 \times {}_{4}C_1 + {}_{5}C_1 \times {}_{4}C_2 = 70$$

70 طريقة ممكنة.

مثال (6)

في مكتبة المدرسة 15 كتابًا مختلفًا من مجموعة روايات التاريخ الإسلامي.
بكم طريقة يمكنك اختيار 4 كتب منها للمطالعة؟

الحل:

تريد اختيار 4 كتب من مجموعة مكونة من 15 كتابًا.

ترتيب الكتب المختارة غير مهم، وليس هناك تكرار (أي لا يمكن اختيار الكتاب نفسه أكثر من مرة واحدة).

$\therefore$ عليك معرفة عدد توافيق 4 كتب من بين 15 كتابًا.

$${}_{15}C_4 = \frac{15!}{(15-4)! \times 4!}$$
$$= \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times (11)!}{(11)! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$
$$= 1365$$

يمكنك اختيار الكتب الأربعة بـ 1 365 طريقة مختلفة.

معلومة:
يمكنك حل المثال (6) باستخدام الآلة الحاسبة.

حاول أن تحل

6 في المثال (6): a بكم طريقة مختلفة يمكنك اختيار 7 كتب؟

b بكم طريقة مختلفة يمكنك اختيار 8 كتب؟

c ماذا تلاحظ؟

مثال (7)

ترشح 10 طلاب لتمثيل القسم العلمي من مدرستك. يجري اختيار الممثلين الثلاثة بالاقتراع السري.
يمكنك اختيار ثلاثة طلاب أو أقل. بكم طريقة مختلفة يمكنك أن تقترع؟

الحل:

المطلوب اختيار مجموعة من 3 طلاب على الأكثر والترتيب غير مهم وليس هناك تكرار.

$\therefore$ نحسب عدد التوافيق.

يمكنك أن تقترع لِـ:

3 طلاب فيكون عدد الطرق: ${}_{10}C_3$

أو طالبين فيكون عدد الطرق: ${}_{10}C_2$

أو طالب واحد فيكون عدد الطرق: ${}_{10}C_1$

أو ورقة بيضاء فيكون عدد الطرق: ${}_{10}C_0$

$\therefore$ عدد طرائق الاقتراع: ${}_{10}C_3 + {}_{10}C_2 + {}_{10}C_1 + {}_{10}C_0$

$= 120 + 45 + 10 + 1$

$= 176$

يمكنك الاقتراع بـ 176 طريقة مختلفة.

158

حاول أن تحل

7 في المثال (7)، بكم طريقة مختلفة يمكنك الاقتراع لـ 5 طلاب أو أقل؟

مثال (8)

في الصف الحادي عشر 28 طالبًا وفي الصف الثاني عشر 24 طالبًا.
أراد معلم الرياضة اختيار 5 طلاب لتشكيل فريق لكرة السلة، شرط أن يتضمن الفريق على الأقل لاعبًا واحدًا من الصف الحادي عشر. ما عدد الخيارات الممكنة؟

الحل:

طريقة أولى:

حيث إن ترتيب العناصر غير مهم $\therefore$ الخيارات هي توافيق،

يمكن أن يتكون الفريق من لاعب واحد من الصف الحادي عشر و4 لاعبين من الصف الثاني عشر: ${}_{28}C_1 \times {}_{24}C_4$

أو لاعبين اثنين من الصف الحادي عشر: ${}_{28}C_2 \times {}_{24}C_3$

أو 3 لاعبين من الصف الحادي عشر: ${}_{28}C_3 \times {}_{24}C_2$

أو 4 لاعبين من الصف الحادي عشر: ${}_{28}C_4 \times {}_{24}C_1$

أو 5 لاعبين من الصف الحادي عشر: ${}_{28}C_5 \times {}_{24}C_0$

عدد الخيارات: ${}_{28}C_1 \times {}_{24}C_4 + {}_{28}C_2 \times {}_{24}C_3 + {}_{28}C_3 \times {}_{24}C_2 + {}_{28}C_4 \times {}_{24}C_1 + {}_{28}C_5 \times {}_{24}C_0$

$= 297\,528 + 765\,072 + 904\,176 + 491\,400 + 98\,280$

$= 25\,564\,56$

طريقة ثانية:

يمكن أخذ كل الخيارات الممكنة لـ 5 طلاب من بين $52 = 24 + 28$ ورفض الخيارات التي تتضمن صفر طالب من الصف الحادي عشر أي اختيار الخمسة طلاب من الصف الثاني عشر.

${}_{52}C_5 - {}_{24}C_5 = 25\,564\,56$

حاول أن تحل

8 في مثال (8)، ما عدد الخيارات الممكنة شرط أن يتضمن الفريق على الأقل لاعبين من الصف الثاني عشر؟

خواص أخرى للتوافيق

${}_{n}C_m = {}_{n}C_{n-m}$

${}_{n}C_m = {}_{n-1}C_m + {}_{n-1}C_{m-1}$

159

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

1 الترتيب ليس مهمًّا. مثلًا إذا أردنا تعيين رئيس ونائب رئيس للوفد.

2 لا يمكن اختيار الطالب نفسه مرتين.

3 12، ${}_{24}C_{12}$ توفيقة.

4 12, 13

«حاول أن تحل»

1 (a) $5 \times 5 \times 2 = 50$

(b) $5 \times 5 \times 3 = 75$

(c) $4 \times 3 \times 3 = 36$

2 (a) $5 \times 5 \times 4 \times 3 = 300$

(b) $5 \times 6 \times 6 \times 1 = 180$

(c) $3 \times 5 \times 4 \times 2 = 120$

3 $ABCEF \quad ADECF$

$ADBCF \quad ABDEF$

4 ${}_{10}P_3 = 720$

5 (a) $\frac{n!}{(n-7)!} = 12 \times \frac{n!}{(n-5)!}$

$\frac{n!}{(n-7)!} \times \frac{(n-5)!}{n!} = 12$

$(n-5)(n-6) = 12$

$n = 9 \ (n \geq 7)$

(b) $\frac{8!}{(8-r)!} \times \frac{(8-r+1)!}{8!} = 4$;

$8 - r + 1 = 4$; $r = 5 \ (r \leq 8)$

مثال (9)

في الصف الحادي عشر 20 طالبًا. يريد المدير اختيار وفد من 4 طلاب لتمثيل طلاب من الصف الحادي عشر.

a أوجد عدد الوفود المختلفة الممكن تكوينها.

b أوجد عدد الوفود المختلفة الممكن تكوينها شرط أن يكون الطالب سالم (من طلاب الصف الحادي عشر) مشاركًا في الوفد.

c أوجد عدد الوفود المختلفة الممكن تكوينها شرط ألّا يكون الطالب سالم (من طلاب الصف الحادي عشر) مشاركًا في الوفد.

d قارن بين إجابة a ومجموع إجابتي c و b . فسّر.

الحل:

a في عملية اختيار الوفد ترتيب العناصر غير مهم لذلك نحسب عدد التوافيق.

نختار 4 طلاب من بين 20:

$${}_{20}C_4 = \frac{{}_{20}P_4}{4!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 4\,845$$

b إذا كان سالم مشاركًا في الوفد فهذا يعني أنه يجب اختيار 4 طلاب من بين بقية الطلاب أي من بين $19 = 1 - 20$ طالبًا.

$${}_{19}C_3 = \frac{{}_{19}P_3}{3!} = \frac{19 \times 18 \times 17}{3 \times 2 \times 1} = 969$$

c إذا استثنى سالم من المشاركة في الوفد فهذا يعني أنه يجب اختيار 4 طلاب من بين $19 = 1 - 20$ طالبًا.

$${}_{19}C_4 = \frac{{}_{19}P_4}{4!} = \frac{19 \times 18 \times 17 \times 16}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 3\,876$$

d $969 + 3\,876 = 4\,845$

أي: ${}_{19}C_3 + {}_{19}C_4 = {}_{20}C_4$

وهذا يتفق مع الخاصية ${}_nC_m = {}_{n-1}C_m + {}_{n-1}C_{m-1}$

حاول أن تحل

9 يتكون فريق كرة القدم في المدرسة من 18 لاعبًا. يريد المدرب تشكيل فريق من 11 لاعبًا.

a أوجد عدد الفرق المختلفة الممكن تكوينها.

b أوجد عدد الفرق المختلفة الممكن تكوينها إذا أراد المدرب أن يتضمن الفريق اللاعب عبد العزيز.

c أوجد عدد الفرق المختلفة الممكن تكوينها إذا استثنى المدرب اللاعب عبد العزيز من تشكيلة الفريق بطريقتين مختلفتين.

مثال (10)

أوجد قيمة n في كل مما يلي:

a ${}_nC_3 = {}_nC_4$

b $\frac{{}_nC_7}{{}_{(n-1)}C_6} = \frac{8}{7}$

الحل:

a ${}_nC_3 = {}_nC_4$

$\frac{{}_nP_3}{3!} = \frac{{}_nP_4}{4!}$

$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3!}$

$4n(n-1)(n-2) = n(n-1)(n-2)(n-3)$

160

في التمارين (15–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) قيمة المقدار $\frac{10!}{7!3!}$ هي:

a $\frac{10}{21}$ b $\frac{1}{120}$ c 120 d 1

(7) قيمة المقدار ${}_{10}C_6 \times {}_6P_4$ هي:

a 75 600 b 7 560 c 2.5 d 210

(8) قيمة المقدار ${}_9C_2 \times \frac{{}_7C_4}{{}_9C_4}$ هي:

a 18 b 5.184 c 10 d 735

(9) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار 5 لاعبين لفريق السلة من بين 12 لاعبًا إذا كان ترتيب المراكز في الفريق مهمًّا؟

a 95 040 b 475 200 c 392 d 11 404 800

(10) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار 3 أعلام من مجموعة من 7 أعلام مختلفة؟

a 210 b 35 c 840 d 24

(11) إذا كان هناك طريق واحدة تصل بين كل مدينتين. فما عدد الطرق التي تصل بين 8 مدن.

a 20 160 b 2 520 c 40 320 d 5 040

(12) في المخزن 6 بطاريات من ماركات مختلفة، 3 بطاريات جديدة و3 مستخدمة. بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار على الأقل بطارية واحدة جديدة من 3 بطاريات؟

a 1 b 19 c 9 d 6

(13) بكم طريقة مختلفة يجلس أحمد ومحمد وعلي وجاسم وفهد بشرط تجاور محمد وأحمد؟

a 5! b 4! c 2! × 4! d 2! × 5!

(14) إذا كان: ${}_nP_3 = 60$ فإن n تساوي

a 6 b 5 c 4 d 2

(15) مجموعة حلّ المعادلة: ${}_6C_r = 15$ هي:

a {2} b {4} c {2, 4} d {3}

69

$n(n-1)(n-2)(4-(n-3))=0$

$4-n+3=0$

$7-n=0$

$n=7$

b $\dfrac{{}_nC_7}{{}_{(n-1)}C_6}=\dfrac{8}{7}$

$$\dfrac{\dfrac{n!}{(n-7)!\times 7!}}{\dfrac{(n-1)!}{(n-1-6)!\times 6!}}=\dfrac{8}{7}$$

$$\dfrac{n\times \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-7)!}\times 7\times 6!}\times\dfrac{\cancel{(n-7)!}\times 6!}{\cancel{(n-1)!}}=\dfrac{8}{7}$$

$$\dfrac{n}{7}=\dfrac{8}{7}$$

$$n=8$$

حاول أن تحل

10 أوجد قيمة n في كلٍّ مما يلي:

a ${}_nC_2=105$ **b** ${}_nC_4={}_nC_5$

161

6 **(a)** ${}_{15}C_7=\dfrac{15!}{8!7!}=6\,435$ (طريقة)

(b) ${}_{15}C_8=\dfrac{15!}{8!7!}=6\,435$

(c) ${}_{15}C_7={}_{15}C_8$

7 ${}_{10}C_5+{}_{10}C_4+{}_{10}C_3+{}_{10}C_2+{}_{10}C_1+{}_{10}C_0$

$=252+210+120+45+10+1$

$=638$

8 ${}_{24}C_2\times{}_{28}C_3+{}_{24}C_3\times{}_{28}C_2$

$+{}_{24}C_4\times{}_{28}C_1+{}_{24}C_5\times{}_{28}C_0$

$=2\,009\,280$

9 **(a)** ${}_{18}C_{11}=31\,824$

(b) ${}_{17}C_{10}=19\,448$

(c) ${}_{17}C_{11}=12\,376$

طريقة ثانية:

${}_{18}C_{11}-{}_{17}C_{10}=12\,376$

10 **(a)** $\dfrac{n!}{(n-2)!2!}=105$; $n(n-1)=2\times 105$

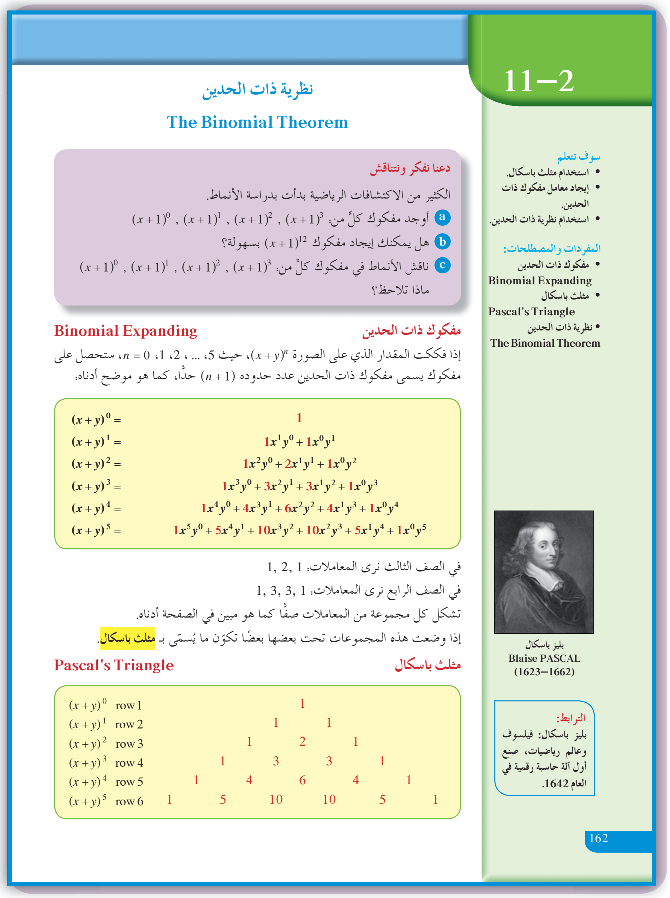
$n=15 \;\; (n\geq 2)$

(b) $(n-4)!\times 4!=(n-5)!\times 5!$

$\cancel{4!}\cancel{(n-4)}\times(n-5)!=5\times\cancel{4!}\cancel{(n-5)}!$

$n-4=5 \quad \therefore \quad n=9$

11–2: نظرية ذات الحدين


11–2

نظرية ذات الحدين

The Binomial Theorem

سوف تتعلم
- استخدام مثلث باسكال.
- إيجاد معامل مفكوك ذات الحدين.
- استخدام نظرية ذات الحدين.

المفردات والمصطلحات:
- مفكوك ذات الحدين Binomial Expanding
- مثلث باسكال Pascal's Triangle
- نظرية ذات الحدين The Binomial Theorem

دعنا نفكر ونتناقش

الكثير من الاكتشافات الرياضية بدأت بدراسة الأنماط.

a أوجد مفكوك كلٍّ من $(x+1)^0$ ، $(x+1)^1$ ، $(x+1)^2$ ، $(x+1)^3$

b هل يمكنك إيجاد مفكوك $(x+1)^{12}$ بسهولة؟

c ناقش الأنماط في مفكوك كلٍّ من $(x+1)^0$ ، $(x+1)^1$ ، $(x+1)^2$ ، $(x+1)^3$ ماذا تلاحظ؟

مفكوك ذات الحدين Binomial Expanding

إذا فككت المقدار الذي على الصورة $(x+y)^n$ حيث $n = 0, 1, 2, \ldots, 5$ ، ستحصل على مفكوك يسمى مفكوك ذات الحدين عدد حدوده $(n+1)$ حدًّا، كما هو موضح أدناه:

$$(x+y)^0 = 1$$
$$(x+y)^1 = 1x^1y^0 + 1x^0y^1$$
$$(x+y)^2 = 1x^2y^0 + 2x^1y^1 + 1x^0y^2$$
$$(x+y)^3 = 1x^3y^0 + 3x^2y^1 + 3x^1y^2 + 1x^0y^3$$
$$(x+y)^4 = 1x^4y^0 + 4x^3y^1 + 6x^2y^2 + 4x^1y^3 + 1x^0y^4$$
$$(x+y)^5 = 1x^5y^0 + 5x^4y^1 + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5x^1y^4 + 1x^0y^5$$

في الصف الثالث نرى المعاملات: 1, 2, 1

في الصف الرابع نرى المعاملات: 1, 3, 3, 1

تشكل كل مجموعة من المعاملات صفًّا كما هو مبين في الصفحة أدناه.

إذا وضعت هذه المجموعات تحت بعضها بعضًا تكوّن ما يُسمّى بـ مثلث باسكال

مثلث باسكال Pascal's Triangle

$(x+y)^0$ row 1: 1

$(x+y)^1$ row 2: 1 1

$(x+y)^2$ row 3: 1 2 1

$(x+y)^3$ row 4: 1 3 3 1

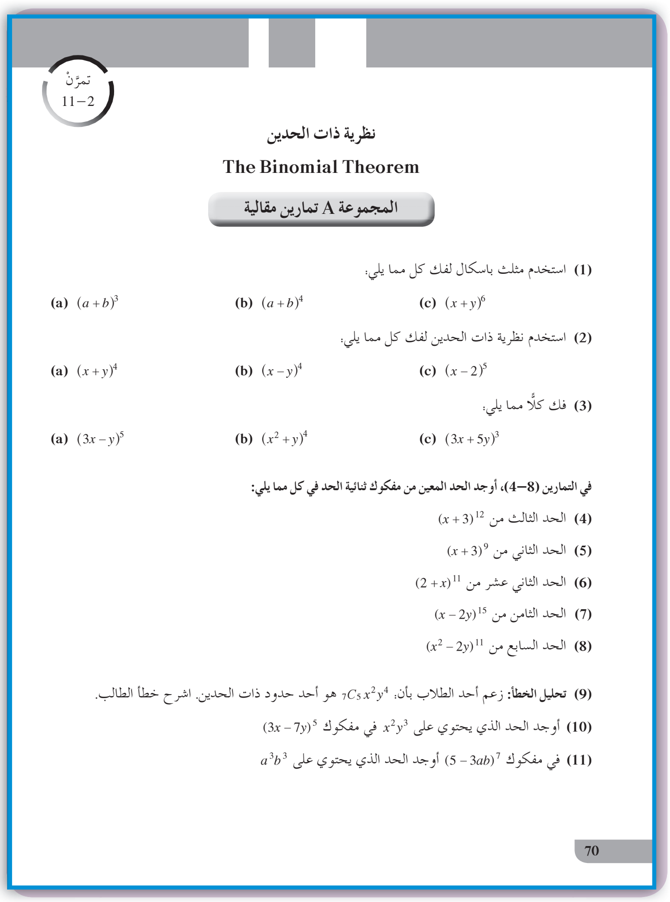
$(x+y)^4$ row 5: 1 4 6 4 1

$(x+y)^5$ row 6: 1 5 10 10 5 1

بليز باسكال
Blaise PASCAL
(1623–1662)

الترابط:
بليز باسكال: فيلسوف وعالم رياضيات، صنع أول آلة حاسبة رقمية في العام 1642.

162


تمرّن
11–2

نظرية ذات الحدين

The Binomial Theorem

المجموعة A تمارين مقالية

(1) استخدم مثلث باسكال لفك كل مما يلي:

(a) $(a+b)^3$ (b) $(a+b)^4$ (c) $(x+y)^6$

(2) استخدم نظرية ذات الحدين لفك كل مما يلي:

(a) $(x+y)^4$ (b) $(x-y)^4$ (c) $(x-2)^5$

(3) فك كلًّا مما يلي:

(a) $(3x-y)^5$ (b) $(x^2+y)^4$ (c) $(3x+5y)^3$

في التمارين (4–8)، أوجد الحد المعين من مفكوك ثنائية الحد في كل مما يلي:

(4) الحد الثالث من $(x+3)^{12}$

(5) الحد الثاني من $(x+3)^9$

(6) الحد الثاني عشر من $(2+x)^{11}$

(7) الحد الثامن من $(x-2y)^{15}$

(8) الحد السابع من $(x^2-2y)^{11}$

(9) تحليل الخطأ: زعم أحد الطلاب بأن: ${}_7C_5\, x^2y^4$ هو أحد حدود ذات الحدين. اشرح خطأ الطالب.

(10) أوجد الحد الذي يحتوي على x^2y^3 في مفكوك $(3x-7y)^5$

(11) في مفكوك $(5-3ab)^7$ أوجد الحد الذي يحتوي على a^3b^3

70

1 الأهداف

- يستخدم مثلث باسكال.
- يوجد معامل مفكوك ذات الحدين.
- يطبّق نظرية ذات الحدين.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

مثلث باسكال – مفكوك ذات الحدين – نظرية ذات الحدين.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(1) أوجد مفكوك ما يلي:

(a) $(3x+3y)^2$

(b) $(3x-y)^2$

(c) $(x-3)^3$

(d) $(2-x)^3$

(2) أوجد ناتج ما يلي:

(a) ${}_7P_3$

(b) ${}_8C_5$

(c) $7!$

(3) في كيس 4 أقراص صفراء اللون و3 أقراص حمراء اللون. سحب عشوائيًّا من الكيس 3 أقراص. بكم طريقة يمكن الحصول على قرص أصفر اللون وقرصين أحمري اللون؟

لاحظ النمط في مثلث بسكال:

- **الحافات الخارجية تساوي 1.**
- **أي عدد غير الواحد في كل صف يساوي مجموع العددين الواقعين فوقه.**

فمثلًا للحصول على الصف الخامس، نجمع كل عددين متجاورين من الصف الرابع (الذي هو أعلى من الصف الخامس مباشرة) ولا ننسى أن الصف يبدأ بـ 1 وينتهي بـ 1 أيضًا.

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

نشاط

استخدم مثلث باسكال السابق لفك: $(x+y)^6$

الحل:

عدد حدود المفكوك = ...

من مثلث باسكال، الصف السادس: ....

