



وزارة التربية

# الرياضيات

كتاب المعلم



النمو الفعلي  
النمو الطبيعي  
النمو الفعلي للنمو الطبيعي  
النمو الطبيعي



صوت طائرة



صوت مكينة كهربائية



صوت دراجة نارية



صوت محادثة عادية



صوت قاعة مكتبة

الطبعة الأولى

الصف الحادي عشر علمي  
الفصل الدراسي الأول

# الرياضيات

الصفّ الحادي عشر علمي  
الفصل الدراسي الأول

## كتاب المعلم

اللجنة الإشرافية لدراسة ومواءمة سلسلة كتب الرياضيات

أ. إبراهيم حسين القطان (رئيساً)

أ. فتحية محمود أبو زور

أ. حصة يونس محمد علي

الطبعة الأولى

١٤٣٤ - ١٤٣٥ هـ

٢٠١٣ - ٢٠١٤ م

لجنة دراسة ومواءمة كتب الرياضيات للصف الحادي عشر علمي  
أ. حسن نوح علي المهنا (رئيساً)

أ. حسين اليماني الشامبي

أ. مصطفى محمد شعبان

أ. صديقة أحمد صالح الانصاري

أ. شبيخة فلاح مبارك الحجرف

أ. منى علي عيسى المسري

دار التربيّون House of Education ش.م.م.م. وبيرسون إديوكيشن ٢٠١٣

© جميع الحقوق محفوظة : لا يجوز نشر أيّ جزء من هذا الكتاب أو تصويره أو تخزينه أو تسجيله بأيّ وسيلة دون موافقة خطيّة من الناشر.

الطبعة الأولى ٢٠١٣



صاحب السمو الشيخ صباح الأحمد الجابر الصباح  
أمير دولة الكويت





سَيِّدُ الشَّيْخِ نَوَافِ بْنِ فَهْدِ بْنِ عَبْدِ الرَّحْمَنِ بْنِ الصَّبَاحِ

وَلِيَّ عَهْدِ دَوْلَةِ الْكُوَيْتِ



# مقدمة من كتاب المعلم

## توجيهات عامة للمعلم

- هذه السلسلة تعمل على تنمية أساليب التفكير، وذلك بتركيزها على بناء المفاهيم الرياضية وربطها بالواقع الحياتي من خلال:
- ١ - الأنشطة العملية والتوظيف بشكل مميز للألعاب التربوية في استكشاف المفاهيم ودعم إحساس التلميذ بهذه المفاهيم، وذلك باستخدام طرائق مختلفة:  
العمل في فريق.  
تأليف مجلات رياضية.  
إستخدام المحسوسات وشبه المحسوسات.  
جذب الانتباه باستخدام بعض الألعاب التي تتناسب مع أعمارهم.  
التعبير الشفهي - التفكير الناقد.
  - ٢ - الاعتماد على المصوّرات، وذلك من خلال التمثيل البياني للمعلومات وقراءة البيانات الممثلة بيانياً.
  - ٣ - الاعتماد على المواقف والقصص الحياتية وربطها بالموضوعات، وكذلك توظيف الموضوعات الرياضية في حلّ المسائل الحياتية.
  - ٤ - التأكيد على فهم المفاهيم واستيعابها، والربط بين الرياضيات وباقي المواد.

## تطبيق السلسلة

لتطبيق السلسلة، يجب مراعاة ما يلي:

- وجود ملفين لكلّ طالب بحيث يُخصّص أحدهما للأنشطة الصفيّة واللاصفيّة، أمّا الآخر فيُخصّص للاختبارات والملحوظات الميدانية على أداء التلميذ، ويُدوّنهما المعلم، وهذا أوّل ما يقوم به، مقرونه بتواريخ المتابعة.
- يُنوع المعلم في طرائق التدريس، وخاصةً التي تشمل الاستكشاف والألعاب التربوية وحلّ المشكلات.

نماذج المعلم لتقييم التلاميذ تشمل:

- تقييم الأداء في حلّ المسائل.
- التقييم المستمرّ في حلّ المسائل والملاحظة والتعليم التعاوني.
- التقييم الفردي في الملاحظة والمراقبة.
- التقييم العام للتلميذ.



## تقييم الأداء في حلّ المسائل

الإسم ..... التاريخ .....

### تقييم الأداء في حلّ المسائل

① ضع إشارة ✓ قرب العبارة التي تصف بدقة أداء الطالب .

#### إفهم

- يقرأ المسألة بتأنّ.
- يقرأ أيّ جدول أو أيّ تمثيل بياني .
- يستطيع أن يصوغ المسألة من جديد وبطريقته وعباراته الخاصّة .
- يستطيع فهم وإدراك المعلومات المعطاة .
- يستطيع فهم وإدراك السؤال الذي يجب الإجابة عليه .

#### خطّط

- يختار الخطّة الأنسب لحلّ المسألة .
- يقدر الإجابة الصحيحة .

#### حلّ

- يعمل وفقاً لمنهجية معيّنة .
- يعرض الحلّ بطريقة مننّمة وسليمة .
- يحسب بطريقة صحيحة .
- يعطي الإجابة بجملة كاملة صحيحة، مراعيًا الوحدات .

#### راجع ولا حظّ

- يلاحظ معقولية الإجابة .
- يجرب طرقاً أخرى لحلّ المسألة .

② إتبع المواصفات التالية لتقييم أداء الطالب :

- مستوى ٤ (يتقن الطالب ١١-١٣ من المهمات السابق ذكرها). يُظهر الطالب فهماً عميقاً للمسألة ويفسّرهما بشكل موجز وواضح ويكون قادراً على ربط المسألة بعمل سبق أن أنجزه.
- مستوى ٣ (يتقن الطالب ٨-١٠ من المهمات السابق ذكرها). يفهم الطالب المسألة ويعرض الحلّ الصحيح بطريقة مننّمة وواضحة.
- مستوى ٢ (يتقن الطالب ٤-٧ من المهمات السابق ذكرها). يُظهر الطالب فهماً إجمالياً للمسألة غير أنّه قد يرتكب بعض الأخطاء في تفاصيل معيّنة.
- مستوى ١ (يتقن الطالب ٠-٣ فقط من المهمات السابق ذكرها). لا يُظهر الطالب إلا فهماً سطحياً أو جزئياً للمسألة وهو ليس قادراً على إتمام العمل المطلوب أو حتى اعتماد المنهجية الصحيحة، كما أنّه لا يعطي إجابة صحيحة أو تكون خطّته غير مناسبة، وفي أغلب الأحيان لا نجد حلّاً ولا تجاوباً مناسباً أو إجابة صحيحة مرفقةً بجهد ما .







# المحتويات

13	..... الوحدة الأولى: الأعداد الحقيقية
35	..... الوحدة الثانية: الدوال الحقيقية
73	..... الوحدة الثالثة: كثيرات الحدود
106	..... الوحدة الرابعة: الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية
139	..... الوحدة الخامسة: المتجهات
163	..... الوحدة السادسة: الجبر المتقطع (الإحصاء)

# Real Numbers

## الوحدة الأولى: الأعداد الحقيقية

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

### 1 – 1: الجذور والتعبيرات الجذرية

جزء 1: الجذور والتعبيرات الجذرية

جزء 2: الجذور التكعيبية.

جزء 3: تبسيط الجذور .

جزء 4: جمع وطرح التعبيرات الجذرية.

جزء 5: ضرب وقسمة الجذور التربيعية والجذور التكعيبية.

جزء 6: تبسيط كسر مقامه يتضمّن جذرًا.

### 2 – 1: الأسس النسبية

جزء 1: قوانين الأسس النسبية.

### 3 – 1: حل المعادلات

جزء 1: حل المعادلات الجذرية.

جزء 2: حل المعادلات الأسية.

# مقدمة الوحدة

## الوحدة الأولى

### الأعداد الحقيقية

#### The Real Numbers

**مشروع الوحدة: معدل السرعة**

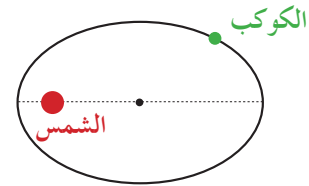
- 1 مقدمة المشروع: شملت حركة كواكب النظام الشمسي العلماء منذ القدم. ما هو مدار كل كوكب؟ ما كتلته؟ وفي أي اتجاه يدور؟ وما هي الشهب؟  
يعتبر يوهانز كيبلر Johannes Kepler من أهم علماء الفلك وواضع ما عرف بقوانين كيبلر الثلاثة حول حركة الكواكب في 1609 و1618.
- 2 الهدف: التعرف على قوانين كيبلر وإجراء بعض العمليات الحسابية حول مدار كوكب، وسرعته، وزنه.
- 3 اللوازم: آلة حاسبة علمية، أوراق رسم بياني، حاسوب، جهاز إسقاط Data Show.
- 4 أسئلة حول التطبيق:
- a اعرض قوانين كيبلر الثلاثة وادعم عرضك ببعض الرسوم التي تبتين حركة الكواكب وعلاقتها بالمدار الإهليلجي (مضاي).
- b ضع جدولاً يبين خصائص بعض كواكب النظام الشمسي: بعدها عن الشمس، كتلتها، طول فترها، الزمن المستغرق لمدارها دورة كاملة حول الشمس وحول نفسها.
- c أوجد نسبة مربع الزمن لمدورة الأرض دورة كاملة حول الشمس إلى مربع الزمن لمدورة عطارد دورة كاملة حول الشمس، وقارنها بنسبة مكعب بعد الأرض عن الشمس إلى مكعب بعد عطارد عن الشمس.
- d أسأل معلم مادة الجغرافيا عن حركة الكواكب وعن أبحاث كوبرنيكوس، وكيبلر، وجاليليو حول هذا الموضوع.
- 5 التقرير: أكتب تقريراً مفصلاً يبين خطوات المشروع وكيف استفدت من دروس الوحدة في حساباتك. ضمن التقرير نتائج ملاحظتك مع معلم مادة الجغرافيا، ودعمه بصور وملصقات أو عرض على جهاز الإسقاط Data Show.

**دروس الوحدة**

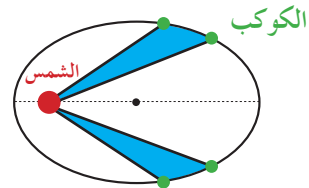
الحذور والتعيرات الحذرة	الأسس النسبية	حل المعادلات
1-1	1-2	1-3

اشتهر عالم الفلك الألماني يوهانز كيبلر (Johannes Kepler 1571 – 1630) بدراسة نظرية مركزية الشمس (الأرض تدور حول الشمس) لكوبرنيك (Nicolas Copernic)، وخاصة لاكتشافه أن الكواكب لا تدور بشكل دائري حول الشمس بل وفق مسارٍ إهليلجي (على شكل قطع ناقص) فاكتشف العلاقات الرياضية الثلاث المسماة «قوانين كيبلر» التي تحدد حركة الكواكب على مدارها، و نشر القانونين الأولين سنة 1609، ثم ألحق بهما القانون الثالث سنة 1618. ارتكز نيوتن على هذه القوانين في وضع قانون الجاذبية.

**القانون الأول:** حركة الكواكب حول الشمس إهليلجية (على شكل قطع ناقص) تكون الشمس في إحدى بؤرتيه.



**القانون الثاني:** تختلف سرعة دوران كوكب حول الشمس بحيث تتساوى مساحة القطاعين المشكلين بين الشمس وأحد الكواكب خلال فترتين زمنيتين متساويتين.



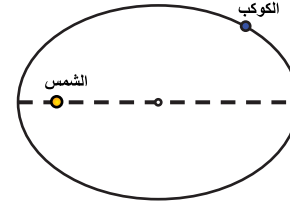
**القانون الثالث:** النسبة بين مربعي فترتي دوران أي كوكبين هي نفسها النسبة بين القيمة التكعيبية للبعد المتوسط لكل منهما عن الشمس.

## مشروع الوحدة

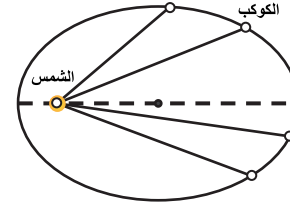
لم يتعرف بعد الطالب «القطوع المخروطية» الناتجة عن تقاطع سطح مخروطي ومستوي بوضعية مختلفة. يمكن للمعلم إعطاء فكرة سريعة عن هذه القطوع مدعماً فكرته برسوم بيانية.

### إجابات «أسئلة حول التطبيق»

(a) القانون الأول: حركة الشمس حول الكواكب على شكل قطع ناقص تكون الشمس في إحدى بؤرتيه.



القانون الثاني: تختلف سرعة دوران كوكب حول الشمس بحيث تتساوى مساحة القطاعين المشكلين بين الشمس وأحد الكواكب خلال فترتين زمنيتين متساويتين.



القانون الثالث: النسبة بين مربعي فترتي دوران كوكبين تساوي النسبة بين مكعب البعد المتوسط لكل منهما عن الشمس.

(b)

عطارد	الزهرة	الأرض	المريخ	المشتري	زحل	أورانوس	نبتون	البعد عن الشمس (10 <sup>6</sup> km)
46 إلى 69.8	108.21	149.6	227.94	7 778.34	1 427	2 869	4 496.7	
0.06	0.82	1	0.11	317.9	95.1	14.5	17.2	الكتلة (بالنسبة إلى الأرض)
4 870	12 100	12 750	6 790	142 790	120 600	51 100	40 600	القطر (km)
87.9	224.7	365.25	1.88 سنة	11.86 سنة	29.46 سنة	84 سنة	164.7 سنة	زمن الدوران حول الشمس
58.6	243	23.9 h	1.025 يوم = 24.6 h	9.9 h	10.7 h	17.2 h	16.05 h	زمن الدوران حول نفسه

(c) 17: 1 ، نلاحظ تساوي النسبتين.

(d) تتنوع أساليب العرض.

**الوحدة الأولى**

**أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)**

- تعرفت الأعداد الحقيقية.
- تعرفت الجذر التربيعي.
- تعرفت حل المتباينات.
- استخدمت الآلة الحاسبة لإيجاد الجذور التربيعية.
- تعرفت القيمة المطلقة وحل معادلات تتضمن القيمة المطلقة.

**ماذا سوف تتعلم؟**

- حرب الجذور التربيعية والجذور التكعبية وقسمتها.
- حرب المعينات الجبرية التولية وقسمتها.
- كيفية إيجاد المرافق واستخدامه.
- كتابة عدد حقيقي بالصورة الجذرية.
- كتابة عدد حقيقي بالصورة الأسية.
- حل معادلات جذرية.
- حل معادلات أسية.

**المصطلحات الأساسية**

الجذر التربيعي - الجذر التكعيبي - الجذر النوني - المرافق - دليل الجذر - الجذور - المعادلة الجذرية - المعادلة الأسية - الصورة الجذرية - الصورة الأسية.

**أضف إلى معلوماتك**

المعكوس الضربي لكل عدد حقيقي موجب أكبر من واحد هو عدد حقيقي موجب أصغر من واحد. إذا يوجد أعداد حقيقية موجبة أصغر من واحد بقدر ما يوجد أعداد حقيقية موجبة أكبر من واحد. ظهور الصفر في الهندس: في العام 876 وجدت الأرقام التالية في معارة غوالور Gwalior (على بعد 300 km من نيودلهي) وتعود إلى القرن الخامس ويظهر فيها الصفر.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

مثال:  $\frac{370}{270} = \frac{131}{93}$

انتقل هذا الترميز إلى العرب بواسطة الخوارزمي (بين القرنين الثامن والتاسع). خضعت هذه الأرقام لعدة تحولات وأصبحت حالياً: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

### التقرير

اعرض تقريرك أمام زملائك في غرفة الصف، وناقش معهم النتائج التي توصلت إليها، ثم أعد النظر ببعض الأفكار والاقتراحات والحسابات إذا رأيت ذلك ضرورياً.

### سلم التقييم

4	العرض في المشروع بكامله واضح - الجدول متكامل ويخلو من الأخطاء - الحسابات صحيحة. التقرير مفصل ومنظم ويعكس دقةً وجهداً في العمل.
3	معظم العرض في المشروع واضح - بعض الأخطاء في الجدول - أخطاء طفيفة في الحسابات. التقرير مفصل ومنظم ولكن ينقصه بعض التفاصيل الصغيرة.
2	بعض العرض في المشروع واضح - أخطاء متكررة ومتعددة في الجدول وفي الحسابات - التقرير غير مفصل وغير منظم إجمالاً.
1	معظم عناصر المشروع ناقصة وبحاجة إلى إعادة.



# 1-1: الجذور والتعبيرات الجذرية

## 1 الأهداف

- يختصر الجذور.
- يضرب التعبيرات الجذرية ويقسمها.
- يستخدم المرافق لتبسيط كسر إلى كسر مقامه عدد نسبي.

## 2 المفردات والمفاهيم الجديدة

التعبيرات الجذرية - الجذر التربيعي - الجذر التكعيبي - المرافق - دليل الجذر - المجذور - تحليل - عوامل أولية.

## 3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة - جهاز إسقاط (Data Show) - حاسوب.

## 4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) أوجد الجذر التربيعي لكل عدد مما يلي:

$$\sqrt{64}, \sqrt{121}, \sqrt{256}, \sqrt{200}$$

(b) أوجد الجذر التربيعي إلى أقرب جزء من مئة لكل عدد

$$\sqrt{17}, \sqrt{182}, \sqrt{200}$$

مما يلي باستخدام الآلة الحاسبة:

(c) بسّط كلاً مما يلي:

$$\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}, (4)^2, (-4)^2, \sqrt{3} \times \sqrt{12}, \sqrt{2} \times \sqrt{32}$$

## 5 التدريس

التعامل مع الجذور والتعبيرات الجذرية يحتاج إلى الكثير من الانتباه وتأن وخبرة، خاصة عند إجراء العمليات التي تحوي التعابير الجذرية.

$$\sqrt{x^2} = |x| \text{ أن: ركز أولاً على أن:}$$

$$\text{وأن: } \pm\sqrt{x^2} = \pm|x|$$

$$\text{أي أن: } \sqrt{25} = \sqrt{(\pm 5)^2} = |\pm 5| = 5$$

## الجذور والتعبيرات الجذرية

### Roots and Radical Expressions



#### دعنا نناقش

- صالة عرض سيارات مكعبة الشكل. إذا كان طول ضلعها يساوي 12 m فإن مساحة أحد أوجهها تساوي ...
- مساحة أحد أوجهها تساوي 100 m<sup>2</sup> فإن طول ضلعها يساوي ...
- مساحة أحد أوجهها تساوي 400 m<sup>2</sup> فإن طول ضلعها يساوي ... (يمكن استخدام الآلة الحاسبة).
- مساحتها الكلية تساوي 384 m<sup>2</sup> فإن طول ضلعها يساوي ...
- طول ضلعها يساوي 12 m فإن حجمها يساوي ...
- حجمها يساوي 512 m<sup>3</sup> فإن طول ضلعها يساوي ...
- حجمها يساوي 970 m<sup>3</sup> فإن طول ضلعها يساوي ...

### Roots and Radical Expressions الجذور والتعبيرات الجذرية

بما أن  $(5)^2 = 25$  فإن  $(-5)^2 = 25$  هما الجذران التربيعيان للعدد 25  
بما أن  $(5)^3 = 125$  فإن  $(-5)^3 = -125$  هو الجذر التكعيبي للعدد 125  
وأيضاً بما أن  $(-5)^3 = -125$  فإن الجذر التكعيبي للعدد (-125) وبالتالي:

■ لكل عدد حقيقي موجب جذران تربيعيان أحدهما موجب والآخر سالب.  
أي أن إذا كان  $A^2 = x$  فإن  $A = \pm\sqrt{x}$ ,  $x > 0$

■ لكل عدد حقيقي جذر تكعيبي حقيقي واحد.

ملخص عدد الجذور الحقيقية لعدد حقيقي

العدد الحقيقي	عدد الجذور التربيعية	عدد الجذور الحقيقية التكعيبة
موجب	2	1
صفر	1	1
سالب	0	1

## 1-1

### سوف تتعلم

- اختصار الجذور.
- ضرب التعبيرات الجذرية.
- قسمة التعبيرات الجذرية.
- استخدام المرافق لتبسيط كسر إلى كسر مقامه عدد نسبي.

### المفردات والمصطلحات:

- الجذر التربيعي
- الجذر التكعيبي
- Square Root
- Cubic Root
- التعبيرات الجذرية
- Radical Expressions
- Radix
- دليل الجذر
- Radicand
- المرافق
- Conjugate
- Analyse
- تحليل
- عوامل أولية
- Prime Factors

### معلومة:

- أسماء وحدات الطول
- millimetre mm
- centimetre cm
- decimetre dm
- metre m
- decametre dam
- hectometre hm
- kilometre km

### معلومة:

- عندما يكون دليل الجذر يساوي 2 فلا يكتب الدليل. مثال:  $\sqrt{x}$  تعني الجذر التربيعي لـ  $x$ .
- أي مقدار يضمن جذوراً يسمى تعبيراً جذرياً.

12

## Cubic Roots

## الجذور التكعيبة

إذا كان  $A^3 = B$  فإن  $A = \sqrt[3]{B}$  وتقرأ الجذر التكعيبي للعدد  $B$  حيث  $3$  هو دليل الجذر،  $B$  هو المجذور.

$$(\sqrt[3]{x})^3 = \sqrt[3]{x^3} = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

### مثال (1)

أوجد الجذر التكعيبي لكل من الأعداد التالية دون استخدام الآلة الحاسبة:

- a -8      b 125      c  $-\frac{375}{24}$       d 0.064

الحل:

a الجذر التكعيبي للعدد (-8) هو  $\sqrt[3]{-8}$

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$$

b الجذر التكعيبي للعدد 125 هو  $\sqrt[3]{125}$

$$\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$$

c  $\sqrt[3]{-\frac{375}{24}} = \sqrt[3]{-\frac{125}{8}} = \sqrt[3]{-\frac{(5)^3}{(2)^3}} = \sqrt[3]{-\frac{5}{2}} = -\frac{5}{2}$

d  $\sqrt[3]{0.064} = \sqrt[3]{\frac{64}{1000}} = \sqrt[3]{\frac{(4)^3}{(10)^3}} = \frac{4}{10}$

### حاول أن تحل

1 أوجد الجذر التكعيبي لكل من الأعداد التالية دون استخدام الآلة الحاسبة:

- a -27      b 64      c -0.008      d  $\frac{343}{216}$

## Simplifying Radicals

## تبسيط الجذور

- حتى يكون التعبير الجذري في أبسط صورة يجب مراعاة ما يلي:
- ألا يكون للمجذور عوامل مرفوعة لقوة أكبر من أو تساوي دليل الجذر. فمثلاً  $\sqrt{8a^6b^7}$  وليس في أبسط صورة.
- ألا يكون المقام جذراً. مثل  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  وليس في أبسط صورة.
- ألا يكون للمجذور كسراً. مثل  $\sqrt{\frac{1}{4}}$  وليس في أبسط صورة.
- أن يكون دليل الجذر أصغر عدد صحيح موجب ممكن. مثل  $\sqrt[14]{32}$  وليس في أبسط صورة.

### معلومة:

- $a^1 = a$
- $a^0 = 1$ ,  $a \neq 0$
- الرمز (V) يقرأ تكلي.
- الرمز (C) يقرأ حث.
- الرمز (E) يقرأ ينتمي إلى.