يمكن إيجاد الصف السابع من الصف السادس كما يلي:

يبدأ كل صف بالعدد   1 5 10 10 5 1   ينتهي كل صف بالعدد

1 6 15 □ □ □ 1

استخدم الأعداد في الصف السادس كمعاملات.

تبدأ أسس x بـ 6 وتتناقص...

$$(x+y)^6 = 1x^6y^0 + 6x^5y^1 + 15x^4y^2 + 20x^{\square}y^3 + 15x^2y^{\square} + 6x^{\square}y^5 + 1x^{\square}y^{\square}$$

تبدأ أسس y بـ 0 وتتزايد

نظرية ذات الحدين **The Binomial Theorem**

الأعداد في مثلث باسكال تمثل معاملات حدود مفكوك ذات الحدين $(x+y)^n$. ويمكن إيجاد قيمة هذه الأعداد عن طريق تكرار صف بعد صف باستخدام الطريقة في النشاط السابق.

يمكن أن نوجد أيضًا معاملات مفكوك ذات الحدين عن طريق استخدام **التوافيق.**

إذا حسبنا: ${}_3C_0$ ، ${}_3C_1$ ، ${}_3C_2$ ، ${}_3C_3$ نحصل على 1, 3 , 3, 1 وهي تتطابق مع قيم الصف الرابع من مثلث باسكال.

كذلك إذا حسبنا ${}_4C_0$ ، ${}_4C_1$ ، ${}_4C_2$ ، ${}_4C_3$ ، ${}_4C_4$ نحصل على 1, 4, 6, 4, 1 وهي تتطابق مع قيم الصف الخامس من مثلث باسكال.

معلومة: كان هذا النمط العددي المثلثي معروفًا بين عامي 200 – 300 ق.م. من خلال العالم الرياضي الهندي هلايودا Halayudha والعالم العربي الكرخي وغيرهما إلّا أنه سمّي مثلث باسكال نسبة إلى عالم الرياضيات الفرنسي بليز باسكال Blaise Pascal

أبو بكر محمد بن الحسن الكرخي
من علماء الرياضيات المسلمين قضى حياته في بغداد، برع في الهندسة والأنماط الرياضية ووضع المثلث المشهور الذي يعرف اليوم بمثلث باسكال.

ملاحظة: لاحظ أن مجموع الأسين في كل حد من حدود المفكوك $(x+y)^6$ يساوي 6 دائمًا.

163

5 التدريس

يساعد مثلث باسكال على إيجاد مفكوك ذات الحدين مرفوعًا على الأس الذي نريده لذا من المفيد جدًّا أن يتمرن الطلاب على صنع هذا المثلث.

ساعدهم على إيجاد العلاقة النمطية بين الأعداد في الصفوف المتتابعة مثل:

+   +   +   +

1   4   6   4   1

4 هي الأس لذات الحدين

وهو الصف الرابع في مثلث باسكال. فيكون الصف الخامس كما يلي:

1   4+1 = 5   4+6 = 10   4+6 = 10   4+1 = 5   1

العدد الأول دائمًا 1 والعدد الأخير 1

لاحظ أنها مشابهة إلى حد ما لطريقة متتالية فيبوناتشي.

في المثال (1)

اطلب إلى الطلاب إيجاد الصف السادس في مثلث باسكال وذلك باستخدام الطريقة أعلاه على الشكل التالي:

+   +   +   +   +

1   5   10   10   5   1

الصف السادس:

1   6   15   20   15   6   1

6 هو الأس لذات الحدين

وبعد ذلك أخبرهم أن مفكوك ذات الحدين مرفوع إلى أي أس يكون كما يلي:

مثلًا:

$$(a+b)^6 = 1a^6 + 6a^5b^1 + 15a^4b^2 + 20a^3b^3$$
$$+15a^2b^4 + 6a^1b^5 + b^6$$

ركِّز أفكار الطلاب على الأس الذي يبدأ مع a، ثم كيف يتناقص لمصلحة أس b بشرط أن يبقى مجموع الأسين على a , b هو 6 دائمًا، ولكي نكمل مفكوك $(a+b)^6$ نضع على الترتيب معامل كل حد من الصف السادس في مثلث باسكال.

في المثال (2)

لا يختلف هذا المثال عن الشكل العام لذات الحدين $(a+b)^n$ حيث إننا نستخدم بدلًا من a العدد $2x$ وبدلًا من b العدد $-3y^2$ ثم نستخدم $T_{r+1} = {}_nC_r\,(X)^{n-r}(-Y)^r$.

في المثال (3)

أشر إلى أن رتبة الحد هي 5 على الرغم من أن $r = 4$، لأن مفكوك $(2x+3y)^7$ يبدأ بـ ${}_7C_0(2x)^7(3y)^0$ يجب الانتباه إلى الحد الذي معامله ${}_7C_0$

6 الربط

استفاد العلماء سابقًا من العلاقة بين مفكوك ذات الحدين ومثلث باسكال لإيجاد قيم ${}_nC_r$ التي كانت تشكل عبئًا نظرًا لعدم وجود آلات حاسبة.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في كتابة مفكوك ذات الحدين تنازليًّا مع الحد الأول وتصاعديًّا مع الحد الثاني. ساعدهم على فهم هذا المفكوك بحيث يكون ناتج جمع الأسين يساوي أس ذات الحدين.

8 التقييم

راقب عمل الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من حسن أدائهم في استخدام مثلث باسكال أو قيم التوافيق لإيجاد مفكوك ذات الحدين.

وكذلك تتطابق قيم ${}_5C_0$ إلى ${}_5C_5$ مع قيم الصف السادس من مثلث باسكال.

يمكننا الاستنتاج أن معاملات حدود x, y في المفكوك $(x+y)^n$ هي قيم ${}_nC_r$ حيث $r = 0,1,2,3,4,\ldots,n$

نظرية ذات الحدين

لأي عدد صحيح موجب n،

$$(x+y)^n = {}_nC_0x^n + {}_nC_1x^{n-1}y + {}_nC_2x^{n-2}y^2 + \ldots\ldots + {}_nC_rx^{n-r}y^r + \ldots\ldots + {}_nC_{n-1}xy^{n-1} + {}_nC_ny^n$$

خواص نظرية ذات الحدين **Properties of the Binomial Theorem**

1. مفكوك $(x+y)^n$ يتضمن $n+1$ حدًّا يرمز لها بـ: $T_1, T_2, \ldots, T_{r+1}, \ldots, T_n, T_{n+1}$
2. الحد الأول في المفكوك هو x^n، ثم ينقص أس x في الحدود التالية بمقدار الوحدة على التوالي.
3. يبدأ ظهور العدد y في الحد الثاني، ثم يزيد أس العدد y بمقدار الوحدة على التوالي حتى نصل إلى الحد الأخير في المفكوك ويكون y^n.
4. مجموع أسي x و y في أي حد من حدود المفكوك **ثابت** ويساوي الأس n.
5. معامل الحد T_1 يساوي معامل الحد T_{n+1}، ومعامل الحد T_2 يساوي معامل الحد T_n، وهكذا ...
6. الحد العام الذي رتبته $r+1$ يرمز له بالرمز: T_{r+1}

$$T_{r+1} = {}_nC_r \times x^{n-r} \times y^r$$

مثال (1)

استخدم نظرية ذات الحدين لفك كل من:

(a) $(x+y)^5$ (b) $(x-3)^6$ (c) $(x^2+3y)^4$

الحل:

بتطبيق نظرية ذات الحدين:

(a) $(x+y)^5 = {}_5C_0x^5 + {}_5C_1x^4y + {}_5C_2x^3y^2 + {}_5C_3x^2y^3 + {}_5C_4xy^4 + {}_5C_5y^5$
$= x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

164

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) مفكوك $(c+1)^5$ هو: $c^5 + 5c^4 + 10c^3 + 10c^2 + 5c + 1$ (a) (b)

(2) إذا كان الحد $126c^4d^5$ أحد حدود مفكوك $(c+d)^n$، فإنّ قيمة n هي 5 (a) (b)

(3) إذا كان معامل الحد الثاني في مفكوك $(r+x)^n$ هو 7 فإنّ قيمة n هي 7 (a) (b)

(4) الحدّ الثاني من $(x+3)^9$ هو $54x^8$ (a) (b)

(5) معامل الحد السابع في مفكوك $(x-y)^7$ هو عدد سالب. (a) (b)

في التمارين (6—11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة:

(6) مفكوك $(a-b)^3$ هو:

(a) $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$ (b) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
(c) $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$ (d) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

(7) الحد الثالث من مفكوك $(a-b)^7$ هو:

(a) $-21a^5b^2$ (b) $-7a^6b$
(c) $7a^6b$ (d) $21a^5b^2$

(8) في مفكوك $(2a-3b)^6$ الحد الذي معامله 2 160 هو:

(a) الحدّ الثاني (b) الحد الثالث
(c) الحد الرابع (d) الحد الخامس

(9) معامل الحد الثالث في مفكوك $(3c-4b)^5$ هو:

(a) 5 170 (b) 3 312
(c) 4 320 (d) 2 316

(10) في مفكوك $(x+y)^9$ تكون رتبة الحد: $126x^5y^4$ هي:

(a) الرابعة (b) الخامسة (c) السادسة (d) التاسعة

(11) في مفكوك $(3x+2y)^8$ الحد الذي يحوي x^3y^5 هو:

(a) T_3 (b) T_4 (c) T_5 (d) T_8

71

اختبار سريع

1. أوجد مفكوك $(3-x)^4$ باستخدام مثلث باسكال.

$(3-x)^4 : 3^4 + 3^3(-x)^1 + 3^2(-x)^2 + 3^1(-x)^3 + (-x)^4$

يبقى إيجاد معامل كل حد من مثلث باسكال.

$0 \longrightarrow 1$

$1 \longrightarrow 1 \quad 1$

$2 \longrightarrow 1 \quad 2 \quad 1$

$3 \longrightarrow 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$

$4 \longrightarrow \boxed{1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1}$

$(3-x)^4 = 81 - 108x + 54x^2 - 12x^3 + x^4$

2. أوجد مفكوك $(2-y)^5$ باستخدام نظرية ذات الحدين.

$(2-y)^5 = {}_5C_0(2)^5 + {}_5C_1(2)^4(-y)^1$

$+{}_5C_2(2)^3(-y)^2 + {}_5C_3(2)^2(-y)^3 + {}_5C_4(2)(-y)^4$

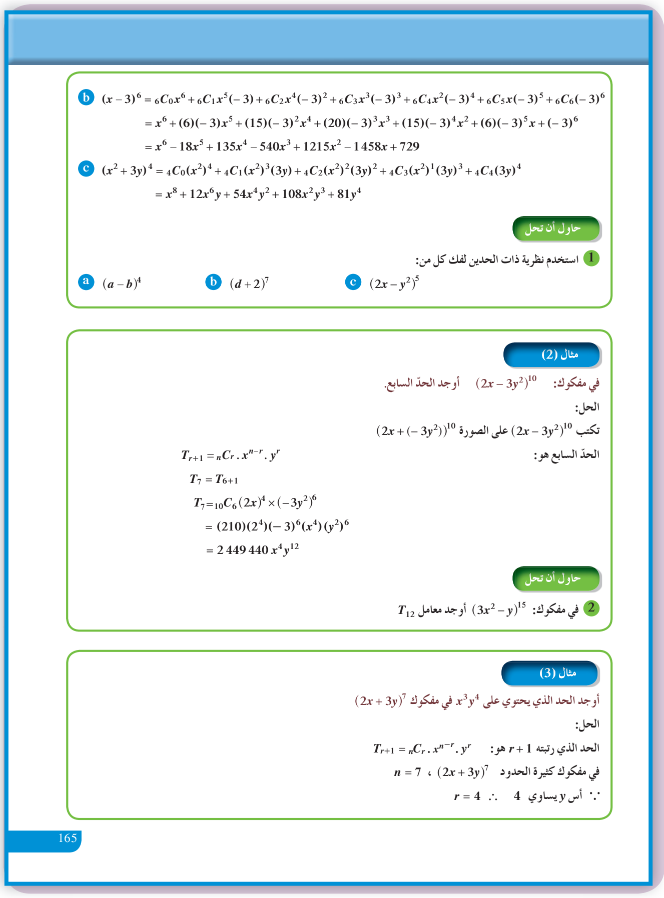
$+{}_5C_5(2)(-y)^5$

$(2-y)^5 = 32 - 80y + 80y^2 - 40y^3 + 10y^4 - y^5$

3. أوجد الحد الذي يحتوي على x^4y^5 في مفكوك $(3x+2y)^9$

هذا الحد سوف يكون على الصورة

${}_9C_5(3x)^4(2y)^5$ وقيمته هي: $326\,592x^4y^5$



b $(x-3)^6 = {}_6C_0x^6 + {}_6C_1x^5(-3) + {}_6C_2x^4(-3)^2 + {}_6C_3x^3(-3)^3 + {}_6C_4x^2(-3)^4 + {}_6C_5x(-3)^5 + {}_6C_6(-3)^6$

$= x^6 + (6)(-3)x^5 + (15)(-3)^2x^4 + (20)(-3)^3x^3 + (15)(-3)^4x^2 + (6)(-3)^5x + (-3)^6$

$= x^6 - 18x^5 + 135x^4 - 540x^3 + 1215x^2 - 1\,458x + 729$

c $(x^2+3y)^4 = {}_4C_0(x^2)^4 + {}_4C_1(x^2)^3(3y) + {}_4C_2(x^2)^2(3y)^2 + {}_4C_3(x^2)^1(3y)^3 + {}_4C_4(3y)^4$

$= x^8 + 12x^6y + 54x^4y^2 + 108x^2y^3 + 81y^4$

حاول أن تحل

1. استخدم نظرية ذات الحدين لفك كل من:

a $(a-b)^4$ **b** $(d+2)^7$ **c** $(2x-y^2)^5$

مثال (2)

في مفكوك: $(2x-3y^2)^{10}$ أوجد الحدّ السابع.

الحل:

تكتب $(2x-3y^2)^{10}$ على الصورة $(2x+(-3y^2))^{10}$

الحدّ السابع هو:

$T_{r+1} = {}_nC_r \,.\, x^{n-r} \,.\, y^r$

$T_7 = T_{6+1}$

$T_7 = {}_{10}C_6(2x)^4 \times (-3y^2)^6$

$= (210)(2^4)(-3)^6(x^4)(y^2)^6$

$= 2\,449\,440\,x^4y^{12}$

حاول أن تحل

2. في مفكوك: $(3x^2-y)^{15}$ أوجد معامل T_{12}

مثال (3)

أوجد الحد الذي يحتوي على x^3y^4 في مفكوك $(2x+3y)^7$

الحل:

الحد الذي رتبته $r+1$ هو: $T_{r+1} = {}_nC_r \,.\, x^{n-r} \,.\, y^r$

في مفكوك كثيرة الحدود $(2x+3y)^7$ ، $n = 7$

$\because$ أس y يساوي 4 $\therefore$ $r = 4$

165

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

(a) $(x+1)^0 = 1$

$(x+1)^1 = x+1$

$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

(b) لا يمكن إيجاد مفكوك $(x+1)^{12}$ بسهولة.

(c) تتنوع الإجابات. مثال يتناقص أس x، 1 كل مرّة.

«حاول أن تحل»

1 **(a)** $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

(b) $(d+2)^7 = d^7 + 14d^6 + 84d^5 + 280d^4 + 560d^3$

$+672d^2 + 448d + 128$

(c) $(2x-y^2)^5 = 32x^5 - 80x^4y^2 + 80x^3y^4$

$-40x^2y^6 + 10xy^8 - y^{10}$

2 $T_{12} = {}_{15}C_{11} \times (3x^2)^4 \times (-y)^{11}$

معامله: $-110\,565$

3 $T_4 = {}_5C_3 \times (3x)^2 (-y)^3$

$= -90x^2y^3$

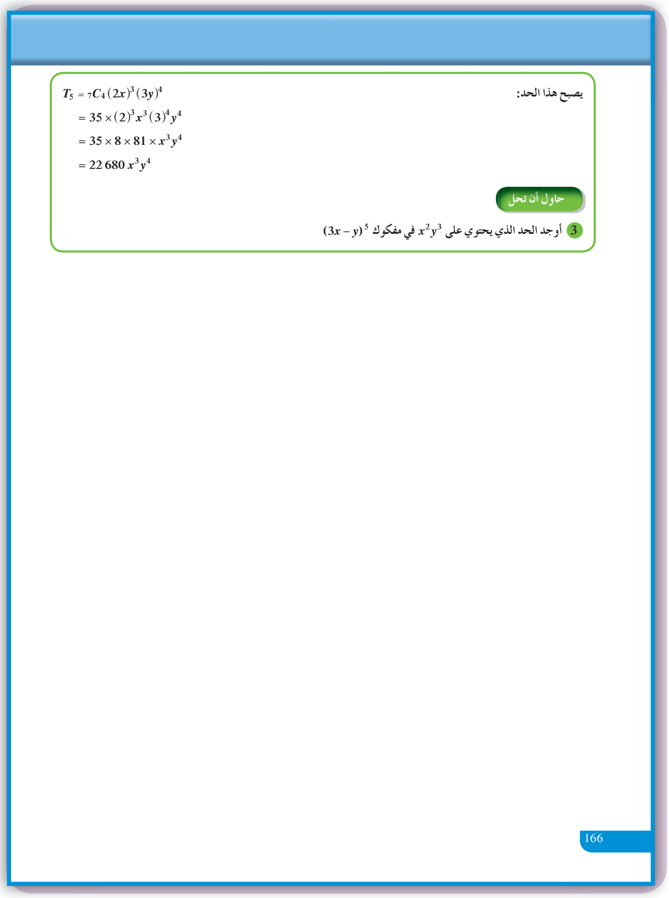
«نشاط»

$6 + 1 = 7$

1	6	15	20	15	6	1

$(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y^1 + 15x^4y^2 + 20x^3y^3$

$+ 15x^2y^4 + 6x^1y^5 + y^6$


يصبح هذا الحد:

$T_5 = {}_7C_4 (2x)^3 (3y)^4$

$= 35 \times (2)^3 x^3 (3)^4 y^4$

$= 35 \times 8 \times 81 \times x^3 y^4$

$= 22\,680\, x^3 y^4$

حاول أن تحل

3 أوجد الحد الذي يحتوي على x^2y^3 في مفكوك $(3x-y)^5$

3–11: الاحتمال

1 الأهداف

- يتعرف التجربة العشوائية.
- يتعرف فضاء العينة.
- يتعرف بعض نظريات الاحتمال.
- يوجد احتمالات الأحداث.
- يوجد احتمالات الأحداث المتنافية ومتمم الحدث.
- يوجد احتمالات الأحداث المستقلة.
- يوجد احتمال ذات الحدين.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

الاحتمال – التجربة العشوائية – فضاء العينة – حدث بسيط – حدث مركب – حدث مستحيل – حدث مؤكد – حدثان متنافيان – حدث متمم – حدثان مستقلان – التقاطع – الاتحاد – المتمم – احتمال ذات الحدين.

3 الأدوات والوسائل

أحجار نرد – آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show) – قطع نقود معدنية – كرات ملونة – كرات مرقمة.

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

أوجد مفكوك ما يلي:

(a) $(x+4)^6$ **(b)** $(2x-4)^4$ **(c)** $(3x+2y)^7$

أوجد النواتج الممكنة لكل حدث مما يلي:

(a) إذا ألقيت قطعة نقود معدنية.

(b) إذا دحرجت مكعبًا مرقمًا بالأعداد من 1 إلى 6 بحيث إن كل وجه يحمل عددًا واحدًا.

(c) درجة اختبار في إحدى المواد حيث النهاية العظمى 20 درجة.

11–3

الاحتمال

Probability

سوف تتعلم
- تعرف التجربة العشوائية وفضاء العينة.
- تعرف بعض نظريات الاحتمال.
- تعيين احتمالات الأحداث.
- تعيين احتمالات الأحداث المتنافية ومتمم الحدث والأحداث المستقلة.
- تعيين احتمال ذات الحدين.

المفردات والمصطلحات:
- الاحتمال Probability
- التجربة العشوائية Random Experiment
- فضاء العينة Sample Space
- حدث بسيط Simple Event
- حدث مركب Compound Event
- حدث مستحيل Impossible Event
- حدث مؤكد Certain Event
- حدثان متنافيان Mutually Exclusive Events
- حدث متمم Complement Event
- حدثان مستقلان Independent Events
- التقاطع Intersection
- الاتحاد Union
- المتمم Complement
- احتمال ذات الحدين Binomial Probability

عمل تعاوني: استكشاف الاحتمال التجريبي

خذ ورق مقوى مستطيلة الشكل وإطوها لوجهين مستطيلين غير منطبقين، كما هو مبين في الرسم. نريد أن نعرف كيف تقع هذه الورقة على الأرض عند إفلاتها من ارتفاع ما.

ورقة تدوين النتائج	
وجهة السقوط	التكرار
الوجهة الصغرى	𝍸 𝍸 //
الوجهة الكبرى	𝍸 𝍸 𝍸 ///
شكل الخيمة	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 /
الحرف	𝍸 ////

1 أفلت الورقة من يدك 60 مرة.
دوّن كل مرة وضع سقوطها.

2 أي الأوضاع هي الأكثر توقعًا لسقوط الورقة؟ وأي الأوضاع هي الأقل توقعًا؟

3 ما النسبة المئوية لسقوط الورقة على الوجهة الصغرى؟
أوجد النسب المئوية لبقية وجهات السقوط.

4 a لنفرض أنك أفلت الورقة 20 مرة إضافية. توقع عدد مرات سقوطها لكل وضع.

b أفلت الورقة 20 مرة جديدة. دوّن أوضاع السقوط.

c قارن بين ما دونته وما توقعته. هل هما متقاربتان؟
كيف يمكنك تحسين توقعك؟

التجربة العشوائية—فضاء العينة

Random Experiment—Sample Space

في حياتنا اليومية، هناك الكثير من الأمور التي لها صفة العشوائية.

فمثلًا عندما نرمي مكعبًا مرقمًا (حجر نرد) لا يمكننا مسبقًا معرفة العدد الذي سيظهر على الوجهة العليا.

أو قبل الوصول إلى التقاطع في الشارع، لا يمكننا معرفة ما سيكون عليه لون إشارة المرور.

كذلك عندما نأخذ كرة من كيس (دون النظر إلى داخله) يحتوي على كرات متساوية الحجم، مختلفة الألوان،لها الملمس نفسه فإنه لا يمكننا مسبقًا معرفة ما سيكون عليه لون الكرة.

167

التجربة العشوائية

هي تجربة لها عدة نواتج مختلفة ممكنة ولكن لا يمكن التأكد مسبقًا من أن أي ناتج منها سوف يتحقق عند إجراء التجربة.

في كل تجربة عشوائية نهتم أولًا بمعرفة **مجموعة النواتج** الممكنة لتلك التجربة.

مجموعة النواتج هذه تسمى **فضاء العينة**.

وكل **حدث** هو مجموعة جزئية من فضاء العينة.

في تجربة رمي حجر نرد، فضاء العينة هو:

$n(S)=6$ ، $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ويعتبر الحصول على عدد من مضاعفات العدد 3 هو حدث وليكن A أي $A=\{3,6\}$
ويكون $n(A)=2$

في «العمل التعاوني» **فضاء العينة هو أوضاع السقوط الأربع** المبينة في «ورقة تدوين النتائج» وكل وضع سقوط هو **حدث**.

معلومة:
- نرمز عادة لفضاء العينة بـ S.
- لأي مجموعة A، يرمز لعدد عناصرها بالرمز $n(A)$

معلومة:
يقصد بحجر النرد هو مكعب أوجهه مرقمة من 1 إلى 6 وكل وجه له نفس فرصة الظهور

أنواع الأحداث — Types of Events

حدث بسيط — Simple Event

مجموعة جزئية من فضاء العينة (S) تحوي ناتجًا واحدًا من نواتج التجربة العشوائية (مجموعة تحوي عنصرًا واحدًا) فإذا كان A حدثًا بسيطًا فإن $n(A)=1$

حدث مركب — Compound Event

مجموعة جزئية تحوي أكثر من ناتج واحد من نواتج التجربة العشوائية.

فإذا كان B حدثًا مركبًا فإن $n(B)>1$

حدث مستحيل — Impossible Event

مجموعة جزئية خالية $\varnothing$ من فضاء العينة (S)، فإذا كان D حدثًا مستحيلًا فإن $n(D)=0$

حدث مؤكد — Certain Event

مجموعة جزئية تساوي فضاء العينة (S)، فإذا كان F حدثًا مؤكدًا فإن $n(F)=n(S)$

حدثان متنافيان — Mutually Exclusive Events

يقال للحدثين A, B أنهما متنافيان إذا كان وقوع أحدهما ينفي (يمنع) وقوع الآخر أثناء التجربة.

أي أن: $A\cap B=\phi$ ويكون $n(A\cap B)=n(\phi)=0$

حدث متمم — Complement Event

الحدث المتمم للحدث A هو الحدث الذي يحوي جميع عناصر فضاء العينة (S) التي لا تنتمي إلى الحدث A

نرمز إلى الحدث المتمم بالرمز $\overline{A}$

A، $\overline{A}$ هما حدثان متنافيان. ويكون: $A\cap\overline{A}=\phi$ ، $A\cup\overline{A}=S$

تذكر:
إذا كانت A , B مجموعتان فإن:
$A\cap B$ هي مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A و B
$A\cup B$ هي مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A أو B

168

5 التدريس

لقد أصبح لدى الطالب مكتسبات مهمة لاحتمال حدث معين وذلك من المرحلة الابتدائية مرورًا بالمرحلة المتوسطة وصولًا إلى المرحلة الثانوية ولم يعد مفهوم احتمال حدث معين ظاهرة جديدة للطالب. في هذا الدرس سوف يكمل الطالب بناء هذا المفهوم الرياضي باستكشاف التجربة العشوائية ومنها فضاء العينة.

اسأل الطلاب:

إذا ألقينا قطعة نقود معدنية فهل نعرف مسبقًا على أي وجه ستقع؟

إذا دحرجنا حجر النرد فهل نعرف مسبقًا أي عدد سوف يظهر على الوجه العلوي؟

إذا تقدمت إلى اختبار في مادة الرياضيات فهل تعرف الدرجة التي سوف تحصل عليها؟

وغيرها من الأسئلة التي يمكن أن تجول في الخاطر.

اشرح لهم بإسهاب التجربة العشوائية وأن النواتج كافة الممكنة الحدوث تشكل فضاء العينة.

في المثال (1)

ركّز للطلاب على الفرق بين فضاء العينة الذي يتضمن النتائج الممكنة كافة والحدث الذي هو جزء من فضاء العينة. اعرض أمامهم أمثلة متنوعة، ثم اسألهم في كل مثل عن فضاء العينة ونوعية الحدث الذي تختاره. استمع إلى شرحهم عن الحدث البسيط، والحدث المركب، والحدث المستحيل، والحدث المؤكد، والحدثين المتنافيين، والحدث المتمم لحدث معين وأخيرًا الحدثين المستقلين.

اطلب إلى بعض منهم عرض أمثلة عن تجارب عشوائية لتحديد فضاء العينة والأحداث التي سبق أن عرضناها.

في المثال (2)

أخبرهم أن: احتمال الحدث $= \dfrac{\text{عدد النواتج في الحدث}}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة}}$

هو قاعدة الاحتمال لحدث عندما يكون كل عنصر في فضاء العينة له فرصة الظهور مثل كل عنصر آخر. وأن عدد النواتج في الحدث يشكل جزءًا من فضاء العينة والذي هو عدد النواتج الممكنة وبالتالي احتمال وقوع حدث ما يكون دائمًا عددًا ينتمي إلى الفترة [0, 1].

حدثان مستقلان Independant Events

يقال للحدثين A, B أنهما مستقلان إذا كان وقوع أحدهما لا يؤثر على وقوع الآخر أثناء التجربة العشوائية.

مثال توضيحي

عند رمي حجر نرد أعط مثالًا على كل من:

a حدث بسيط b حدث مركب c حدث مستحيل
d حدث مؤكد e حدثين متنافيين f حدث متمم
g حدثين مستقلين

الحل:

a ظهور العدد 5 هو حدث بسيط.
b ظهور أحد مضاعفات العدد 3 هو حدث مركب.
c ظهور العدد 8 هو حدث مستحيل.
d ظهور عدد من 1 إلى 6 هو حدث مؤكد.
e الحدثان: A: «ظهور أحد العددين 5، 6»، B: «ظهور عددين مجموعهما يساوي 4» هما حدثان متنافيان.
f إذا كان الحدث A: «ظهور أحد العددين 5، 6» فإن الحدث $\overline{A}$: «ظهور عدد أصغر من أو يساوي 4» هو الحدث المتمم للحدث A
g إذا رمينا حجر النرد مرتين، الحدثان A: «ظهور العدد 5 في المرة الأولى»، B: «ظهور العدد 4 في المرة الثانية» هما حدثان مستقلان.

مثال (1)

في تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة وملاحظة الوجه العلوي.

1 اكتب وحدد نوع كلٍ من الأحداث التالية:
a A: ظهور عدد أكبر من 5
b B: ظهور عدد فردي
c C: ظهور عدد زوجي
d D: ظهور عدد أصغر من 7

2 a أثبت أن B, C حدثان متتامان.
b بيّن فيما إذا كان الحدثان C, D متنافيان أم لا.

169

تمرّنْ 11–3

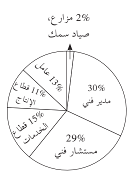
الاحتمال
Probability

المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (2–1)، رميت حجري نرد. بيّن ما إذا كان الحدثان متنافيين أم لا.

(1) مجموع العددين الظاهرين هو عدد أولي، المجموع أصغر من 4
(2) ناتج ضرب العددين الظاهرين 24، أحد العددين هو عدد أولي.

(3) يبيّن التمثيل البياني أدناه، أنواع عقود العمل في إحدى الدول في العام 2011، أوجد احتمال كل حدث مما يلي:



(a) اختيار شخص من قطاع الخدمات.
(b) اختيار شخص من قطاع الخدمات أو مستشار فني.
(c) اختيار شخص ليس مديرًا فنيًا.
(d) اختيار شخص ليس عاملًا وليس من قطاع الإنتاج.

(4) يبيّن الجدول المقابل كيف يمضي موظفو إحدى المؤسسات عطلتهم الصيفية. اختير عشوائيًّا موظف من هذه المؤسسة. ما احتمال أن يسكن خلال عطلته الصيفية في فندق على شاطئ البحر؟

المسكن	الجبل	شاطئ البحر	المجموع
استئجار شقة في مبنى	14	6	20
فندق	16	12	28
منزل مستقل	8	18	26
المجموع	38	36	74

(5) يحتوي كيس على 4 كرات زرقاء اللون وكرتين حمراء اللون. أخذت كرتان معًا من دون النظر داخل الكيس. أوجد احتمال كل حدث مما يلي:
(a) الكرتان زرقاوان.
(b) كرة زرقاء وكرة حمراء.
(c) الكرتان من اللون نفسه.

72

احتمال الحدث المستحيل = صفر

احتمال الحدث المؤكد = 1

ويمكن كتابة (الحدث)P على صورة كسر اعتيادي كما يمكن تحويله إلى كسر عشري أو نسبة مئوية.

أخبر الطلاب أن هذا الجدول يدعى الجدول ذا مدخلين حيث يدرس الطالب حدثين معًا: وسيلة النقل والشعبة. ويسمح هذا الجدول باتخاذ قرارات واضحة ودقيقة.

في المثال (3)

هذا المثال هو تطبيق مباشر لمفهوم الاحتمال:

$$\frac{\text{عدد النواتج في الحدث}}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة}}$$

مع التنبيه إلى أن اختيار محمد هو ملزم ويكفي اختيار طالبين من بين بقية الطلاب.

في المثال (4)

اشرح لهم من خلال أمثلة معنى الحدثين المتنافيين والحدثين المستقلين فإذا كان:

$A \cap B = \varnothing$ (A, B متنافيان) فمن الطبيعي أن

$P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$ وإذا كان:

A, B مستقلين فإن: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

توسع في حالة الاحتمال لاتحاد حدثين لجهة إذا كانا متنافيين أو إذا كانا غير مستقلين.

في المثال (5)

يعبر هذا المثال عن حالة الاحتمال لحدثين متنافيين، حيث إنه لا يوجد تقاطع بين الطلاب الذين أعمارهم أصغر من 25 سنة والطلاب الذين أعمارهم أكبر من 34 سنة. لهذا السبب:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

ملاحظة:
نرمز لاحتمال الحدث E بالرمز $P(E)$.

الحل:

1 a $A = \{6\}$, $n(A) = 1$
$\therefore$ A حدث بسيط.

b $B = \{1,3,5\}$, $n(B) = 3$
$\therefore$ B حدث مركب.

c $C = \{2,4,6\}$, $n(C) = 3$
$\therefore$ C حدث مركب.

d $D = \{1,2,3,4,5,6\}$, $n(D) = 6$
$\therefore$ D حدث مؤكد.

2 ليكن S فضاء العينة.
$S = \{1,2,3,4,5,6\}$

a $B \cup C = \{1,3,5,2,4,6\} = S, B \cap C = \phi$
$\therefore$ B, C حدثان متتامان.

b $C \cap D = \{2,4,6\} \neq \phi$
$\therefore$ الحدثان C, D ليسا متنافيان.

حاول أن تحل

1 في أحد المخيمات الصيفية يشارك الطالب في مجموعة من الأنشطة وهي: كرة القدم، كرة السلة، كرة المضرب، الكرة الطائرة، السباحة وركوب الدراجات.

a اكتب وحدد نوع كل من الأحداث التالية:
(1) A: المشاركة في كرة المضرب فقط.
(2) B: المشاركة في الأنشطة التي تستخدم فيها كرة كبيرة.
(3) C: المشاركة في الأنشطة التي لا تستخدم فيها كرة.

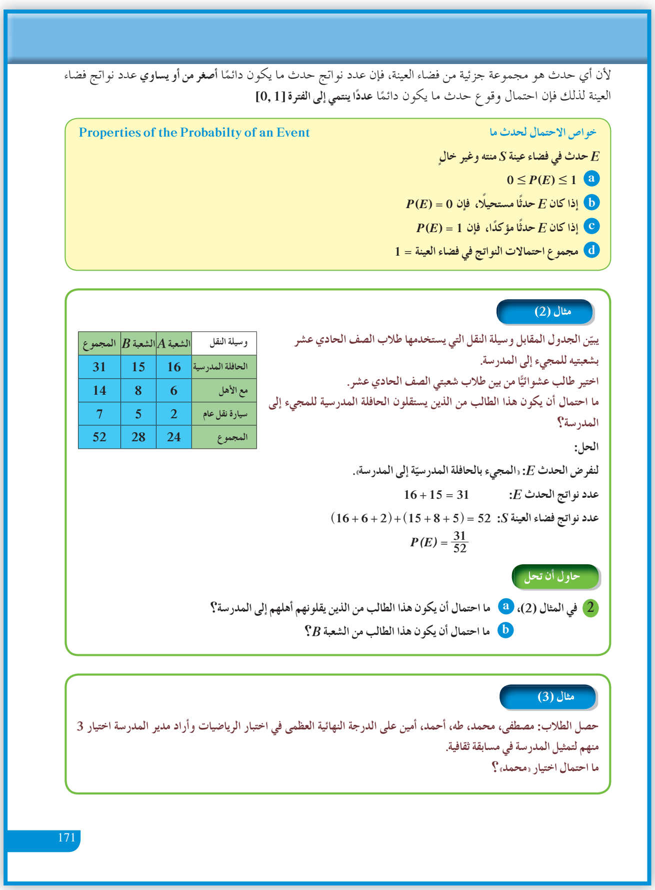
b (1) بيّن فيما إذا كان الحدثان B, C متتامان أم لا.
(2) أعط مثالًا عن حدثين متنافيين.

الاحتمال **Probability**

إذا كانت جميع نواتج التجربة العشوائية لها فرصة الظهور نفسها فإن احتمال الحدث هو:

$$P(E) = \frac{\text{عدد نواتج الحدث } E}{\text{عدد نواتج فضاء العينة } S} = \frac{n(E)}{n(S)}$$

170



لأن أي حدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة، فإن عدد نواتج حدث ما يكون دائمًا **أصغر من أو يساوي** عدد نواتج فضاء العينة لذلك فإن احتمال وقوع حدث ما يكون دائمًا **عددًا ينتمي إلى الفترة [0, 1]**

خواص الاحتمال لحدث ما **Properties of the Probabilty of an Event**

E حدث في فضاء عينة S منته وغير خالٍ

a $0 \leq P(E) \leq 1$

b إذا كان E حدثًا مستحيلًا، فإن $P(E) = 0$

c إذا كان E حدثًا مؤكدًا، فإن $P(E) = 1$

d مجموع احتمالات النواتج في فضاء العينة = 1

مثال (2)

يبيّن الجدول المقابل وسيلة النقل التي يستخدمها طلاب الصف الحادي عشر بشعبتيه للمجيء إلى المدرسة.
اختير طالب عشوائيًا من بين طلاب شعبتي الصف الحادي عشر.
ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الذين يستقلون الحافلة المدرسية للمجيء إلى المدرسة؟

وسيلة النقل	الشعبة A	الشعبة B	المجموع
الحافلة المدرسية	16	15	31
مع الأهل	6	8	14
سيارة نقل عام	2	5	7
المجموع	24	28	52

الحل:

لنفرض الحدث E: «المجيء بالحافلة المدرسيّة إلى المدرسة».

عدد نواتج الحدث E: $16 + 15 = 31$

عدد نواتج فضاء العينة S: $(16+6+2)+(15+8+5) = 52$

$P(E) = \frac{31}{52}$

حاول أن تحل

2 في المثال (2)، a ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الذين يقلونهم أهلهم إلى المدرسة؟
b ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الشعبة B؟

مثال (3)

حصل الطلاب: مصطفى، محمد، طه، أحمد، أمين على الدرجة النهائية العظمى في اختبار الرياضيات وأراد مدير المدرسة اختيار 3 منهم لتمثيل المدرسة في مسابقة ثقافية.
ما احتمال اختيار «محمد»؟

171

في المثال (6)

يعبّر هذا المثال عن حالة الاحتمال لحدثين غير متنافيين إذ يوجد تقاطع بين الحدث الأول A(مضاعفات العدد 3) والحدث الثاني B(عدد زوجي) لهذا السبب:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ركّز مع الطلاب مفهوم احتمال ذات الحدين وأنه لا يمكن استخدام قاعدة هذا الاحتمال إلا في تحقق الشرطين التاليين معًا كما ورد في كتاب الطالب:

- إذا تكرر الحدث عدة مرات.
- إذا كان هناك ناتجان للحدث فقط.

أكّد لهم أن الشرط $P(A) + P(B) = 1$ هو أساسي لاستخدام احتمال ذات الحدين وأنه في التجربة العشوائية إذا كان حصول الحدث A هو k مرة من أصل n مرة فيكون: $P(A) = {}_nC_k (P(A))^k \times (P(B))^{n-k}$

توسع في النقاش والحوار مع الطلاب أثناء العمل في المثالين (8)، (9)، حيث تتنوع في التطبيق لاحتمال ذات الحدين.

في المثال (7)

هذا المثال هو تطبيق لمبدأ احتمال ذات الحدين لأنه مع راشد 3 بطاقات والفوز بجائزتين يعني أن بطاقتين هما فائزتان وبطاقة غير فائزة باحتمال: $100\% - 40\% = 60\%$

في المثال (8)

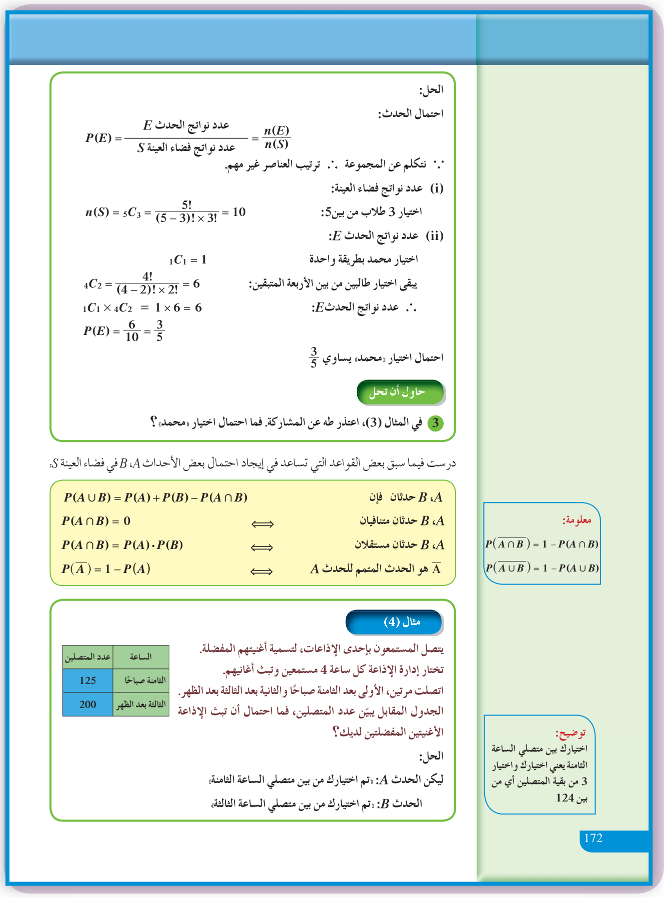
هذا المثال هو تطبيق لاحتمال ذات الحدين، الحالة الخاصة حيث $k = 4$ وتعني أن تخدم كل من البطاريات الأربع مدة عام.

6 الربط

إن الأمثلة كافة في هذا الدرس توفر الربط بين المفاهيم والمهارات والمواقف الحياتية التي نصادفها.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

يمكن أن تتعدد الأخطاء في هذا الدرس فلا يميز الطلاب بين الأحداث المتنافية والأحداث المستقلة أو كيفية استخدام احتمال ذات الحدين. ساعدهم على فهم هذه الأحداث.



الحل:

احتمال الحدث:

$$P(E) = \frac{E \text{ عدد نواتج الحدث}}{S \text{ عدد نواتج فضاء العينة}} = \frac{n(E)}{n(S)}$$

∵ نتكلم عن المجموعة ∴ ترتيب العناصر غير مهم.

(i) عدد نواتج فضاء العينة:

اختيار 3 طلاب من بين5: $n(S) = {}_5C_3 = \frac{5!}{(5-3)! \times 3!} = 10$

(ii) عدد نواتج الحدث E:

اختيار محمد بطريقة واحدة $_1C_1 = 1$

يبقى اختيار طالبين من بين الأربعة المتبقين: ${}_4C_2 = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = 6$

∴ عدد نواتج الحدثE: ${}_1C_1 \times {}_4C_2 = 1 \times 6 = 6$

$P(E) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

احتمال اختيار «محمد» يساوي $\frac{3}{5}$

حاول أن تحل

3 في المثال (3)، اعتذر طه عن المشاركة. فما احتمال اختيار «محمد»؟

درست فيما سبق بعض القواعد التي تساعد في إيجاد احتمال بعض الأحداث A، B في فضاء العينة S:

A، B حدثان فإن		$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
A، B حدثان متنافيان	$\Longleftrightarrow$	$P(A \cap B) = 0$
A، B حدثان مستقلان	$\Longleftrightarrow$	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
$\overline{A}$ هو الحدث المتمم للحدث A	$\Longleftrightarrow$	$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

معلومة:

$P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$

$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

مثال (4)

يتصل المستمعون بإحدى الإذاعات، لتسمية أغنيتهم المفضلة.
تختار إدارة الإذاعة كل ساعة 4 مستمعين وتبث أغانيهم.
اتصلت مرتين، الأولى بعد الثامنة صباحًا والثانية بعد الثالثة بعد الظهر.
الجدول المقابل يبيّن عدد المتصلين، فما احتمال أن تبث الإذاعة الأغنيتين المفضلتين لديك؟

الساعة	عدد المتصلين
الثامنة صباحًا	125
الثالثة بعد الظهر	200

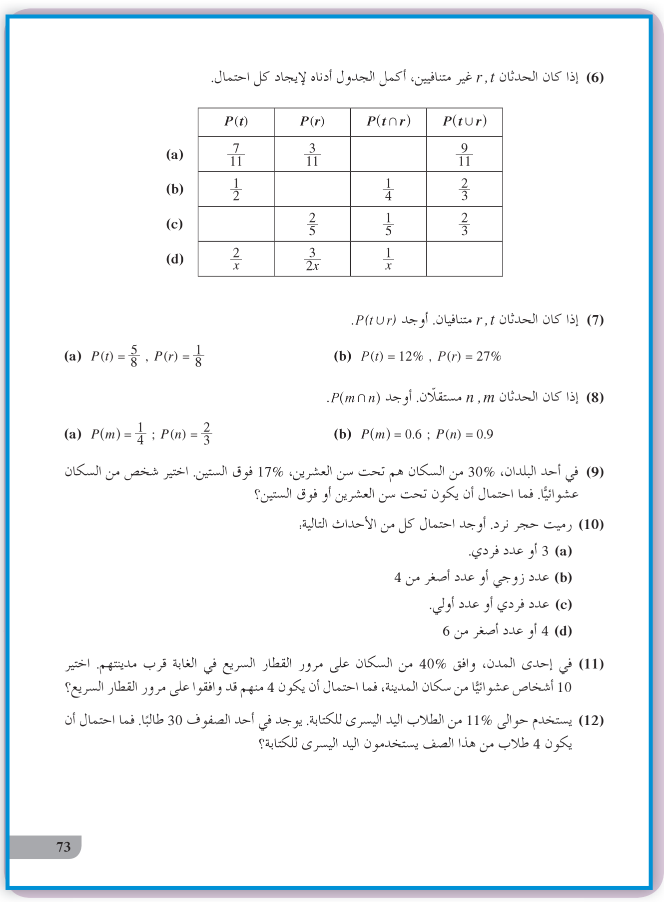
الحل:

ليكن الحدث A: «تم اختيارك من بين متصلي الساعة الثامنة»

الحدث B: «تم اختيارك من بين متصلي الساعة الثالثة»

توضيح:
اختيارك بين متصلي الساعة الثامنة يعني اختيارك واختيار 3 من بقية المتصلين أي من بين 124

172



(6) إذا كان الحدثان t, r غير متنافيين، أكمل الجدول أدناه لإيجاد كل احتمال.