### تذكرو:

- قوانين الأسس
- $\forall n, m \in \mathbb{Z}, \forall a, b \in \mathbb{R}$
- $a, b \neq 0$
- $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

### معلومة:

- أسماء مجموعات الأعداد
- مجموعة الأعداد الكلية
- Whole Numbers
- $\mathbb{N}$
- مجموعة الأعداد الصحيحة
- $\mathbb{Z}$
- Integers
- مجموعة الأعداد النسبية
- Rational Numbers
- $\mathbb{Q}$
- مجموعة الأعداد غير النسبية
- Irrational numbers
- $\mathbb{I}$
- مجموعة الأعداد الحقيقية
- Real Numbers
- $\mathbb{R}$

13

ولكن:  $\pm\sqrt{25} = \pm\sqrt{(\pm 5)^2} = \pm|5| = \pm 5$

من ناحية ثانية، فإن  $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{(4)^3} = 4$

ثم  $\sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{(-4)^3} = -4$

وعلى العموم إذا كان:  $x^2 = a$ ، فإن  $x = \pm\sqrt{a}$ ،  $a > 0$

أي يوجد قيمتان للمتغير  $x$  تحققان المعادلة  $x^2 = a$ ، ولكن

إذا  $x^3 = a$ ، فإن  $x = \sqrt[3]{a}$  أي يوجد قيمة واحدة فقط تحقق

المعادلة  $x^3 = a$

توسع في هذه المفاهيم من خلال المثال (1) وذلك بعرض

أمثلة بديلة تساعد على تعميق هذه المعلومات.

## في المثال (2)

تبسيط التعبيرات الجذرية تدخل ضمن إطار ما تقدم، والمهم

هو إيجاد الربط بين أس المجذور ودليل الجذر فيصبح

التبسيط عندها في غاية السهولة.

شجّع الطلاب دائماً على كتابة أس المجذور بصورة

مضاعفات لدليل الجذر.

## في الأمثلة (4 - 7)

تتناول العمليات التي يمكن القيام بها على التعبيرات الجذرية

ألا وهي الجمع والطرح والضرب والقسمة، ومن ثم العودة

إلى تبسيط هذه الجذور. شدد على أن العمليات الأربع تتم

بين التعبيرات الجذرية إذا كان لها الدليل نفسه.

## في المثال (8)

وضّح للطلاب معنى المرافق والغاية من استخدامه. أخبرهم

أن مرافق الجذر التربيعي هو نفسه الجذر التربيعي، أي أن مرافق

$\sqrt{a}$  هو  $\sqrt{a}$ ، لأن  $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2$  فتتخلص من الجذر

ولكن مرافق  $\sqrt[3]{a}$  هو  $\sqrt[3]{a^2}$  كي نتخلص من الجذر أي:

$$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a^3} = a$$

أما إذا كان يوجد تعبير جذريّ تربيعي، فإن مرافق  $(a - b)$

هو  $(a + b)$ ، لأن:  $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ ، وهذا يجعلنا

أيضاً نتخلص من الجذر. وعلى العموم فإن عملية ضرب

مقام الكسر في المرافق هي إجراء يهدف إلى التخلص من

الجذر في مقام الكسر وبالتالي يساعد على تبسيط الكسر إذا

أمكن ذلك.

### مثال (2)

بسط كلًا من التعبيرات الجذرية التالية لكل عدد حقيقي  $x$ :

a.  $\sqrt{4x^6}$

b.  $\sqrt[3]{8x^3 + 3x}$

الحل:

a.  $\sqrt{4x^6} = \sqrt{2^2(x^3)^2}$

$= \sqrt{(2x^3)^2}$

$= |2x^3|$

$= \begin{cases} 2x^3, & x \geq 0 \\ -2x^3, & x < 0 \end{cases}$

b.  $\sqrt[3]{8x^3 + 3x} = \sqrt[3]{2^3x^3 + 3x}$

$= \sqrt[3]{(2x)^3 + 3x}$

$= 2x + 3x$

$= 5x$

اكتب  $x^6$  على صورة مربعين

$x^6 = (x \cdot y)^2$

$x^3 = |y|$

تحليل العدد 8 إلى عوامله

$x^3 = (x \cdot y)^3$

$\sqrt[3]{x^3} = x$

### حاول أن تحل

بسط كلًا من التعبيرات الجذرية التالية حيث  $x$  و  $y$  عددين حقيقيين:

a.  $\sqrt{9x^2y^4}$

b.  $\sqrt[3]{-27x^6 + 3x^2}$

c.  $\sqrt{x^2y^6}$

تذكر:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2} = |x| \\ x \cdot x > 0 \\ 0 \cdot x = 0 \\ -x \cdot x < 0 \end{cases}$$

معلومة:

أسماء وحدات الوزن	
milligram	mg
centigram	cg
decigram	dg
gram	g
decagram	dag
hetogram	hg
kilogram	kg
ton	t

الربط بالحياة:

استخدم الجذر التكعيبي لإيجاد طول نصف قطر كرة إذا عرف حجمها.

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$



### مثال (3)

تطبيقات حياتية



أراد خالد أن يضع 4 درازن من البرتقال في صندوق.

يسع الصندوق لـ 4 طبقات وتحتوي كل طبقة على 12

برتقالة، على أن تكون 3 برتقالات مقابلة لعرض الصندوق

و 4 برتقالات مقابلة لطول الصندوق. وزن كل برتقالة هو بين

226 g و 255 g، إن وزن البرتقالة  $w$  مرتبط بطول قطر ها  $d$  وفق الصيغة:

$$w = \frac{d^3}{2.3} \text{ (cm)}$$

أوجد طول قطر أكبر مقطع دائري للبرتقالة.

أوجد الأبعاد لصندوق مناسب.

الحل:

226 < w < 255

226 <  $\frac{d^3}{2.3}$  < 255

519.8 <  $d^3$  < 586.5

اكتب المتباينة

عوض

اضرب في 2.3

معلومة:

$$\mathbb{R}^+ = \mathbb{R} - \{0\}$$

• مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة

• مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة

### حاول أن تحل

استخدم الصيغة  $w = \frac{d^3}{2.3}$  لإيجاد طول قطر أكبر مقطع دائري لكل برتقالة وزنها كما يلي:

a. 85 g

b. 195.93 g

c. 177.19 g

### جمع وطرح التعبيرات الجذرية Adding and Subtracting Radical Expressions

لجمع التعبيرات الجذرية وطرحها، يجب أن تكون متشابهة يكون التعبيران الجذريان متشابهين عندما يكون لهما دليل الجذر نفسه والمجذور نفسه. يجب وضع التعبيرات الجذرية في أبسط صورة مما يسمح لنا بمعرفة ما إذا كانت متشابهة أم لا.

لاحظ أن:  $2\sqrt{3}$  و  $5\sqrt{3}$  تعبيران جذريان متشابهان

$8\sqrt{x}$  و  $-3\sqrt{x}$  تعبيران جذريان متشابهان

$\sqrt{12}$  و  $\sqrt{27}$  تعبيران جذريان متشابهان. لماذا؟

في حين أن:

$\sqrt{3}$  و  $3\sqrt{5}$  هما تعبيران جذريان غير متشابهين

$\sqrt{x}$  و  $-3\sqrt{y}$  هما تعبيران جذريان غير متشابهين ( $y \geq 0, x \geq 0$ )

معلومة:

إذا كان  $a \in \mathbb{R}$

فإن  $\sqrt{a} \in \mathbb{R}$  فقط

$\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$

معلومة:

تعامل مع التعبيرات الجذرية المتشابهة مثل تعاملنا مع الحدود الجبرية المتشابهة.

### مثال (4)

أوجد الناتج في أبسط صورة

a.  $3\sqrt{32} - \sqrt{98}$

b.  $2\sqrt{3} + 5\sqrt{375}$

c.  $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{72}$

d.  $\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{250}$

## 6 الربط

يوفر المثالان (9)، (3) فرصة أمام الطلاب للتعرف على كيفية استخدام الجذور في مواقف حياتية.

## 7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في جمع التعابير الجبرية للجذور وطرحتها،

$$\text{مثل: } \sqrt{x \pm y} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$$

ساعدهم على تخطي ذلك بأمثلة حسيّة مثل:

$$\sqrt{36 + 64} \neq \sqrt{36} + \sqrt{64}$$

$$10 \neq 14$$

## 8 التقييم

من المهم جداً متابعة عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لمعرفة مدى قدرتهم على فهم العمليات على الجذور والتعبيرات الجذرية وتبسيطها واستخدام المرافق.

تموز  
1-1

### الجذور والتعبيرات الجذرية Roots and Radical Expressions

#### المجموعة A تمارين مقالية

(1) باستخدام قوانين الجذور أوجد إن أمكن:

- (a)  $\sqrt{400}$  (b)  $\sqrt{1600}$  (c)  $\sqrt{10^4}$  (d)  $\sqrt{0.01}$   
(e)  $\sqrt{0.25}$  (f)  $\sqrt{0.0064}$  (g)  $\sqrt{\frac{16}{49}}$  (h)  $\sqrt{\frac{2}{50}}$   
(i)  $\sqrt{\frac{12}{147}}$  (j)  $\sqrt{36 \times 25}$  (k)  $\sqrt{\frac{1}{121}}$  (l)  $\sqrt{75 \times 300}$

(2) باستخدام قوانين الجذور أوجد:

- (a)  $\sqrt[3]{27}$  (b)  $\sqrt[3]{1000}$  (c)  $\sqrt[3]{-64}$  (d)  $\sqrt[3]{0.125}$   
(e)  $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$  (f)  $\sqrt[3]{216 \times 343}$  (g)  $\sqrt[3]{-\frac{375}{24}}$  (h)  $\sqrt[3]{0}$   
(i)  $\sqrt[3]{60 \times 90}$

(3) بسّط كلّاً من التعبيرات الجذرية التالية مستخدماً قوانين الجذور:

- (a)  $\sqrt{16x^2}$  (b)  $\sqrt{0.25x^6}$  (c)  $\sqrt{x^8y^{18}}$   
(d)  $\sqrt{8x^3}$ ,  $x \geq 0$  (e)  $\sqrt{\frac{x^3y^5}{25x}}$ ,  $y \geq 0$ ,  $x > 0$  (f)  $5\sqrt{216x^2} + 23\sqrt{64x^3}$ ,  $x > 0$   
(g)  $\sqrt[3]{-125y^6}$  (h)  $\sqrt[3]{81x^2}$  (i)  $\sqrt[3]{-250a^6y^3}$   
(j)  $\sqrt[3]{49x^2 \times \sqrt[3]{56xy^3}}$  (k)  $\sqrt[3]{256u^3v} + \sqrt[3]{4u^2v^{10}}$ ,  $u \neq 0$ ,  $v \neq 0$

(4) بسّط كلّاً من التعبيرات التالية مستخدماً قوانين الجذور:

- (a)  $\sqrt{5} \times \sqrt{40}$  (b)  $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{80}$  (c)  $\frac{\sqrt[3]{640}}{\sqrt[3]{270}}$   
(d)  $\sqrt{5} \times (\sqrt{5} + \sqrt{15})$  (e)  $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$  (f)  $\sqrt{2} \times (\sqrt{50} + 7)$   
(g)  $(5 + 2\sqrt{11})^2$  (h)  $\frac{\sqrt{3.6 \times 10^4}}{\sqrt{4 \times 10^2}}$  (i)  $3\sqrt[3]{16} - 4\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{128}$   
(j)  $\sqrt{75} - 4\sqrt{18} + 2\sqrt{32}$  (k)  $4\sqrt[3]{81} - 3\sqrt[3]{54}$  (l)  $\sqrt[3]{-18} \times \sqrt[3]{-12}$   
(m)  $(2\sqrt{7} + 1)^2 - (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)$

9

(5) حديقة مستطيلة الشكل طولها  $5\sqrt{21}$  m وعرضها  $2\sqrt{7}$  m

(a) أوجد محيط الحديقة.

(b) أوجد مساحة الحديقة.

(6) اكتب كل كسر مما يلي بحيث يكون المقام عدداً نسبياً:

- (a)  $\sqrt{\frac{21}{4}} \times \sqrt{\frac{7}{27}}$  (b)  $\frac{3}{\sqrt{2}}$  (c)  $\frac{4}{3\sqrt{3}-2}$   
(d)  $\frac{3+\sqrt{8}}{2-2\sqrt{8}}$  (e)  $\frac{5+\sqrt{5}}{4-3\sqrt{5}}$  (f)  $\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} - (9-4\sqrt{5})$   
(g)  $\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$  (h)  $\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}$  (i)  $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$ ,  $x \in \mathbb{Z}^+$ ,  $x \neq 1$   
(j)  $\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ ,  $x, y \in \mathbb{Z}^+$

(7) أوجد قيمة التعبير،  $x^2 - 6$ ، إذا كان  $x = \frac{4}{\sqrt{5}-1}$

(8) أوجد قيمة التعبير،  $x^2 - x + 1$ ، إذا كان  $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(9) اكتب كلّاً من التعبيرين التاليين على الصورة  $a + b\sqrt{2}$ ،  $a, b \in \mathbb{Z}$

$$E = 5 + 6\sqrt{2}(3\sqrt{2} + 4)$$

$$F = (7\sqrt{2} - 4)^2$$

(10) الحساب الذهني. بسّط:  $\sqrt{1 + \sqrt{5 + \sqrt{11 + \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}}}}}}}$

#### المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

- (1)  $\sqrt[3]{-64x^3} + 4x = 0$  (a) (b)  
(2)  $\frac{8-\sqrt{7}}{3} + \frac{3}{4-\sqrt{7}} \in \mathbb{Z}$  (a) (b)  
(3)  $(3 - 2\sqrt{2})^{27} \times (3 + 2\sqrt{2})^{27} = 1$  (a) (b)  
(4)  $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{5}$  (a) (b)  
(5)  $|m| \times \sqrt{m^2} = m^2$ ,  $\forall m \in \mathbb{R}$  (a) (b)

10

الحل:

1  $3\sqrt{32} - \sqrt{98}$

$$\begin{aligned} &= 3\sqrt{16 \times 2} - \sqrt{49 \times 2} \\ &= 3\sqrt{4^2 \times 2} - \sqrt{7^2 \times 2} \\ &= 3 \times 4 \times \sqrt{2} - 7 \times \sqrt{2} \\ &= 12\sqrt{2} - 7\sqrt{2} \\ &= 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

اكتب 16، 49 على صورة مربعات كاملة  
 $\sqrt{x^2} = x$ ,  $x \geq 0$   
بسّط

2  $2\sqrt[3]{3} + 5\sqrt[3]{375}$

$$\begin{aligned} &= 2\sqrt[3]{3} + 5\sqrt[3]{125 \times 3} \\ &= 2\sqrt[3]{3} + 5\sqrt[3]{5^3 \times 3} \\ &= 2\sqrt[3]{3} + 5 \times 5 \times \sqrt[3]{3} \\ &= 2\sqrt[3]{3} + 25\sqrt[3]{3} \\ &= 27\sqrt[3]{3} \end{aligned}$$

اكتب 125 على صورة مكعب كامل  
 $\sqrt[3]{x^3} = x$   
بسّط

3  $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{72}$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{9 \times 2} + \sqrt{25 \times 2} - \sqrt{36 \times 2} \\ &= \sqrt{3^2 \times 2} + \sqrt{5^2 \times 2} - \sqrt{6^2 \times 2} \\ &= 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 6\sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

اكتب 9، 25، 16 على صورة مربعات كاملة  
 $\sqrt{x^2} = x$ ,  $x \geq 0$   
بسّط

4  $\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{250}$

$$\begin{aligned} &= \sqrt[3]{64 \times 2} + \sqrt[3]{27 \times 2} - 2\sqrt[3]{125 \times 2} \\ &= \sqrt[3]{4^3 \times 2} + \sqrt[3]{3^3 \times 2} - 2\sqrt[3]{5^3 \times 2} \\ &= 4\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} - 2 \times 5\sqrt[3]{2} \\ &= 4\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} - 10\sqrt[3]{2} \\ &= -3\sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

اكتب 125، 27، 64 على صورة مكعبات كاملة  
 $\sqrt[3]{x^3} = x$ ,  $x \geq 0$   
بسّط

حاول أن تحل

4 أوجد الناتج في أبسط صورة:

1  $4\sqrt[3]{8} + 2\sqrt[3]{128}$

2  $2\sqrt{75} - \sqrt{48}$

3  $\sqrt{12} + \sqrt{147} - \sqrt{27}$

4  $\sqrt[3]{320} + \sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{135}$

16

1 بسّط ما يلي:

(a)  $\sqrt{49x^5y^7}$   
 $7x^2y^2|y|\sqrt{xy} = \begin{cases} 7x^2y^3\sqrt{xy}: & y \geq 0 \\ -7x^2y^3\sqrt{xy}: & y < 0 \end{cases}$

(b)  $3\sqrt{12} - 4\sqrt{27} + 5\sqrt{147}$   
 $29\sqrt{3}$

(c)  $\sqrt{3xm} \times \sqrt{15xy}$   
 $3|x|\sqrt{5my} = 3x\sqrt{5my}$

(d)  $\frac{\sqrt[3]{243x^5y^8}}{\sqrt[3]{9xy^2}} \quad x \neq 0, y \neq 0$   
 $3xy^2\sqrt[3]{x}$

2 يعطى حجم الكرة بالقاعدة:  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

إذا كان حجم كرة يساوي  $972\pi \text{ cm}^3$

فما طول قطرها؟

$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = 9, d = 9 \times 2 = 18 \text{ cm}$

3 اكتب الكسر التالي بحيث يكون مقامه عددًا نسبيًا:

$\frac{\sqrt{7}-6}{\sqrt{7}+6}$

$\frac{-43+12\sqrt{7}}{29}$

ضرب وقسمة الجذور التربيعية والجذور التكعيبة

الجذور التكعيبة	الجذور التربيعية
$\forall x, y \in \mathbb{R}$ $\sqrt[3]{x^3} = x$ $(\sqrt[3]{x})^3 = x$ $\sqrt[3]{x \cdot y} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y}$ $\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}, y \neq 0$	$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ $\sqrt{x^2} =  x  = x$ $(\sqrt{x})^2 = x$ $\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$ $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}, y \neq 0$

فمثلاً:  
 $\sqrt{12} = \sqrt{(4)(3)} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$   
 $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$   
 $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{-2}} = \sqrt{\frac{54}{-2}} = \sqrt{-27} = -3$   
 $\sqrt{0.49} = \sqrt{\frac{49}{100}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{100}} = \frac{7}{10} = 0.7$

مثال (5)

بسّط كلّاً من الصيغتين الجبرية التالية:

a  $\sqrt{72x^3}, x \geq 0$

b  $\sqrt[3]{80n^5}$

الحل:

a  $\sqrt{72x^3} = \sqrt{(6^2)(2)(x^2)(x)}$   
 $= \sqrt{6^2 x^2} \times \sqrt{2x}$   
 $= 6|x| \times \sqrt{2x}$   
 $= 6x \sqrt{2x}$

حلل  $x^3, 72$   
 $\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}, x \geq 0, y \geq 0$   
 $\sqrt{x^2} = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$   
 $|x| = x, x \geq 0$

b  $\sqrt[3]{80n^5} = \sqrt[3]{2^3(10)(n^3)(n^2)}$   
 $= \sqrt[3]{2^3 n^3} \times \sqrt[3]{10n^2}$   
 $= 2n \sqrt[3]{10n^2}$

تحليل  $n^5$  و  $80$  إلى كميات كاملة  
 $\sqrt[3]{x \cdot y} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y}$   
 $\sqrt[3]{x^3} = x, \forall x \in \mathbb{R}$

في الصارين (6-12)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) التعبير الجذري الذي في أبسط صورة هو:

- (a)  $\sqrt[3]{216}$  (b)  $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$  (c)  $\sqrt[3]{9}$  (d)  $\sqrt{\frac{2}{3}}$

(7) لوضع الكسر  $\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$  في أبسط صورة نضرب كلّاً من البسط والمقام في:

- (a)  $\sqrt{2}$  (b)  $\sqrt[3]{2}$  (c) 2 (d) 4

(8)  $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$  يساوي:

- (a)  $2-\sqrt{3}$  (b)  $2+\sqrt{3}$  (c)  $3-\sqrt{2}$  (d)  $3+\sqrt{2}$

(9) إذا كان  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  فإن:

- (a)  $\varphi^2 + \varphi = 1$  (b)  $\varphi^2 = \varphi + 1$  (c)  $\varphi + \varphi^2 + 1 = 0$  (d)  $\varphi^2 + 1 = \varphi$

(10) إذا كان  $x \in \mathbb{R}^+$  فإن  $\frac{1}{x} + |x|$  يساوي:

- (a) -1 (b) -x (c) 1 (d) x

(11) إذا كان حجم شبه المكعب المقابل يساوي  $40 \text{ cm}^3$ ، فإن  $x$  تساوي:



- (a) 2 cm (b)  $2\sqrt{2}$  cm (c)  $-2\sqrt{2}$  cm (d) 4 cm

(12) إذا كان حجم أسطوانة ارتفاعها  $h$  وطول نصف قطرها  $r$  يعطى بالعلاقة:  $V = \pi r^2 h$  حيث الحجم  $V$  بدلالة كل من ارتفاع ونصف قطر الأسطوانة، فأى من العلاقات التالية صحيحة؟

- (a)  $h = \pi r^2 V$  (b)  $h = \frac{\pi}{r^2} \cdot V$  (c)  $r = \sqrt{\pi h V}$  (d)  $r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$

**سؤال أن تحل**

6. بسط كلًا من التعبيرات الجذرية التالية:

a.  $\sqrt{50x^4}$       b.  $\sqrt[3]{18x^3}$

**مثال (6)**

بسط كلًا من التعبيرات الجذرية التالية:

a.  $\sqrt{5x^3} \times \sqrt{40x}$  ،  $x \geq 0$       b.  $\sqrt[3]{5x^3y^4} \times \sqrt[3]{64x^2y^3}$

الحل:

a.  $\sqrt{5x^3} \times \sqrt{40x} = \sqrt{5(40)(x^3)(x)}$        $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}$  ،  $x \geq 0$  ،  $y \geq 0$   
 $= \sqrt{200x^4}$       اضرب  
 $= 10x^2 \sqrt{2}$       بسط

b.  $\sqrt[3]{5x^3y^4} \times \sqrt[3]{64x^2y^3} = \sqrt[3]{(5x^3y^4)(64x^2y^3)}$        $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x \cdot y}$   
 $= \sqrt[3]{(5x^3y^3y)(4^3(x^2)(y^3))}$       حلل إلى مكعبات كاملة  
 $= \sqrt[3]{(5(4^3) \cdot x^3 \cdot y^3 \cdot y^3 \cdot x^2 \cdot y)}$       خاصية التجميع  
 $= \sqrt[3]{4^3 x^3 (y^3)^2 \times \sqrt[3]{5x^2y}}$        $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x \cdot y}$   
 $= 4xy^2 \sqrt[3]{5x^2y}$        $\sqrt[3]{x^3} = x$

**سؤال أن تحل**

6. بسط كلًا من التعبيرات الجذرية التالية:

a.  $3\sqrt{7x^3} \times 2\sqrt{x^3y^2}$  ،  $x \geq 0$       b.  $4\sqrt[3]{x^4y} \times 3\sqrt[3]{x^2y}$

**مثال (7)**

بسط كلًا من التعبيرات الجذرية التالية:

a.  $\frac{\sqrt{162x^5}}{\sqrt{3x^2}}$  ،  $x \neq 0$       b.  $\frac{\sqrt[3]{250x^3y^3}}{\sqrt[3]{2x^2y}}$  ،  $x \neq 0$  ،  $y \neq 0$

الحل:

a.  $\frac{\sqrt{162x^5}}{\sqrt{3x^2}} = \sqrt{\frac{162x^5}{3x^2}}$        $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$  ،  $y \neq 0$   
 $= \sqrt{54x^3}$       اقم  
 $= \sqrt{2(3)^3 x^3}$       حلل إلى عوامله  
 $= \sqrt{2} \times \sqrt{3^3 \times x^3}$        $\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$   
 $= 3x \sqrt{2}$        $\sqrt{x^3} = x$

b.  $\frac{\sqrt[3]{250x^3y^3}}{\sqrt[3]{2x^2y}} = \sqrt[3]{\frac{250x^3y^3}{2x^2y}}$        $\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = \sqrt[3]{\frac{x}{y}}$  ،  $y \neq 0$   
 $= \sqrt[3]{125 \times \sqrt[3]{x^3y^2}}$        $\sqrt[3]{x \cdot y} = \sqrt[3]{x \cdot y}$   
 $= 5 \times x \sqrt[3]{x^2 \times \sqrt[3]{y^2}}$        $\sqrt[3]{x^3} = x$   
 $= 5x \sqrt[3]{x^2y^2}$        $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x \cdot y}$

**سؤال أن تحل**

7. أوجد ناتج كل من التعبيرات التالية:

a.  $\frac{\sqrt{243}}{\sqrt{27}}$       b.  $\frac{\sqrt{12x^4}}{\sqrt{3x}}$  ،  $x > 0$       c.  $\frac{\sqrt[3]{128x^{15}}}{\sqrt[3]{2x^2}}$  ،  $x \neq 0$

**تيسيط كسر مقامه يتضمن جذرًا**

إذا كان  $x$  و  $y$  تعبرين عددين عقلانيين وكان ناتج ضرب  $x$  في  $y$  عددًا نسبيًا فإن  $x$  و  $y$  مترافقان. فمثلاً:  $\sqrt{2}$  و  $\sqrt{2}$  ، لأن:  $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$  ، حيث الناتج 2 عددًا نسبيًا. وكذلك  $(3 + \sqrt{2})$  و  $(3 - \sqrt{2})$  ، لأن:  $(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = 9 - 2 = 7$  ، حيث الناتج 7 عددًا نسبيًا. وأيضًا  $\sqrt[3]{5}$  و  $\sqrt[3]{5}$  ، لأن:  $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5^2} = 5$  ، حيث الناتج 5 عددًا نسبيًا.