	$P(t)$	$P(r)$	$P(t \cap r)$	$P(t \cup r)$
(a)	$\frac{7}{11}$	$\frac{3}{11}$		$\frac{9}{11}$
(b)	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$
(c)		$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{3}$
(d)	$\frac{2}{x}$	$\frac{3}{2x}$	$\frac{1}{x}$	

(7) إذا كان الحدثان t, r متنافيان. أوجد $P(t \cup r)$.

(a) $P(t) = \frac{5}{8}$, $P(r) = \frac{1}{8}$ (b) $P(t) = 12\%$, $P(r) = 27\%$

(8) إذا كان الحدثان m, n مستقلّان. أوجد $P(m \cap n)$.

(a) $P(m) = \frac{1}{4}$; $P(n) = \frac{2}{3}$ (b) $P(m) = 0.6$; $P(n) = 0.9$

(9) في أحد البلدان، 30% من السكان هم تحت سن العشرين، 17% فوق الستين. اختير شخص من السكان عشوائيًّا. فما احتمال أن يكون تحت سن العشرين أو فوق الستين؟

(10) رميت حجر نرد. أوجد احتمال كل من الأحداث التالية:
(a) 3 أو عدد فردي.
(b) عدد زوجي أو عدد أصغر من 4
(c) عدد فردي أو عدد أولي.
(d) 4 أو عدد أصغر من 6

(11) في إحدى المدن، وافق 40% من السكان على مرور القطار السريع في الغابة قرب مدينتهم. اختير 10 أشخاص عشوائيًّا من سكان المدينة، فما احتمال أن يكون 4 منهم قد وافقوا على مرور القطار السريع؟

(12) يستخدم حوالى 11% من الطلاب اليد اليسرى للكتابة. يوجد في أحد الصفوف 30 طالبًا. فما احتمال أن يكون 4 طلاب من هذا الصف يستخدمون اليد اليسرى للكتابة؟

73

8 التقييم

تابع الطلاب وهم يتعاملون مع تمارين فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من قدرتهم على استيعاب المفاهيم والمهارات التي وردت في هذا الدرس.

اختبار سريع

1 اكتب فضاء العينة إذا ألقيت قطعة نقود معدنية لمرتين متتاليتين، بحيث إن أحد الوجوه يحمل كتابة (T) والوجه الآخر يحمل صورة (H).

فضاء العينة: $E = \{TT, HT, TH, HH\}$

2 في كيس 4 كرات حمراء اللون، 6 كرات صفراء اللون سحبت عشوائيًّا 3 كرات من هذا الكيس. ما احتمال الحصول على كرة واحدة حمراء اللون وكرتين صفراوي اللون؟

$$P(\text{الحدث}) = \frac{{}_4C_1 \times {}_6C_2}{{}_{10}C_3} = \frac{4 \times 15}{120}$$
$$= \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

3 في كيس كرات مرقمة من 1 إلى 10 سحبت من الكيس عشوائيًّا كرة واحدة. ما احتمال أن تحمل هذه الكرة عددًا من مضاعفات 2 أو عددًا أصغر من 7؟

فضاء العينة: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

الحدث: $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

الحدث: $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$A \cap B = \{2, 4, 6\}$$
$$P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$
$$P(A \cap B) = \frac{3}{10}$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{5}{10} + \frac{6}{10} - \frac{3}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

نلاحظ أن الحدثين A، B مستقلان.

$$\therefore \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$
$$P(A) = \frac{{}_1C_1 \times {}_{124}C_3}{{}_{125}C_4} = \frac{4}{125}$$
$$P(B) = \frac{{}_1C_1 \times {}_{199}C_3}{{}_{200}C_4} = \frac{4}{200} = \frac{1}{50}$$
$$P(A \cap B) = \frac{4}{125} \times \frac{1}{50} = \frac{4}{6\,250} = \frac{2}{3125}$$

احتمال أن تبث الإذاعة الأغنيتين المفضلتين لديك يساوي $\frac{2}{3125}$

حاول أن تحل

4 في المثال (4)، إذا اختارت إدارة الإذاعة 5 متصلين كل ساعة.
فما احتمال أن تبث أغنيتيك المفضلتين؟

مثال (5)

حوالى 53% من طلاب إحدى الجامعات عمرهم أصغر من 25 عامًا وحوالى 21% من طلاب هذه الجامعة عمرهم أكبر من 34 عامًا.
اختير طالب عشوائيًّا من هذه الجامعة.

a ما احتمال أن يكون عمر الطالب أصغر من 25 أو أكبر من 34؟

b ما احتمال أن يكون عمر الطالب 25 عامًا فأكثر؟

الحل:

ليكن الحدث A: «عمر الطالب أصغر من 25 عامًا».

ليكن الحدث B: «عمر الطالب أكبر من 34 عامًا».

$\therefore$ الحدثان A, B متنافيان.

$$\therefore \quad P(A \cap B) = 0$$
$$P(A) = \frac{53}{100} = 0.53, \quad P(B) = \frac{21}{100} = 0.21$$

a الحدث: عمر الطالب أصغر من 25 أو أكبر من 34 هو $A \cup B$

$$\therefore \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.53 + 0.21 - 0 = 0.74$$

b الحدث: عمر الطالب 25 عامًا فأكثر هو حدث متمم للحدث A وهو $\overline{A}$

$$\therefore \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.53 = 0.47$$

حاول أن تحل

5 في المثال (5)، أوجد احتمال كل حدث مما يلي:

a عمر الطالب بين 25 عامًا و34 عامًا.

b عمر الطالب 34 عامًا وأقل.

173

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إن اختيار لون السيارة عشوائيًّا، اختيار الدواليب عشوائيًّا هما حدثان مستقلان. (a) (b)

(2) الحدثان m، n مستقلان، $P(m) = \frac{12}{17}$, $P(n) = \frac{3}{8}$ إذًا $P(m \cap n) = \frac{9}{17}$ (a) (b)

(3) عند رمي حجر نرد، فإن احتمال ظهور العدد 4 أو ظهور عدد زوجي يساوي $\frac{1}{2}$ (a) (b)

(4) في اختبار صح – خطأ، أجبت عن 5 أسئلة عشوائيًّا. احتمال أن تكون 3 من إجاباتك صحيحة هو $\frac{5}{16}$ (a) (b)

في التمارين (5–11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) الحدثان m، n مستقلان، $P(m) = \frac{1}{3}$، $P(n) = \frac{9}{10}$ إذًا $P(m \cap n)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{25}{30}$
(c) $\frac{3}{10}$ (d) $\frac{11}{30}$

(6) الحدثان t، r متنافيان $P(t) = \frac{3}{5}$، $P(r) = \frac{1}{3}$ إذًا $P(t \cup r)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{14}{15}$
(c) $\frac{4}{15}$ (d) 0

(7) الحدثان t، r متنافيان $P(t) = \frac{1}{7}$، $P(r) = 60\%$ إذًا $P(t \cup r)$ تساوي:

(a) 28% (b) 42%
(c) $\frac{16}{35}$ (d) $\frac{26}{35}$

(8) عند رمي حجر نرد فإن احتمال ظهور عدد زوجي أو عدد أولي يساوي:

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{5}{6}$
(c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

(9) يحتوي كيس على 5 كرات من اللون الأزرق، 3 كرات من اللون الأحمر. أخذت عشوائيًّا كرتان معًا من الكيس. احتمال الحدث: «أن تكون كرة حمراء والأخرى كرة زرقاء» هو:

(a) $\frac{1}{14}$ (b) $\frac{28}{15}$
(c) $\frac{2}{7}$ (d) $\frac{15}{28}$

74

4 إحدى قطع النقود المعدنية صنعت بشكل خاطئ إذ تبيّن أن احتمال الحصول على وجه الكتابة هو 0.65 أي $P(T) = 0.65$ واحتمال الحصول على وجه الصورة هو 0.35 أي $P(H) = 0.35$.
ألقيت هذه القطعة 10 مرات متتالية.
ما احتمال الحصول على وجه الكتابة 8 مرات؟

نستخدم احتمال ذات الحدين.

$$P(\text{الحدث}) = {}_{10}C_8\,(0.65)^8 \times (0.35)^2$$

$$\approx 45 \times 0.032 \times 0.1225 \approx 0.176$$

9 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

1 تتعدد إجابات الطلاب كلّ بحسب النتائج التي يحصل عليها.

2 شكل الخيمة الأكثر توقعًا والحرف الأقل توقعًا.

3 الوجهة الصغرى: 20%
الوجهة الكبرى: 30%
شكل الخيمة: 35%
الحرف: 15%

4 **(a)** قد تختلف الإجابات.
(b) قد تختلف الإجابات.
(c) تحقق من إجابات الطلاب. يمكن تحسين التوقع بزيادة المحاولات لإفلات الورقة.

مثال (6)

رُمي حجر نرد منتظم. فما احتمال الحصول على أحد مضاعفات العدد 3 أو عدد زوجي؟

الحل:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \Longrightarrow \quad n(S) = 6$$

ليكن الحدث A: «مضاعفات العدد 3»

$$A = \{3,6\} \quad \Longrightarrow \quad P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

الحدث B: «عدد زوجي»

$$B = \{2,4,6\} \quad \Longrightarrow \quad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

الحدثان B، A غير متنافيين لأن

$$A \cap B = \{6\} \quad \Longrightarrow \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$\therefore\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{2}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

احتمال الحصول على عدد من مضاعفات العدد 3 أو عدد زوجي يساوي $\frac{2}{3}$

طريقة أخرى:

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$$

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

حاول أن تحل

6 في المثال (6)، ما احتمال الحصول على عدد زوجي أو عدد أولي؟

احتمال ذات الحدين **Binomial Probability**

إقامة تجربة n مرّة وتسجيل نتائجها علمًا أن هناك فقط لكل تجربة نتيجتين H أو T

إذا كان $P(H) = m$، الحدث E، H تحقق فقط k مرّة» فبالتالي:

$$P(E) = {}_nC_k \cdot P(H)^k \cdot P(T)^{n-k}$$
$$= {}_nC_k \cdot m^k (1-m)^{n-k}$$
$$= \frac{n!}{k!(n-k)} \cdot m^k (1-m)^{n-k}$$

يستخدم احتمال ذات الحدين:

- في حالة **تكرار** حدث عدة مرات.
- إذا كان للحدث **ناتجان فقط:**

ربح – خسارة، نجاح – فشل، كتابة – صورة، ...

174

(10) يتوزّع طلاب مدرستين B، A على الصفوف الثلاثة الأخيرة وفق النسب التالية:

المدرسة / الصف	العاشر	الحادي عشر	الثاني عشر
A	37%	35%	28%
B	38%	34%	28%

اختير عشوائيًّا طالب من كل مدرسة. احتمال أن يكون طالب من الصف العاشر أو الصف الحادي عشر من المدرسة A وطالب من الصف الثاني عشر من المدرسة B هو:

(a) 20.16%　(b) 100%
(c) 0%　(d) 79.84%

(11) 90% من القمصان التي تنتجها إحدى الشركات لا عيب فيها. اختار مراقب الجودة 8 قمصان عشوائيًّا. احتمال أن يكون 3 قمصان من هذه المجموعة لا عيب فيها هو تقريبًا:

(a) 0.033　(b) 5.9×10^{-4}
(c) 4×10^{-4}　(d) 2.955

75

«حاول أن تحل»

1 **(a)** **(1)** حدث بسيط.

(2) حدث مركب.

(3) حدث مركب.

(b) **(1)** الحدثان غير متنامين.

$B =$ {كرة القدم، كرة السلة، الكرة الطائرة}

$C =$ {السباحة، ركوب الدراجات}

يبقى كرة المضرب.

(2) الحدثان: A: «ركوب الدراجات»

B: «كرة المضرب» هما حدثان

متنافيان.

2 **(a)** $P = \frac{14}{52} = \frac{7}{26}$

(b) $\frac{28}{52} = \frac{7}{13}$

3 $\frac{{}_1C_1 \cdot {}_3C_2}{{}_4C_3} = \frac{3}{4}$

4 $\frac{{}_{124}C_4}{{}_{125}C_5} \times \frac{{}_{199}C_4}{{}_{200}C_5} = \frac{1}{25} \times \frac{1}{40} = \frac{1}{1000}$

5 **(a)** 26%

(b) 79%

6 $\frac{5}{6}$

7 ${}_3C_1 \times (0.40)^1 \times (0.60)^2 = 0.432$

8 ${}_4C_3 \times (0.9)^3 \times (0.1)^1 = 0.2916$

مثال (7)

خلال شهر التسوق يقدم أحد المحلات العرض التالي: عند شراء كل صنف تحصل على بطاقة. تفوز 40% من البطاقات بجوائز ويتم اختيار هذه البطاقات الرابحة بشكل عشوائي. مع راشد 3 بطاقات. ما احتمال أن يفوز راشد بجائزتين؟

الحل:

نفرض الحدث A: «فوز راشد بجائزة» $P(A) = m = 0.40$

الحدث B: «عدم فوز راشد بجائزة» $P(B) = 1 - m = 0.60$

والحدث E: «فوز راشد بجائزتين»

فيكون: $n = 3$ و $k = 2$

$$P(E) = {}_nC_k \cdot (m)^k \cdot (1-m)^{n-k}$$
$$= {}_3C_2 (0.4)^2 (0.6)^1$$
$$= 0.288$$

احتمال فوز راشد بجائزتين يساوي 0.288

حاول أن تحل

7 في المثال (7)، ما احتمال أن يفوز راشد بجائزة واحدة فقط؟

مثال (8)

في إحدى الآلات الحاسبة 4 بطاريات. احتمال أن تخدم كل بطارية مدة عام كامل يساوي 90%

ما احتمال أن تخدم كل من البطاريات الأربع مدة عام؟

الحل:

ليكن الحدث A «تخدم البطارية مدّة عام كامل» $P(A) = m = 0.9$

ليكن الحدث B «لا تخدم البطارية مدّة عام كامل» $P(B) = 1 - m = 1 - 0.9 = 0.1$

الحدث E «تخدم كل من البطاريات الأربع مدة عام كامل»

نستخدم احتمال ذات الحدين $n = 4$ ، $k = 4$

$$P(E) = {}_nC_k \cdot (m)^k \cdot (1-m)^{n-k}$$
$$= {}_4C_4 (0.9)^4 (0.1)^0$$
$$= 0.6561$$

احتمال أن تخدم كل من البطاريات الأربع مدة عام يساوي 0.6561

حاول أن تحل

8 في المثال (8)، ما احتمال أن تخدم 3 بطاريات فقط مدة عام كامل؟

175

المرشد لحل المسائل

إجابة «مسألة إضافية»

P(يصيب الهدف) $= 0.2$

P(لا يصيب الهدف) $= 0.8$

P(على الأقل يصيب الهدف مرتين)

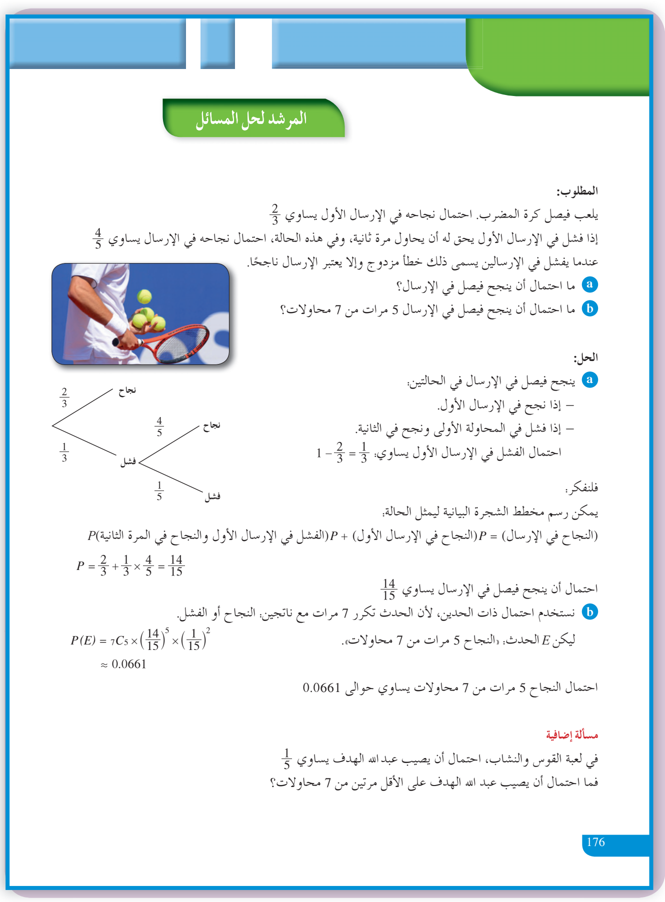
$$= {}_7C_2\,(0.2)^2\,(0.8)^5 + {}_7C_3\,(0.2)^3\,(0.8)^4$$

$$+ {}_7C_4\,(0.2)^4\,(0.8)^3 + {}_7C_5\,(0.2)^5\,(0.8)^2$$

$$+ {}_7C_6\,(0.2)^6\,(0.8)^1 + {}_7C_7\,(0.2)^7$$

$$\approx 0.2753 + 0.115 + 0.0287 + 0.0043$$

$$+ 0.001 + 0.00001 \approx 0.424$$



المرشد لحل المسائل

المطلوب:

يلعب فيصل كرة المضرب. احتمال نجاحه في الإرسال الأول يساوي $\frac{2}{3}$

إذا فشل في الإرسال الأول يحق له أن يحاول مرة ثانية، وفي هذه الحالة، احتمال نجاحه في الإرسال يساوي $\frac{4}{5}$

عندما يفشل في الإرسالين يسمى ذلك خطأ مزدوج وإلا يعتبر الإرسال ناجحًا.

a ما احتمال أن ينجح فيصل في الإرسال؟

b ما احتمال أن ينجح فيصل في الإرسال 5 مرات من 7 محاولات؟

الحل:

a ينجح فيصل في الإرسال في الحالتين:

– إذا نجح في الإرسال الأول.

– إذا فشل في المحاولة الأولى ونجح في الثانية.

احتمال الفشل في الإرسال الأول يساوي: $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

فلنفكر:

يمكن رسم مخطط الشجرة البيانية ليمثل الحالة:

P(النجاح في الإرسال) = P(النجاح في الإرسال الأول) + P(الفشل في الإرسال الأول والنجاح في المرة الثانية)

$P = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{14}{15}$

احتمال أن ينجح فيصل في الإرسال يساوي $\frac{14}{15}$

b نستخدم احتمال ذات الحدين، لأن الحدث تكرر 7 مرات مع ناتجين: النجاح أو الفشل.

ليكن E الحدث: «النجاح 5 مرات من 7 محاولات».

$P(E) = {}_7C_5 \times \left(\frac{14}{15}\right)^5 \times \left(\frac{1}{15}\right)^2$

≈ 0.0661

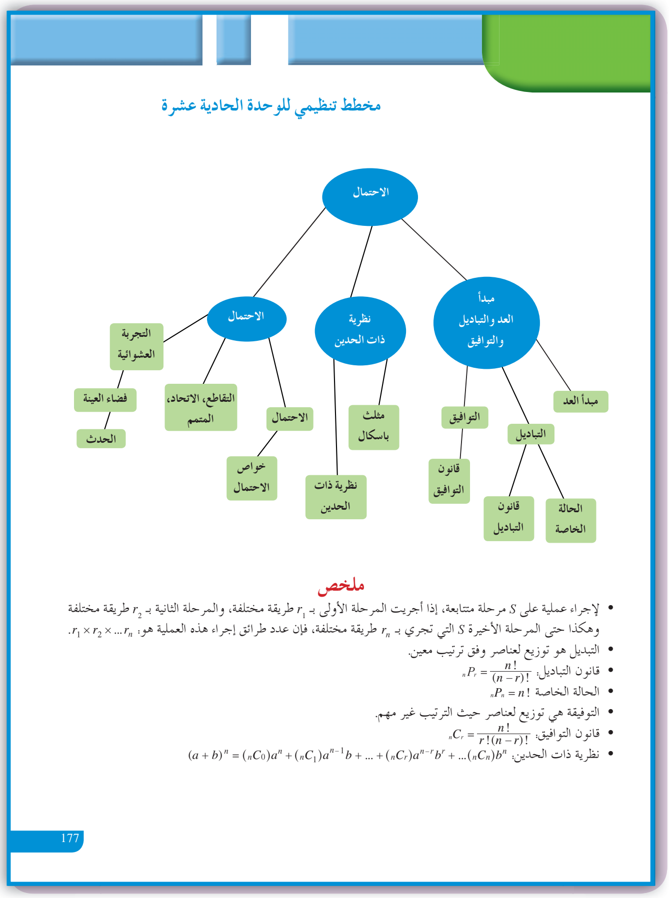
احتمال النجاح 5 مرات من 7 محاولات يساوي حوالى 0.0661

مسألة إضافية

في لعبة القوس والنشاب، احتمال أن يصيب عبد الله الهدف يساوي $\frac{1}{5}$

فما احتمال أن يصيب عبد الله الهدف على الأقل مرتين من 7 محاولات؟

176

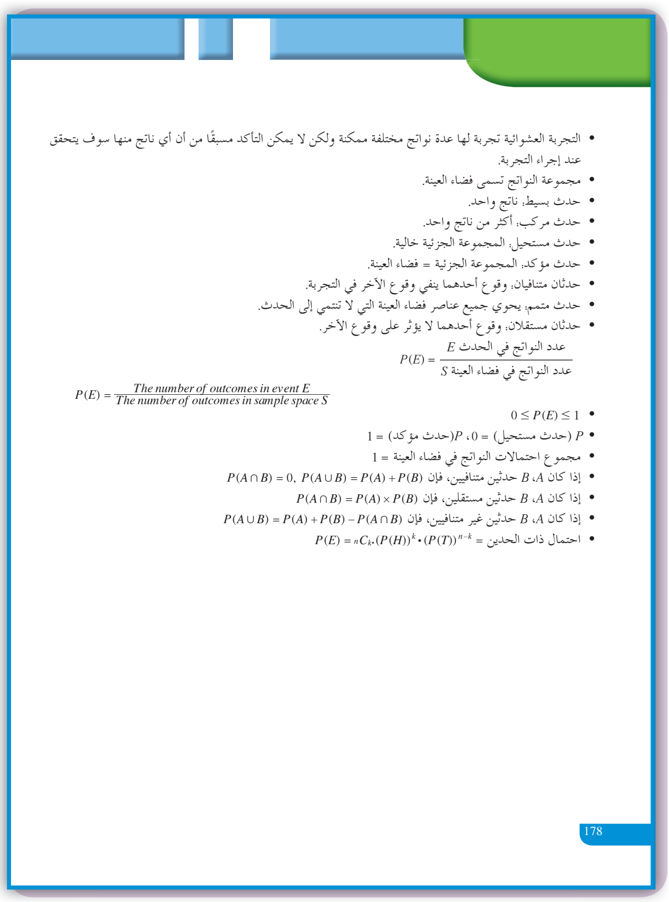


مخطط تنظيمي للوحدة الحادية عشرة

ملخص

- لإجراء عملية على S مرحلة متتابعة، إذا أجريت المرحلة الأولى بـ r_1 طريقة مختلفة، والمرحلة الثانية بـ r_2 طريقة مختلفة وهكذا حتى المرحلة الأخيرة S التي تجري بـ r_n طريقة مختلفة، فإن عدد طرائق إجراء هذه العملية هو: $r_1 \times r_2 \times \ldots r_n$.
- التبديل هو توزيع لعناصر وفق ترتيب معين.
- قانون التباديل: ${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$
- الحالة الخاصة ${}_nP_n = n!$
- التوفيقة هي توزيع لعناصر حيث الترتيب غير مهم.
- قانون التوافيق: ${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$
- نظرية ذات الحدين: $(a+b)^n = ({}_nC_0)a^n + ({}_nC_1)a^{n-1}b + \ldots + ({}_nC_r)a^{n-r}b^r + \ldots ({}_nC_n)b^n$

177



- التجربة العشوائية تجربة لها عدة نواتج مختلفة ممكنة ولكن لا يمكن التأكد مسبقًا من أن أي ناتج منها سوف يتحقق عند إجراء التجربة.
- مجموعة النواتج تسمى فضاء العينة.
- حدث بسيط: ناتج واحد.
- حدث مركب: أكثر من ناتج واحد.
- حدث مستحيل: المجموعة الجزئية خالية.
- حدث مؤكد: المجموعة الجزئية = فضاء العينة.
- حدثان متنافيان: وقوع أحدهما ينفي وقوع الآخر في التجربة.
- حدث متمم: يحوي جميع عناصر فضاء العينة التي لا تنتمي إلى الحدث.
- حدثان مستقلان: وقوع أحدهما لا يؤثر على وقوع الآخر.

$P(E) = \frac{\text{عدد النواتج في الحدث } E}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة } S}$

$P(E) = \frac{\text{The number of outcomes in event } E}{\text{The number of outcomes in sample space } S}$

- $0 \le P(E) \le 1$
- P (حدث مستحيل) = 0، P(حدث مؤكد) = 1
- مجموع احتمالات النواتج في فضاء العينة = 1
- إذا كان A، B حدثين متنافيين، فإن $P(A \cap B) = 0,\ P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- إذا كان A، B حدثين مستقلين، فإن $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
- إذا كان A، B حدثين غير متنافيين، فإن $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- احتمال ذات الحدين = $P(E) = {}_nC_k \cdot (P(H))^k \cdot (P(T))^{n-k}$

178

اختبار الوحدة الحادية عشرة

(1) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار 5 ممثلين من مجموعة مؤلفة من 11 ممثلًا لتحضير عمل مسرحي؟

(2) بكم طريقة مختلفة يمكن توزيع 15 طالبًا على مجموعات كل منها من 3 طلاب؟

(3) أنت تبحث عن منزل. هناك 5 منازل للإيجار، بكم طريقة مختلفة يمكن زيارة هذه المنازل؟

(4) أوجد مفكوك: $(1-2t)^4$

(5) أوجد قيمة التعبير: $2({}_5C_4) - {}_3C_2$

في التمرينين (7–6)، رميت حجري نرد. في كل حالة، حدّد ما إذا كان الحدثان متنافيين أم لا، ثم أوجد $P(A \cup B)$.

(6) A: «مجموع العددين الظاهرين = 12»؛ B: «كل من العددين هو عدد فردي».

(7) A: «العددان متساويان»؛ B: «مجموعهما من مضاعفات العدد 3».

(8) احتمال النجاح = 0.2، أوجد احتمال النجاح في 4 محاولات من بين 10

(9) احتمال الفوز = 0.6، أوجد احتمال الفوز 3 مرات في 8 محاولات.

(10) في مدرستك اشترى 30% من الطلاب شعار المدرسة، اخترت 5 طلاب عشوائيًّا. فما احتمال أن يكون:

(a) اثنان منهم قد اشتريا شعار المدرسة؟

(b) على الأقل اثنان قد اشتريا شعار المدرسة؟

(11) يوجد في واجهة أحد المحلات التجارية 6 مصابيح كهربائية. عند الاستخدام العادي، إمكانية أن يبقى كل مصباح يعمل لمدة سنتين هي 95%

(a) فما احتمال أن تبقى المصابيح الستة تعمل لمدة سنتين؟

(b) فما احتمال أن تبقى 5 مصابيح تعمل خلال سنتين؟

(12) تقول إحدى الشركات أن 99% من علب رقائق الذرة التي تبيعها وزنها مطابق لما هو مدوّن على العلبة.

(a) في صندوق من 10 علب. ما احتمال ألا يطابق وزن علبة واحدة فقط ما هو مدوّن عليها؟

(b) ما احتمال أن تكون أوزان 3 علب من هذا الصندوق غير مطابقة لما هو مدوّن عليها؟

تمارين إثرائية

(1) يقول صاحب أحد محلات بيع الخضار والفاكهة أن 90% من ثمار الأناناس التي يبيعها تصبح ناضجة خلال 4 أيام. أوجد احتمال كل مما يلي لصندوق يحتوي على 12 ثمرة أناناس.

(a) كل الثمرات تصبح ناضجة خلال 4 أيام.

(b) على الأقل 10 ثمرات تصبح ناضجة خلال 4 أيام.

(c) ليس أكثر من 9 ثمرات تصبح ناضجة خلال 4 أيام.

(2) باستخدام الأحرف A, B, C نريد كتابة كلمات من 10 أحرف.

(a) ما عدد الكلمات التي يمكن كتابتها؟

(b) ما عدد الكلمات التي يمكن كتابتها:

(i) تبدأ بـ A؟

(ii) تنتهي بـ ABC؟

(iii) تتضمن الحرف A في الخانة السادسة؟

(iiii) الأحرف الثلاثة الأولى A, B, C دون الأخذ بعين الاعتبار الترتيب؟

(c) ما عدد الكلمات التي يمكن كتابتها وتتضمن:

(i) على الأقل حرف A مرة واحدة؟

(ii) بالتحديد 4 مرات الحرف B.

(iii) على الأكثر مرة واحدة C؟

(3) تتكوّن الشيفرة السرية لفتح الخزنة من حرف يليه عدد من 3 أرقام.

(a) الحرف هو أحد أحرف كلمة «كويت». فما عدد الشيفرات الممكنة؟

(b) الحرف هو ك لكن لا يوجد رقم متكرر.

(c) الحرف هو أحد أحرف كلمة «كويت» وعدد الشيفرة هو عدد زوجي.

(d) الحرف هو ت، يتضمن العدد على الأقل أحد الأرقام 9 ,8 ,7

(4) رمز المنزل مكوّن من 4 أرقام لا صفر فيها ولا تكرار. اختار يوسف رمزًا عشوائيًّا. فما احتمال أن يكون صحيحًا؟

(5) حل في n: ${}_nC_3 + {}_nC_2 = 5n(n-1)$

(6) تتألف الموسوعة العلمية من 20 جزءًا. وقد وضعت عشوائيًّا على رف المكتبة. فما احتمال أن يكون الجزءان 2 ,1 قرب بعضهما بعضًا.

(7) يوجد في واجهة أحد المحال التجارية صف من المصابيح الكهربائية. تعطى إمكانية أن تبقى بعض هذه المصابيح تعمل لأكثر من سنتين بالتعبير: ${}_5C_2(0.15)^2 \times (0.85)^3$

(a) ما عدد مصابيح واجهة المحل؟

(b) ما عدد المصابيح التي يتوقع أن تبقى تعمل لأكثر من سنتين؟

(c) ما احتمال أن تبقى جميع المصابيح تعمل لأكثر من سنتين؟

(8) في الكيس الأول 6 كرات سوداء اللون و4 بيضاء اللون. في الكيس الثاني، 8 كرات سوداء اللون و12 كرة بيضاء اللون. نختار كيسًا عشوائيًّا ثم نختار أيضًا عشوائيًّا كرة من الكيس.
فما احتمال أن تكون الكرة بيضاء اللون؟

(9) رميت قطعة نقود معدنية 6 مرات. احتمال الحصول على صورة 3 مرات وكتابة 3 مرات يساوي 0.3125، هل قطعة النقود هذه معدّلة؟

(10) لنفرض أنه اختير عشوائيًّا عدد من 10 إلى 100 ضمنًا.

(a) ما احتمال أن يكون من مضاعفات العدد 5؟

(b) ما احتمال أن يكون من مضاعفات العدد 4؟

(c) هل الحدثان متنافيان؟ اشرح.

(d) ما احتمال أن يكون العدد من مضاعفات العدد 5 والعدد 4؟

(11) في اختبار «الاختيار من متعدد» هناك 4 إجابات لكل سؤال.

(a) اختار طالب إجابة عشوائيًّا، فما احتمال أن تكون صحيحة؟

(b) اختار طالب ثلاثة أسئلة من الاختبار وأجاب عنها عشوائيًّا. فما احتمال أن تكون الإجابات الثلاث صحيحة؟

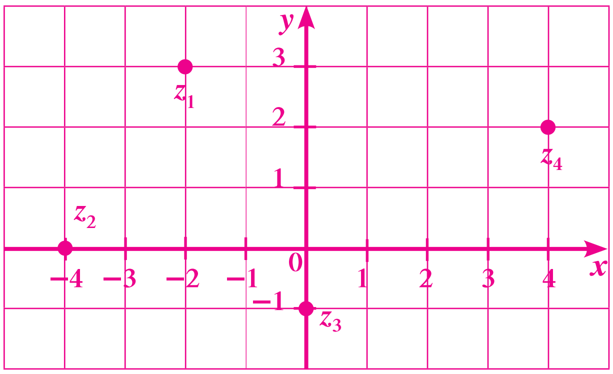
المجموعة A تمارين مقالية

(1) $4i$ (2) $i\sqrt{15}$ (3) $9i$ (4) $-5i$

(5) $2+i\sqrt{3}$ (6) $2+i$ (7) $-\frac{1}{3}-\frac{5}{6}\sqrt{2}\,i$ (8) $4+\sqrt{2}\,i$

(9) $x=-7\ ,\ y=3$ (10) $x=\frac{16}{3}\ ,\ y=-\frac{19}{8}$ (11) $x=-7\ ,\ y=-8$

(12)



(13) (a) $z_1=4+5i$ (b) $z_2=-4-2i$ (c) $z_3=-2+6i$ (d) $z_4=-3i$

(14) $6+3i$ (15) $-2-3i$ (16) $10-4i$ (17) $11-5i$

(18) 10 (19) $-324i$ (20) $7-i$ (21) $9-23i$

(22) $-27+8i$ (23) -216 (24) $z=-i\ ,\ z^{27}=i\ ,\ z^{12}=1$

(25) (a) $1-\frac{4}{3}i$ (b) $-10+5i$ (c) $2+11i$

(d) $-2-11i$ (e) $5+3i$ (f) $-2-11i$

(26) $\overline{z}=-\sqrt{3}-i$

(27) (a) $\frac{-3}{13}+\frac{2}{13}i$ (b) $-\frac{1}{5}i$ (c) $\frac{-4}{25}-\frac{3}{25}i$

(28) $\frac{\overline{z_1}}{z_2}=-\frac{5}{7}-\frac{\sqrt{3}}{7}i\ ,\ \frac{z_1}{z_2}=-\frac{1}{7}-\frac{3\sqrt{3}}{7}i\ ,\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=-\frac{1}{7}+\frac{3\sqrt{3}}{7}i$

(29) $y=-x$ أو $y=x$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a) (2) (b) (3) (b) (4) (a) (5) (d)

(6) (b) (7) (c) (8) (d) (9) (c) (10) (a)

(11) (c) (12) (a) (13) (d) (14) (d)

المجموعة A تمارين مقالية

(1) (a) 13 (b) $2\sqrt{2}$ (c) 2

(2) $(1,\sqrt{3})$

(3) $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\,,\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(4) $\left(\frac{3}{4}\,,\,\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

(5) $(-2,0)$

(6) $(0,-2)$

(7) $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\,,\,\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$

(8) $\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$

(9) $(\sqrt{29},111.8^{\circ})$

(10) $(3,\pi)$

(11) $\left(4,\frac{\pi}{2}\right)$

(12) $\left(4,\frac{4\pi}{3}\right)$

(13) $\left(6,+\frac{11\pi}{6}\right)$

(14) $3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

(15) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(16) $4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

(17) $\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}$

(18) $2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

(19) $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

(20) $8(\cos 0+i\sin 0)$

(21) $\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}$

(22) $5\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$

(23) $8(\cos 30^{\circ}+i\sin 30^{\circ})$

(24) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

(25) $2(\cos 45^{\circ}+i\sin 45^{\circ})$

(26) $4\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

(27) $5(\cos 300^{\circ}+i\sin 300^{\circ})$

(28) $3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

(29) $-\sqrt{3}-i$

(30) $1-i$

(31) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i$

(32) $\frac{7\sqrt{3}}{2}-\frac{7}{2}i$

(33) $\frac{-\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	(2) (a)	(3) (a)	(4) (b)	(5) (a)
(6) (a)	(7) (d)	(8) (c)	(9) (a)	(10) (b)
(11) (b)	(12) (b)	(13) (b)		

حل معادلات تمرَّنْ 3–7

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\{2-i\}$

(2) $\left\{\frac{4}{3}-i\right\}$

(3) $\left\{\frac{5}{2}-3i\right\}$

(4) $\left\{\frac{8}{5}-\frac{16}{5}i\right\}$

(5) $\{2i\,,\,-2i\}$

(6) $\left\{\frac{5+i\sqrt{3}}{2}\,,\,\frac{5-i\sqrt{3}}{2}\right\}$

(7) $\{-3+4i\,,\,-3-4i\}$

(8) $\{1+i\sqrt{3}\,,\,1-i\sqrt{3}\}$

(9) $\{1+\sqrt{3}\,i\,,\,1-\sqrt{3}\,i\}$

(10) $\left(\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}\right)^2+\left(\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}\right)+2=0\,,\;\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}+z_2=-1\Longrightarrow z_2=\frac{-1-\sqrt{7}i}{2}$

(11) $1+2i\ ,\ -1-2i$

(12) $3+2i\ ,\ -3-2i$

(13) $3-4i\ ,\ -3+4i$

(14) $3-2i\ ,\ -3+2i$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a) (2) (b) (3) (b) (4) (b) (5) (a)

(6) (a) (7) (a) (8) (d) (9) (b) (10) (c)

اختبار الوحدة السابعة

(1) $-2+12i$

(2) $9-10i$

(3) $-9+i$

(4) $31+14i$

(5) $-3+7i\ ,\ \frac{3}{58}+\frac{7}{58}i$

(6) $\sqrt{53}$

(7) (a) $-3i$ (b) -1 (c) $-5-12i$

(8) $i\sqrt{5}\ ,\ -i\sqrt{5}$

(9) $\frac{9}{13}+\frac{7}{13}i\ ,\ \frac{\sqrt{130}}{13}(\cos 38^\circ + i\sin 38^\circ)$

(10) $\left\{\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right\}$

(11) $1+2i$

(12) $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\ ,\ \frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$

(13) (a) $\frac{1}{2}(\cos 0 + i\sin 0)$ (b) $3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$ (c) $4\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

(14) $3\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

(15) $\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{2}i$

(16) $1+3i\ ,\ -1-3i$

(17) (a) $4\left(-2+\frac{3}{2}i\right)^2+16\left(-2+\frac{3}{2}i\right)+25=0$

(b) $z_2=-2-\frac{3}{2}i$

تمارين إثرائية

(1) لكل هذه الأعداد المقياس نفسه = 1.

$\therefore$ تنتمي كلها إلى الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها 1.

(2) $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}$

(3) بما أن $AB=BC=CD=DA=1$ رباعي $ABCD$ جميع أضلاعه متساوية الطول لذا هو معين.

(4) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$

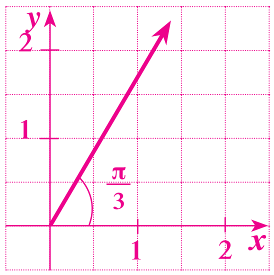
(5) $(1+i)^2=+2i\ ,\ (1+i)^4=(+2i)^2=-4\ ,\ (1+i)^8=(-4)^2=16$

(6) $z=a+bi\ ,\ |z|=\sqrt{a^2+b^2}=1\ \therefore\ a^2+b^2=1$

$\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{\bar{z}}{1}=\bar{z}$

(7) (a) $f(1+i) = +2i(1+i) + (-2+3i)(+2i) + (13-i)(1+i) - 6 - 10$
$= 7 + 7i^2 = 0$

(b) باستخدام القسمة التركيبية: $f(z) = (z-1-i)[z^2 + (-1+4i)z + 8 + 2i]$

(8)


(9) (a) بالتعويض أو باستخدام القسمة.

(b) $\left\{1+i\ ,\ 1-i, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

(c) $f(z) = (z^2 - 2z + 2)(z^2 + z + 1)$

(10) (a) $f(-1) = +1 - 6 + 2i + 5 - 2i = 0$

(b) باستخدام القسمة التركيبية: $-5 + 2i$

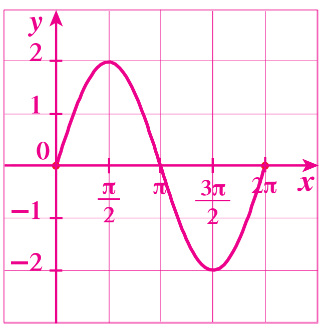
التمثيل البياني للدوال المثلثية (الجيب، جيب التمام، الظل) تمرَّنْ 1–8

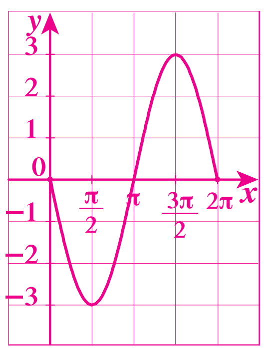
المجموعة A تمارين مقالية

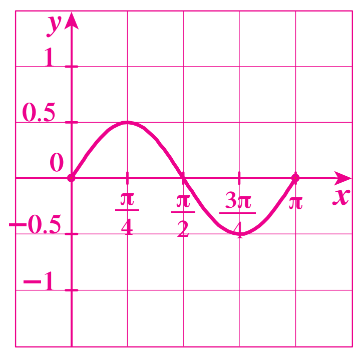
(1) (a) $2\pi, 3$ (b) $\pi, 1$ (c) $6\pi, 3$ (d) $4\pi, \frac{1}{3}$

(2) (a) $y = +\sin 3x$ (b) $y = +\frac{1}{3}\sin 2x$ (c) $y = -4\sin\frac{1}{2}x$

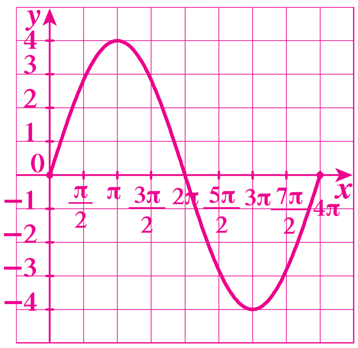
(3) (a) $y = 5\cos\frac{2}{3}x$ (b) $y = -\frac{1}{2}\cos 2x$ (c) $y = \frac{3}{5}\cos 4x$

(4) (a)


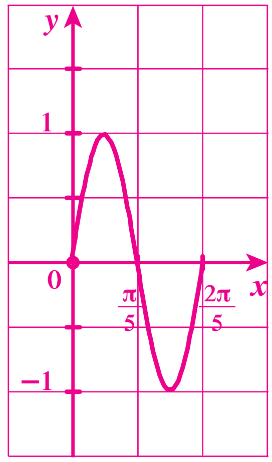
(b)


(c)


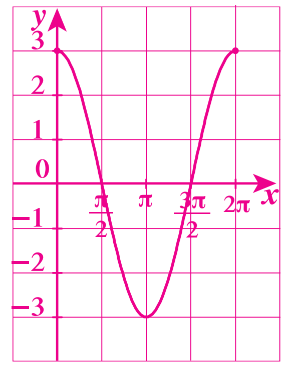
(d)



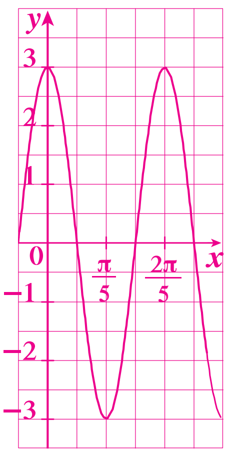
(e)



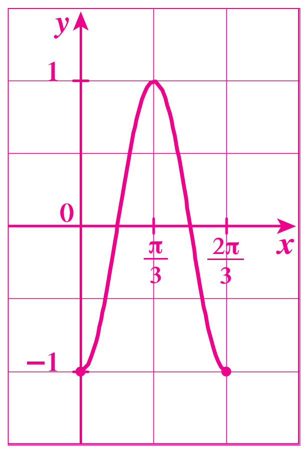
(f)



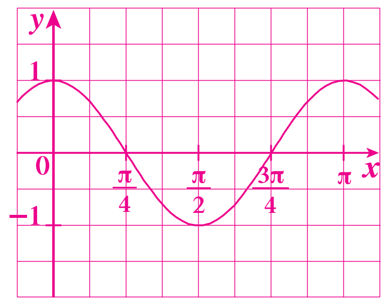
(g)



(h)



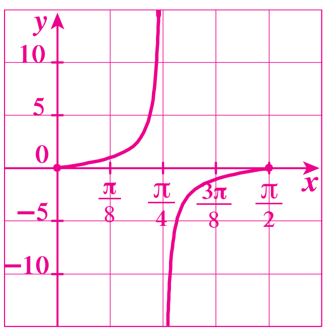
(i)



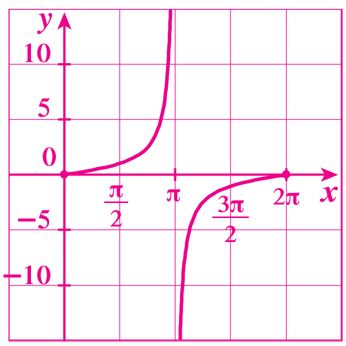
(5) (a) $\frac{\pi}{5}$ (b) $\frac{2\pi}{3}$

(6) (a) $y = \tan 5x$ (b) $y = \tan \frac{3}{2}x$ (c) $y = \tan 4x$

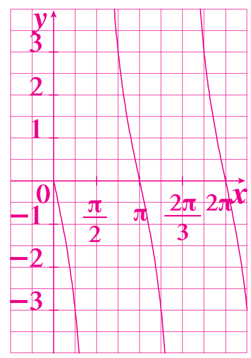
(7) (a)



(b)



(c)



المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b) (2) (b) (3) (a) (4) (a) (5) (b)

(6) (b) (7) (a) (8) (b) (9) (d) (10) (a)

(11) (d) (12) (b) (13) (b) (14) (c) (15) (d)

(16) (a) (17) (b)

المجموعة A تمارين مقالية

(1) (a) بيان الدالة h تمدد رأسي إلى أعلى بمعامل $\frac{5}{3}$ لبيان الدالة f.