يمكن إعادة كتابة كسر يحتوي مقامه على جذور تربيعية أو جذور تكعيبية على شكل كسر مقامه عدد نسبي وذلك بضرب بسط الكسر ومقامه في مترافق المقام.

**معلومة:** إذا كان  $a$  و  $b$  عددين صحيحين موجبين فإن:  
 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$   
 $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = (a - b)$   
 مترافقان.

**معلومة:** المترافق ليس وحيد.

- (a)  $144 \text{ m}^2$   
 (b)  $10 \text{ m}$   
 (c)  $20 \text{ m}$   
 (d)  $8 \text{ m}$   
 (e)  $1728 \text{ m}^3$   
 (f)  $8 \text{ m}$   
 (g)  $\approx 9.9 \text{ m}$

- 1 (a)  $\sqrt[3]{-27} = -3$   
 (b)  $\sqrt[3]{64} = 4$   
 (c)  $-\sqrt[3]{0.008} = -0.2$   
 (d)  $\sqrt[3]{\frac{343}{216}} = \frac{\sqrt[3]{343}}{\sqrt[3]{216}} = \frac{7}{6}$

- 2 (a)  $3|x|y^2$   
 (b)  $-3x^2 + 3x^2 = 0$   
 (c)  $x^4y^2|y| = \begin{cases} x^4y^3 & : y \geq 0 \\ -x^4y^3 & : y < 0 \end{cases}$

- 3 (a)  $5.8 \text{ cm}$   
 (b)  $7.67 \text{ cm}$   
 (c)  $7.4 \text{ cm}$

- 4 (a)  $8 + 8\sqrt[3]{2}$   
 (b)  $6\sqrt{3}$   
 (c)  $6\sqrt{3}$   
 (d)  $3\sqrt[3]{5}$

- 5 (a)  $5x^2\sqrt{2}$   
 (b)  $x\sqrt[3]{18}$

- 6 (a)  $6\sqrt{7(x^3)^2y^2} = 6x^3 \times |y| \sqrt{7} = \begin{cases} 6x^3y\sqrt{7} & : y \geq 0 \\ -6x^3y\sqrt{7} & : y < 0 \end{cases}$

مثال (8)

اكتب كل كسر بحيث يكون المقام عدداً نسبياً:

a  $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$     b  $\frac{\sqrt{2}-1}{3-\sqrt{2}}$     c  $\frac{3}{\sqrt[3]{5}}$     d  $\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-9x}, x > 1, x \in \mathbb{Q}$

الحل:

a  $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + (\sqrt{2} \times \sqrt{3})}{(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{6}}{3}$   
 انضرب بسط الكسر ومقامه في  $\sqrt{3}$  وهو مرافق المقام  $\sqrt{3}$   
 انضرب  
 بسط  
 المقام عدد نسبي

b  $\frac{\sqrt{2}-1}{3-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{3-\sqrt{2}} \times \frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2} + (\sqrt{2} \times \sqrt{2}) - 3 - \sqrt{2}}{3^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{3\sqrt{2} + 2 - 3 - \sqrt{2}}{9-2} = \frac{2\sqrt{2}-1}{7}$   
 انضرب بسط الكسر ومقامه في  $3+\sqrt{2}$  وهو مرافق المقام  $3-\sqrt{2}$   
 $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$   
 انضرب  
 بسط  
 بسط

c  $\frac{3}{\sqrt[3]{5}} = \frac{3}{\sqrt[3]{5}} \times \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{3\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{3\sqrt[3]{25}}{5}$   
 انضرب بسط الكسر ومقامه في  $\sqrt[3]{5^2}$  وهو مرافق المقام  $\sqrt[3]{5}$   
 $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x \cdot y}$   
 $\sqrt[3]{x^3} = x$   
 انضرب بسط الكسر ومقامه في مرافق المقام

d  $\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-9x} = \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-9x} \times \frac{\sqrt{x}+9x}{\sqrt{x}+9x} = \frac{x\sqrt{x} + 9x^2 + (\sqrt{x})^2 + 9x\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2 - (9x)^2} = \frac{x\sqrt{x} + 9x^2 + x + 9x\sqrt{x}}{x - 81x^2} = \frac{9x^2 + 10x\sqrt{x} + x}{x - 81x^2}$   
 انضرب  
 بسط

(b)  $12 \sqrt[3]{x^6 y^2} = 12x^2 \sqrt[3]{y^2}$

7 (a)  $\sqrt{9} = 3$

(b)  $2x\sqrt{x}$

(c)  $4x^4 \sqrt[3]{x}$

8 (a)  $\frac{3+\sqrt{6}}{3}$

(b)  $\frac{4+\sqrt{2}}{2}$

(c)  $\frac{\sqrt[3]{7}}{7}$

(d)  $\frac{(x+1)\sqrt{x} + 2x}{x-1}$

9 الزمن الدوري:  $\sqrt{\frac{4\pi^2 \times (5.84 \times 10^5)^3}{6.673 \times 10^{-11} \times 5.4 \times 10^{21}}}$

فيكون الزمن الدوري  $\approx 4671s$

x عامل مشترك

$= \frac{x(9x+10\sqrt{x}+1)}{x(1-81x)}, x > 1$   
 بسط  
 $= \frac{9x+10\sqrt{x}+1}{1-81x}$

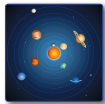
حاول أن تحل

أوجد ناتج كل من الصيغ التالية في أبسط صورة:

a  $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$     b  $\frac{3-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$     c  $\frac{1}{\sqrt[3]{7}}$     d  $\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}, x > 1, x \in \mathbb{Q}$

مثال (9)

تطبيقات حياتية



ينص قانون كيبلر الثالث على أن مربع الزمن الدوري ( $T^2$ ) لدوران كوكب حول الشمس يتناسب طردياً مع مكعب نصف طول المحور الأكبر لمدار الكوكب ( $r^3$ ) ويمكن تمثيل ذلك بالعلاقة:  
 $T^2 = \frac{4\pi^2}{(6.673) \times (10^{-11}) \times M} \times r^3$  حيث  $M$  بالكيلوجرام،  
 $r$  بالمتر،  $T$  بالثانية.

أوجد نصف طول المحور الأكبر لمدار كوكب كبلن:  $M = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$   
 وزمنه الدوري:  $T = 5.175 \text{ s}$ .



الحل:

$T^2 = \frac{4\pi^2}{(6.673)(10^{-11}) \times M} \times r^3$   
 $r^3 = \frac{M \times (6.673)(10^{-11}) \times T^2}{4\pi^2}$   
 $r = \sqrt[3]{\frac{M \times (6.673) \times (10^{-11}) \times T^2}{4\pi^2}}$   
 $r = \sqrt[3]{\frac{(6 \times 10^{24})(6.673 \times 10^{-11})(5.175)^2}{4\pi^2}}$   
 $\approx 6.476 \times 10^6 \text{ m}$

يبلغ نصف طول المحور الأكبر لمدار الكوكب حوالي  $6.476 \times 10^6 \text{ m}$

حاول أن تحل

باستخدام العلاقة في مثال (9) أوجد الزمن الدوري إذا كان نصف طول المحور الأكبر لمدار كوكب  $5.84 \times 10^5 \text{ m}$ ، وكتلته  $5.4 \times 10^{21} \text{ kg}$

معلومة:

كيل عالم رياضيات وملك وقواد ألماني، وضع قوانين نصف حركة دوران الكوكب حول الشمس.  
 من قوانينه:  
 كل كوكب يدور في مدار إهليلجي (بيضاوي) حول الشمس ويقع الشمس في إحدى بؤرتيه ويسمى هذا المدار بالقطع الناقص.



## 1-2: الأسس النسبية

1-2

الأسس النسبية

Rational Exponents



يقدر علماء الآثار عمق المحفريات باستخدام الأسس النسبية

دعنا نفكر ونناقش

عرفت سابقًا أن  $x^6 \cdot x^3 = x^9$  ومنه استنتجنا أن  $x^3$  هو جذر تربيعي لـ  $x^6$ . كذلك  $x^4 \cdot x^2 = x^6$ ،  $\therefore x^2$  جذر تربيعي لـ  $x^4$ ،  $x^{-1} \cdot x^{-1} = x^{-2}$ ،  $x \neq 0$ ،  $\therefore x^{-1}$  جذر تربيعي لـ  $x^{-2}$ . الجذر التربيعي الأساسي للعدد الموجب  $x$  هو  $\sqrt{x}$  ونكتب:  $x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$  وإذا حاولنا كتابة هذه المعادلة بالصيغة الأسية،  $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$   $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^1 = x$  بالمقارنة مع ما ورد أعلاه نستطيع أن نكتب:  $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ ،  $\therefore x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x$  وقد اعتمدت الصيغة الأسية وعممت لكتابة أي تعبير جذري.

الصورة الجذرية	الصورة الأسية
$\sqrt{25} = \sqrt[2]{25}$	$25^{\frac{1}{2}}$
$\sqrt[3]{27}$	$27^{\frac{1}{3}}$
$\sqrt[4]{64}$	$64^{\frac{1}{4}}$

ويمكن استخدام خواص الأسس لتبسيط التعبيرات الجذرية.

مثال (1)

بسط كل عدد من الأعداد التالية مستخدمًا الصورة الجذرية:

- a  $125^{\frac{1}{3}}$       b  $8^{\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{1}{2}}$       c  $100^{\frac{1}{2}} \times 100^{\frac{1}{2}}$

سوف تتعلم

- كتابة عدد حقيقي في الصورة الجذرية.
- كتابة عدد حقيقي في الصورة الأسية.
- تحويل من الصورة الجذرية إلى الصورة الأسية.
- تحويل من الصورة الأسية إلى الصورة الجذرية.
- خواص الجذور للعدد.
- حرب الجذور النونية.
- حرب الجذور النونية وقسمتها.

المفردات والمصطلحات:

- الصورة الجذرية
- Radical Form
- الصورة الأسية
- Exponential Form
- الجذر النوني  $n^{\text{th}}$  Root

معلومات:

يعبر علماء الرياضيات والنسب W. WALLIS وديكارتر عن أول من استخدم الأسس النسبية.

معلومات:

يرمز الفتحاح  $\sqrt{\quad}$  في بعض الآلات الحاسبة إلى الأسس. وفي حالة الأسس النسبية يكتب الأس بين قوسين. فمثلاً:  $432^{\frac{1}{3}}$  يتم إدخالها إلى الآلة الحاسبة كما يلي:  $432 \div (3 - 5)$

22

### 1 الأهداف

- يكتب عددًا حقيقيًا في الصورة الجذرية.
- يكتب عددًا حقيقيًا في الصورة الأسية.
- يتعرف التحويل بين الصورتين الجذرية والأسية.
- يتعرف الجذر النوني للعدد وخواصه.
- يضرب الجذور النونية ويقسمها.

### 2 المفردات والمفاهيم الجديدة

الصورة الجذرية - الصورة الأسية - الجذر النوني.

### 3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة - جهاز إسقاط (Data Show) - حاسوب.

### 4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) أوجد ناتج كل مما يلي:  $\sqrt[3]{216}$ ،  $-\sqrt{81}$

(b) بسّط التعبيرات التالية:  $\sqrt{128x^5y^9}$ ،  $\sqrt[3]{250x^6y^8}$ ،  $\sqrt{72x^2y^5}$

(c) أوجد الناتج ثم بسّط إذا أمكن:

- $\sqrt{3xy^2} \times \sqrt{12x^3y^5}$
- $\sqrt[3]{5x^4y^5} \times \sqrt[3]{25x^7y^4}$
- $\frac{\sqrt{162x^7y^9}}{\sqrt{2x^5y^6}}$  ( $x \neq 0$ ،  $y \neq 0$ )

الحل:

- اكتب  $125^{\frac{1}{3}}$  بالصورة الجذرية  
حلل  $125$  إلى عوامله الأولية  
 $\sqrt[3]{x^3} = x$
- اكتب  $8^{\frac{1}{2}}$  بالصورة الجذرية  
 $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$ ،  $x \geq 0$
- اكتب  $100^{\frac{1}{2}}$  و  $100^{\frac{1}{2}}$  بالصورة الجذرية  
 $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x \cdot y}$   
 $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$   
 $\sqrt[3]{x^3} = x$

حاول أن تحل

1 بسّط كل عدد من الأعداد التالية مستخدمًا الصورة الجذرية:

- a  $64^{\frac{1}{3}}$       b  $(2^{\frac{1}{2}})(2^{\frac{1}{2}})$       c  $(8^{\frac{1}{3}})(2^{\frac{1}{2}})$

يمكن أن يكون بسط الأسس عددًا غير الواحد الخاصية  $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$  تبين كيف يمكن إعادة كتابة أي تعبير بحيث يكون الأس كسرًا.

مثال (2)

اكتب العدد  $25^{\frac{3}{2}}$  بالصورة الجذرية.

- الحل:
- $25^{\frac{3}{2}} = 25^{\frac{1}{2} \cdot 3} = (25^{\frac{1}{2}})^3$        $\frac{m}{n} = \frac{1}{n} \cdot m$   
 $= \sqrt{25^3}$        $x^{mn} = (x^m)^n$   
 $\therefore 25^{\frac{3}{2}} = \sqrt{25^3}$        $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ ،  $x > 0$

حاول أن تحل

2 اكتب العدد  $64^{\frac{2}{3}}$  بالصورة الجذرية.

23

## 5 التدريس

يعتبر التحويل بين الجذور والأسس النسبية مهمًا. سوف يستكشفه الطالب الآن في عمليات حسابية لتبسيط النتائج، كما أنه سوف يدرك أهميته لاحقًا في دراسات متقدمة. شدّد أولاً للطلاب على فكرة العلاقة بين الجذر التربيعي والجذر التكعيبي والأسس وذلك من خلال التعامل مع المثال (1) ومع أمثلة بديلة.

اكتب على السبورة ما يلي:

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \quad \text{فإن } a \geq 0$$

$$\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}} \quad \text{فإن } a \text{ حقيقي}$$

ثم اطلب إليهم كتابة أمثلة متعددة تطبيقًا لهاتين العلاقتين.

### في المثالين (2) و (3)

في خطوة متقدمة لتعميم ما ورد في المثال (1)،

اكتب الآن على السبورة ما يلي:

$$\sqrt{a^m} = a^{\frac{m}{2}}$$

$$\sqrt[3]{a^m} = a^{\frac{m}{3}}$$

اطلب إليهم كتابة أمثلة متعددة كتطبيق على هاتين العلاقتين.

دع الطلاب يلاحظون أن خواص الأسس النسبية مشابهة

تمامًا لخواص الأسس الصحيحة التي تعلمها الطالب سابقًا.

ولكن تبقى الأهمية في استخدام العمليات الأربع على

الأعداد النسبية. أي المقامات المشتركة عند الجمع

والطرح.

### في المثال (5)

استمع إلى أسئلتهم في التحويلات عند قسمة الأعداد

النسبية.

أعط أمثلة بديلة تساعد الطلاب على فهم العمليات مع

الجذور عندما تكون العلاقة مع الأسس النونية.

### في المثال (6)

يتناول هذا المثال كيفية حل التمرين نفسه بطريقتين

مختلفتين وذلك بالربط بين خواص الجذور وخواص

الأسس.

إذا كان  $a$  عددًا حقيقيًا،  $n \geq 2$ ،  $n \in \mathbb{Z}^+$ :

فإن الجذر النوني للعدد  $a$  يرمز له بالرمز  $\sqrt[n]{a}$  ويساوي عددًا حقيقيًا  $b$  حيث  $a = b^n$

المجذور  $\sqrt[n]{x}$  ← دليل الجذر

إذا كان الجذر النوني لعدد  $x$  هو عددًا حقيقيًا،  $m$  عددًا صحيحًا،  $n$  عددًا طبيعيًا  $n \geq 2$ ، فإن:

- $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$
- $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$
- $\sqrt[n]{x^m} = \left[ \sqrt[n]{x} \right]^m$  إذا كان  $m$  عددًا زوجيًا  
إذا كان  $m$  عددًا فرديًا

#### مثال (3)

- اكتب بالصورة الجذرية كلاً من:  
a.  $x^{\frac{3}{4}}$       b.  $y^{-2.5}$ ،  $\forall y > 0$
- اكتب بالصورة الأسية كلاً من:  
a.  $(\sqrt[3]{y})^2$       b.  $\sqrt{b^3}$ ،  $\forall b \geq 0$

الحل:

$$x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3} = (\sqrt[4]{x})^3$$

$$y^{-2.5} = y^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{y^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{y^5}} \quad \forall y > 0$$

$$\sqrt[4]{x^3} = \sqrt[4]{x^3} = \sqrt[4]{x^3}$$

$$y^{-2.5} = y^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{y^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{y^5}} \quad \forall y > 0$$

$$(\sqrt[3]{y})^2 = \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{y^2}$$

$$\sqrt{b^3} = b^{\frac{3}{2}} = \sqrt{b^3} \quad b \geq 0$$

#### حاول أن تحل

- اكتب بالصورة الجذرية كلاً من:  
a.  $x^{0.4}$       b.  $y^{\frac{3}{8}}$ ،  $\forall y \geq 0$
- اكتب بالصورة الأسية كلاً من:  
a.  $\sqrt[3]{x^2}$       b.  $(\sqrt{y})^3$ ،  $\forall y \geq 0$

24

#### مثال (4)



إن عدم شعور رائد الفضاء بالعدم التوازن في رحلة فضائية يعود إلى دوران جهاز يجلس فيه ويشعره بجاذبية وهمية تحاكي الجاذبية الأرضية. يدور الجهاز وفق المعادلة الرياضية:  $n = \frac{9.8}{2\pi r}$  حيث  $n$  هي السرعة الدورانية وتقاس بالدورة في الثانية (s).  $r$  هو طول نصف قطر جهاز الدوران ويقاس بالمتر (m). وهي الجاذبية الوهمية التي تحاكي الجاذبية الأرضية. احسب سرعة دوران جهاز، طول نصف قطره 1.7 m يدور ليحاكي الجاذبية الأرضية التي تساوي  $9.8 \text{ m/s}^2$

$$n = \frac{9.8^{0.5}}{2\pi \cdot 1.7^{0.5}}$$

$$\approx \frac{9.8^{0.5}}{2(3.14)(1.7)^{0.5}}$$

$$n \approx 0.382$$

اكتب المعادلة

عوض

استخدم الآلة الحاسبة

تبلغ سرعة دوران الجهاز حوالي 0.382 دورة في الثانية.

#### حاول أن تحل

- احسب السرعة الدورانية المطلوبة للجهاز في المثال (4) ليحاكي جاذبية تحاكي نصف مقدار الجاذبية الأرضية.

الربط بالحياة:  
نيل أرمسترونغ

Neil Armstrong  
(1930 – 2012)

هو أول رائد فضاء وطاق

قاد سطة القمر.

• قاد سنة 1966 المركبة

Gemini 8 وقام مع

زميله بنيد سكوت

باجراء أول عملية الصمام

بين مركبتين في الفضاء

بواسطة إسناد

• سنة 1969 قاد المركبة

Apollo 11 برفقة

الذين وماكل كولنر.

هبط أرمسترونغ مع الكرن

على سطح القمر حيث

أضيا 2h31min

#### Laws of Rational Exponents

#### قوانين الأسس النسبية

ليكن  $n, m$  عددين نسبيين،  $a, b$  عددين حقيقيين حيث  $a^m, b^m, a^n, b^n$  أعدادًا حقيقية.

القانون	المثال
$b^m \cdot b^n = b^{m+n}$	$8^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = 8^1 = 8$
$(b^m)^n = b^{m \cdot n}$	$(5^{\frac{1}{2}})^4 = 5^{\frac{1}{2} \cdot 4} = 5^2 = 25$
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(4 \cdot 5)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 5^{\frac{1}{2}}$
$b^{-n} = \frac{1}{b^n}, b \neq 0$	$9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{3}$
$\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}, b \neq 0$	$\frac{9^{\frac{3}{2}}}{9^{\frac{1}{2}}} = 9^{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}} = 9^1 = 9$
$(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$	$(\frac{-125}{27})^{\frac{1}{3}} = \frac{-125^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{-5}{3}$

25



## 6 الربط

يوفر المثالان (7) ، (4) فرصة أمام الطلاب ليتعرفوا كيفية الربط بين الجذور والأسس في موقف حياتي.

## 7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في تحويل الأسس على صورة أعداد نسبية إلى جذور نونية وبالعكس. ساعدهم على كتابة المساواة  $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$  عدة مرات وبأمثلة عديدة. وقد يخطئ الطلاب أيضاً في عدم مراعاة شروط الجذر النوني.

## 8 التقييم

تابع الطلاب وهم يجيبون عن أسئلة فقرات «حاول أن تحل» لتقف على أدائهم في التحويل بين الجذور والأسس.

يمكنك تبسيط أي عدد أنه عدد نسي باستخدام قوانين الأسس النسبية أو تحويله إلى تعبير جذري.

(5) مثال

بسط كل ما يلي مستخدماً قوانين الأسس:

a  $(-32)^{\frac{3}{5}}$

b  $(x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{5}{6}}) \div x^{\frac{2}{3}}, x > 0$

الحل:

a  $(-32)^{\frac{3}{5}} = (-2^5)^{\frac{3}{5}}$   
 $= (-2)^{\frac{3}{5} \cdot 5}$   
 $= (-2)^3$   
 $= -8$

$2^5 = 32$

$(b^m)^n = b^{m \cdot n}$

بسط

b  $(x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{5}{6}}) \div x^{\frac{2}{3}}$   
 $= (x^{\frac{1}{2} + \frac{5}{6}}) \div x^{\frac{2}{3}}$   
 $= (x^{\frac{8}{6}}) \div x^{\frac{2}{3}}$   
 $= x^{\frac{8}{6} - \frac{2}{3}} = x^{\frac{8}{6} - \frac{4}{6}} = x^{\frac{4}{6}} = x^{\frac{2}{3}}$

الخاصية  
 بسط  $\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$

حاول أن تحل

بسط كل ما يلي مستخدماً قوانين الأسس:

a  $25^{-\frac{3}{2}}$

b  $(-32)^{\frac{4}{5}}$

c  $\left(\frac{16x^{14}}{81y^{18}}\right)^{\frac{1}{2}}, x \geq 0, y > 0$

لضرب أو لقسمة  $\frac{a}{b}$ ،  $\frac{c}{d}$  يمكن استخدام الصورة الأسية لكل منهما وتطبيق قوانين الأسس أو تطبيق قوانين الجذور النونية.