(b) بيان الدالة h انكماش رأسي إلى أسفل بمعامل $\frac{2}{3}$ لبيان الدالة f وانعكاس في محور السينات.

(c) بيان الدالة h انكماش أفقي بمعامل $\frac{1}{3}$ لبيان الدالة f.

(d) بيان الدالة h تمدد أفقي بمعامل 5 لبيان الدالة f.

(e) بيان الدالة h انكماش أفقي بمعامل $\frac{1}{2}$ وانكماش رأسي إلى الأسفل بمعامل $\frac{1}{3}$ لبيان الدالة f انعكاس في محور السينات.

(f) بيان الدالة h انكماش أفقي بمعامل $\frac{1}{4}$ وتمدد رأسي إلى الأعلى بمعامل 1.5 لبيان الدالة f.

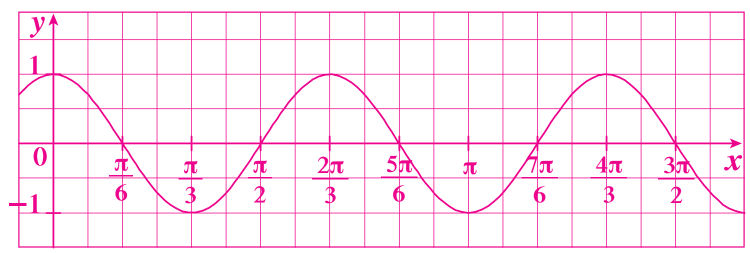
(g) بيان الدالة h إزاحة أفقية إلى اليسار $\frac{\pi}{3}$ وحدة لبيان الدالة f.

(h) بيان الدالة h إزاحة أفقية إلى اليمين $\frac{\pi}{4}$ وحدة لبيان الدالة f.

(i) بيان الدالة h إزاحة رأسية إلى الأعلى 4 وحدات لبيان الدالة f.

(j) بيان الدالة h إزاحة رأسية إلى الأسفل وحدة واحدة لبيان الدالة f.

(2) بيان الدالة y_2 هو انكماش أفقي بمعامل $\frac{1}{3}$ لبيان الدالة y_1.



(3) (a) بيان الدالة $y = -2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ هو إزاحة أفقية إلى اليسار $\frac{\pi}{4}$ وحدة وإزاحة رأسية إلى الأعلى وحدة واحدة وتمدد رأسي إلى الأسفل بمعامل 2 وحدة لبيان الدالة $y = \sin\theta$ وانعكاس في محور السينات.

(b) بيان الدالة $y = -3.5\sin\left[2\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\right] - 1$ هو إزاحة أفقية إلى اليمين $\frac{\pi}{4}$ وحدة وإزاحة رأسية إلى الأسفل وحدة واحدة وانكماش أفقي بمعامل $\frac{1}{2}$ وتمدد رأسي إلى الأسفل بمعامل 3.5 لبيان الدالة $y = \sin\theta$ وانعكاس في محور السينات.

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	(2) (a)	(3) (a)	(4) (b)	(5) (a)
(6) (a)	(7) (a)	(8) (b)	(9) (c)	(10) (d)

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $m(\widehat{A}) = 45°$, $a \approx 13.88$ cm , $b \approx 5.08$ cm

(2) $m(\widehat{C}) = 75°$, $a \approx 4.53$ cm , $c \approx 5$ cm

(3) $m(\widehat{C}) = 128°$, $m(\widehat{B}) = 20°$, $c \approx 25.28$ cm

(4) $m(\widehat{B}) = 37°$, $m(\widehat{C}) = 100°$, $c \approx 46.2$ cm

(5) $m(\widehat{A}) = 78°$, $m(\widehat{B}) = 34°$, $b \approx 10.856$ cm

أو $m(\widehat{A}) = 102°$, $m(\widehat{B}) = 10°$, $b \approx 3.37$ cm

(6) $m(\widehat{A}) = 67°$, $m(\widehat{C}) = 56°$, $c \approx 9.9$ cm

أو $m(\widehat{A}) = 113°$, $m(\widehat{C}) = 10°$, $c \approx 2$ cm

(7) كلّا، هذه حالة S.A.S.

(8) نعم، $c \approx 146.128$ cm ، $m(\widehat{B}) = 32°$

(9) (a) $b \approx 16.574$ m (b) $h \approx 15.76$ m

(10) (a) $a \approx 19.7$ m , $b \approx 15$ km (b) $h \approx 11.82$ km

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	(2) (b)	(3) (b)	(4) (c)	(5) (c)
(6) (a)	(7) (d)	(8) (c)	(9) (d)	

تمرَّنْ 4–8 قانون جيب التمام

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $m(\widehat{A}) = 50.6°$, $m(\widehat{B}) = 104.9°$, $m(\widehat{C}) = 24.5°$

(2) $b \approx 19.22$, $m(\widehat{A}) = 30.7°$, $m(\widehat{C}) = 18.3°$

(3) $c \approx 25$, $m(\widehat{A}) = 28.6°$, $m(\widehat{B}) = 56.4°$

(4) $a \approx 35.4$, $m(\widehat{B}) = 38°$, $m(\widehat{C}) = 60°$

(5) لا يوجد مثلث. لأنّ: $a + c = 1 + 4 = 5 = b$

(6) $m(\widehat{A}) = 24.5°$, $m(\widehat{B}) = 99.2°$, $m(\widehat{C}) = 56.3°$

(7) لا يوجد مثلث. لأن العمود المرسوم من C على $\overline{AB}$ يساوي طوله $9.89\text{ cm} > CB = 8.6\text{ cm}$ وهذا غير ممكن.

(8) $c = 7.4$, $m(\widehat{B}) = 60^\circ$, $m(\widehat{C}) = 49^\circ$

(9) $c \approx 16.51\text{ cm}$

(10) $AB \approx 130.4\text{ m}$

(11) $AB \approx 841\text{ m}$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	(2) (a)	(3) (a)	(4) (a)	(5) (b)
(6) (a)	(7) (a)	(8) (a)	(9) (b)	(10) (b)

تمرَّنْ 5–8 مساحة المثلث

المجموعة A تمارين مقالية

(1) نستخدم قاعدة هيرون أو $a^2 = (32)^2 + (19)^2 - 2(32)(19)\cos(47^\circ)$ ، $\text{Area} \approx 222.33\text{ cm}^2 = \frac{1}{2}(32)(19)\sin\widehat{A}$.

(2) نطبق قاعدة هيرون أو نوجد قياس زاوية ثم نستخدم القاعدة: $\text{Area} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$

$s = 8.5\text{ cm}$, $\text{Area} \approx 8.18\text{ cm}^2$

(3) $s = 10.5\text{ cm}$, $\text{Area} \approx 17.4\text{ cm}^2$

(4) $s = 27\text{ cm}$, $\text{Area} \approx 113.84\text{ cm}^2$

(5) $s = 36.4\text{ cm}$, $\text{Area} \approx 216.15\text{ cm}^2$

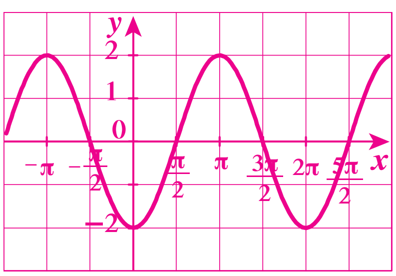
(6) $s = 23.8\text{ cm}$, $\text{Area} \approx 101.34\text{ cm}^2$

المجموعة B تمارين موضوعية

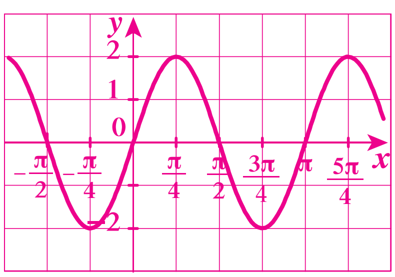
(1) (a)	(2) (a)	(3) (b)	(4) (b)	(5) (a)
(6) (b)	(7) (c)	(8) (b)	(9) (a)	(10) (b)

اختبار الوحدة الثامنة

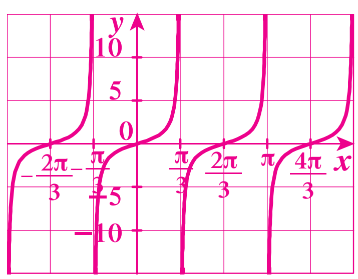
(1)



(2)



(3)



(4) $2\pi, 1.5$

(5) $4\pi, 5$

(6) $6, 4$

(7) $\frac{2\pi}{5}$، لا يوجد سعة

(8) 6، لا يوجد سعة

(9) $y = \pm 3\sin\frac{x}{2}$

(10) البدء من $y = \sin x$، ثم التمدد بمعامل $\frac{4}{\pi}$ أفقيًّا، التمدد بمعامل 2 رأسيًّا، الانعكاس في المحور السيني.

(11) إزاحة أفقية لِـ $\cos x$ بمقدار $\frac{\pi}{3}$ وحدة إلى اليسار.

(12) Area $\approx 4.275\ \text{cm}^2$

(13) $s = 6\ \text{cm}$, Area $= 6\ \text{cm}^2$

(14) Area $\approx 0.93\ \text{cm}^2$

(15) $s = 4.5\ \text{cm}$, Area $\approx 2.9\ \text{cm}^2$

(16) $AB \approx 4.6$, $m(\widehat{A}) = 42^{\circ}$, $m(\widehat{B}) = 88^{\circ}$

(17) $m(\widehat{A}) = 29^{\circ}$, $m(\widehat{B}) = 47^{\circ}$, $m(\widehat{C}) = 104^{\circ}$

(18) $b \approx 6.37$, $m(\widehat{C}) = 85^{\circ}$, $c = 7.749$

(19) زاوية مسار الطائرتين قياسها 45° فتكون المسافة بينهما حوالى 891 km

(20) $MB \approx 37\ \text{m}$, $MC \approx 48.3\ \text{m}$, $MD \approx 52.26\ \text{m}$

تمارين إثرائية

(1) 3 , 2π , -3 , -2

(2) $\frac{2}{3}$, 6π , 3 , 1

(3) البدء بالدالة f، ثم انكماش أفقيّ بمعامل $\frac{1}{2}$

(4) البدء بالدالة f، ثم التمدد أفقيًّا بمعامل 2، ثم الانكماش رأسيًّا بمعامل $\frac{2}{3}$.

(5) $h \approx 18.83\ \text{m}$

(6) $r \approx 12.1\ \text{m}$

(7) في قانون الجيب: $A.S.A$ ، $S.A.A$ ، $S.S.A$، وقانون جيب التمام: $S.S.A$، $S.A.S$، $S.S.S$.

(8) $m(C\widehat{A}B) = 38^{\circ}$

(9) $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Longrightarrow \dfrac{\cos A}{a} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2abc}$

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\sin x$ (2) $\sin^2 x$ (3) $\tan^2 x$ (4) $\dfrac{1}{\sin x\cos x}$

(5) 1 (6) $\tan x$ (7) $\dfrac{2}{\cos^2 x}$ (8) $\dfrac{2}{\sin x}$

(9) $\dfrac{1}{\cos^3 x}$ (10) -1 (11) 1 (12) 1

(13) 1 (14) 1 (15) 1 (16) 1

(17) $\sin^2 c(1+\tan^2 c)=\sin^2 c\times\dfrac{1}{\cos^2 c}=\tan^2 c$

(18) $1-2\sin x+\sin^2 x=(1-\sin x)^2$

(19) $2\cos^2 x+\cos x-1=(2\cos x-1)(\cos x+1)$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a) (2) (a) (3) (b) (4) (a) (5) (b)

(6) (b) (7) (d) (8) (b) (9) (d) (10) (a)

إثبات صحة متطابقات مثلثية

تمرّنْ 2–9

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\cos x\dfrac{\sin x}{\cos x}+\cos x\sin x\dfrac{\cos x}{\sin x}=\sin x+\cos^2 x$

(2) $\sin x\dfrac{\cos x}{\sin x}+\sin x\cos x\dfrac{\sin x}{\cos x}=\cos x+\sin^2 x$

(3) $1-2\tan x+\tan^2 x=(1+\tan^2 x)-2\tan x=\sec^2 x-2\tan x$

(4) $\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\sec x\csc x$

(5) $\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{\sin x}+2=\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}{\cos x\sin x}=\dfrac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin x\cos x}$

(6) $\dfrac{1}{1-\cos x}+\dfrac{1}{1+\cos x}=\dfrac{2}{(1-\cos x)(1+\cos x)}=\dfrac{2}{1-\cos^2 x}=\dfrac{2}{\sin^2 x}=2\csc^2 x$

(7) $\dfrac{\tan^2 x}{\sec x+1}=\dfrac{\sec^2 x-1}{\sec x+1}=\sec x-1=\dfrac{1}{\cos x}-1=\dfrac{1-\cos x}{\cos x}$

(8) $\cot^2 x-\cos^2 x=\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)^2-\cos^2 x=\dfrac{\cos^2 x(1-\sin^2 x)}{\sin^2 x}=\dfrac{\cos^4 x}{\sin^2 x}=\dfrac{\cos^2 x\cos^2 x}{\sin^2 x}=\cos^2 x\cot^2 x$

(9) $\cos^4 x-\sin^4 x=(\cos^2 x+\sin^2 x)(\cos^2 x-\sin^2 x)=\cos^2 x-\sin^2 x$

(10) $\dfrac{\tan x}{\sec x-1}=\dfrac{\tan x(\sec x+1)}{\sec^2 x-1}=\dfrac{\tan x(\sec x+1)}{\tan^2 x}=\dfrac{\sec x+1}{\tan x}$

(11) $\dfrac{(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)}{(\sin x+\cos x)^2}=\dfrac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x}$

$=\dfrac{\sin^2 x-(1-\sin^2 x)}{1+2\sin x\cos x}=\dfrac{2\sin^2 x-1}{1+2\sin x\cos x}$

(12) $\dfrac{\sin x}{1-\cos x}+\dfrac{1+\cos x}{\sin x}=\dfrac{\sin^2 x+1-\cos^2 x}{(\sin x)(1-\cos x)}=\dfrac{2(1-\cos^2 x)}{(\sin x)(1-\cos x)}=\dfrac{2(1+\cos x)}{\sin x}$

(13) $\sin^2 x\cos^3 x=\sin^2 x\cos^2 x\cos x=\sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x=(\sin^2 x-\sin^4 x)\cos x$

(14) $\sin^3 x\cos^3 x=\sin^3 x\cos^2 x\cos x=\sin^3 x(1-\sin^2 x)\cos x=(\sin^3 x-\sin^5 x)\cos x$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	(2) (b)	(3) (a)	(4) (b)	(5) (b)
(6) (d)	(7) (a)	(8) (c)	(9) (c)	(10) (a)

حل معادلات مثلثية — تمرَّنْ 3–9

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi\ ,\ x=\frac{11\pi}{6}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

(2) $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\ ,\ x=\frac{11\pi}{6}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

(3) $x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ ,\ x=\frac{5\pi}{3}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

(4) $a=\frac{\pi}{6}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

(5) $\cos x(2\sin x-1)=0\ ,\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi$

$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\ ,\ x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

(6) $\frac{\sin x}{\cos x}(\sin^2 x-1)=0$

$x=k\pi , x=\frac{\pi}{2}+2k\pi , x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi , k\in\mathbb{Z}$

(7) $x=\frac{\pi}{3}+k\pi\ ,\ x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

$x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ ,\ x=\frac{5\pi}{3}+2k\pi$

(8) $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ,\ x=\frac{5\pi}{3}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

(9) $x=\frac{5\pi}{4}$ أو $x=\frac{\pi}{4}$

(10) $x=\frac{7\pi}{9}$ أو $x=\frac{5\pi}{9}$ أو $x=\frac{\pi}{9}$ أو $x=\frac{17\pi}{9}$ أو $x=\frac{13\pi}{9}$ أو $x=\frac{11\pi}{9}$

(11) $x=\frac{13\pi}{8}$ أو $x=\frac{9\pi}{8}$ أو $x=\frac{5\pi}{8}$ أو $x=\frac{\pi}{8}$

(12) $x = k\pi$، حيث k عدد صحيح.

(13) $\sin x = -2$ أو $\sin x = \frac{1}{2}$، $\sin x = -2$ ليس لها حلول.

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ أو $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ حيث k عدد صحيح.

(14) لا توجد حلول، وتحلل إلى: $(\cos x)(\tan^2 x + 5) = 0$

العامل $\tan^2 x + 5$ دائمًا موجب وعلى أي حال $\cos x = 0$ غير مسموح بها لأن $\tan x$ في هذه الحالة غير معرّفة.

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	(2) (b)	(3) (b)	(4) (a)	(5) (b)
(6) (d)	(7) (d)	(8) (b)	(9) (b)	(10) (c)

متطابقات المجموع والفرق — تمرَّنْ 4–9

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(2) $\tan 135^\circ = \tan(180^\circ - 45^\circ) = \frac{\tan 180^\circ - \tan 45^\circ}{1 + \tan 180^\circ \tan 45^\circ} = -1$

(3) $\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(4) $\sin\gamma = \frac{4}{5}$, $\cos\gamma = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{15}{17}$, $\cos\beta = \frac{-8}{17}$

(a) $\sin 1(\beta + \gamma) = \sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma = \frac{13}{85}$

(b) $\cos(\beta - \gamma) = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma = \frac{36}{85}$

$\tan\gamma = \frac{4}{3}$, $\tan\beta = \frac{-15}{8}$

(c) $\tan(\gamma + \beta) = \frac{\tan\gamma + \tan\beta}{1 - \tan\gamma\tan\beta} = \frac{-13}{84}$

(5) $\sin(42^\circ - 17^\circ) = \sin 25^\circ$

(6) $\sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{7\pi}{10}$

(7) $\tan(19^\circ + 47^\circ) = \tan 66^\circ$

(8) $\cos\left(\frac{\pi}{7} - x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{7}\right)$

(9) $\sin(3x - x) = \sin 2x$

(10) $\tan(2y + 3x)$

(11) $\frac{\sin 3x\cos x - \cos 3x\sin x}{\sin x\cos x} = \frac{\sin 2x}{\sin x\cos x}$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a) (2) (b) (3) (b) (4) (a) (5) (d)

(6) (c) (7) (c) (8) (d) (9) (b) (10) (b)

(11) (d)

متطابقات ضعف الزاوية ونصفها — تمرَّنْ 5–9

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $= \cos x(2\sin x + 1)$

(2) $= 2\sin x\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x$

(3) $= \cos(2x + x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$

(4) $= 2\cos^2 2x - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$

(5) $\frac{2}{\sin 2x} = \frac{2}{2\sin x\cos x} = \frac{1}{\sin^2 x} \times \frac{\sin x}{\cos x} = \csc^2 x\tan x$

(6) $\sin 3x = \sin 2x\cos x + \cos 2x\sin x = 2\sin x\cos^2 x + (2\cos^2 x - 1)\sin x = \sin x(4\cos^2 x - 1)$

(7) $\cos 4x = \cos 2(2x) = 1 - 2\sin^2 2x = 1 - 2(2\sin x\cos x)^2 = 1 - 8\sin^2 x\cos^2 x$

(8) $\sin 15° = \sqrt{\frac{1 - \cos 30°}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

(9) $\tan 195° = \frac{1 - \cos 390°}{\sin 390°} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2 - \sqrt{3}$

(10) $\cos 75° = (\cos 45° + 30°) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

(11) (a) $\tan x$ (b) $\tan\frac{x}{2}$ (c) $\tan^2\frac{x}{2}$

(12) $\tan x\frac{3\pi}{4} < \frac{x}{2} < \pi \Longrightarrow sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - cosx}{2}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a) (2) (a) (3) (a) (4) (a) (5) (a)

(6) (c) (7) (b) (8) (d) (9) (c) (10) (c)

اختبار الوحدة التاسعة

(1) $\dfrac{1}{\cos x \sin x}$ (2) $\cos x - \sin x$ (3) 1

(4) $2\sec x$ (5) $\dfrac{1-4\cos x}{1-\cos x}$ (6) $\sin x \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

(7) $\tan x$ (8) $\sin x + \cos x$ (9) $2+\sqrt{3}$

(10) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (11) $2\sin x \sin y$ (12) $\sin x - \cos x$

(13) $\sin x$ (14) (a) $\dfrac{11\pi}{12}$ (b) (1) $\dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ (2) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(15) $\dfrac{24}{25}$ (16) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

تمارين إثرائية

(1) غير متساويين (2) غير متساويين

(3) $1 + \sec x \csc x$ (4) $\dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$ (5) 0

(6) (a) $2\cos^2 x = (\sin y + \cos y)^2$

(b) $2\sin^2 x = (\sin y - \cos y)^2$

(7) $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

(8) $\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\ ,\ \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi\ ,\ \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi\ ,\ \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

(9) $\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

(10) $\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\ ,\ \dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi\ ,\ \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\ ,\ \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi$

(11) $\dfrac{3\pi}{4}\ ,\ \dfrac{7\pi}{4}\ ,\ \dfrac{\pi}{12}\ ,\ \dfrac{13\pi}{12}\ ,\ \dfrac{5\pi}{12}\ ,\ \dfrac{17\pi}{12}$

(12) $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\ ,\ \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2}{3}k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

(13) $\sqrt{3}-2$ (14) $\cos^2 x + \cos y^2 - 1$

(15) (a) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (b) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos(x+30^\circ)$

(16) $4\cos(2x)$

(17) (a) $\cos x \cos y \cos z - \sin x \sin y \cos z - \sin x \cos y \cos z - \cos x \sin y \sin z$

(b) $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

(18) $\pi + 2k\pi\ ,\ \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi\ ,\ \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

(19) $(2\cos x + 1)(\tan x - 1) = 0\ ;\ \dfrac{\pi}{4} + k\pi\ ,\ \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\ ,\ \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(20) $\dfrac{\pi}{6} + k\pi\ ,\ \dfrac{5\pi}{6} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

(21) $y=\dfrac{\tan^2 x+\tan x}{\tan^2 x-1}$

$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\tan^2 x+\tan x}{\tan^2 x-1}$

$\tan x=2+\sqrt{3}$

(22) (a) $\tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

(b) $\tan x(\tan x\neq 0)$

(23) $2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)$

(24) (a) $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$

(b) $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

(c) $\cos 4x=\cos x \Longrightarrow x=\dfrac{2\pi}{5}\ ,\ x=\dfrac{4\pi}{5}$

(25) $\cos 18^{\circ}=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

$\sin 36^{\circ}=\frac{1}{8}(\sqrt{5}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

$\sin 9^{\circ}=\frac{1}{4}\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

(26) $m(B\widehat{A}M)=m(M\widehat{A}C)=\alpha$

(a) $\sin\alpha=\dfrac{BM}{AB}\Longrightarrow a=2b\sin\alpha$

(b) $m(D\widehat{C}B)=\alpha$

(c) $\cos\alpha=\dfrac{CD}{BC}\Longrightarrow CD=2b\sin\alpha\cos\alpha$

(d) $\text{Area}(ABC)=b^2\sin\alpha\cos\alpha$

(e) $\text{Area}(ABC)=\frac{1}{2}b^2\sin(2\alpha)$

(f) $\frac{1}{2}b^2\sin(2\alpha)=b^2\sin\alpha\cos\alpha\Longrightarrow\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$

المستقيمات والمستويات في الفضاء — تمرَّنْ 1–10

المجموعة A تمارين مقالية

(1) كلّا، المستقيم يمكن أن يكون موجودًا في أكثر من مستوٍ واحدٍ.