قوانين الجذور النونية

إذا كان:  $\sqrt[n]{x}$ ،  $\sqrt[n]{y}$  عددين حقيقيين، فإن:

1  $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$

2  $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}, y \neq 0$

3  $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n \cdot m]{x}$

26

## اختبار سريع

1 بسط ما يلي:

(a)  $625^{\frac{1}{4}} \quad \sqrt[4]{625} = 5$

(b)  $128^{\frac{1}{7}} \quad \sqrt[7]{128} = 2$

(c)  $4^{\frac{1}{3}} \times 4^{\frac{2}{3}} \quad 4^{\frac{3}{3}} = 4^1 = 4$

2 اكتب  $x^{\frac{13}{4}}$ ،  $x \geq 0$  على صورة جذر، ثم بسط.

$$\sqrt[4]{x^{13}} = x^3 \sqrt[4]{x}$$

3 اكتب  $\sqrt[3]{x^3 y^4}$ ،  $x \geq 0$  بالصورة الأسية.

$$x^{\frac{3}{3}} y^{\frac{4}{3}} = x^1 y^{\frac{4}{3}}$$

4 بسط:  $\sqrt[3]{\sqrt[4]{262144}}$

$$\sqrt[12]{2^{18}} = 2^{\frac{18}{12}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$$

تمرّن  
1-2

الأسس النسبية

Rational Exponents

المجموعة A تمارين مقالية

(1) بسط كل ما يلي من التعبيرات الجذرية التالية إن أمكن.

(a)  $-\sqrt[3]{81}$

(b)  $\sqrt[4]{-81}$

(c)  $\sqrt[4]{36 \times 108}$

(d)  $\sqrt[3]{\frac{256}{8}}$

(e)  $\sqrt[5]{32y^{10}}$

(f)  $\sqrt[3]{-x^{20}}$

(g)  $\sqrt[5]{0.01024}$

(h)  $\sqrt[4]{81 + \sqrt{729}}$

(i)  $\sqrt[4]{\frac{16x^{25}}{y^{12}}}; x, y > 0$

(2) اكتب كل عدد مما يلي بالصورة الجذرية:

(a)  $x^{\frac{1}{6}}, x \geq 0$

(b)  $x^{\frac{2}{3}}$

(c)  $y^{-\frac{2}{3}}, y > 0$

(d)  $x^{1.5}, x \geq 0$

(e)  $x^{\frac{3}{4}}, x \geq 0$

(f)  $7^{\frac{2}{3}}$

(g)  $y^{3.2}$

(h)  $x^{-\frac{2}{3}}; x \neq 0$

(3) بسط كل عدد من الأعداد التالية (دون استخدام الآلة الحاسبة).

(a)  $64^{\frac{2}{3}}$

(b)  $(-32)^{\frac{4}{5}}$

(c)  $4^{1.5}$

(a)  $\sqrt{7x^3}, x \geq 0$

(b)  $\sqrt[3]{(7x)^3}, x \geq 0$

(c)  $(\sqrt{7x})^3, x \geq 0$

(d)  $\sqrt[3]{(5xy)^6}$

(e)  $\sqrt[4]{81x^3}, x \geq 0$

(f)  $\sqrt[3]{0.0049t^2}$

(g)  $\sqrt[3]{(1024)^3}$

(5) بسط كل ما يلي (دون استخدام الآلة الحاسبة).

(a)  $2\sqrt[3]{16^3}$

(b)  $\sqrt[3]{(-27)^4}$

(c)  $\sqrt[3]{-243}$

(d)  $x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}}, x \geq 0$

(e)  $x^{\frac{3}{4}} \div x^{\frac{1}{4}}, x > 0$

(f)  $\frac{x^{\frac{3}{4}} \cdot y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{2}{4}} \cdot y^{\frac{1}{4}}}, x > 0, y > 0$

(g)  $\frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}}}, x > 0, y > 0$

(h)  $((3^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}, x > 0$

(i)  $\left(\frac{\sqrt{9t}}{\sqrt[3]{27t^2}}\right)^{12}, t > 0$

12

## 9 إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

1 (a) 4

(b) 2

(c) 4

2  $(64 = 4^3)^{\frac{3}{4}} \sqrt[4]{64^4} = 64^{\frac{3}{4}} \sqrt[4]{64^4} = 64 \times 4 = 256$

3 (a) (1)  $\sqrt[5]{x^2}$  , (2)  $\sqrt[8]{y^3}$

(b) (1)  $x^{\frac{2}{5}}$  , (2)  $y^{\frac{3}{8}}$

4  $v = \frac{4.9^{0.5}}{2 \times 3.14 \times (1.7)^{0.5}} \approx 0.27$

السرعة الدورانية 0.27 دورة بالثانية.

مثال (6)

بسط كلًا من التعبيرات الجذرية التالية:

a  $\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{7}$

b  $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$

c  $\sqrt[4]{256}$

d  $[(\sqrt{x^3 y^3})^{\frac{1}{2}}]^{-1}$ ,  $x, y \in \mathbb{Q}^+$

الحل:

طريقة أولى

a  $\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{5 \times 7}$   
 $= \sqrt[4]{35}$   
 $\therefore \sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{35}$

$\sqrt[4]{x \cdot y} = \sqrt[4]{x \cdot y}$   
اضرب

طريقة ثانية

a  $\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{7} = 5^{\frac{1}{4}} \times 7^{\frac{1}{4}}$   
 $= (5 \times 7)^{\frac{1}{4}}$   
 $= (35)^{\frac{1}{4}}$   
 $= \sqrt[4]{35}$

$\sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$   
 $x^m \cdot x^n = (x \cdot y)^m$   
اضرب  
 $x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x}$

طريقة أولى

b  $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}}$   
 $= \sqrt[3]{8}$   
 $= \sqrt[3]{2^3}$   
 $= 2$   
 $\therefore \frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = 2$

$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}} = \sqrt[3]{\frac{x}{y}}$  ( $y \neq 0$ )  
اقسم  
حلل 8 عوامله  
 $\sqrt[3]{x^3} = x$

طريقة ثانية

b  $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{16^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}$   
 $= \left(\frac{16}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$   
 $= 8^{\frac{1}{3}}$   
 $= \sqrt[3]{8}$   
 $= 2$

$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$   
 $\frac{x^m}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}}$ ,  $y \neq 0$   
اقسم  
 $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$   
بسط

27

(10) إذا كان  $x + y = 2$ ,  $x^2 - xy + y^2 = 4$ , فإن  $\sqrt{x^3 + y^3}$  يساوي:

(a)  $\sqrt{2}$

(b)  $\sqrt[3]{2}$

(c)  $\sqrt[3]{6}$

(d) 2

(11) في التعبير  $P, V^{\frac{2}{3}}$  حيث  $P$  يمثل الضغط،  $V$  يمثل حجم عينة من غاز فإن قيمته عندما  $P = \frac{243}{32}$ ,  $V = \frac{243}{32}$  يساوي:

(a)  $\frac{4}{81}$

(b) 4

(c)  $\frac{81}{4}$

(d)  $\frac{243}{4}$

(12) إن قيمة التعبير  $\frac{\sqrt[3]{x^6} \cdot \sqrt[4]{x^5}}{x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$ ,  $x > 0$  تساوي:

(a)  $x$

(b)  $\frac{1}{x}$

(c) 1

(d)  $\sqrt{x}$

14

(6) أوجد ناتج كلٍّ مما يلي:

(a)  $\sqrt[3]{\sqrt[4]{64x^6}}$

(b)  $5^{\frac{1}{2}} \times 25^{\frac{1}{3}}$

(c)  $\frac{\sqrt[3]{8^3} \times \sqrt[4]{32}}{8^{\frac{1}{4}}}$

(d)  $\sqrt[4]{1024 - 2\sqrt{2}}$

(e)  $\frac{(32)^{\frac{1}{2}} \times (16)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[5]{64}}$

(f)  $(2 - \sqrt[3]{8})(2 + \sqrt[3]{8})$

(7) أوجد عددًا  $x$  بحيث يكون  $(4 + \sqrt{5})x$  عددًا نسبيًا.

(8) في التعبير  $P, V^{\frac{2}{3}}$ ، حيث  $P$  يمثل الضغط،  $V$  يمثل حجم عينة من غاز.

$P = 6$ ,  $V = 32$  أوجد قيمة التعبير إذا كان:

(9) تحليل الخطأ: أوجد الخطأ في الحل التالي:  $5 \times (4 - 5^{\frac{1}{2}}) = 5 \times 4 - 5 \times 5^{\frac{1}{2}} = 20 - 25^{\frac{1}{2}} = 15$

(10) علم الأحياء: يستخدم التعبير  $0.036 m^{\frac{2}{3}}$  لدراسة السوائل. أوجد قيمة التعبير، إذا كان  $m = 46 \times 10^4$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1)  $16^{-\frac{3}{4}} = 32^{\frac{3}{4}}$

(a) (b)

(2)  $x^{\frac{1}{2}} : x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{3}{4}}$

(a) (b)

(3)  $x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}$

(a) (b)

(4)  $\sqrt[4]{\sqrt{x}} = x$ ,  $x > 0$

(a) (b)

(5)  $\sqrt{32} \times \sqrt[3]{16^{-1}} = 4$

(a) (b)

في البود (12-6)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا كان  $n > 0$ ، فإن التعبير الذي لا يكافئ  $\sqrt[4]{4n^2}$  هو:

(a)  $(4n^2)^{\frac{1}{2}}$

(b)  $2n^{\frac{1}{2}}$

(c)  $(2n)^{\frac{1}{2}}$

(d)  $\sqrt{2n}$

(7) إذا كان  $y > 0$ ، فإن التعبير  $\frac{56^{\frac{1}{3}} \times y^{\frac{2}{3}}}{(7y^2)^{\frac{1}{3}}}$  يساوي:

(a)  $14y$

(b)  $\frac{1}{7}y$

(c)  $2y$

(d)  $\frac{8}{7}y$

(8)  $(\sqrt[4]{x^{-3}y^4})^{-2} =$

(a)  $|x^{-1}|y^2$

(b)  $|x|y^{-2}$

(c)  $xy^2$

(d)  $x^{-2}y^2$

(9)  $\sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{5}} \times \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}} =$

(a)  $5^{\frac{1}{3}}$

(b)  $\frac{1}{5}$

(c)  $5^{\frac{2}{3}}$

(d)  $5^{\frac{5}{3}}$

13

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{256} &= \sqrt{(256)^{\frac{1}{2}}} \\ &= (256)^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \\ &= 256^{\frac{1}{4}} \\ &= (2^8)^{\frac{1}{4}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{256} &= 2^{\frac{8}{4}} \\ &= 2^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt[4]{256} = 2$$

$$\begin{aligned} d \quad ((\sqrt{x^3 y^3})^{\frac{1}{2}})^{-1} &= \left( (x^{\frac{3}{2}} y^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \\ &= \left( (xy)^{\frac{3}{2}} \right)^{-1} \\ &= \left( (xy)^{\frac{3}{2}} \right)^{-1} \\ &= (xy)^{-\frac{3}{2}} \\ &= (xy)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{(xy)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{xy}} \\ &= \frac{\sqrt{xy}}{xy} \end{aligned}$$

طريقة أخرى

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

$$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$$

اضرب

حلل 256 إلى عوامله

$$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$$

طريقة ثانية

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n \cdot m]{x}$$

حلل 256 إلى عوامله الأولية

$$\sqrt[n]{x^m} = |x| \text{ (عدد زوجي } n \text{)}$$

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m \text{ الخاصية:}$$

$$(b^m)^n = b^{m \cdot n} \text{ الخاصية:}$$

بسّط

ضرب البسط والمقام بعراق المقام

حاول أن تحل

بسط كلًا من التعبيرات الجذرية التالية:

a  $\sqrt[3]{9} \times \sqrt[5]{27}$

b  $\frac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{3}}$

c  $\sqrt[3]{729}$

d  $(\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[3]{y})^{-12}$ ,  $x, y \in \mathbb{Q}^+$

28

5 (a)  $5^{-3} = \frac{1}{5^3}$

(b) 16

(c)  $\frac{4}{9} \times \frac{x^7}{y^9}$

6 (a)  $\sqrt[5]{3^2} \times \sqrt[5]{3^3} = 3$

(b)  $\sqrt[3]{81} = 3 \sqrt[3]{3}$

(c)  $3 \times \sqrt[2]{729} = \sqrt[6]{729} = 3$

(d)  $x^{-\frac{12}{4}} \times (y^{\frac{3}{4}})^{-12} = x^{-3} \times y^{-9} = \frac{1}{x^3 y^9}$

7  $d = \sqrt{\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 2 \times 10^{30} \times 5.98 \times 10^{24}}{53.2 \times 10^{23}}}$

المسافة بين الأرض والشمس:

$d \approx 1.225 \times 10^7 \text{ km}$  أو  $d \approx 1.225 \times 10^{10} \text{ m}$



مثال (7)

تعطى قوة الجاذبية بين جسمين بالعلاقة:

$$g = 6.67 \times (10)^{-11} \cdot \frac{k_1 \cdot k_2}{d^2}$$

التي فيها  $k_1, k_2$  كتلي الجسمين بالكيلوغرام (kg)،  $d$  المسافة بين الجسمين بالمتر (m)،  $g$  قوة الجاذبية بالنيوتن (N).

أوجد المسافة بين الأرض والقمر إذا كانت كتلة الأرض تساوي تقريباً

$5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$ ، كتلة القمر تساوي 1.23% من كتلة الأرض وقوة الجاذبية بينهما

هي  $183 \times 10^{19} \text{ N}$  تقريباً.

الحل:

$$k_1 = (5.98)(10^{24}) \text{ kg}, \quad k_2 = (1.23\%)(5.98)(10^{24}) \text{ kg}$$

$$g = 6.67(10)^{-11} \cdot \frac{k_1 \cdot k_2}{d^2}$$

$$\therefore d^2 = 6.67(10)^{-11} \cdot \frac{k_1 \cdot k_2}{g}$$

$$d = \sqrt{\frac{6.67(10)^{-11} \cdot k_1 \cdot k_2}{g}}$$

$$= \sqrt{\frac{6.67(10)^{-11} (5.98)(10^{24}) (0.0123)(5.98)(10^{24})}{183 \times 10^{19}}}$$

$$d = \sqrt{\frac{6.67(5.98)^2 (0.0123)(10^{38})}{183}}$$

$$= 126616735.4 \text{ m}$$

تبلغ المسافة بين الأرض والقمر 126 616 735.4 m تقريباً.

حاول أن تحل

7 باستخدام العلاقة من مثال (7) أوجد المسافة بين الأرض والشمس إذا كانت كتلة الشمس تساوي  $2(10^{30}) \text{ kg}$  وقوة الجاذبية بينهما  $53.2(10^{23}) \text{ N}$

29

# 3-1: حل المعادلات

## 1 الأهداف

- يحل معادلات جذرية.
- يحل معادلات أسية.

## 2 المفردات والمفاهيم الجديدة

معادلة جذرية - معادلة أسية - كثيرة حدود من الدرجة الثانية.

## 3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة - جهاز إسقاط (Data Show) - حاسوب.

## 4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) اكتب بالصورة الأسية ما يلي:  $\sqrt[6]{x^5}$ ,  $\sqrt[7]{x^3}$

(b) اكتب بالصورة الجذرية ما يلي:

$$x^{\frac{6}{5}}, x^{\frac{3}{5}}, x^{\frac{3}{4}}$$

(c) حل المعادلات الآتية:

$$5x - 2 = 0$$

$$x^2 - 3x = 28$$

$$x^2 - 1 = 3$$

(d) أكمل الفراغ في كل مما يلي:

$$7^{-2} = \frac{\square}{\square}$$

$$(-2)^0 = \square$$

$$\frac{4}{9} = \left( \frac{\square}{\square} \right)^2$$

## حل المعادلات Solving Equations

1-3

### دعنا نفكر ونتناقش

- ليكن  $a = \sqrt{7+4\sqrt{3}}$ .  
a احسب:  $(2+\sqrt{3})^2$   
b استنتج قيمة مبسطة لـ  $a$   
c أوجد مجموعة حل المعادلة:  $x^2 = 7+4\sqrt{3}$
- مستعيناً بما قمت به في الفقرة 1 أوجد مجموعة حل المعادلة:  $y^2 = 7-4\sqrt{3}$
- احسب  $(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2$ .  
a احسب  $(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2$   
b حل المعادلة:  $x^2 = 12-2\sqrt{35}$

### Radical Equations

### أولاً: المعادلات الجذرية

المعادلة الجذرية هي معادلة يكون أس المتغير فيها عدداً نسبياً (ليس عدداً صحيحاً) أو يتضمن المجذور متغيراً.

- فمثلاً:
- معادلة جذرية:  $3 + \sqrt{x} = 10$
  - معادلة جذرية:  $(x-2)^{\frac{1}{2}} = 1$
  - ليست معادلة جذرية:  $\sqrt{3} + x = 1$

### تعلم

لحل معادلة جذرية اتبع الخطوات التالية:

الخطوة الأولى: أفضل الجذر إلى أحد طرفي المعادلة.

الخطوة الثانية: حدد شرط الحل

- إذا كان دليل الجذر عدداً زوجياً فإن قيمة ما تحت الجذر أكبر من أو يساوي الصفر وكلاً من طرفي المعادلة أكبر من أو يساوي الصفر أيضاً.

- إذا كان دليل الجذر عدداً فردياً فإن قيمة ما تحت الجذر ينتمي إلى  $\mathbb{R}$ .

الخطوة الثالثة: أرفع طرفي المعادلة إلى أس مناسب يحذف الجذر.

الخطوة الرابعة: تأكد من أن الحل يحقق الشرط.

30

### مثال (1)

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية:  $6 + \sqrt{x-1} = 3$  a  $2 + \sqrt{3x-2} = 6$  b

الحل:

$$2 + \sqrt{3x-2} = 6$$

$$\sqrt{3x-2} = 4$$

∴ دليل الجذر عدداً زوجياً في  $\sqrt{3x-2}$   
حدد شرط الحل

$$3x - 2 \geq 0$$

$$3x \geq 2 \Rightarrow x \geq \frac{2}{3}$$

$$x \in \left[ \frac{2}{3}, \infty \right)$$

$$(\sqrt{3x-2})^2 = 4^2$$

$$3x - 2 = 16$$

$$x = 6$$

$$\therefore 6 \in \left[ \frac{2}{3}, \infty \right)$$

ارفع إلى القوة 2 طرفي المعادلة

$$(\sqrt{x})^2 = x$$

بسّط

تأكد من تحقق الشرط

∴ مجموعة الحل هي {6}

أفضل الجذر

$$6 + \sqrt{x-1} = 3$$

$$\sqrt{x-1} = -3$$

مجموعة الحل =  $\emptyset$  لأن  $\sqrt{x-1}$  موجب،  $-3$  سالب.

### حاول أن تحل

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية:  $\sqrt{x-2} + 9 = 0$  a  $\sqrt{5x+4} - 7 = 0$  b

لاحظ أن إيجاد شرط الحل يحدد مجموعة التعويض والتي تشمل جميع القيم التي تجعل الجملة المفتوحة عبارة (صحيحة أو خاطئة) ومجموعة الحل تكون مجموعة جزئية من مجموعة التعويض وهي تشمل جميع القيم التي تجعل الجملة المفتوحة عبارة صحيحة.

يمكن حل معادلة على صورة  $x^{\frac{m}{n}} = b$  برفع طرفي المعادلة إلى الأس  $\frac{n}{m}$  المعكوس الضربي لـ  $\frac{m}{n}$ .

إذا كان  $m$  عدداً زوجياً فإن:  $(x^{\frac{m}{n}})^{\frac{n}{m}} = |x|$

إذا كان  $m$  عدداً فردياً فإن:  $(x^{\frac{m}{n}})^{\frac{n}{m}} = x$

ملاحظة: مقام الأس النسبي هو دليل الجذر.

31

## 5 التدريس

يعتبر هذا الدرس خطوة أولى في رحلة طويلة أمام الطلاب، حيث يقدم مسائل بسيطة لحل معادلات تتضمن جذورًا ومعادلات تتضمن أسسًا. والمهم أن يفهم الطلاب أن المعادلات الجذرية يمكن أن يكون لها حلول دخيلة. شدّد للطلاب على هذه الفكرة وذلك من خلال استخدام أمثلة بديلة متعددة.

أخبرهم أن الحلول الدخيلة تكون عادة ناتجة عن المعادلات التي تتضمن جذورًا حيث الدليل هو عدد زوجي، أما في المعادلات التي تتضمن جذورًا حيث الدليل هو عدد فردي فلا نتحدث عن حلول دخيلة.

### في المثال (1)

حيث المعادلة تتضمن جذورًا تربيعيًا يوجد حل واحد مقبول في المعادلة بعد أن تمّ عزل الجذر التربيعي وتحديد شرط الحل، ثم رفع المعادلة إلى التربيع. أعطهم مثالاً حسيًا عن هذه الإشكالية، حيث إن:  $3 \neq -3$  ولكن  $(-3)^2 = (3)^2$ .

### في المثال (2)

إذا كانت المعادلة تتضمن أسًا، بحيث يكون عددًا نسبيًا على صورة  $\frac{m}{n}$  فمن الضروري رفع طرفي المعادلة إلى الأس  $\frac{n}{m}$  بعد عزل تعبير الأس. أعط أمثلة بديلة لحل معادلات تتضمن أسًا عددًا نسبيًا على الصورة  $\frac{m}{n}$  في الحالتين:

- أولاً،  $m$  عدد زوجي.
- ثانيًا،  $m$  عدد فردي.


### في المثال (3)

من المهم أولاً تحديد قيمة المتغير في تعبير المجذور، إذا كان دليل الجذر عددًا زوجيًا وذلك كي يكون لدينا عددًا حقيقيًا، ويمكن التحقق من الإجابات التي نحصل عليها للتأكد من انتمائه لمجموعة التعويض (شرط الحل). أعط أمثلة بديلة للتأكد من فهم الطلاب لهذه الفكرة عن الحلول الدخيلة في المعادلة. فمثلاً المعادلة:

$\sqrt{x+5} = x-1$  التي شرط حلها  $x \in [1, \infty)$  يوجد لها حلان:  $x = -1$  أو  $x = 4$ .

**مثال (2)**  
أوجد مجموعة الحل:  $2(x-2)^{\frac{2}{3}} = 50$   
الحل:  
 $2(x-2)^{\frac{2}{3}} = 50$   
 $(x-2)^{\frac{2}{3}} = 25$  اقم  
 $((x-2)^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = 25^{\frac{3}{2}}$  ارفع طرفي المعادلة إلى الأس  $\frac{3}{2}$   
 $|x-2| = \sqrt{25^3}$  إذا كان  $m$  عددًا زوجيًا  $|x| = |x|$   
 $|x-2| = \sqrt{5^6} = 125$   
 $\therefore x-2 = 125$  أو  $x-2 = -125$   $|x| = b \Rightarrow (x=b$  أو  $x=-b)$   
 $x = 127$  أو  $x = -123$   
مجموعة الحل =  $\{-123, 127\}$   
حاول أن تحل  
أوجد مجموعة الحل:  
a  $2(x+3)^{\frac{2}{3}} = 54$  b  $(1-x)^{\frac{2}{3}} - 4 = 0$

يمكن الحصول على حلول دخيلة (لا تحقق الشرط) عند رفع طرفي المعادلة إلى قوة ما.