(2) كلّا، النقطة تنتمي إلى عدد لا ينتهي من المستويات.

(3) نعم، مستقيمان متقاطعان يعينان مستويًا واحدًا فقط.

(4) نعم، فالشكل $EFGH$ شبه منحرف يعيّن مستوي واحد فقط (يوجد مستقيمان متوازيان).

(5) نعم، فالشكل EGA مثلث يعيّن مستوي واحد فقط.

(6) المستويات الأربعة هي: $(ABC), (BCD), (ADB), (ACD)$.

(7) $\because\ E \in \overleftrightarrow{AC}\ ,\ \overleftrightarrow{AC} \subset (ABC)$

$\therefore\ E \in (ABC)$

$\because\ E \in \overleftrightarrow{AC}\ ,\ \overleftrightarrow{AC} \subset (ADC)$

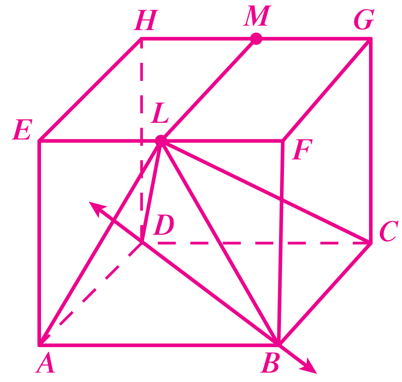
$\therefore\ E \in (ADC)$

(8) (a) النقطة B.

(b) المستقيم l الذي يمر بالنقطتين A، B.

(c) المستقيم l.

(9)

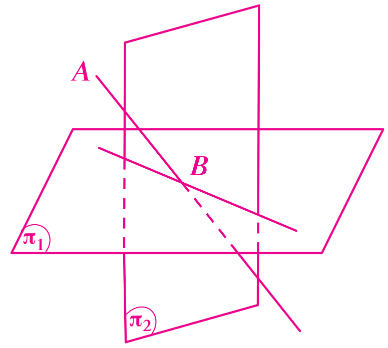


(a) $(AGH) \cap (ABC) = \overleftrightarrow{AB}$

(b) $(BFH) \cap (ABCD) = \overleftrightarrow{BD}$

(c) $(ADL) \cap (BCL) = \overleftrightarrow{LM} \parallel \overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$

(10)



(11) (a) $\overleftrightarrow{AB} \cap (BCD) = \{B\}$

(b) $\overleftrightarrow{AB} \cap (ACD) = \{A\}$

(c) $(ABC) \cap (BCD) = \overleftrightarrow{BC}$

(12) (a) $\overleftrightarrow{BD} \cap \overleftrightarrow{ND} = \{D\}$

(b) $\overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{BC} = \phi$ (متوازيان)

(c) $\overleftrightarrow{BD} \cap \overleftrightarrow{ML} = \phi$ (متخالفان)

(d) $\overleftrightarrow{ML} \cap (ABLK) = \{L\}$

(e) $\overleftrightarrow{BD}$

(f) $\overleftrightarrow{ND} \parallel \overleftrightarrow{BL}$ (يشكلان مستويًا)

(g) لا يشكّلان مستويًا لأنّهما مستقيمان متخالفان.

(h) $\because \ (CMN)=(DCMN),(ADK)=(ADNK)$

فهما يتقاطعان في $\overleftrightarrow{DN}$

(13) (a) $\because \ M \in \overleftrightarrow{AB}\ ,\ \overleftrightarrow{AB} \subset (ABC) \Longrightarrow M \in (ABC)$

$\because \ L \in \overleftrightarrow{AC}\ ,\ \overleftrightarrow{AC} \subset (ABC) \Longrightarrow L \in (ABC)$

$\therefore \ \overleftrightarrow{ML} \subset (ABC)$

(b) $\because$ $\overleftrightarrow{ML}$ ، $\overleftrightarrow{BC}$ ينتميان إلى (ABC) وهما مستقيمان غير متوازيين $\therefore$ $\overleftrightarrow{ML} \cap \overleftrightarrow{BC} = \{K\}$

(c) $\overleftrightarrow{ML} \cap (BCD) = \{K\}$ $\therefore$ $\overleftrightarrow{ML} \cap \overleftrightarrow{BC} = \{K\}$ $\because$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a) (2) (a) (3) (b) (4) (b) (5) (a)

(6) (a) (7) (b) (8) (c) (9) (c)

المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء تمرَّنْ 2–10

المجموعة A تمارين مقالية

(1) (a) $\because \ (\overleftrightarrow{AK}) \parallel \overleftrightarrow{BL}\,,\overleftrightarrow{CM} \parallel \overleftrightarrow{BL} \quad \therefore \ \overleftrightarrow{AK} \parallel \overleftrightarrow{CM}$

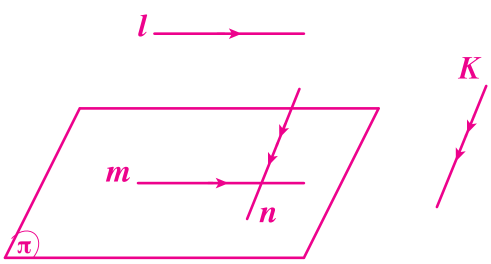
(b) $\overleftrightarrow{AK} \parallel \overleftrightarrow{CM}$ (المستقيمان المتوازيان يعينان مستويًا)

(c) $\because \ \overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{KN}\ ,\ \overleftrightarrow{KN} \subset (MKN) \Longrightarrow \overleftrightarrow{AD} \parallel (MKN)$

(2) (a) يكون $\overleftrightarrow{\ell}$ موازيًا للمستوى π إذا كان موازيًا لمستقيم ينتمي إلى π.

أو $\overleftrightarrow{\ell}$ محتوى في π.

(b) انظر الرسم: $\overleftrightarrow{k} \parallel \overleftrightarrow{n}$ ، $\overleftrightarrow{n} \subset \pi$ $\therefore$ $\overleftrightarrow{k} \parallel \pi$

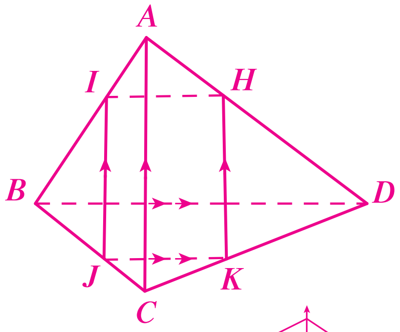


(3) في المثلث SAB، لدينا $\overleftrightarrow{ML} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ $\therefore$ $\overleftrightarrow{ML} \parallel (ABCD)$

(4) في المكعب $EACG$ متوازي أضلاع $\therefore$ $\overleftrightarrow{EG} \parallel \overleftrightarrow{AC}$ ومنه $\overleftrightarrow{EG} \parallel (ABCD)$ وتقاطع (GEM) مع $(ABCD)$ هو $\overleftrightarrow{MN}$ بحيث أن $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{EG}$

(5) (a) $\because$ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ و $\overleftrightarrow{CD} \subset (SCD)$ $\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \parallel (SCD)$

(b) (ABM) يمر بالمستقيم AB $(ABM) = (ABMN)$ $\because$ $\therefore$ (ABM) يتقاطع مع (SDC) بالمستقيم MN حيث $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ ولكن $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ فيكون $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

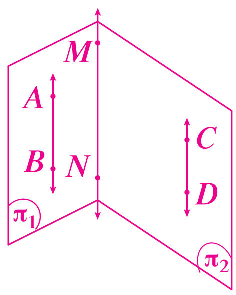


(6) (a) انظر الرسم.

(b) $\because$ $\overleftrightarrow{IJ} \parallel \overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{HK}$ $\therefore$ $\overleftrightarrow{IJ} \parallel \overleftrightarrow{HK}$ وبالتالي $IJKH$ هو مستوي

ولكن $\overleftrightarrow{JK} \parallel \overleftrightarrow{BD}$ فيكون $\overleftrightarrow{JK} \parallel (ABD)$ وبالتالي:

$(IJKH) \cap (ABD) = \overleftrightarrow{IH}$ ويكون: $\overleftrightarrow{IH} \parallel \overleftrightarrow{JK}$ ومنه $\overleftrightarrow{IH} \parallel \overleftrightarrow{BD}$.

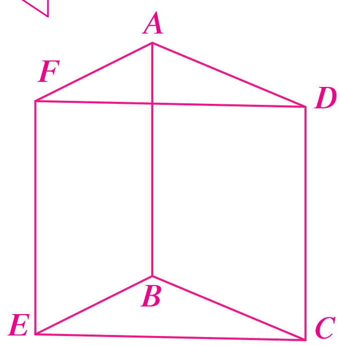


(7) إذا وازى مستقيم مستويًا فكل مستوٍ يمر بهذا المستقيم يقطع المستوي بمستقيم يكون موازيًا للمستقيم المعطى لذا:

$\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

$\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

فيكون $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.



(8) $\because$ $AB = EF$, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF}$

$\because$ $AB = CD$, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

$\because$ $EF = CD$, $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

ومنه $CDFE$ متوازي الأضلاع.

(9) $\because$ $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ يتقاطعان $\therefore$ يشكلان مستويًا وهذا المستوي يقطع المستويين المتوازيين π_1، π_2 بمستقيمين متوازيين فيكون $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BD}$ وبالتالي المثلثان: MAC، MBD متشابهان.

ومنه نستنتج: $\dfrac{AC}{BD} = \dfrac{AM}{MB}$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b) (2) (b) (3) (b) (4) (b) (5) (a)

(6) (c) (7) (d) (8) (c) (9) (b) (10) (c)

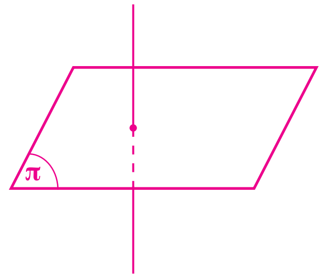
(11) (c) (12) (a)

تعامد مستقيم مع مستوٍ — تمرَّنْ 3–10

المجموعة A تمارين مقالية

(1) (a) إذا كان المستقيم عموديًّا على جميع المستقيمات الواقعة في المستوي.

(b)



(2) **(a)** $\overleftrightarrow{EH}$ و $\overleftrightarrow{AD}$ و $\overleftrightarrow{BC}$ و $\overleftrightarrow{FG}$

(b) $(BCDA)$ و $(FGHE)$

(c) $\overleftrightarrow{AD}\perp\overleftrightarrow{DC}$ ،$\overleftrightarrow{AD}\perp\overleftrightarrow{DH}$ ، إذًا $\overleftrightarrow{AD}\perp(CGH)$

(3) **(a)** BCD مثلث متطابق الضلعين في C. إذًا $\overleftrightarrow{CM}$ متعامد مع $\overleftrightarrow{BD}$ أيضًا المثلث ABD متطابق الضلعين في A إذًا $\overleftrightarrow{AM}$ متعامد مع $\overleftrightarrow{BD}$ بما أن: $\overleftrightarrow{BD}\perp\overleftrightarrow{CM}$ ،$\overleftrightarrow{BD}\perp\overleftrightarrow{AM}$ فيكون: $\overleftrightarrow{BD}\perp(ACM)$.

(b) $\overleftrightarrow{BD}\perp(AMC)$ إذًا $\overleftrightarrow{BD}$ متعامد مع كل المستقيمات التي تنتمي إلى (AMC)، خاصة $\overleftrightarrow{AC}$.

(4) $\overleftrightarrow{AO}$ يتقاطع مع $\overleftrightarrow{BC}$ في منتصف $\overleftrightarrow{BC}$ (O مركز ABC)

ABC مثلث متطابق الأضلاع، إذًا $\overleftrightarrow{BC}\perp\overleftrightarrow{AO}$، ثمّ $\overleftrightarrow{MO}\perp(AMC)$ لذا $\overleftrightarrow{BC}\perp\overleftrightarrow{MO}$ فيكون: $\overleftrightarrow{BC}\perp(AOM)$.

(5) في المثلث ABC لدينا $\overleftrightarrow{CB}\,/\!/\,\overleftrightarrow{FD}$ ولكن $\overleftrightarrow{AB}\perp\overleftrightarrow{BC}$ فيكون $\overleftrightarrow{AB}\perp\overleftrightarrow{FD}$ كما أن $\overleftrightarrow{AB}\perp\overleftrightarrow{DE}$ لذا $\overleftrightarrow{AB}\perp\pi_1$ في النقطة D.

$\because$ $\overleftrightarrow{AB}\perp\pi_1$ ،$\overleftrightarrow{AB}\perp\pi_2$ $\therefore$ $\pi_1\,/\!/\,\pi_2$.

(6) لدينا: $\frac{1}{3}=\frac{AP}{AD}=\frac{AN}{AC}=\frac{AM}{AB}$ وبالتالي المثلثان MNP، BCD يقعان في مستويين متوازيين، $\because$ $\overleftrightarrow{AB}\perp(BCD)$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB}\perp(MNP)$ في النقطة M.

(7) في المثلث SBC لدينا: $SB^2=100$ ،$SC^2+BC^2=100$ وبالتالي SBC قائم الزاوية في C.

$\because$ $\overleftrightarrow{SC}\perp\overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{SC}\perp\overleftrightarrow{BC}$ $\therefore$ $\overleftrightarrow{SC}\perp(ABC)$ ولكن $(ABC)\,/\!/\,(EFG)$ فيكون $\overleftrightarrow{SC}\perp(EFG)$ ومنه $\overleftrightarrow{SC}\perp\overleftrightarrow{EF}$.

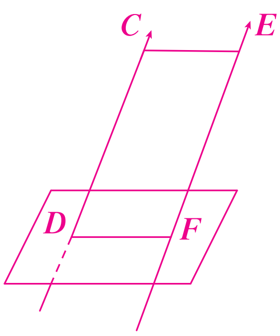
(8) $\because$ $\overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{CD}$ عموديان على المستوي π فهما متوازيان $\therefore$ $\overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{CD}$

يشكلان مستويًا، $\because$ $\overleftrightarrow{CE}\,/\!/\,\pi$ فيكون تقاطع $(CDEF)$

مع π هو $\overleftrightarrow{DF}$ بحيث $\overleftrightarrow{DF}\,/\!/\,\overleftrightarrow{CE}$.

ومنه $CDFE$ متوازي أضلاع ولكن $\overleftrightarrow{CD}\perp\pi$ فيكون $\overleftrightarrow{CD}\perp\overleftrightarrow{DF}$

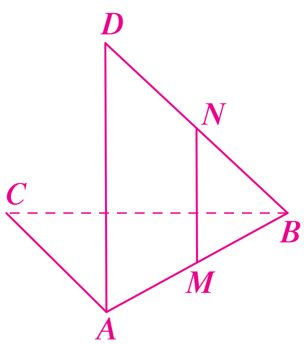
وبالتالي $CDFE$ مستطيل.



(9) $\because$ $\overleftrightarrow{DA}\perp\overleftrightarrow{AB}$ ،$\overleftrightarrow{DA}\perp\overleftrightarrow{AC}$ $\therefore$

$\overleftrightarrow{DA}\perp(ABC)$ وفي المثلث ABD

لدينا $\overleftrightarrow{AD}\,/\!/\,\overleftrightarrow{MN}$ $\therefore$ $\overleftrightarrow{MN}\perp(ABC)$



(10) $\because$ $\overleftrightarrow{CA}\perp\overleftrightarrow{AB}$ ،$\overleftrightarrow{CA}\perp\overleftrightarrow{AD}$ $\therefore$

$\overleftrightarrow{CA}\perp(ABD)$ ولكن $\overleftrightarrow{ED}\,/\!/\,\overleftrightarrow{CA}$ فيكون $\overleftrightarrow{ED}\perp(ABD)$ ومنه $\overleftrightarrow{ED}\perp\overleftrightarrow{AB}$

(11) $\because$ $\overleftrightarrow{CD}\,/\!/\,\overleftrightarrow{BA}\,/\!/\,\overleftrightarrow{LM}$ $\therefore$ $\overleftrightarrow{LM}\perp\overleftrightarrow{BL}$ و $\overleftrightarrow{LM}\perp\overleftrightarrow{BC}$ ومنه $\overleftrightarrow{LM}\perp(LBC)$.

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	(2) (b)	(3) (a)	(4) (b)	(5) (b)
(6) (b)	(7) (b)	(8) (b)	(9) (c)	(10) (b)
(11) (b)				

المجموعة A تمارين مقالية

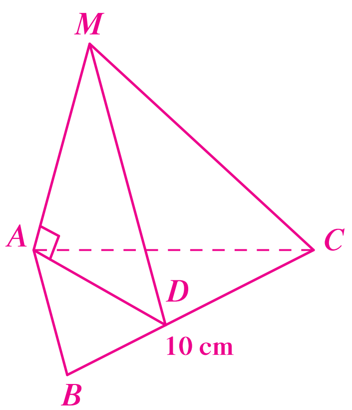
(1) (a) $\because$ $\overleftrightarrow{CB} \perp \overleftrightarrow{AM}$, $\overleftrightarrow{CB} \perp \overleftrightarrow{AD}$ ومنه: $\therefore$ $\overleftrightarrow{BC} \perp (AMD)$.

(b) $\widehat{AMD}$

(c) $AM = \frac{x\sqrt{3}}{2}$, $\tan(\widehat{AMD}) = 1$, $(\widehat{AMD}) = 45^\circ$

(2) $m(B\widehat{A}C) = 60^\circ$

(3) $\because$ $\overleftrightarrow{FB} \perp (ABCD)$ $\therefore$ $\overleftrightarrow{FB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ ولدينا $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$ فتكون الزاوية الزوجية $(FCD),(ABCD)$ هي BEF ولكن المثلث FBE قائم الزاوية في B ومتطابق الضلعين $(FB = EB)$ لذا: $m(B\widehat{E}F) = 45^\circ$.



(4) (a) $\because$ $m(M\widehat{A}C) = m(M\widehat{A}B) = 90^\circ$ $\therefore$ $\overleftrightarrow{AM} \perp (ABC)$

ومنه: $\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{BC}$ كما أن $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}$ فيكون $\overleftrightarrow{BC} \perp (MAD)$

(b) الزاوية الزوجية هي ADM لأن $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}$ ثم $\overleftrightarrow{MD} \perp \overleftrightarrow{BC}$

والمثلث MAD قائم الزاوية في A.

لدينا $MA = 5\text{ cm}$، $AD = 5\sqrt{3}$ وبالتالي: $\tan(ADM) = \frac{5\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3}$

أي $m(A\widehat{D}M) = 60^\circ$

(5) (a) في المثلث DBC لدينا $\overleftrightarrow{MI} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ لذا $\overleftrightarrow{MI} \perp \overleftrightarrow{CD}$ ثم $\overleftrightarrow{SM} \perp (ABCD)$ لذا $\overleftrightarrow{SM} \perp \overleftrightarrow{CD}$ نستنتج $\overleftrightarrow{CD} \perp (SMI)$ ومنه $\overleftrightarrow{SI} \perp \overleftrightarrow{CD}$ وبالتالي $M\widehat{I}S$ هي الزاوية الزوجية للمستويين $SCD, ABCD$.

(b) المثلث SMI قائم الزاوية في M حيث $SM = \sqrt{3}\text{ cm}$، $MI = 3\text{ cm}$ لذا $\tan(MIS) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ومنه $m(S\widehat{I}M) = 30^\circ$.