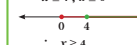
**مثال (3)**  
أوجد مجموعة الحل:  $5 + \sqrt{x-3} = x$   
الحل:  
أفضل الجذر  
 $\sqrt{x-3} + 5 = x$   
 $\sqrt{x-3} = x-5$   
تكون قيمة  $x$  مقبولة إذا حققت:  
 $x-3 \geq 0$  ,  $x-5 \geq 0$   
 $x \geq 3$  ,  $x \geq 5$   
  
 $\therefore x \geq 5$   
 $\therefore x \in [5, \infty)$

32

رفع طرفي المعادلة إلى القوة 2  
 $(\sqrt{x-3})^2 = (x-5)^2$   
 $x-3 = (x-5)^2$   $0 \leq x$  إذا كان  $(\sqrt{x})^2 = x$   
فك  
 $x-3 = x^2 - 10x + 25x$   
بسط  
 $x^2 - 11x + 28 = 0$   
حلل  
 $(x-4)(x-7) = 0$   
 $x-4 = 0$  أو  $x-7 = 0$   $a \cdot b = 0$  مكافئ لـ  $a = 0$  أو  $b = 0$   
 $x = 4$  أو  $x = 7$   
 $4 \in [5, \infty)$  ,  $7 \in [5, \infty)$   
 $\therefore$  مجموعة الحل =  $\{7\}$   
حاول أن تحل  
أوجد مجموعة الحل:  
 $\sqrt{5x-1} + 3 = x$

ملاحظة:  
 $x = 4$  هو حل دخيل  
(لا يحقق الشرط).

في بعض الحالات تحتوي المعادلة على جذرين، فيتم فصلهما بحيث يحتوي كل طرف في المعادلة على جذر.

**مثال (4)**  
أوجد مجموعة الحل لكل معادلة: a  $\sqrt{8x-2} + \sqrt{4x-16} = 0$  b  $\sqrt{x} + \sqrt{2x-4} = 0$   
الحل:  
اكتب المعادلة  
أفضل كل جذر  
 $\sqrt{8x-2} + \sqrt{4x-16} = 0$   
 $\sqrt{8x-2} = -\sqrt{4x-16}$   
تكون قيمة  $x$  مقبولة إذا حققت:  
 $4x-16 \geq 0$  ,  $8x \geq 0$   
 $x \geq 4$  ,  $x \geq 0$   
  
 $\therefore x \geq 4$   
 $\therefore x \in [4, \infty)$   
ربع طرفي المعادلة  
 $(\sqrt{8x-2})^2 = (\sqrt{4x-16})^2$   
 $8x-2 = 4(4x-16)$   $(\sqrt{x})^2 = x$  ,  $x \geq 0$   
 $8x-2 = 16x-64$   
اقسم على 4  
 $2x-16 = x-8$   
 $2x-16 = x-8$   
 $8 = [4, \infty)$   
 $\therefore$  مجموعة الحل =  $\{8\}$   
الطرف الأيسر يساوي صفرًا عندما يكون:  
 $\sqrt{x} = 0$  ,  $\sqrt{2x-4} = 0$   
ولكن:  $\sqrt{x} = 0$  ,  $x = 0$

33

ولكن  $x = -1 \in (0,1]$  غير مقبولة، لأن:

$$\sqrt{x+5} = \sqrt{-1+5} = \sqrt{4} = 2$$

$$(التعبير من جهة اليمين) \quad x - 1 = -1 - 1 = -2$$

$$-2 \neq 2$$

أما المعادلة:  $\sqrt{x+2} = 3$  فلها حل واحد هو  $x = 7$ .

### في المثال (6)

في حلول المعادلات الأسية يجب دائماً لفت انتباه الطالب إلى إيجاد معادلة لها الأساس نفسه، وعند ذلك يمكن استنتاج أن الأسس متساوية أي عندما تكون  $a^d = a^c$ ، فإن  $d = c$ .

### في المثال (7)

يمكن أيضاً وضع أمثلة بديلة أمام الطلاب للتأكد من أنهم قادرون على تحليل الأساس إلى عوامل متساوية.

### 6 الربط

يمثل المثال (5)، حالة ربط بين الأس والجذر لإيجاد إجابة عن حالة حياتية.

### 7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في كتابة أساسات متساوية لحل معادلة أسية. ساعدهم من خلال إعطائهم أمثلة متعددة عن تحليل بعض الأساسات لإيجاد المشترك في ما بينها. وقد يخطئ الطلاب أيضاً في إيجاد شرط الحل فساعدهم في إعطائهم أمثلة متعددة لإيجاد تقاطع فترات مختلفة.

### 8 التقسيم

تابع الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» للتأكد من أنهم قادرون على تخطي بعض الإشكاليات في هذا الدرس.

$\sqrt{2x-4} = 0$  ،  $2x-4 = 0$   
ومنه  $x = 2$   
أي لا توجد قيمة للمتغير  $x$  تجعل الطرف الأيسر للمعادلة صفراً.  
∴ مجموعة الحل = ∅  
حاول أن تحل

4 أوجد مجموعة الحل لكل معادلة:  
a)  $\sqrt{5x} - \sqrt{2x+9} = 0$       b)  $\sqrt{x-7} + \sqrt{3x-21} = 0$

**مثال (5)**  
تعطى العلاقة بين دورة نابض مرن (زنبرك) مهتز وكتلة الجسم المعلق به بالمعادلة:  $f = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$ ، حيث  $f$ : الدورة بالثواني (s)،  $m$  الكتلة بالكيلوجرام (kg)،  $c = 20$  (ثابت).  
أوجد كتلة جسم معلق نابض دورته  $f = 48$  الحل:  
 $f = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$   
 $\sqrt{\frac{m}{c}} = \frac{f}{2\pi}$   
 $\sqrt{\frac{m}{20}} = \frac{48}{2\pi}$   
 $\frac{m}{20} = \frac{16}{4\pi^2}$   
 $m = 8.1$   
عوض  
مرع طرفي المعادلة  
استخدم الآلة الحاسبة  
تبلغ كتلة الجسم المعلق 8.1 kg تقريباً.  
حاول أن تحل

5 تعطى العلاقة بين طول نابض مرن (زنبرك) ودورته بالمعادلة:  $f = 2\pi\sqrt{\frac{l}{10}}$ ، حيث  $f$  دورة النابض بالثواني (s)،  $l$  طول النابض بالمتري (m).  
أوجد طول نابض ساعة دورته 2 s.

**الربط بالحياة:**  
تستخدم المعادلات الأسية في العلوم الطبية لتحديد حتى مرضى متقدمة من حساب الكمية المتبقية في الجسم من هذه الجرعة بعد فترة زمنية بمعدلات أسية.  
تتمتع الكمية المتبقية بعد  $t$  ساعة من حقنة هيارين المضادة للتلطف بالمعادلة  $y = 0.63^t$

**Exponential Equations**  
**ثانياً: المعادلات الأسية**  
المعادلات:  $2^x = 32$  ،  $(-3)^x = -243$  ،  $(\frac{1}{2})^x = 5$   
تسمى معادلات أسية.  
لحل معادلة أسية يمكن استخدام الخاصية التالية:  
ليكن  $a$  عدد حقيقي حيث  $a \in \{-1, 0, 1\}$   
 $m, n$  عدنان صحيحان  
إذا كان  $a^m = a^n$ ، فإن  $m = n$

**تمرّن**  
1-3

**حل المعادلات**  
Solving Equations

**المجموعة A تمارين مقالية**

1) حل كلًا من المعادلات التالية:  
(a)  $3\sqrt{x+3} = 15$       (b)  $\sqrt{x+3} = 5$       (c)  $(x+5)^2 = 4$       (d)  $(x+1)^2 - 2 = 25$   
(e)  $\sqrt{3-4x} - 2 = 0$       (f)  $2(2x+4)^2 = 16$       (g)  $(5-3x)^2 + 4 = 3$

2) (a) الحجم: يتسع خزّان كروي الشكل لـ  $424.75 \text{ m}^3$  أوجد طول قطر هذا الخزّان. (مساعدة: حجم الكرة =  $\frac{4}{3}\pi r^3$ )  
(b) ترازو حياتي: تقاس الكمية القفوي  $K$  لتدفق المياه في أنبوب، بالقانون:  $K = m \times V$ ، حيث  $m$  هي مساحة المقطع العرضي للأنبوب،  $V$  هي السرعة المتجهة للمياه. أوجد قطر الأنبوب الذي يسمح بتدفق  $1.48 \text{ m}^3/\text{min}$  بسرعة  $183 \text{ m/min}$

3) حل كلًا من المعادلات التالية:  
(a)  $\sqrt{11x+3} - 2x = 0$       (b)  $\sqrt{3x+13} - 5 = x$       (c)  $\sqrt{-3x-5} = x+3$   
(d)  $(x+3)^2 - 1 = x$       (e)  $x+8 = (x^2+16)^{\frac{1}{2}}$       (f)  $\sqrt{10x-2} - \sqrt{5x-25} = 0$   
(g)  $(3x+2)^2 - (2x+7)^2 = 0$       (h)  $(x-9)^{\frac{1}{2}} + 1 = x^{\frac{1}{2}}$       (i)  $(2x+3)^2 - 3 = 5$   
(j)  $2(x-1)^{\frac{1}{2}} + 4 = 36$       (k)  $(3x+2)^{\frac{1}{2}} = 8(3x+2)^{\frac{1}{2}}$       (l)  $(2x+1)^{\frac{1}{2}} = (3x+2)^{\frac{1}{2}}$   
(m)  $(2x-1)^{\frac{1}{2}} = (x+1)^{\frac{1}{2}}$  (6) (مساعدة: رفع طرفي المعادلة إلى القوة 6)      (n)  $(x+5)^{\frac{1}{2}} - (5-2x)^{\frac{1}{2}} = 0$

4) الهندسة: قانون مساحة مضلع سداسي منتظم هو:  $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$ ، حيث  $x$  هي طول الضلع.  
(a) أوجد طول الضلع  $x$  بدلالة المساحة  $S$   
(b) أراد أحد الأشخاص صنع صندوق قاعدته مضلع سداسي منتظم ومساحته تساوي  $200 \text{ cm}^2$  أوجد طول الضلع.  
(c) أوجد البعد بين ضلعين متوازيين.  
(5) صندوق مكعب الشكل سعته  $150 \text{ m}^3$  أوجد طول ضلعه.  
(6)  $x, y$  هما عدنان حقيقيان.  
(a) أوجد الناتج:  $(x^2 + xy + y^2)(x-y)$   
(b) باستخدام الصيغة السابقة، اكتب الكسر  $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$  بحيث يكون المقام عدداً نسبياً.

## اختبار سريع

أوجد مجموعة الحل لكل معادلة مما يلي:

(a)  $\sqrt[3]{5x-7} = 2$

$x = 3$

(b)  $\sqrt{-4x+5} = x+4, (-4 \leq x \leq \frac{5}{4})$

غير مقبول  $x = -1$  أو  $x = -11$

(c)  $\sqrt{x+5} = x-1, x \geq 1$

مقبول  $x = 4$  أو غير مقبول  $x = -1$

(d)  $5^{-x^2+4x} = 125$

$x = 1$  أو  $x = 3$

## 9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

- 1 (a)  $7+4\sqrt{3}$   
 (b)  $2+\sqrt{3}$   
 (c)  $\pm(2+\sqrt{3})$

- 2  $y = \pm(2-\sqrt{3})$   
 3 (a)  $12-2\sqrt{35}$   
 (b)  $\pm(\sqrt{7}-\sqrt{5})$

«حاول أن تحل»

- 1 (a)  $x=9$   
 (b)  $x \in \phi$   
 2 (a)  $x=6$   
 (b)  $x=-31$  أو  $x=33$   
 3  $\left. \begin{array}{l} 5x-1 \geq 0 ; x \geq \frac{1}{5} \\ x-3 \geq 0 ; x \geq 3 \end{array} \right\} \Rightarrow x \geq 3$

الحلول: غير مقبول  $x = 1$

مقبول  $x = 10$

- 4 (a)  $x=3$

(b)  $x=7$

تم استثناء الحالات التي يكون فيها  $a$  مساوياً لأي من الأعداد  $-1, 0, 1$ .  
 إليك أمثلة توضيحية لهذه الاستثناءات:  
 $17 \neq 18$  ولكن  $17 = 1^{18}$   
 $3 \neq 13$  ولكن  $(-1)^3 = (-1)^{13}$   
 $3 \neq 4$  ولكن  $0^4 = 0^3$

### مثال (6)

أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:

a  $2^x = 64$

b  $(\frac{1}{2})^x = 0.5$

c  $(\frac{3}{4})^x = (\frac{64}{27})$

الحل:

a  $2^x = 64$   
 $2^x = 2^6$   
 $x = 6$

حل 64 إلى عرامله

∴ مجموعة الحل = {6}

b  $(\frac{1}{2})^x = -0.5$   
 $(\frac{1}{2})^x = -\frac{1}{2}$   
 $(\frac{1}{2})^x = (-\frac{1}{2})^1$   
 $\therefore x = 1$

$-0.5 = -\frac{1}{2}$

إذا كان  $a^n = a^m$ , فإن  $n = m$

∴ مجموعة الحل = {1}

c  $(\frac{3}{4})^x = (\frac{64}{27})$   
 $(\frac{3}{4})^x = \frac{4^3}{3^3}$   
 $(\frac{3}{4})^x = (\frac{4}{3})^3$   
 $(\frac{3}{4})^x = (\frac{3}{4})^{-3}$   
 $\therefore x = -3$

$4^3 = 64, 3^3 = 27$

$(\frac{x}{y})^n = (\frac{x}{y})^m, y \neq 0$

$(\frac{x}{y})^n = (\frac{x}{y})^m, x \neq 0, y \neq 0$

∴ مجموعة الحل = {-3}

حاول أن تحل

a  $3^x = 243$

b  $(\frac{1}{4})^x = \frac{1}{128}$

c  $(\frac{2}{3})^x = \frac{81}{16}$

يمكن أن يكون الأس كثيرة حدود.

(7) حل كلاً من المعادلات الأسية التالية:

(a)  $5^{2x-3} = 125$

(b)  $3^{x+1} = 1$

(c)  $3^{x^2+5} = 3^9$

(d)  $3^{x^2-5x} = \frac{1}{9}$

(e)  $4^x = 2^x$

(f)  $(\frac{1}{2})^x = 0.25$

(g)  $5^x = 125\sqrt{5}$

(h)  $5^{x^2-3x} = 1$

(i)  $(3^x - 27)(2^x - 1) = 0$

(j)  $(\frac{2}{5})^{x-1} = (\frac{125}{8})^x$

### المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة:

(a) (b)

(1) مجموعة حل  $7^{3-x} = 1$  هي {3}

(a) (b)

(2) مجموعة حل  $\sqrt{x-1} = \sqrt{1-x}$  هي {0}

(a) (b)

(3) إذا كان  $x = 3\sqrt{2}$  فإن  $\sqrt[3]{9+x^2} = 3$

(a) (b)

(4)  $x = -1$  حل للمعادلة  $2^{x^2-4} = \frac{1}{32}$

(a) (b)

(5) مجموعة حل  $25^{x^2+\frac{1}{2}} = 5^{1-2x}$  هي  $\mathbb{R}^-$

(a) (b)

في التمارين (6-10)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

(6) مجموعة حل  $(\sqrt{x^{20}})^{\frac{1}{5}} - x^2 = 0$  هي:

(a) {0}

(b)  $\mathbb{R}^+$

(c)  $\mathbb{R}^-$

(d)  $\mathbb{R}$

(7) مجموعة حل  $\sqrt[3]{x-2} = \sqrt{x-2}$  هي:

(a) {2}

(b) {1,2}

(c) {1,2,3}

(d) {2,3}

(8) مجموعة حل  $\sqrt[3]{2x^2+2} = \sqrt[3]{3-x}$  هي:

(a)  $\{-1, \frac{1}{2}\}$

(b)  $\{\frac{1}{2}\}$

(c)  $\{-1, -\frac{1}{2}\}$

(d)  $\{1, \frac{1}{2}\}$

(9) مجموعة حل  $x^2 = |x|$  هي:

(a)  $\{-1, 0, 1\}$

(b)  $\{0, 1\}$

(c) {0}

(d) {1}

(10) إذا كان  $(\frac{1}{9})^{x+1} = 3^{2-x}$  فإن  $x$  تساوي:

(a) -2

(b) 2

(c) -4

(d) 4

**مثال (7)**  
أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:

**أ**  $3^{x^2-1} = 27$       **ب**  $7^{x^2-3x} = \frac{1}{49}$       **ج**  $6^{2x-8} = 1$

**الحل:**

**أ**  $3^{x^2-1} = 27$   
 $3^{x^2-1} = 3^3$   
 $x^2 - 1 = 3$   
 $x^2 = 4$   
 $x = 2$  أو  $x = -2$

**ب**  $7^{x^2-3x} = \frac{1}{49}$   
 $7^{x^2-3x} = \frac{1}{7^2}$   
 $7^{x^2-3x} = 7^{-2}$   
 $x^2 - 3x + 2 = 0$   
 $(x-1)(x-2) = 0$   
 $x-1 = 0$  أو  $x-2 = 0$   
 $\therefore x = 1$  أو  $x = 2$

**ج**  $6^{2x-8} = 1$   
 $6^{2x-8} = 6^0$   
 $2x - 8 = 0$   
 $x = 4$

**مجموعة الحل = {2, -2}**

**مجموعة الحل = {1, 2}**

**مجموعة الحل = {4}**

**تذكر:**  
إذا كان  $ab = 0$  فإن  $b = 0$  أو  $a = 0$

**تذكر:**  
 $a^n = 1$  حيث  $a \neq 0$

**حل كل معادلة من المعادلات التالية:**

**أ**  $5^{x^2-4} = 1$       **ب**  $3^{x^2+5x} = \frac{1}{81}$       **ج**  $2^{x^2-4} = 32$

**حاول أن تحل**

36

5  $l \approx 1 \text{ m}$

6 (a)  $3^x = 3^5 ; x = 5$

(b)  $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{128}, \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{2}\right)^7$

$2x = 7, x = \frac{7}{2} = 3.5$

(c)  $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} ; x = -4$

7 (a)  $5^{x^2-4} = 5^0 ; x^2 - 4 = 0 ; x = \pm 2$

(b)  $x^2 + 5x + 4 = 0 , x = -1$  أو  $x = -4$

(c)  $2^{x^2-4} = 2^5 ; x^2 = 9 , x = \pm 3$



# المرشد لحل المسائل

إجابة «مسألة إضافية»

طول قطر الأسطوانة:

$$d = \sqrt{x^2 + x^2}$$

$$= x\sqrt{2}$$

طول نصف قطر الأسطوانة:

$$r = \frac{x\sqrt{2}}{2}$$

حجم الأسطوانة:

$$V_1 = \pi \left( \frac{x\sqrt{2}}{2} \right)^2 \times x$$

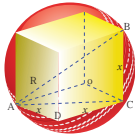
$$V_1 = \frac{\pi x^3}{2}$$

حجم المكعب:

$$V_2 = x^3$$

$$\frac{1.57}{1} \approx \frac{\pi}{2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\text{حجم الأسطوانة}}{\text{حجم المكعب}}$$

## المرشد لحل المسائل



مكعب طول ضلعه  $x$  محاط بكرة كما في الصورة المقابلة. أوجد نسبة حجم الكرة إلى حجم المكعب.

كيف تفكر؟

إستراتيجية الحل:

إيجاد حجم المكعب، إيجاد حجم الكرة، ثم إيجاد نسبة حجم الكرة إلى حجم المكعب.

الخطوة الأولى: حجم المكعب.

في البداية علينا إيجاد حجم المكعب بدلالة طول ضلعه  $x$ .

حجم المكعب =  $x^3$

الخطوة الثانية: حجم الكرة.

إيجاد نصف قطر الكرة.

$AB$  هو قطر للكرة.

$AB$  هو قطر للمكعب.

$CB = x$ ,  $AC = g$ ، حيث  $C$  قائم الزاوية  $ABC$  قائم الزاوية  $C$  حيث،  $CB = x$ ,  $AC = g$

إيجاد  $AB$  سنبداً بإيجاد  $AC$ .

$ACD$  مثلث قائم الزاوية  $D$ .

$$(AC)^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$$

$$\therefore AC = x\sqrt{2}$$

إيجاد  $AB$  نستخدم المثلث  $ABC$

$ABC$  مثلث قائم الزاوية  $C$

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$$

$$(AB)^2 = 2x^2 + x^2 = 3x^2$$

$$\therefore AB = x\sqrt{3}$$

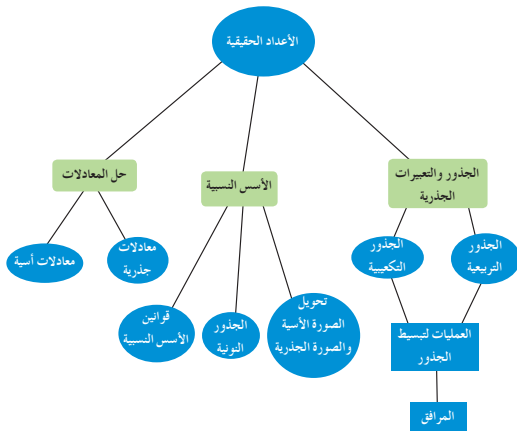
إيجاد طول نصف القطر.

$$R = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

نظرية فيثاغورث

نظرية فيثاغورث

## مخطط تنظيمي للوحدة الأولى



د إيجاد حجم الكرة، حجم الكرة

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\pi r^3 &= \frac{4}{3}(3.14)\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^3 \\ &= \frac{4(3.14)(3x^3\sqrt{3})}{(8)(3)} \\ &= 1.57\sqrt{3}x^3 \end{aligned}$$

الخطوة الثالثة: احسب نسبة حجم الكرة إلى حجم المكعب:

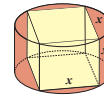
$$\frac{\text{حجم الكرة}}{\text{حجم المكعب}} = \frac{(1.57)\sqrt{3}x^3}{x^3} = \frac{2.72}{1}$$

∴ حجم الكرة، حجم المكعب حوالي 1 ، 2.72

مساعدة رياضية  
حجم الأسطوانة =  $\pi r^2 h$   
حيث  $h$  ارتفاع الأسطوانة  
 $r$  = طول نصف القطر للأسطوانة.

مسألة إضافية

مكعب طول ضلعه  $x$  محاط بأسطوانة كما في الصورة أدناه. أوجد نسبة حجم الأسطوانة إلى حجم المكعب.



• إذا كان  $\sqrt{x}, \sqrt{y}$  عددين حقيقيين فإن:

- $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}$
- $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$   $y \neq 0$
- $\sqrt[n]{\sqrt{x}} = \sqrt[n^2]{x}$

• المعادلة الجذرية معادلة أس المتغير فيها عدد نسبي أو يتضمن المجهول المتغير.

• إذا كان  $m$  عدداً زوجياً فإن:  $(x^{\frac{m}{2}})^2 = |x|$

• إذا كان  $m$  عدداً فردياً فإن:  $(x^{\frac{m}{2}})^2 = x$

•  $m, n \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R}, a \in \{-1, 0, 1\}, a^m = a^n \implies m = n$

### ملخص

- $\sqrt{x^2} = |x|, (\sqrt{x})^2 = x$
- $A^2 = x, x \geq 0 \implies A = \pm \sqrt{x}$
- $(\forall m, n \in \mathbb{Z}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \neq 0) \begin{cases} (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n & \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \\ a^m \cdot a^n = a^{m+n} & b^{-n} = \frac{1}{b^n}, b \neq 0 \\ (a^m)^n = a^{m \cdot n} & \frac{a^m}{b^m} = b^{n-m}, b \neq 0 \end{cases}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, (\sqrt[3]{x})^3 = \sqrt[3]{x^3} = x$
- $\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$
- $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$
- $\sqrt[3]{x \cdot y} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y \neq 0$

• إذا كان  $a, b$  عددين نسبيين موجبين فإن:

$\sqrt{a}$  هو مرافق  $\sqrt{a}$

$a - \sqrt{b}$  هو مرافق  $a + \sqrt{b}$

المجذور ← دليل الجذر

• إذا كان الجذر التوحيدي لعدد  $x$  هو عدداً حقيقياً،  $m$  عدداً صحيحاً،  $n$  عدداً طبيعياً  $n > 1$  فإن:

- $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$
- $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$

• إذا كان  $n$  عدداً زوجياً  $\sqrt[n]{x^2} = \begin{cases} |x| \\ x \end{cases}$

• إذا كان  $n$  عدداً فردياً  $\sqrt[n]{x^2} = x$

(7) تحليل الخطأ: في سبيل تبسيط الكسر  $\frac{1}{(1-\sqrt{2})^2}$  كتب أحد الطلاب ما يلي:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-\sqrt{2})^2} &= (1-\sqrt{2})^2 \\ &= 1^2 - (\sqrt{2})^2 \\ &= 1 - \frac{1}{(\sqrt{2})^2} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ما الخطأ الذي ارتكبه الطالب؟

(8) حل كلاً من المعادلات التالية:

- (a)  $5\sqrt{x} + 7 = 8$       (b)  $\sqrt{x+2} = x$       (c)  $\sqrt{4x-23} - 3 = 2$   
 (d)  $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+11} = 0$       (e)  $\sqrt{x} - \sqrt{x-5} = 2$  (مساعدة: تريع طرفي المعادلة مرتين متتاليتين)  
 (f)  $\sqrt{3x-9} = \sqrt{2x+4}$

(9) الفيزياء: السرعة  $V$  لجسم ما أسقط عن سطح مبنى عالٍ معطاة بالقانون:  $V = 8\sqrt{m}$ ، حيث  $m$  هي ارتفاع المبنى. أوجد الارتفاع  $m$  بدلالة السرعة  $V$ .