(6) $\because$ $\overleftrightarrow{BM} \perp \overleftrightarrow{SM}$، $\overleftrightarrow{CM} \perp \overleftrightarrow{SM}$ $\therefore$ $B\widehat{M}C$ هي الزاوية الزوجية وبالتالي $m(B\widehat{M}C) = 120^\circ$.

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	(2) (b)	(3) (a)	(4) (a)	(5) (a)
(6) (d)	(7) (c)	(8) (c)	(9) (c)	(10) (b)

المجموعة A تمارين مقالية

(1) (a) النقاط O, M, B, A تنتمي إلى نفس المستوي. $\overleftrightarrow{CO}$ متعامد مع المستوي (OAB). إذًا $(OAB) \perp (COM)$

(b) $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{OC}$، $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{OM}$ وبالتالي $\overleftrightarrow{AB} \perp (CMO)$ ومن ثم $(CAB) \perp (COM)$

(2) (a) $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AC}$، $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{DH}$ وبالتالي $\overleftrightarrow{AB} \perp (ACD)$

(b) لأن $\overleftrightarrow{AB} \perp (ACD)$

(c) $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AD}$، $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$، لذا: $\overleftrightarrow{CD} \perp (ABD)$

(d) بما أن (CDB) يحوي $\overleftrightarrow{DC}$، لذا: $(CDB) \perp (ABD)$

(3) (a) $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$ و $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BF}$ ومنه: $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCGF)$، إذًا $(FBCG) \perp (ABCD)$

(b) $AC = AF = FC = a\sqrt{2}$ (أوتار المربّعات متساوية).

(c) لأنّ ACF متطابق الأضلاع لذا $\overleftrightarrow{AM}$ عمود في المثلث ACF.

(d) $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCGF)$ لذا $(ABG) \perp (BCGF)$

(e) $\overleftrightarrow{FC} \perp \overleftrightarrow{BG}$ و $\overleftrightarrow{FC} \perp \overleftrightarrow{AB}$ فيكون $\overleftrightarrow{FC} \perp (ABG)$

(4) (a) في المكعب أطوال الأقطار الأربعة متساوية وبالتالي: $EC = DF = AG = DH = 4\sqrt{3}$ cm ومنه $EI = 2\sqrt{3}$ cm

(b) $EI = IF = 2\sqrt{3}$ cm فيكون المثلث EIF متطابق الضلعين.

(c) $\overleftrightarrow{IM}$ قطعة متوسطة في المثلث متطابق الضلعين إذًا $\overleftrightarrow{IM} \perp \overleftrightarrow{EF}$ ثم $\overleftrightarrow{KM} \perp \overleftrightarrow{EF}$ فتكون $\widehat{IMK}$ هي الزاوية الزوجية للمستويين: $EFGH$ و $EFCD$.

(d) $\overleftrightarrow{IM} \parallel \overleftrightarrow{ED}$، $\overleftrightarrow{MK} \parallel \overleftrightarrow{EH}$ فيكون: $m(\widehat{DEH}) = m(\widehat{IMK}) = 45^{\circ}$

(e) (EIF) هو $(EFCD)$ ثم (AEH) هو $(AEHD)$ والمعلوم أن $\overleftrightarrow{CD} \perp (AEHD)$ فيكون $(EFCD) \perp (AEHD)$.

(5) إذا تعامد مستويان على نفس المستقيم فهما متوازيان وكل مستوٍ يقطع أحدهما فهو يقطع الآخر والتقاطع هما مستقيمان متوازيان لذا تقاطع (CAD) مع المستوي العمودي من I على $\overleftrightarrow{CA}$ هو مستقيم يمر بالنقطة I ويوازي $\overleftrightarrow{AD}$ لذا يمر في منتصف $\overline{CD}$ كما أن تقاطع (CAB) مع المستوي العمودي من I على $\overleftrightarrow{CA}$ هو مستقيم يمر بالنقطة I ويوازي $\overleftrightarrow{AB}$ لذا يمر في منتصف $\overline{CB}$.

(6) (a) $ED = DB = EB = 5\sqrt{3}$ cm

(b) $\overleftrightarrow{DB} \perp \overleftrightarrow{EI}$ و $\overleftrightarrow{DB} \perp \overleftrightarrow{AE}$ فيكون $(AEI) \perp (DBG)$.

(7) (a) $\overleftrightarrow{MB} \perp \overleftrightarrow{MA}$ و $\overleftrightarrow{MB} \perp \overleftrightarrow{IA}$ فيكون $(IMB) \perp (IAM)$.

(b) $\overleftrightarrow{AH} \perp \overleftrightarrow{BM}$ (نتيجة من a)، $\overleftrightarrow{AH} \perp \overleftrightarrow{IM}$ فيكون $\overleftrightarrow{AH} \perp (IMB)$ وبالتالي: $(IMB) \perp (AHK)$.

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	(2) (b)	(3) (a)	(4) (a)	(5) (a)
(6) (a)	(7) (c)	(8) (b)	(9) (b)	(10) (b)

اختبار الوحدة العاشرة

(1) (a) لا، ثلاث نقاط على استقامة واحدة لا تعين مستويًا واحدًا.

(b) نعم، $\overleftrightarrow{GH}$، $\overleftrightarrow{AB}$ مستقيمان متوازيان يحدّدان مستويًا واحدًا.

(c) (ABD)، (EFM)، (ABG).

(2) (a) $\overleftrightarrow{NM} \parallel \overleftrightarrow{BD}$

(b) $(ABD) \cap (CNM) = \overleftrightarrow{MN}$

(c) $(CNB) \cap (ABD) = \overleftrightarrow{BN}$

(3) (a) $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{HG}$

إذًا $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{GH}$

(b) في شبه المكعّب $ABCDEFGH$ لدينا:

$\overline{HD} \parallel \overline{FB}$ و $HD = FB$ لذا $HDBF$ متوازي أضلاع ولكن $\overline{HD} \perp \overline{DB}$ لذا $HDBF$ هو مستطيل.

(c) بما أن $\overleftrightarrow{HF} \parallel \overleftrightarrow{DB}$، لذا $\overleftrightarrow{HF} \parallel (ABCD)$

(4) (a) في المكعّب، نعلم أنّ: $\overleftrightarrow{GD} \parallel \overleftrightarrow{EB}$، إذًا يعينان المستوي $(EGDB)$

(b) $(BEGD) \cap (AHFC) = \overleftrightarrow{IO}$

(c) لدينا $\overleftrightarrow{AH} \parallel \overleftrightarrow{CF}$ و $AH = FC$

I منتصف $\overline{HF}$ و O منتصف $\overline{AC}$

$\overleftrightarrow{IO}$ ينتمي إلى $(BEGD)$ وإلى $(ACFH)$ وهما يمران في مستقيمين متوازيين إذًا $\overleftrightarrow{AH} \parallel \overleftrightarrow{IO} \parallel \overleftrightarrow{FC}$

(5) (a) في المثلث ACD، $\overleftrightarrow{KN} \parallel \overleftrightarrow{AC}$ و $KN = \frac{AC}{2}$ (نظرية المنتصفات في المثلث).

في المثلث ABC، $\overleftrightarrow{LM} \parallel \overleftrightarrow{AC}$ و $LM = \frac{AC}{2}$، إذًا $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{LM} \parallel \overleftrightarrow{KN}$

(b) $\overleftrightarrow{LM} \parallel \overleftrightarrow{KN}$

في المثلث ABD، $\overleftrightarrow{LK} \parallel \overleftrightarrow{BD}$ و $LK = \frac{BD}{2}$

في المثلث BCD: $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{BD}$، $\overleftrightarrow{LK} \parallel \overleftrightarrow{BD}$ و $MN = \frac{BD}{2}$

إذًا $KLMN$ متوازي الأضلاع لأنّ: $\overleftrightarrow{KL} \parallel \overleftrightarrow{MN}$ و $KL = MN$ و $\overleftrightarrow{KN} \parallel \overleftrightarrow{LM}$ و $KN = LM$

(c) لأنّ $KLMN$ متوازي الأضلاع إذًا القطران يتقاطعان.

(6) في شبه المكعّب $ABCDEFGH$، إذ $\overleftrightarrow{GH} \perp \overleftrightarrow{GF}$، $\overleftrightarrow{GH} \perp \overleftrightarrow{GC}$، $\overleftrightarrow{HG} \perp (BFGC)$ و $\overleftrightarrow{HG}$ متعامد مع جميع مستقيمات $(BFGC)$، خاصة $\overleftrightarrow{BG}$

(7) في المثلثين ABC و ABD لدينا: $BC = BD$ ؛ $\overleftrightarrow{AB}$ ضلع مشترك، و $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ABC}) = 90^{\circ}$

إذًا ΔABC و ΔABD متطابقان (SAS) و $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ADB})$

(8) (a) $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$ إذًا $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{DC}$ و $\overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{BM}$ (لأن المثلث $\widehat{BCD}$ متطابق الأضلاع)

إذًا $\overleftrightarrow{DC} \perp (ABM)$

(b) $\overleftrightarrow{DC} \perp (ABM)$ إذًا $\overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{AM}$

(9) (a) في المثلث SCD، $\overleftrightarrow{MN}$ يمر بمنتصف $\overline{SC}$، $\overline{SD}$ لذا $\overleftrightarrow{MN} /\!/ \overleftrightarrow{CD}$ وبالتالي $\overleftrightarrow{MN} /\!/ (BCD)$.

(b) إذا وازى مستقيم مستويًا فكل مستو يمر بهذا المستقيم يقطع المستوى بمستقيم يكون موازيًا للمستقيم المعطى وبالتالي:

$\overleftrightarrow{PL} /\!/ \overleftrightarrow{CD}$

(10) (a) $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{IJ}$ و $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{JM}$ فيكون $\overleftrightarrow{AD} \perp (IJM)$

(b) $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AE}$ فيكون $\overleftrightarrow{AD} \perp (AEB)$

(c) (IJM) و (AEB) متعامدان على $\overleftrightarrow{AD}$ لذا فهما متوازيان.

(d) $m(\widehat{CDH}) = m(\widehat{IJM}) = 90^{\circ}$ لذا $\overleftrightarrow{IJ} \perp \overleftrightarrow{JM}$ و $\overleftrightarrow{IJ} \perp \overleftrightarrow{AD}$ فيكون $\overleftrightarrow{IJ} \perp (ADHE)$

(11) (a) بما أن $\overleftrightarrow{AI} \perp \pi_1$ فيكون $(AIJ) \perp \pi_1$ وبما أن: $\overleftrightarrow{AJ} \perp \pi_2$ فيكون $(AIJ) \perp \pi_2$

(b) بما أن $\overleftrightarrow{AI} \perp \vec{d}$، $\overleftrightarrow{AJ} \perp \vec{d}$ لذا $\vec{d} \perp (AIJ)$

(c) بما أن $\vec{d} \perp (AIJ)$، لذا $\vec{d} \perp \overleftrightarrow{IJ}$

تمارين إثرائية

(1) النقاط O, D, A تنتمي إلى كل من المستويين $(ADHE)$، $(ABCD)$ وبالتالي O, D, A تقع على استقامة واحدة.

(2) (a) L تنتمي إلى $\overleftrightarrow{CD}$ إذًا تنتمي إلى (CDM). والمستوي (ABL) يحتوي على النقاط L, B, A

(b) $(ABL) \cap (CDM) = \overleftrightarrow{LM}$

(3) (a) بما أن $\frac{OG}{OA} = \frac{OM}{OX} = 1$، لذا O منتصف $\overline{AG}$.

(b) بما أن $\frac{FA}{FE} = \frac{EX}{FY} = 1$، لذا O هي منتصف $\overline{AE}$.

(c) في المثلث AGE، $\overline{OF}$ يجمع منتصفي $\overline{AG}$، $\overline{AE}$ لذا $\overleftrightarrow{GE} /\!/ \overleftrightarrow{OF}$.

(d) $\overleftrightarrow{OF} /\!/ \overleftrightarrow{GE}$ ولكن $\overleftrightarrow{OF} \subset (XYHM)$ لذا $\overleftrightarrow{GE} /\!/ (XYHM)$.

(4) (a) بما أن $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AC}$ لذا $\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$

(b) بما أن $\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$ لذا $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}$

(c) بما أن $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AD}$ لذا $\overleftrightarrow{AB} \perp (ADC)$

(5) (a) $E \in (ABC) \cap (YFG)$ ثم $X \in (ABC) \cap (YFG)$ فيكون $\overleftrightarrow{XE} = (ABC) \cap (YFG)$

(b) إذا تقاطع مستويان يمران بمستقيمين متوازيين فيكون تقاطعهما مستقيمًا موازيًا للمستقيمين لذا $\overleftrightarrow{XE} \parallel \overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{FG}$

(6) (a) بما أن $\overleftrightarrow{CF} \perp \overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{CF} \perp \overleftrightarrow{AD}$ فيكون $\overleftrightarrow{CF} \perp (BAD)$.

(b) بما أن $\overleftrightarrow{CF} \perp (ABD)$ لذا $\overleftrightarrow{CF} \perp \overleftrightarrow{BD}$.

(c) بما أن $\overleftrightarrow{BC} \perp (ABD)$ لذا $(ABC) \perp (ABD)$.

(d) بما أن $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{CF}$، $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{FE}$ لذا $\overleftrightarrow{BD} \perp (EFC)$ ومنه $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{CE}$

(e) المثلث CFE قائم الزاوية في F والزاوية الزوجية هي $\widehat{FEC}$ لذا $\text{Cos}(\widehat{FEC}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ومنه: $m(FEC) \approx 48^\circ 11' 23''$

مبدأ العد والتباديل والتوافيق — تمرَّنْ 1–11

المجموعة A تمارين مقالية

(1) (a) $6^4 = 1296$ (b) $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ (c) $5 \times 4 \times 3 \times 3 = 180$

(2) (a) $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ (b) $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ (c) $2 \times 4 \times 3 \times 2 = 48$

(3) 6 طرق بأربع خطوات لكل منها.

(4) (a) $4! - 1 = 23$ (نطرح 1 الذي يمثل ترتيب الإطارات قبل التبديل)

(b) $5! - 1 = 119$

(5) (a) ${}_8P_1 = 8$ (b) ${}_3P_2 = 3 \times 2 = 6$

(c) ${}_8P_3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$ (d) ${}_9P_6 = 60\,480$

(6) $15! = 1\,307\,674\,368\,000$ (7) $4 \times 3 = 12$

(8) (a) $n = 8$ (b) $r = 3$ (c) $n = 12$

(9) ${}_8P_3 = 336$

(10) (a) ${}_6C_2 = 15$ (b) ${}_7C_3 \times {}_9C_3 = 4\,410$

(c) ${}_4C_4 = 1$ (d) ${}_6C_2 + {}_6C_3 = 15 + 20 = 35$

(11) ${}_{300}C_4 = 330\ 971\ 175$ (12) ${}_{10}C_4 = 210$

(13) ${}_1C_1 \times {}_{15}C_{10} = 3\,003$ (14) ${}_{25}C_2 + {}_{25}C_3 = 300 + 2\,300 = 2\,600$

(15) (a) ${}_8C_3 = 56$ (b) ${}_8C_5 = 56$ (c) الخاصية ${}_nC_m = {}_nC_{n-m}$

(16) $51\,563\,424$

(17) (a) $n = 17$ (b) $n = 6$ (c) $n = 7$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	(2) (b)	(3) (a)	(4) (a)	(5) (b)
(6) (c)	(7) (a)	(8) (c)	(9) (a)	(10) (b)
(11) (d)	(12) (b)	(13) (c)	(14) (b)	(15) (c)

نظرية ذات الحدين — تمرّنْ 2–11

المجموعة A تمارين مقالية

(1) (a) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

(b) $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

(c) $x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$

(2) (a) $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

(b) $x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$

(c) $x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32$

(3) (a) $243x^5 - 405x^4y + 270x^3y^2 - 90x^2y^3 + 15xy^4 - y^5$

(b) $x^8 + 4x^6y + 6x^4y^2 + 4x^2y^3 + y^4$

(c) $27x^3 + 135x^2y + 225xy^2 + 125y^3$

(4) $594\,x^{10}$ (5) $27x^8$ (6) x^{11}

(7) $-823\ 680\,x^8y^7$ (8) $29\,568\,x^{10}y^6$

(9) يجب أن يكون (أس y) = 5، لأن (أس y) هو [(أس x) – 7].

(10) $-30\ 870\,x^2y^3$ (11) $-590\ 625\,a^3b^3$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	(2) (b)	(3) (a)	(4) (b)	(5) (b)
(6) (d)	(7) (d)	(8) (b)	(9) (c)	(10) (b)
(11) (d)				

المجموعة A تمارين مقالية

(1) ليسا متنافيين. مثال: $3 = 1 + 2$ عدد أولي أصغر من 4.

(2) متنافيان. $24 = 6 \times 4$، 4، 6 ليسا عددين أوليين.

(3) (a) 15% (b) 44% (c) 70% (d) 76% (4) $\frac{6}{37}$

(5) (a) $\frac{2}{5}$ (b) $\frac{8}{15}$ (c) $\frac{7}{15}$

(6)

	$P(t)$	$P(r)$	$P(t \cap r)$	$P(t \cup r)$
(a)	$\frac{7}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{9}{11}$
(b)	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$
(c)	$\frac{7}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{3}$
(d)	$\frac{2}{x}$	$\frac{3}{2x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{5}{2x}$

(7) (a) $\frac{3}{4}$ (b) 39%

(8) (a) $\frac{1}{6}$ (b) 0.54

(9) $\frac{30}{100} + \frac{17}{100} = \frac{47}{100} = 0.47$

(10) (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{5}{6}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{5}{6}$

(11) ${}_{10}C_4(0.40)^4 \times (0.60)^6 \approx 0.25$

(12) ${}_{30}C_4(0.11)^4 \times (0.89)^{26} \approx 0.1939$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a) (2) (b) (3) (a) (4) (a) (5) (c)

(6) (b) (7) (d) (8) (b) (9) (d) (10) (a)

(11) (c)

اختبار الوحدة الحادية عشرة

(1) توفيقة. $_{11}C_5 = 462$ (2) توفيقة. $_{15}C_3 = 455$ (3) تبديلًا. $_5P_5 = 5! = 120$

(4) $1 - 8t + 24t^2 - 32t^3 + 16t^4$ (5) 7 (6) ≈ 0.0172

(7) متنافيان؛ $\frac{5}{18}$ (8) غير متنافيين؛ $\frac{4}{9}$

(9) (a) كلّا، 96 من مضاعفات العدد 3 والعدد 4.

(b) $\frac{1}{10}$ (c) $\frac{1}{2}$

(10) $_{10}C_4 (0.2)^4 \times (0.8)^6 \simeq 0.088$ (11) $_8C_3 (0.6)^3 \times (0.4)^5 \approx 0.124$

(12) (a) 0.3087 (b) 0.47178

تمارين إثرائية

(1) (a) $_{12}C_{12} (0.9)^{12} \times (0.1)^0 \approx 0.2824$

(b) $_{12}C_{10} (0.9)^{10} \times (0.1)^2 + {}_{12}C_{11} (0.9)^{11} \times (0.1)^1 + {}_{12}C_{12} (0.9)^{12} \times (0.1)^0 \approx 0.8891$

(c) ≈ 0.1109 ((...على الأقل 10 ثمرات) $P - 1$)

(2) (a) كل كلمة مكونة من 10 أحرف وكل حرف يمكن اختياره من بين 3 أحرف: 3^{10}

(b) (i) 3^9

(ii) 3^7

(iii) 3^9

(iv) يمكن ترتيب الخانات الثلاث الأولى بـ $3!$ طريقة، ويبقى 3^7 لبقية الخانات أي $3! \times 3^7$

(c) (i) كل الكلمات (3^{10}) ما عدا الكلمات التي لا تتضمن الحرف A، (2^{10}) $\therefore$ $3^{10} - 2^{10} = 58\,025$

(ii) هناك $_{10}C_4$ لاختيار خانات الحرف B ونكمل البقية بـ 2^6 $\therefore$ $_{10}C_4 \times 2^6 = 13\,440$

(iii) $10 \times 2^9 + 2^{10} = 6\,144$

(3) (a) $4 \times 10^3 = 4\,000$

(b) $1 \times 10 \times 9 \times 8 = 720$

(c) $4 \times 10 \times 10 \times 5 = 2\,000$

(d) $1 \times (10^3 - 7^3) = 637$

(4) $\frac{1}{_9P_4} = \frac{1}{3\,024}$

(5) $\frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} = 5n(n-1)$

$n(n-1)\left[\frac{n-2}{6} + \frac{1}{2} - 5\right] = 0 \quad \therefore \quad n = 29$

(6) هناك !20 طريقة لتوزيع أجزاء الموسوعة

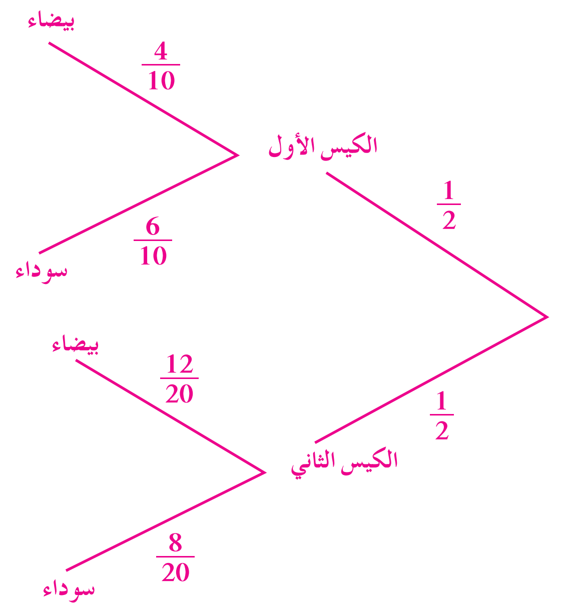
!18 طريقة لتوزيع بقية الأجزاء

19 مكانًا للجزء 2 ويمكن تبديل موقع الجزءين 1, 2

$$P = \frac{18! \times 19 \times 2}{20!} = \frac{1}{10}$$

(7) (a) 5 (b) 2 (c) $(0.15)^5 \approx 0.000076$

(8)



$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{12}{20} = \frac{1}{2}$$

(9) ${}_6C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0.3125$

$\therefore$ القطعة غير معدّلة

(10) (a) 19 (b) 23

(c) كلّا، لأن 40 مثلًا هو من مضاعفات كل من العددين 4، 5

(11) (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$