(10) إذا كان  $x = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$ ، فأوجد قيمة  $x^2(3-x)$ .

(11) حل كلاً من المعادلات التالية:

- (a)  $2^{x^2} = 512$       (b)  $4^{x^2-x} = 16$

### اختبار الوحدة الأولى

(1) بسّط كلاً من التعبيرات الجذرية التالية:

- (a)  $\sqrt{121x^{80}}$       (b)  $\sqrt[3]{-64y^{81}}$       (c)  $\sqrt[5]{32y^{25}}$   
 (d)  $\sqrt{0.0081x^{60}}$       (e)  $\sqrt{16x^{36}y^{96}}$       (f)  $\sqrt{8(\sqrt{24} + 3\sqrt{8})}$   
 (g)  $2\sqrt{5x^3} \times 3\sqrt{28x^3y^2}$ , ( $x \geq 0$ , حيث  $y$  عدد حقيقي)      (h)  $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$   
 (i)  $\sqrt[3]{2x^2} \times \sqrt[3]{4x}$

(2) اكتب كل كسر مما يلي بحيث يكون مقامه عدداً نسبياً:

- (a)  $\frac{1}{(\sqrt{5} + 2\sqrt{3})(\sqrt{5} - 2\sqrt{3})}$       (b)  $\frac{5}{4\sqrt{7} + 5}$   
 (c)  $\frac{2 + \sqrt{10}}{2 - 3\sqrt{5}}$       (d)  $\frac{-2 + \sqrt{8}}{-3 - \sqrt{2}}$

(3) بسّط كلاً من التعبيرات التالية:

- (a)  $64^{\frac{3}{2}}$       (b)  $25^{1.5}$       (c)  $6^{\frac{1}{2}} \times 12^{\frac{1}{2}}$   
 (d)  $81^{-0.25}$       (e)  $\sqrt{8} \times \sqrt{2} - 2\sqrt{75} + 5\sqrt{12}$       (f)  $\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$

(4) ليكن  $x$  العدد الحقيقي،  $x = \sqrt{6-2\sqrt{5}} - \sqrt{6+2\sqrt{5}}$

(a) احسب  $x^2$

(b) أثبت أن قيمة  $x$  تساوي -2

(5) اكتب كل تعبير مما يلي بالصورة الجذرية:

- (a)  $x^{\frac{4}{9}}$       (b)  $y^{-\frac{2}{9}}, y \neq 0$       (c)  $(\sqrt[3]{x})^2$   
 (d)  $\sqrt[3]{\sqrt[4]{64}}$       (e)  $2\sqrt{3} \times 5\sqrt[4]{3}$       (f)  $3\sqrt{x} \times 2\sqrt[3]{x}, x \geq 0$   
 (g)  $2\sqrt[3]{3} \div \sqrt[4]{3}$       (h)  $5\sqrt{10} \times 2\sqrt[4]{10} \times \sqrt[3]{10}$       (i)  $\sqrt{2} + 3\sqrt[4]{8}$

(6) بسّط كلاً من التعبيرات التالية:

- (a)  $(8^{-3}y^{-6})^{\frac{2}{3}}$       (b)  $\left(\frac{16x^{14}}{81y^{18}}\right)^{\frac{1}{2}}, y \neq 0$   
 (c)  $\left((x^{\frac{1}{2}})^2\right)^{\frac{1}{3}}, x \neq 0$       (d)  $\frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{8}} \cdot y^{\frac{1}{4}}}, x \neq 0, y \neq 0$

تمارين إرائية

(1) بسط كلاً مما يلي دون استخدام الآلة الحاسبة:

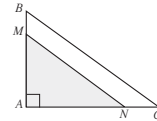
- (a)  $\sqrt[3]{-343}$  (b)  $\sqrt[4]{810000}$  (c)  $(\sqrt[4]{\sqrt{3}})^8$   
 (d)  $-\sqrt[4]{6561}$  (e)  $\sqrt[5]{-0.00001}$  (f)  $\sqrt{9(\sqrt{3}-2)^2} - \sqrt{4(1-\sqrt{3})^2}$   
 (g)  $\frac{27^{-2} \times 45^{-3}}{36^{-2} \times 45^4}$  (h)  $\frac{12^2 \times 18^{-2}}{6^{-2} \times 3^{-5}}$

أوجد ناتج ما يلي:

- (a)  $\sqrt[4]{(\sqrt[3]{4-4})^4} - \sqrt[3]{-8(\sqrt[3]{2+1})^6}$  (b)  $(\sqrt[5]{\sqrt{32+3}})(3 - \sqrt[6]{8})$  (c)  $\frac{\sqrt[3]{13^2} \times \sqrt{13}}{\sqrt[3]{13^{\frac{1}{2}}}}$

(3) بسط كلاً من التعابير التالية:

- (a)  $\left(\frac{8x^9y^3}{27x^2y^{12}}\right)^{\frac{2}{3}}$ ,  $x \neq 0, y \neq 0$  (b)  $(x^{\frac{3}{8}} \cdot y^{\frac{1}{4}})^{16}$ ,  $x > 0, y \geq 0$   
 (c)  $(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} - \sqrt[6]{x \cdot y})(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{6}} \cdot y^{\frac{1}{6}})$  (d)  $\frac{\sqrt[3]{x^2} \times \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^{\frac{1}{2}}}}$ ,  $x > 0$



(4) مثلث قائم الزاوية A

$$AN = 2 + \sqrt{3} \quad AM = 2\sqrt{3} - 1$$

$$\overline{MN} \parallel \overline{BC} \quad MB = 1$$

- (a) CN (b) MN أوجد:

(5) اكتب كل كسر مما يلي بحيث يكون مقامه عدداً نسبياً دون استخدام الآلة الحاسبة:

- (a)  $\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{5}}$  (b)  $\frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}$  (c)  $\frac{\frac{x}{x^2} + 1}{x^2 - 1}$ ,  $x \in \mathbb{Z}^+, x \neq 1$

(6) أوجد قيمة  $x$  ليكون العدد  $\sqrt{x} \times \sqrt{-x}$  عدداً حقيقياً.

(7) تحليل الخطأ: أوجد الخطأ  $\sqrt{16} = \sqrt{(-2) \times (-8)} = \sqrt{-2} \times \sqrt{-8} = -2 \times \sqrt{-8}$

(8) ما قيمة  $x$  إذا  $32^{0.8} \times x = 1$  ؟

(9) بسط كلاً مما يلي:

- (a)  $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{\frac{1}{a-b}}$  (b)  $\frac{2 \times 3^{2x+2} - 8 \times 3^x}{3^{2x+1} + 2 \times 3^x}$  (c)  $(x^{\frac{1}{2}} \times y^{\frac{1}{3}})^3$ ,  $x \geq 0, y \neq 0$

(10) حل كلاً من المعادلات التالية:

- (a)  $(0.01)^x = 0.000001$  (b)  $2^{\frac{1}{2}(x+3)} = \frac{2^3}{\sqrt{2}}$  (c)  $(3^{2x} - 9)(2^x - 16) = 0$   
 (d)  $(3^x)^2 - 10 \times 3^x + 9 = 0$  (مساعدة: ليكن  $3^x = y$ ) (e)  $4^{x-1} - 9 \times 2^{x-1} + 8 = 0$

# The Real Functions

## الوحدة الثانية: الدوال الحقيقية

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

1 - 2: مجال الدالة

جزء 1: العلاقة والدالة.

جزء 2: مجال الدالة.

2 - 2: الدوال التربيعية ونمذجتها

جزء 1: الدوال التربيعية.

جزء 2: نمذجة البيانات.

3 - 2: الدوال التربيعية والقطوع المكافئة

جزء 1: القطوع المكافئة التي تمثل دوال تربيعية.

جزء 2: معادلات بعض القطوع المكافئة بدلالة إحداثيات رؤوسها وخواصها.

4 - 2: مقارنة بين صورة معادلة الدالة التربيعية بدلالة إحداثيات رأس المنحنى والصورة العامة

5 - 2: المعكوسات ودوال الجذر التربيعي

جزء 1: معكوس العلاقة ومعكوس الدالة الخطية.

جزء 2: دوال الجذر التربيعي.

6 - 2: حل المتباينات

# مقدمة الوحدة

## الوحدة الثانية

### الدوال الحقيقية

#### The Real Functions

#### مشروع الوحدة: رياضة القوس والشاب

- 1 مقدمة المشروع: تستخدم رياضة القوس والشاب سلاحاً على شكل قوس وأدوات رماية وهي الأسهم. يصبوب فيها اللاعب على قرص كبير مقسم إلى خمس حلقات مختلفة الألوان بترتيب محدد من الداخل إلى الخارج: أصفر، أحمر، أزرق، أسود وأخيراً أبيض ولكل حلقة عدد من النقاط غير المتساوية تتدرج من 1 إلى 10 بحسب قربها أو بعدها عن المركز. فمثلاً إذا سقط السهم على الحلقة البيضاء، ينال الرامي نقطة واحدة (1) أما إذا سقط السهم على الحلقة الصفراء، فينال الرامي 10 نقاط.
- 2 الهدف: خلال عملك في هذه الوحدة سوف تبحث في مواضيع مثل: كيف يختار الرماة أسهمهم؟ وكيف غيرت التكنولوجيا في هذه الرياضة؟ وقد تحتاج في نهاية المشروع إلى تقديم عرض لما توصلت إليه.
- 3 الوازم: السهم: قطره الأقصى 9.3 mm، القوس: يختلف وزنه بين الإناث والرجال، أوراق رسم بياني، آلة حاسبة، أوراق ملصقات.
- 4 أسئلة حول التطبيق:
- 5 يرسم الطلاب القطع المكافئ الذي يمكن أن يمثل مسار السهم عندما يطلقه الرامي أثناء وقوفه أو أثناء جلوسه على كرسي متحرك.
- 6 يمكن تنفيذ عدة رسوم لمسارات عدد من الأسهم، ثم تحديد التشابهات والاختلاف بينها. يوضح الجدول أدناه كيف أن وزن السهم يؤثر على محور التركيز. ارسم البيانات المعطاة في الجدول على شبكة إحداثيات. هل حصلت على نموذج خطي أم على نموذج تربيعي؟



الوزن بالجرام (g)	140	150	170	175	205
المحور المركزي بالسنتيمتر (cm)	3.6	3.2	2.4	2	1.1

- 7 افترض أنك أحد الرماة وصوتت سهمًا وأنت واقفاً، فمس المسافة من الأرض إلى كتفك. افترض أنك قد أصبت هدفاً على ارتفاع 5 m عن سطح الأرض. ارسم بيانياً الشكل الممثل لمسار سهمك مستخدماً هذه البيانات. حدد هذا الشكل.
- 8 أجز مقابلة مع أحد رماة القوس والشاب في نادي الرماية الكويتي. ابحث عن بعض تقنيات هذه اللعبة وتطورها وشروط تطبيقها.
- 9 التقرير: قدم تقريراً مفصلاً عن أبحاثك ورسومك عارضة إيجابيات هذه اللعبة من حيث الدقة والتركيز والميزات الأساسية للاعب. قدم مشروعك بعرض بصري أو مسرحي قصير أو على قرص مدجج.

#### دروس الوحدة

مجال الدالة	الدوال التربيعية ونماذجها	الدوال التربيعية المقابلة	مقارنة بين صورة المعادلة التربيعية بدلالة إحداثيات رأس المنحني والصورة العامة	المكوسات ودوال المنحني التربيعي	حل المسائل
2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6

42

يتمحور محتوى هذه الوحدة حول جزء من الدوال الحقيقية، حيث سيكون التركيز على مجال التعريف ببعض الدوال الحقيقية بمداهها، وبصورة خاصة بالدوال التربيعية ورسومها البيانية لذا سنتوقف لدراسة القطع المكافئ والتعرف على بعض خصائصه.

أوضح جاليليو أن جميع المقذوفات تأخذ مساراً منتظماً على شكل قطع مكافئ (P)، وهذا يعود إلى انتظام عجلة الجاذبية للأرض. كما أن للقطوع المكافئة تطبيقات حياتية متنوعة في مرابا السيارات، ومصايبحها الأمامية، وفي الصواريخ الباليستية، وفي تركيز الإنارة والصوت في الملاعب، وفي التليسكوبات العاكسة، وأطباق الأقمار الاصطناعية، وفي أجهزة الرادارات. وسوف يرى الطالب في مرحلة لاحقة عدة معادلات للقطع المكافئ تجعل رسمه البياني مفتوحاً نحو أحد الاتجاهات المعروفة، وباختصار فإن أي دالة في  $x$ ، على أن تكون كثيرة حدود من الدرجة الثانية، نحصل منها على رسم بياني هو قطع مكافئ.

وبصورة عامة، فإن القطع المكافئ هو منحني يعرف بالمعادلة غير القابلة للاختزال كما يلي:

$$b^2 = 4ac \text{ حيث } ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

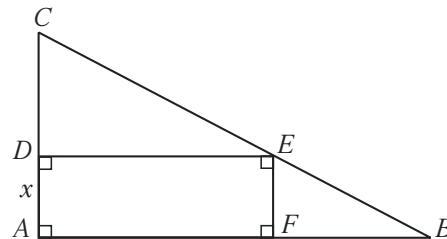
والمعروف، أن دالة القطع المكافئ أو الدالة التربيعية قد ساهمت كثيراً في إيجاد حلول لمسائل اقتصادية ومالية وحياتية تتطلب تحقيق قيم عظمى أو قيم صغرى.

#### مسألة للتفكير

$ABC$  مثلث قائم الزاوية  $\hat{A}$ .

$$AB = 8 \text{ cm} , AC = 6 \text{ cm}$$

$D$  نقطة متحركة على  $AC$ ، بحيث إن  $AD = x (0 < x < 6)$  مستطيل  $AFED$ .



(a) أثبت أن مساحة المستطيل هي دالة تربيعية  $f(x)$ ،

$$f(x) = -\frac{4}{3}x^2 + 8x \text{ بحيث إن:}$$

(b) أكمل الجدول التالي:

$x$ (cm)							
$f(x)$ cm <sup>2</sup>							

(c) ما قيمة  $x$  التي تحقق قيمة عظمى للدالة  $f(x)$ ؟

وما أبعاد المستطيل إذا ما تحققت المساحة العظمى؟

## مشروع الوحدة

حفّز الطلاب على إجراء بحث واسع ومستفيض عن رياضة القوس والنشاب ليتعرفوا أكثر على شروطها وكيفية التعامل معها. أخبرهم أن هذه الرياضة تتطلب تركيزًا وأعصابًا قوية وهادئة ودقة في التصويب.

شجعهم على تجميع نتائج مباريات القوس والنشاب التي جرت في دورات الأولمبياد العالمية.

اطلب إليهم تكوين جداول مشابهة للجدول الموجود في مشروع الوحدة، ثم كتابة دالة تربيعية باستخدام ثلاث قيم. ركّز معهم على فكرة أن الرسم البياني لن يمر بالنقاط كلها الموجودة على الجدول بل إن معظمها سيكون قريبًا منه.

### إجابات «أسئلة حول التطبيق»

- تحقق من عمل الطلاب.
- نموذج تربيعي.
- تحقق من عمل الطلاب.
- تحقق من عمل الطلاب.

### التقرير

اكتب تقريرًا يبيّن أهمية التركيز في استخدام القوس والنشاب. اعرض رسومك البيانية وحساباتك أمام زملائك في غرفة الصف، وناقشهم بالنتائج التي توصلت إليها، ثم أعد النظر ببعضها إذا كان ذلك ضروريًا.

## الوحدة الثانية

### أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعرفت العمليات الأساسية على التعابير الجذرية.
- تعرفت قوانين الأسس وكيفية استخدامها في تبسيط الجذور.
- تعلمت كيفية إيجاد حلول لمعادلات جذرية ومعادلات أسية.
- تعرفت نموذج مواقف حياتية إلى دوال خطية ومعادلات تربيعية.
- تعلمت إيجاد حلول معادلة من الدرجة الثانية بطرق متعددة.

### ماذا سوف تتعلم؟

- الدوال التربيعية واستخداماتها.
- نمذجة البيانات.
- إيجاد أوسع مجال للدوال الجذرية والنسبية والجذرية.
- إيجاد القيم الصغرى والقيم العظمى لدالة تربيعية.
- رسم القطع المكافئ بدلالة إحداثيات رأسه.
- إيجاد رأس منحى الدالة من الدالة المكتوبة في الصورة العامة.
- كتابة المعادلات التربيعية بدلالة إحداثيات الرأس وفي الصورة العامة.
- إيجاد معكوس الدوال الخطية والدوال التربيعية.
- استخدام دوال الجذر التربيعي لتبسيط مواقف حياتية.
- حل متباينات تتضمن حدوديات من الدرجة الثانية في متغير واحد أو حدوديات نسبية.

### المصطلحات الأساسية

دالة تربيعية - نمذجة بيانات - مجال - مدى - قيمة صغرى - قيمة عظمى - قطع مكافئ - رأس القطع المكافئ - الصورة العامة - معادلة بدلالة إحداثيات رأس القطع المكافئ - معكوس دالة خطية - معكوس دالة تربيعية - متباينة من الدرجة الثانية - متباينة حدوديات نسبية.

### أضف إلى معلوماتك

ارتبطت رياضة الرماية منذ بداياتها الأولى بالقوة إذ بدأت كسلاح ثم تطورت لتصبح رياضة للنهضة.

حث الإسلام المسلمين على ممارسة هذه الرياضة وجعلها في مصاف الفروسية والسباحة. حتى أن الخليفة عمر بن الخطاب قال: علموا أبناءكم السباحة والرماية وركوب الحيل. وبقيت هذه الهواية مصدرًا للكرهاء العرب وسلاحًا للدفاع عن أنفسهم.

ومن المعتاد ف عليه أن الرماية بالقوس والسهم يتطلب توازنًا وقدرة فائقة على التركيز تحت ضغط كبير وقدرة ممتازة في جذب الترتي وإطلاق السهم وذلك بسرعة تصل إلى 240 km/h تقريبًا.



لقد تمكن المنتخب الوطني الكويتي لرمية القوس والسهم من الحصول على 8 ميداليات متنوعة في البطولة العربية الثامنة لرمية القوس والسهم والتي أقيمت في مدينة، سرت، الليبية لذا وضعت إدارة نادي الرماية الكويتي برامج هادفة لاستقطاب الشباب الكويتي على تطوير مهاراتهم وقدراتهم في ممارسة هذه الرياضة وقررت تجهيز ميدان متكامل وتوفير أحدث الأجهزة من القوس والسهم ومعدات للرماية.

## سلم التقييم

4	الرسومات دقيقة - الحسابات صحيحة - تقديم المشروع جيد جدًا - التقرير مفصل وواضح.
3	معظم الرسومات دقيقة - أخطاء قليلة في الحسابات - تقديم المشروع جيد - معظم التقرير مفصل وواضح.
2	بعض الرسومات دقيقة - أخطاء متعددة في الحسابات - تقديم المشروع مقبول - نقاط كثيرة في التقرير غامضة.
1	معظم عناصر المشروع غير كاملة.

## 1-2: مجال الدالة

### 1 الأهداف

- يتعرف متى تمثل العلاقة دالة.
- يتعرف مجال الدالة.

### 2 المفردات والمفاهيم الجديدة

- العلاقة - المجال - المجال المقابل - المدى - الدالة - اختبار المستقيم الرأسي - أصفار المقام.

### 3 الأدوات والوسائل

- جهاز إسقاط (Data show) - حاسوب.

### 4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) حل كل معادلة مما يلي:

$$(1) 2x - 5 = 0$$

$$(2) x^2 - 9 = 0$$

$$(3) x^2 - 7x + 12 = 0$$

(b) حل كل متباينة مما يلي:

$$(1) 3x - 12 \geq 0 \quad (2) -4x + 8 \geq 0$$

(c) أوجد قيم المتغير  $x$  حيث يكون الجذر التربيعي معرفاً.

$$(1) \sqrt{3x - 6} \quad (2) \sqrt{-2x + 5}$$

(d) أوجد قيم المتغير  $x$  حيث يكون الجذر التكعيبي معرفاً.

$$(1) \sqrt[3]{x - 5} \quad (2) \sqrt[3]{-3x + 4}$$

(e) أوجد مجموعة حل النظام التالي:

$$\begin{cases} 3x - 6 \geq 0 \\ -2x + 10 \geq 0 \end{cases}$$

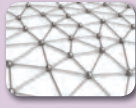
### 5 التدريس

يعتبر تعريف مجال الدالة، ومجالها المقابل، ومداهما من الشروط الأساسية لدراسة الدالة وخصائصها وميزاتها. وهذا يشابه كثيرًا تركيز الأساس عند بناء البيوت والقلاع والأبراج.

## 2-1

### مجال الدالة

#### Domain of the Function



#### دعنا نفكر ونتناقش

من أهم ما يميز حياة الإنسان العلاقات. مثل انتماء شخص إلى وطنه أو إلى نادي رياضي أو نقابي أو انتماء نقلة إلى منحنى. يمكن تمثيل العلاقات أحيانًا بمخططات سهمية.

- a اختر خمسة من أصدقائك، واكتب أسمائهم ثم صل كل اسم بسنة ولادته.
  - b أعد كتابة الأسماء الخمسة واكتب أسماء ثلاث رياضات ثم صل اسم كل شخص برياضته المفضلة.
- في الفقرة a يرتبط كل اسم بسنة ولادته بينما في الفقرة b قد يرتبط الاسم الواحد بأكثر من رياضة أو قد لا يرتبط بأي رياضة. قارن بين عملك وعمل زملائك في الفصل.

سوف نتعرف في هذا الدرس على العلاقات ونتمثلها بيانيًا، وسوف نتعرف أيضًا متى تمثل العلاقة دالة مع التركيز على العلاقات في المستوى الإحداثي.

#### العلاقة والدالة

كثيرًا ما نحتاج في الرياضيات وتطبيقاتها إلى التعبير عدديًا أو جبريًا عن علاقة تربط بين متغيرين أو أكثر، والعلاقة رياضياً هي أي مجموعة من الأزواج المرتبة في المستوى الإحداثي، وتسمى مجموعة المسافات الأولى لهذه الأزواج (الإحداثيات الأفقية أي السينية) **مجال العلاقة** وتسمى مجموعة المسافات الثانية (الإحداثيات الرأسية أي الصادية) **مدى العلاقة** وهي مجموعة جزئية من المجال المقابل.

عندما يكون كل عنصر (عدد) في المجال مرتبطًا بعنصر واحد فقط من المجال المقابل، فإن العلاقة تسمى دالة والدالة التي مجالها ومجالها المقابل مجموعتان جزئيتين من الأعداد الحقيقية تسمى دالة حقيقية.

#### معلومة مفيدة:

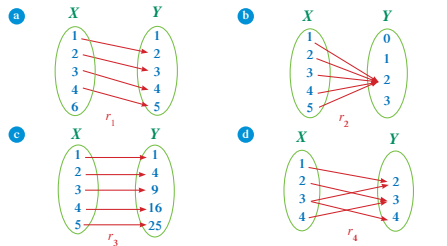
$(a, b)$  زوج مرتب  
يسمى  $a$  المسقط الأول،  
 $b$  المسقط الثاني.

#### مثال توضيحي (1)

في المخططات السهمية التالية علاقات من:  $Y \rightarrow X$

- 1 حدد المجال والمجال المقابل والمدى.
- 2 اكتب كل علاقة على شكل مجموعة من الأزواج المرتبة.
- 3 بين أي من العلاقات يمثل دالة حقيقية وأين لا يمثل دالة حقيقية مع ذكر السبب.

44



الحل:

a المجال = {1, 2, 3, 4, 6}

المجال المقابل = {1, 2, 3, 4, 5}

المدى = {2, 3, 4, 5}

العلاقة:  $r_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$

العلاقة  $r_1$  لا تمثل دالة لأن العنصر 6 من المجال لم يقترن بعنصر من المجال المقابل.

b المجال = {1, 2, 3, 4, 5}

المجال المقابل = {0, 1, 2, 3}

المدى = {2}

العلاقة:  $r_2 = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2)\}$

العلاقة  $r_2$  تمثل دالة حقيقية لأن كل عنصر من المجال يقترن بعنصر واحد فقط من المجال المقابل.

c المجال = {1, 2, 3, 4, 5}

المجال المقابل = {1, 4, 9, 16, 25}

المدى = {1, 4, 9, 16, 25}

العلاقة:  $r_3 = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25)\}$

العلاقة  $r_3$  تمثل دالة حقيقية لأن كل عنصر من المجال يقترن بعنصر واحد فقط من المجال المقابل.

d المجال = {1, 2, 3, 4}

المجال المقابل = {2, 3, 4}

المدى = {2, 3, 4}

45

في المثال التوضيحي (1) سوف يوضح الفرق بين العلاقة والدالة، حيث تساعد المخططات السهمية كثيرًا على إبراز هذا الفرق، وتوفر للطلاب فرصة للتعرف على مجال العلاقة (الدالة) أو المجموعة الابتدائية أو مجموعة الانطلاق ثم المجال المقابل أو مجموعة الوصول وبعد ذلك المدى وهو الجزء من المجال المقابل.

## في المثال (1)

يساعد كثيرًا اختبار المستقيم الرأسي على تحديد ما إذا كان بيان علاقة ما يمثل دالة أم لا. قدّم للطلاب أمثلة بيانية متعددة عن المستقيم ليلاحظوا أن التقاطع بين المستقيم الرأسي وبيان العلاقة يجب أن يكون على الأكثر نقطة واحدة كي يكون هذا البيان لدالة.

## في المثال التوضيحي (2) والمثال (2)

يعالجان معًا مجال دوال من أنواع متعددة سوف تكون ركائز للطلاب خلال دراسته المستقبلية إن كان لجهة الدوال الحدودية أو النسبية، أو لجهة الدوال الجذرية (تربيعية أو تكعيبية أو ...). ناقش معهم بشكل خاص حلول الأمثلة التالية.

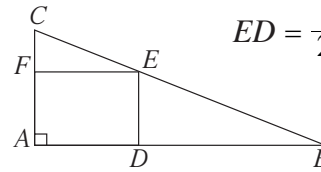
مثال توضيحي (2) (d-f) ثم مثال (2) (c-d) حيث إن المقام يجب أن لا يساوي صفرًا.

## 6 الربط

نأخذ المثلث  $ABC$  قائم الزاوية  $A$ ، حيث:  $AC = 7$ ,  $AB = 24$ .  
نأخذ على  $\overline{AB}$  نقطة  $D$  بحيث إن  $AD = x$ .  
نكمل المستطيل  $ADEF$ .

أوجد مساحة  $ADEF$  بدلالة  $x$ ، حدّد مجال هذه المساحة  $f(x)$ .

الحل:  $ED = \frac{7}{24}(24 - x)$ ,  $AD = FE = x$   
وبالتالي:  $f(x) = \frac{-7}{24}x^2 + 7x$   
مجال هذه الدالة:  $0 < x < 24$



## 7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في تحديد الشروط لتعريف مجال الدالة النسبية (الدالة الكسرية) التي تتضمن جذورًا في البسط أو في المقام، ومن ثم إيجاد حلول لنظام متباينات. اعرض أمثلة متعددة تساعد الطلاب على تخطي هذه الأخطاء.

- العلاقة:  $r_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3)\}$   
العلاقة  $r_2$  لا تمثل دالة حقيقية لأن العنصر 3 من المجال يقترن بعنصرين من المجال المقابل.

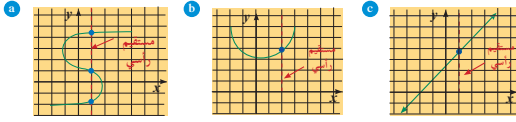
إذا كانت العلاقة ممثلة بيانيًا في المستوى الإحداثي، نستخدم في هذه الحالة اختبار المستقيم الرأسي (المودي) لمعرفة ما إذا كانت العلاقة تمثل دالة أم لا.

اختبار المستقيم الرأسي:

إذا تقاطع كل مستقيم رأسي مع بيان علاقة ما بنقطة واحدة على الأكثر، فإن هذه العلاقة تكون دالة.

### مثال (1)

استخدم اختبار المستقيم الرأسي لتحديد ما إذا كان بيان كل علاقة مما يلي يمثل بيان دالة أم لا:

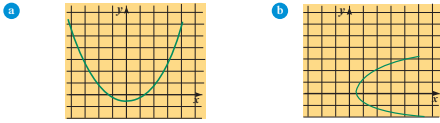


الحل:

- a يمكن رسم على الأقل مستقيم رأسي واحد يقطع المنحنى بأكثر من نقطة واحدة. ∴ البيان لا يمثل دالة.  
b كل مستقيم رأسي يقطع المنحنى بنقطة واحدة على الأكثر. ∴ البيان يمثل دالة.  
c كل مستقيم رأسي يقطع المنحنى بنقطة واحدة. ∴ البيان يمثل دالة.

### حاول أن تحل

1 استخدم اختبار المستقيم الرأسي لتحديد ما إذا كان بيان كل علاقة مما يلي يمثل بيان دالة أم لا:



46

## Domain of the function

## مجال الدالة

إذا كانت لدينا دالة:  $y = f(x)$ ، فإن مجالها هو مجموعة كل الأعداد الحقيقية التي يأخذها المتغير  $x$  وتلك  $D$  وتكون هذه المجموعة، وينتج عنها قيم حقيقية للمتغير  $y$  ونقول إن الدالة معرفة على المجال  $D$ .

### مثال توضيحي (2)

حدّد مجال كل من الدوال التالية:

- a  $f(x) = 2x + 1$   
b  $g(x) = x^2 + 3x + 1$   
c  $t(x) = \sqrt{3x - 4}$   
d  $h(x) = \frac{x + 2}{x - 4}$   
e  $u(x) = \sqrt[3]{2x + 1}$   
f  $v(x) = \frac{\sqrt{3x - 4}}{x - 2}$

الحل:

- a الدالة  $f$  كثيرة حدود وبالتالي أي قيمة حقيقية يأخذها المتغير  $x$  ينتج عنها قيمة حقيقية للمتغير  $y$  ومنه نجد أن مجال الدالة  $f$  هو مجموعة الأعداد الحقيقية  $\mathbb{R}$ .  
b الدالة  $g$  كثيرة حدود وكما هو في (a) نجد أن مجال الدالة  $g$  هو  $\mathbb{R}$ .  
c من المعروف أنه لا يوجد للعدد السالب جذر تربيعي في مجموعة الأعداد الحقيقية  $\mathbb{R}$  وعليه يكون مجال الدالة  $t$  هو مجموعة قيم  $x$  الحقيقية والتي تجعل الجذور عددًا موجبًا أو صفرًا. لذا نكتب:

$$3x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{4}{3}$$

$$x \in \left[\frac{4}{3}, \infty\right)$$

أي أن مجال  $t$  هو  $\left[\frac{4}{3}, \infty\right)$

d لنفرض أن:

$$h(x) = \frac{h(x)}{d(x)}$$

الدالة  $h$  دالة نسبية (حدودية نسبية) حيث البسط هو دالة كثيرة حدود مجالها  $\mathbb{R}$  والمقام  $d$  دالة كثيرة حدود مجالها  $\mathbb{R}$ .

إيجاد أصفار المقام نكتب:

$$d(x) = 0$$

كالتالي:

$$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

فيكون مجال الدالة  $h$  مجموعة الأعداد الحقيقية  $\mathbb{R}$  باستثناء العدد 4.

$$\mathbb{R} / \{4\} = h$$

$$\text{أو } (-\infty, 4) \cup (4, \infty)$$

e إن الجذر التكعيبي لأي عدد موجب أو سالب معرف في مجموعة الأعداد الحقيقية  $\mathbb{R}$  ومنها الجذر التكعيبي لأي دالة كثيرة الحدود يكون معرفًا على مجموعة الأعداد الحقيقية  $\mathbb{R}$ .

f لنفرض أن:

$$v(x) = \frac{h(x)}{d(x)}$$

الدالة  $v$  دالة نسبية حيث البسط هو دالة كثيرة حدود مجالها  $\mathbb{R}$  والمقام  $d$  دالة كثيرة حدود مجالها  $\mathbb{R}$ .

معلومة رياضية:

$\mathbb{R} - \{4\}$  يمكن أن نكتب

بالصورة  $\mathbb{R} / \{4\}$ .

47



راقب الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل». لتأكد من حسن أدائهم في معالجة تعريف مجال الدالة.

اختبار سريع

حدّد مجال كل دالة مما يلي:

(a)  $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5$

كثيرة حدود مجالها  $\mathbb{R}$

(b)  $f(x) = \sqrt{-4x + 7}$

مجالها:  $[-\infty, \frac{7}{4}]$ ;  $-4x + 7 \geq 0$

(c)  $f(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{x-5}$

مجالها:  $[3, 5) \cup (5, \infty)$ ;  $x - 3 \geq 0$ ;  $x \neq 5$

(d)  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x+2}}$

مجالها:  $(-\infty, 2)$ ;  $-x + 2 > 0$

(e)  $f(x) = \frac{x-3}{x^2-5x+4}$

مجالها:  $\mathbb{R} - \{1, 4\}$ ;  $x^2 - 5x + 4 \neq 0$

مجموعة أصفار المقام  $\{2\}$   
 : مجال  $v$  هو كل قيمة  $x$  الحقيقية التي ينتج عنها  $v(x)$  قيمًا حقيقية.  
 : تكون مجموعة الأعداد الحقيقية المشتركة بين مجالي البسط والمقام هي  $(\frac{4}{3}, \infty)$  باستثناء  $\{2\}$   
 أي أن مجال  $v = (\frac{4}{3}, \infty) \setminus \{2\}$   
 أو  $(\frac{4}{3}, 2) \cup (2, \infty)$

- تساعدنا القواعد التالية على تحديد مجال الدالة:
1. مجال الدالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية  $\mathbb{R}$ .
  2. مجال الدالة الحدودية النسبية هو مجموعة الأعداد الحقيقية  $\mathbb{R}$  عدا مجموعة أصفار المقام.
  3. مجال الدالة  $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$  حيث  $n$  عدد زوجي هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق الشرط  $g(x) \geq 0$ .
  4. مجال الدالة  $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$  حيث  $n$  عدد فردي هو مجال الدالة  $g$ .
  5. مجال الدالة  $f(x) = g(x) \pm h(x)$  هو مجموعة الأعداد الحقيقية المشتركة بين مجالي الدالتين  $h, g$ .
  6. أي أن مجال  $f = g$  مجال  $h$  مجال  $g$ .
  7. مجال الدالة  $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$  هو مجموعة الأعداد الحقيقية المشتركة بين مجالي الدالتين  $h, g$  عدا أصفار المقام  $(h(x) \neq 0)$ .
- أي أن مجال  $f =$  مجال  $g \cap$  مجال  $h$  (مجموعة أصفار المقام).

(2) مثال

أوجد مجال كل دالة مما يلي:

a)  $f(x) = 2x^3 - 4x - \sqrt{2x-6}$       b)  $g(x) = (2x^2 + x)\sqrt{8-2x}$

c)  $h(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{x^2-1}$       d)  $u(x) = \frac{4}{\sqrt{-x}}$

الحل:

1. نفرض أن:  $b(x) = 2x^3 - 4x$  ،  $a(x) = \sqrt{2x-6}$   
 فيكون  $f(x) = a(x) - b(x)$   
 مجال  $b$  هو مجموعة الأعداد الحقيقية  $\mathbb{R}$  لأنها دالة كثيرة الحدود.  
 مجال  $a$  يتحقق إذا كان:  
 مجال  $a$  هو:  $[3, \infty)$   
 : مجال  $f =$  مجال  $a \cap$  مجال  $b$   
 أي أن مجال  $f$ :  $\mathbb{R} \cap [3, \infty) = [3, \infty)$

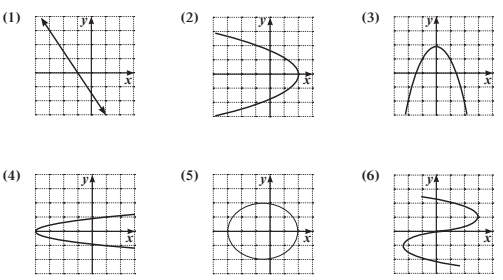
2. نفرض أن:  $m(x) = 2x^2 + x$  ،  $p(x) = \sqrt{8-2x}$   
 فيكون:  $g(x) = m(x) \cdot p(x)$   
 مجال الدالة  $m$  هو مجموعة الأعداد الحقيقية  $\mathbb{R}$  لأنها دالة كثيرة الحدود.

تمرّن  
2-1

مجال الدالة  
Domain of the Function

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1-6)، استخدم اختيار المستقيم الرأسي لتحديد ما إذا كان بيان كل علاقة مما يلي يمثل بيان دالة أم لا:



- في التمارين (7-16)، حدّد مجال كل من الدوال التالية:
- (7)  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x^2 - 1$       (8)  $g(x) = \sqrt{3x-7} + 2$
- (9)  $t(x) = \frac{\sqrt{-2x+3}}{x-1}$       (10)  $h(x) = -\frac{3x-1}{5-2x}$
- (11)  $u(x) = \sqrt[3]{7-5x}$       (12)  $v(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{3+x}}$
- (13)  $h(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{5+\sqrt{2x-1}}$       (14)  $u(x) = \frac{\sqrt{3+4x-3}}{25-9x^2}$
- (15)  $v(x) = \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x^2-1}$       (16)  $w(x) = \sqrt[3]{x^2-2}(\sqrt{2x-3})$

«حاول أن تحل»

- 1 (a) يقطع المستقيم الرأسى البيان المرسوم على الأكثر بنقطة واحدة فقط، لذا فالبيان يمثل دالة.  
 (b) يقطع المستقيم الرأسى البيان المرسوم بنقطتين، لذا فالبيان لا يمكن أن يمثل دالة.

- 2 (a)  $\mathbb{R}/\{4\}$   
 (b)  $x - 9 \geq 0 ; x \geq 9 ; x \in [9, \infty)$   
 (c)  $\begin{cases} 5 - 4x \geq 0 \\ x^2 + 4 \neq 0 \end{cases} ; x \leq \frac{5}{4} ; (-\infty, \frac{5}{4}]$   
 (d)  $x \neq 0 ; x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

$$8 - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4$$

مجالات الدالة  $m$  يتحقق إذا كان  
 $(-\infty, 4]$  مجال  $m$  هو  
 أي أن مجال  $g$ :  $\mathbb{R} \cap (-\infty, 4] = (-\infty, 4]$

نفرض أن:  $h(x) = \frac{q(x)}{r(x)}$  حيث  $h(x) = \sqrt{1+x}$   $q(x) = x^2 - 1$   $r(x) = x^2 - 1$

مجالات البسط  $q$  هو مجموعة الأعداد الحقيقية  $\mathbb{R}$  لأنه جذر تكعيبي لكثيرة حدود.  
 المقام  $r$  دالة كثيرة حدود مجالها  $\mathbb{R}$  ومجموعة أصفار المقام هي  $\{-1, 1\}$   
 $\therefore$  مجال  $h =$  (مجال  $q$  / مجال  $r$ ) / مجموعة أصفار المقام  
 أي أن مجال  $h$ :  
 $(\mathbb{R} \cap \mathbb{R}) - \{-1, 1\} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

نفرض أن:  $u(x) = \frac{s(x)}{t(x)}$  حيث  $u(x) = \sqrt{-x}$   $s(x) = 4$   $t(x) = \sqrt{-x}$

مجالات البسط  $s$  هو مجموعة الأعداد الحقيقية  $\mathbb{R}$  لأنها دالة ثابتة.  
 مجال المقام  $t$  هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تجعل الجذور عدداً موجباً أو صفراً.  
 $-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$   
 $x \in (-\infty, 0]$

مجموعة أصفار المقام هي  $\{0\}$

$\therefore$  مجال  $u =$  (مجال  $s$  / مجال  $t$ ) / مجموعة أصفار المقام

أي أن مجال  $u$ :  
 $(\mathbb{R} \cap (-\infty, 0]) - \{0\} = (-\infty, 0)$

«حاول أن تحل»

2 أوجد مجال كل دالة مما يلي:

a  $f(x) = \frac{2x+5}{x-4}$   
 c  $f(x) = \frac{\sqrt{5-4x}}{x^2+4}$

b  $f(x) = x^3 - 4x^2 - 4 + \sqrt{x-9}$   
 d  $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2-5x}{x}}$

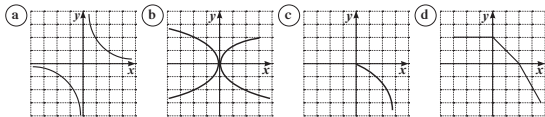
المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-5)، ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

- (1) مجال الدالة  $f(x) = \sqrt{(x-2)^2}$  هو  $\mathbb{R}$   
 (2) مجال الدالة  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-6}}$  هو  $[3, \infty)$   
 (3) مجال الدالة  $f(x) = \sqrt{-x}$  هو  $(-\infty, 0]$   
 (4) مجال الدالة  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$  هو  $[-3, \infty)$   
 (5) مجال الدالة  $f(x) = |x| - 2$  هو  $\mathbb{R}$

في التمارين (6-11)، ظلل رمز الدائرة الدالة على الإجابة الصحيحة.

(6) أيًا مما يلي لا يمثل بيان دالة:



(7) مجال الدالة  $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$  هو:

- a  $\mathbb{R}$       b  $\mathbb{R}/\{1\}$       c  $\mathbb{R}/\{-1, 1\}$       d  $\mathbb{R}/\{-1\}$

(8) مجال الدالة  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$  هو:

- a  $\mathbb{R}/\{0\}$       b  $[0, \infty)$       c  $(-\infty, 0)$       d  $(0, \infty)$

(9) مجال الدالة  $f(x) = \frac{x-1}{x-\sqrt{x}}$  هو:

- a  $\mathbb{R}/\{1\}$       b  $\mathbb{R}/\{0, 1\}$       c  $\mathbb{R} - \{0\}$       d  $(0, \infty)/\{1\}$

(10) مجال الدالة  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$  هو:

- a  $(0, \infty)$       b  $[1, \infty)$       c  $(-1, \infty)$       d  $(-1, \infty)/\{0\}$

(11) لتكن  $g(x) = x^2$   $f(x) = x\sqrt{x}$   $g: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$   $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  فإن مجال الدالة  $f \circ g$  هو:

- a  $[-2, 2]$       b  $[0, 2]$

- c  $(0, 2)$       d ليس أيًا مما سبق صحيحًا

## 2-2: الدوال التربيعية ونمذجتها

### 1 الأهداف

- يتعرف الدوال التربيعية واستخداماتها.
- يقدر متى يستخدم النموذج الخطي أو النموذج التربيعي.

### 2 المفردات والمفاهيم الجديدة

الدوال التربيعية - دالة خطية - الصورة العامة - حد من الدرجة الثانية - حد مطلق (ثابت) - مجال الدالة.

### 3 الأدوات والوسائل

عبوة بلاستيكية سعتها لتران - شريط لاصق - مسمار - مسطرة - ساعة رقمية - مياه - وعاء أو حوض - ورق رسم بياني - آلة حاسبة علمية.

### 4 التمهيد

(a) عيّن على المستوى الإحداثي النقاط التالية:

$$(3, 2), (1, 1), (-1, 0), (-3, -1)$$

اسأل الطلاب: هل تقع جميع هذه النقاط على مستقيم واحد؟ اشرح.

(b) عيّن على المستوى الإحداثي النقاط التالية:

$$(7, 3), (2, 2), (-1, 1), (-2, 0)$$

اسأل الطلاب: هل تقع جميع هذه النقاط على مستقيم واحد؟ اشرح.

(c) اسأل الطلاب: ما هي معادلة الخط المستقيم؟ كيف

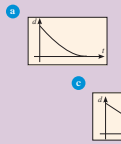
توجد ميل الخط المستقيم الذي يمر بنقطتين على المستوى الإحداثي؟

### الدوال التربيعية ونمذجتها

#### Quadratic Functions and their Modelling

2-2

#### عمل تعاوني



قسم الفصل إلى مجموعات لإجراء هذه التجربة. حدد مهام أفراد مجموعتك. اطلب إلى أحدهم أن يراقب الزمن، واطلب إلى آخر أن يقوم بوضع العلامات. ثبت شريطاً لاصقاً بطول الزجاجه واصنع قنناً بجانب قاعدتها بواسطة مسمار.

**أولاً:** ضع علامة عند مستوى الثقب على الشريط اللاصق واكتب عند هذه العلامة (0). ثم أغلق الثقب بواسطة الشريط اللاصق. املأ الزجاجه بالماء، ثم ضع علامة عند مستوى الماء في الزجاجه.

**ثانياً:** انزع الشريط اللاصق من على الثقب ودع الماء يتدفق. ضع علامة عند مستوى سطح الماء كل 10 s استمر على هذا النحو حتى يصل مستوى سطح الماء إلى الصفر.

1 قس المسافة من (0) إلى كل علامة، ثم ارمس جدولاً مسائلاً للجدول أدناه ودون فيه بياناتك.  
2 مثل بياناتك على شبكة إحداثيات.  
3 أصف خطاً إلى رسمك وضع نزعة البيانات. هل تبدو البيانات خطية؟  
4 أي منحنى مما يلي يبدو أكثر ملاءمة لتمثيل بياناتك؟

الزمن بالثانية (s)	مستوى الماء بالسطر (ml)
0	
10	
20	
30	
40	
!	!

سوف تعلم  
• الدوال التربيعية واستخداماتها  
• تقدير متى تستخدم النموذج الخطي أو النموذج التربيعي.

سوف تحتاج إلى...  
• عبوة بلاستيكية سعتها لتران.  
• شريط لاصق.  
• مسمار.  
• مسطرة.  
• ساعة رقمية.  
• مياه.  
• وعاء أو حوض.  
• ورق رسم بياني.  
• آلة حاسبة علمية.

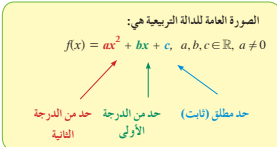
المفردات والمصطلحات  
• الدوال التربيعية  
• Quadratic Functions  
• الصورة العامة  
• General Form  
• حد من الدرجة الثانية  
• Quadratic Term  
• حد مطلق (ثابت)  
• Constant Term  
• دالة خطية  
• Linear Function  
• مجال الدالة  
• Domain of the Function

50

### Quadratic Functions

### الدوال التربيعية

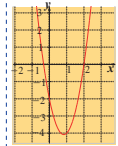
من الممكن أحياناً أن تمثل البيانات غير الخطية، مثل البيانات التي جمعتها سابقاً في دعم تعاوني، بدالة تربيعية.



تمثل الدالة التربيعية بياناتاً بمنحنى متماثل حول المستقيم الراسي الذي يمر برأس المنحنى، ويسمى شكل المنحنى **قطباً مكافئاً** parabola.

والإحداثي السيني لرأس هذا المنحنى  $x = -\frac{b}{2a}$  وهو معادلة المستقيم الراسي الذي يسمى

بمحور الصائل.



- أي النقاط الواردة أدناه تقع على منحنى الدالة:
- $$f(x) = 3x^2 - 5x - 2$$
- A(1, -4)
  - B(2, 0)
  - C(0, 2)
  - D(-3, 40)

أكبر أس لمختبر ما في الدالة التربيعية هو (2)، وتكون الدالة خطية إذا كان أكبر أس لمختبر فيها هو (1).

#### تعريف الدالة الخطية:

الدالة  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = ax + b$

أو  $y = ax + b$

حيث  $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$

و  $b \in \mathbb{R}$  تسمى دالة خطية

وبها عطف مستقيم.



عندما  $a = 0$  تكون الدالة

$y = b$  ثابتة وبها عطف

مستقيماً أفقياً.



51

## 5 التدريس

تعرف الطالب سابقاً بيانات كثيرة، ووجد أن تمثيلها البياني يكون إما خطأً مستقيماً ومعادلته من الدرجة الأولى:  $y = ax + b$  وإما خطأً منكسراً ومعادلته من الدرجة الأولى، وتتضمن قيمة مطلقة على المتغير أو على التعبير بكامله.

ولكن يوجد بيانات كثيرة تكون نمذجتها بدوال من الدرجة الثانية أو الثالثة أو أكثر، وتمثل جميع قيم هذه البيانات.

في هذا الدرس، سوف يتعرف الطالب على بيانات يمكن نمذجتها بدوال تربيعية ومعادلتها:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

### في المثال (2)

يتضمن الجدول قيماً، والمطلوب نمذجة هذه البيانات بدالة تربيعية، لذا نختار 3 قيم لإيجاد الثوابت  $a$ ,  $b$ ,  $c$  في الدالة التربيعية. وهكذا نحصل على الدالة التربيعية. أكد للطلاب أنه يجب أن تكون بقية القيم على منحنى هذه الدالة أو أن تحقق المعادلة.

### في نشاط إرائي

يبين الجدول نتائج ممكنة لاختبار مشابه لاختبار فقرة «عمل تعاوني».

اطلب إلى الطلاب استخدام ورق رسم بياني لتعيين النقاط كلها في مستوى إحداثي، ثم رسم منحنى الدالة التي حصلنا عليها:  $f(t) = 0.00625t^2 - 19.5t + 120$ . سوف يتأكدون من أن بقية النقاط موجودة على المنحنى.

**مثال (1)**

حدد ما إذا كانت الدالة:  $f(x) = (3x - 4)(x + 2)$  خطية أم تربيعية.

الحل:  
نكتب الدالة بالصورة العامة:

$$f(x) = (3x - 4)(x + 2)$$

$$f(x) = 3x^2 + 6x - 4x - 8$$

$$f(x) = 3x^2 + 2x - 8$$

التوزيع بالضرب  
جمع الحدود المشابهة

∴ الدالة في الصورة العامة تتضمن الحد  $3x^2$  (من الدرجة الثانية) ∴ هي دالة تربيعية.

**سأول أن تحل**

1 حدد ما إذا كانت الدالة خطية أم تربيعية.

a  $f(x) = 2x(x - 3)$       b  $f(x) = (x - 2)(2x + 1)$   
c  $f(x) = (2x + 3)^2 - 4x^2 - 7x$       d  $f(x) = 3(x^2 - 4x) - 3x^2 + 4$

**نمذجة البيانات**

تعلمت سابقاً كيفية كتابة نموذج خطي لبيانات، حيث يحدد الخط المستقيم نزعة معروفة للبيانات. ولكن يوجد بيانات لا يمكن نمذجتها خطياً وقد تكون الدالة التربيعية أفضل نمذجة لها.

**مثال (2)**

يبين الجدول التالي عدد القطع المستقيمة الواصلة بين نقطتين مختلفتين إذا كان لدينا  $x$  نقطة، فطرق ألا تكون 3 نقاط منها على مستقيم واحد.

عدد النقاط (x)	2	3	4	5	6	7
عدد القطع المستقيمة (y)	1	3	6	10	15	21

a إذا كانت العلاقة بين  $x$  و  $y$  تمذج بدالة تربيعية فأكتب هذه الدالة.  
b أوجد عدد القطع المستقيمة التي تصل بين 10 نقاط، وبين 20 نقطة.

الحل:

a الصورة العامة للدالة التربيعية:  $f(x) = ax^2 + bx + c$   
بالنعوض بالأزواج (2, 1), (3, 3), (4, 6) ينتج النظام التالي:

$$\begin{cases} 1 = 4a + 2b + c \\ 3 = 9a + 3b + c \\ 6 = 16a + 4b + c \end{cases}$$

**إرشاد**

الإجراءات اللازمة لحل 3 معادلات بـ 3 مجاهيل: لحل ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل يمكن استخدام طريقة الحذف أو طريقة التعويض. تقوم طريقة التعويض على عزل أحد المجاهيل في إحدى المعادلات والتعويض عن هذا المجهول بما يساويه في المعادلتين الباقيتين وهكذا نحصل على نظام معادلتين بمجهولين بسيط سهل حله. أما طريقة الحذف فتقوم على استخدام العمليات الأربع على المعادلات بحيث يتبقى أحد المجاهيل وينتج من ذلك نظام معادلتين بمجهولين.

52

نطرح 1 من 2 ثم نطرح 3 من 4 فينتج:

$$\begin{cases} 2 = 5a + b \\ 3 = 7a + b \end{cases}$$

نطرح 4 من 3 فينتج:

$$2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

نعوض في 1 عن  $a = \frac{1}{2}$ :  $2 = 5 \cdot \frac{1}{2} + b \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$

نعوض في 1 عن  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = -\frac{1}{2}$ :  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = -\frac{1}{2}$ ,  $c = 0$

∴ الدالة التربيعية هي:  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$

b عدد القطع المستقيمة التي تصل بين (10) نقاط هي  $f(10)$ :

$$f(10) = \frac{1}{2}(10)^2 - \frac{1}{2}(10)$$

$$f(10) = 50 - 5 = 45$$

أي يوجد 45 قطعة مستقيمة تربط بين 10 نقاط التين التين. وبالمثل  $f(20)$ :

$$f(20) = \frac{1}{2}(20)^2 - \frac{1}{2}(20)$$

$$f(20) = 200 - 10 = 190$$

أي يوجد 190 قطعة مستقيمة تربط بين 20 نقطة التين التين.

**سأول أن تحل**

2 يبين الجدول التالي عدد الأقطار في المضلعات بحسب عدد أضلاعها.

عدد الأضلاع (x)	4	5	6	7
عدد الأقطار (y)	2	5	9	14

a إذا كانت العلاقة بين  $x$  و  $y$  تمذج بدالة تربيعية فأكتب هذه الدالة.  
b مستخدماً العلاقة في a، أوجد عدد أقطار المضلع إذا كان عدد أضلاعه 10 وإذا كان عدد أضلاعه 15.

53

## 6 الربط

يحقق كل من النشاطين الإثرائيين ص 54 و ص 55 في كتاب الطالب الربط بين بيانات من الحياة الواقعية وكيفية نمذجتها إلى دوال تربيعية تساعد على إيجاد توقعات.

## 7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في كتابة الإحداثي السيني لرأس المنحنى.

أكد على حفظ  $x = \frac{-b}{2a}$

أشر إلى أن المستقيم الرأسي الذي معادلته  $x = \frac{-b}{2a}$  هو محور تماثل لبيان الدالة التربيعية.

## 8 التقييم

تابع الطلاب باهتمام وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل»، لأنها سوف تعطيك فكرة واضحة عن تفاعل الطلاب مع مفاهيم هذا الدرس ومهاراته.

**نشاط إرثي (تطبيقات حياتية)**  
يتم الجدول التالي بيانات اختيار مشابه للاختيار السابق في فقرة «عمل تعاوني»، حيث تمثل المتبة الزمنية بالثواني (s)، و تمثل مستوى المياه بالملييلتر (ml).



t	4	8	12	16	20	24	28	32
y	112.3	104.8	97.5	90.4	83.5	76.8	70.3	64

أوجد دالة تربيعية تنمذج هذه البيانات.  
استخدم الدالة أعلاه لإيجاد مستوى المياه بعد مرور 36 s.

الحل:  
لكن الدالة التربيعية:  $f(t) = at^2 + bt + c$ ,  $y = f(t)$

نختار من الجدول 3 أزواج تحقق الدالة:

الزوج (4, 112.3)  $112.3 = a \times (4)^2 + b(4) + c$

الزوج (12, 97.5)  $97.5 = a(12)^2 + b(12) + c$

الزوج (20, 83.5)  $83.5 = a(20)^2 + b(20) + c$

بالتبسيط نحصل على النظام:

$16a + 4b + c = 112.3$

$144a + 12b + c = 97.5$

$400a + 20b + c = 83.5$

باستخدام آلة حاسبة علمية ينتج:  $a = \frac{1}{160} = 0.00625$ ,  $b = \frac{-39}{20} = -1.95$ ,  $c = 120$

$\therefore f(t) = \frac{1}{160}t^2 - \frac{39}{20}t + 120$

أو  $f(t) = 0.00625t^2 - 1.95t + 120$

لاحظ أن النقطة (8, 104.8) تحقق المعادلة حيث

$f(8) = \frac{1}{160}(8)^2 - 1.95(8) + 120 = 104.8$  ✓

بالمثل يمكن إثبات أن بقية الأزواج المرتبة تحقق المعادلة.

ب) نوجد:  $f(36) = \frac{1}{160}(36)^2 - \frac{39}{20}(36) + 120$

$= 8.1 - 70.2 + 120$

$= 57.9$

أي يصبح مستوى المياه حوالي 58cm

### الربط بالتكنولوجيا

خطوات العمل المستخدمة

لحل ثلاث معادلات بالحاسبة:

اصفح المفاتيح

يظهر على الشاشة 8 خيارات

لربح مستخدمة

اختر البرنامج: EQN

يظهر على الشاشة 4 صيغ

لمعادلات:

اختر الصيغة:

$2: a \cdot x + b \cdot y + c = d$

يظهر على الشاشة المصفوفة:

1  a  b  c  d

2

3

اكتب كل من المعادلات الثلاث

على الشكل التالي:

$ax + by + cz = d$

املأ الفراغات في السطر الأول

بمعامل x يليه  ثم معامل y

بيلي  ثم معامل z يليه  ثم

قيمة d يليه

كرر العملية في السطرين التاليين

والثالث.

اصفح الآن على الشاشة  تظهر

قيمة x: (المجهول الأول)

اصفح ثانية على الشاشة  تظهر

قيمة y: (المجهول الثاني)

اصفح ثالثة على الشاشة  تظهر

قيمة z: (المجهول الثالث)



## تمارين 2-2

### الدوال التربيعية ونمذجتها Quadratic Functions and their Modelling

#### المجموعة A تمارين مقالية

- في التمارين (1-4)، أوجد ناتج كل مما يلي:
- $(x-2)(7-x) + (7-2x)^2$
  - $(x-4)(7x-8) - (x-4)(x+2)$
  - $(x-4)(2x+1) + (x+4)^2$
  - $(x+13)(x+1) - 4(-x-2)^2$
- في التمارين (5-12)، أي من الدوال التالية خطية؟ وأيها تربيعية؟
- $y = x + 4$
  - $f(x) = x^2 - 7$
  - $y = 3(x-1)^2 + 4$
  - $r(x) = -7x$
  - $f(x) = \frac{1}{2}(4x+10)$
  - $y = 3x(x-2)$
  - $y = (2x+1)(x-2) + 4 - 2x^2$
  - $y = (3x+7)^2 - (9x^2 - 49)$
- (13) التفكير الناقد: ما الحد الأدنى لعدد أزواج البيانات المطلوبة لإيجاد نموذج تربيعي لمجموعة ما من البيانات؟
- في التمارين (14-16)، أوجد معادلة لكل مجموعة من البيانات.

(14)

x	-1	0	1	2	3
f(x)	4	-3	-6	-5	0

(15)

x	-1	0	1	2	3
f(x)	-1	0	3	8	15

(16)

x	-1	0	1	2	3
f(x)	17	20	17	8	-7

## اختبار سريع

أي من هذه الدوال التالية تتمذج النقاط في الجدول التالي: (c)

$x$	-1	0	1	2
$f(x)$	-10	-7	0	11

- (a)  $f(x) = x^2 - 11$   
 (b)  $f(x) = x^2 + 2x - 7$   
 (c)  $f(x) = 2x^2 + 5x - 7$   
 (d)  $f(x) = 2x^2 + 5x + 7$

## 9 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

1 - 3 تحقق من عمل الطلاب.

«نشاط»

$A(1, -4); B(2, 0), D(-3, 40)$

«حاول أن تحل»

- 1 (a)  $f(x) = 2x^2 - 6x$  (تربيعية)  
 (b)  $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$  (تربيعية)  
 (c)  $f(x) = 5x + 9$  (خطية)  
 (d)  $f(x) = -12x + 4$  (خطية)

### نشاط إثرائي (الصلة بالواقع)

يقف أحد السباحين على منصة يبلغ ارتفاعها 3 m عن مستوى سطح المياه. يقفز إلى أعلى ثم يسقط في المياه. يبين الجدول التالي ارتفاعه بالأمتار (m)، ابتداءه الأفقي عن المنصة بالأمتار (m).



$x$	0.6	1	1.2	1.3	1.6	2	2.6	3
$y$	4.44	4.92	5.016	5.028	4.92	4.44	3	1.56

استخدم البيانات المدونة في الجدول لإيجاد معادلة تربيعية تتمذج العلاقة بين  $x, y$  ثم تحقق.

الحل:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad y = f(x)$$

فكنا الدالة التربيعية:

يتضمن الجدول 8 أزواج مرتبة  $(x, y)$  أي أن القطع المكافئ يجب أن يمر بهذه النقاط. نختار 3 أزواج لنجد الثوابت  $(a, b, c)$

$$4.44 = a(0.6)^2 + b(0.6) + c$$

الزوج  $(0.6, 4.44)$

$$4.92 = a(1)^2 + b(1) + c$$

الزوج  $(1, 4.92)$

$$5.016 = a(1.2)^2 + b(1.2) + c$$

الزوج  $(1.2, 5.016)$

$$0.36a + 0.6b + c = 4.44$$

بالتبسيط نحصل على النظام:

$$a + b + c = 4.92$$

$$1.44a + 1.2b + c = 5.016$$

$$a = -1.2, \quad b = 3.12, \quad c = 3$$

استخدم آلة حاسبة لحل النظام فحصل على:

$$f(x) = -1.2x^2 + 3.12x + 3$$

التحقق: نعوض عن  $(x, f(x))$  بقية أزواج قيم الجدول.

مثلاً: نعوض بالزوج:  $(1.3, 5.028)$ :

$$5.028 \stackrel{?}{=} -1.2(1.3)^2 + 3.12(1.3) + 3$$

$$5.028 \stackrel{?}{=} -1.2 \times 1.69 + 3.12 \times 1.3 + 3$$

$$5.028 \stackrel{?}{=} 5.028$$

...  $(1.3, 5.028)$  يحقق المعادلة.

المعمل يمكننا إثبات أن بقية الأزواج المرتبة تحقق المعادلة.

### تدريب إثرائي

استخدم البيانات المدونة في الجدول لإيجاد معادلة تربيعية تتمذجها ثم تحقق من بقية الأزواج في الجدول.

$x$	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	3	4
$y$	10	6.25	3	0.25	-2	-3.75	-5	-6	-5

المجموعة B تمارين موضوعية

- في التمارين (1-5)، ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة وظلل (b) إذا كانت العبارة خاطئة.
- (1) الدالة  $f(x) = kx^2 + x - 3$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  يمكن أن تكون دالة خطية. (a) (b)
- (2) الدالة  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  هي دالة خطية. (a) (b)
- (3) النقطة  $A(1, 6)$  تنتمي إلى منحنى الدالة:  $f(x) = (3x)(2x) + 6$ . (a) (b)
- (4) الدالة  $y = x(1-x) - (1-x^2)$  هي دالة خطية. (a) (b)
- (5) الدالة  $f(x) = x^2 - x$  هي دالة تربيعية. (a) (b)
- في التمارين (6-10)، ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.
- (6) الدالة التربيعية التي حلها الثابت يساوي -3 هي: (a)  $y = (3x+1)(-x-3)$  (b)  $y = x^2 - 3x + 3$   
(c)  $f(x) = (x-3)(x-3)$  (d)  $y = -3x^2 + 3x + 9$
- (7) أي دالة مما يلي ليست دالة تربيعية: (a)  $y = (x-1)(x-2)$  (b)  $y = x^2 + 2x - 3$   
(c)  $y = 3x - x^2$  (d)  $y = -x^2 + x(x-3)$
- (8) أي نقطة مما يلي تنتمي إلى منحنى دالة  $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ ? (a) (3, 12) (b) (-1, -1) (c) (2, 3) (d) (-2, 22)
- (9) تكون الدالة  $f(x) = (a^2 - 4)x^2 - (a - 2)x + 5$  دالة تربيعية لكل  $a$  تنتمي إلى: (a)  $\mathbb{R}$  (b)  $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$  (c)  $\mathbb{R} - \{2\}$  (d)  $\mathbb{R} - \{-2\}$
- (10) يمكن نمذجة العلاقة بين  $x$ ,  $y$  في الجدول التالي بالادلة:
- |     |    |   |   |
|-----|----|---|---|
| $x$ | -1 | 1 | 2 |
| $y$ | -1 | 3 | 8 |
- (a)  $f(x) = x^2 + x + 1$  (b)  $f(x) = x^2 + 2x - 1$   
(c)  $f(x) = -x^2 + 2x + 2$  (d)  $f(x) = x^2 + 2x$

2 (a)  $y = ax^2 + bx + c$

$$2 = a(4)^2 + b(4) + c$$

$$9 = a(6)^2 + b(6) + c$$

$$5 = a(5)^2 + b(5) + c$$

نحصل على:  $a = \frac{1}{2}$ ,  $c = 0$ ,  $b = -\frac{3}{2}$

فتكون:  $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$

(b) إذا كان عدد الأضلاع 10، فيكون عدد الأقطار

35 إذا كان عدد الأضلاع 15، فيكون عدد

الأقطار 90.

«تدريب إثرائي»

$$y = x^2 - 6x + 3$$

تحقق من بقية قيم  $x$  في الجدول:

$$x = -1 \Rightarrow y = (-1)^2 - 6(-1) + 3 = 10$$

$$x = -0.5 \Rightarrow y = (-0.5)^2 - 6(-0.5) + 3 = 6.25$$

$$x = 0 \Rightarrow y = (0)^2 - 6(0) + 3 = 3$$

$$x = 0.5 \Rightarrow y = (0.5)^2 - 6(0.5) + 3 = 0.25$$

$$x = 1 \Rightarrow y = (1)^2 - 6(1) + 3 = -2$$

$$x = 1.5 \Rightarrow y = (1.5)^2 - 6(1.5) + 3 = -3.75$$

$$x = 2 \Rightarrow y = (2)^2 - 6(2) + 3 = -5$$

$$x = 3 \Rightarrow y = (3)^2 - 6(3) + 3 = -6$$

$$x = 4 \Rightarrow y = (4)^2 - 6(4) + 3 = -5$$

## 3-2: الدوال التربيعية والقطع المكافئ

### 1 الأهداف

- يوجد القيمة الصغرى أو القيمة العظمى لدالة تربيعية.
- يوجد معادلة محور التماثل.
- يرسم القطع المكافئ بدلالة إحداثيات رأسه.

### 2 المفردات والمفاهيم الجديدة

قطع مكافئ - رأس القطع المكافئ - محور التماثل.

### 3 الأدوات والوسائل

مسطرة - آلة حاسبة - ورق رسم بياني - جهاز إسقاط (Data Show) - حاسوب .

### 4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

- (a) اكتب التعبير  $(2x - 5)^2$  على صورة:  $ax^2 + bx + c$ .
- (b) اكتب التعبير  $(3x + 2)^2$  على صورة:  $ax^2 + bx + c$ .
- (c) اكتب التعبير  $x^2 + 10x + 25$  في صورة مربع كامل.
- (d) اكتب التعبير  $4x^2 - 12x + 9$  في صورة مربع كامل.
- (e) اكتب التعبير  $2x^2 + 9x + 4$  في صورة مربع كامل مع قيمة ثابتة.

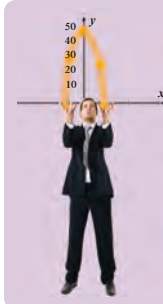
### 5 التدريس

تعرفت على الدالة التربيعية ورسمها البياني بأنه قطع مكافئ. والآن سوف تتعرف على خواص القطع المكافئ بصورة إحداثيات الرأس وخط التماثل ومتى يكون مفتوحاً إلى الأعلى أو إلى الأسفل وكيفية استخدام الإزاحة لإيجاد معادلة قطع مكافئ إذا تمت إزاحته. وأخيراً كيف نستخدم خاصية القيمة الصغرى أو القيمة العظمى في مواقف حياتية.

### الدوال التربيعية والقطع المكافئ

#### Quadratic Functions and Parabolas

2-3



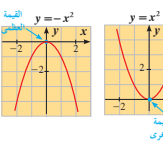
**عمل تعاوني**  
عندما تقذف بعض الأشياء (الأجسام) في الهواء مثل الكرات في الصورة المقابلة، فإن مسار الأشياء (الأجسام) يكون على شكل قطع مكافئ.  
1 استخدم الرسم البياني في الصورة إذا كان القياس بالسنتيمترات (cm)، فما أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة؟  
2 كون جدولاً بالقيم للمعادلة:  
 $y = -0.35x^2 + 50$   
ما قيمة  $x$  التي تحصل عندها على القيمة العظمى لـ  $y$ ؟  
3 كيف تقارن إحداثك عن السؤالين رقم (2) و (1)؟

**سوف تتعلم**  
• إيجاد القيمة الصغرى أو القيمة العظمى لدالة تربيعية.  
• إيجاد معادلة محور التماثل.  
• رسم القطع المكافئ بدلالة إحداثيات رأسه.  
**المفردات والمصطلحات**  
• قطع مكافئ Parabola  
• رأس القطع المكافئ Vertex of the Parabola  
• محور التماثل Axis of Symmetry

تعلمت في ما سبق أن بيان الدالة التربيعية يكون على شكل منحنى يسمى قطعاً مكافئاً وستوضح في هذا البند بعض خصائص القطوع المكافئة في حالات خاصة.

#### القطع المكافئ التي تمثل دوال تربيعية

#### Parabolas Representing Quadratic Functions



**رأس القطع المكافئ** هو أعلى (أو أدنى) نقطة في القطع المكافئ، الذي يمثل الدالة التربيعية بيانياً، فنقطة الرأس هي النقطة التي تكون للدالة عندها أكبر قيمة وتسمى قيمة عظمى وفي هذه الحالة تكون فتحة القطع المكافئ للأسفل أو نقطة الرأس هي النقطة التي تكون للدالة عندها أصغر قيمة وتسمى قيمة صغرى وفي هذه الحالة تكون فتحة القطع المكافئ لأعلى.

**محور التماثل (الناظر)** يقسم القطع المكافئ إلى جزئين متطابقين (كل جزء هو صورة للآخر بالانعكاس في المحور)، لذلك فإن كل نقطة من نقاط القطع المكافئ تناظرها نقطة أخرى هي صورتها بالانعكاس في محور التماثل، وتقع كلتا النقطتين المتناظرتين على البعد نفسه من محور التماثل الذي معادلته  $x = x_1$  حيث  $x_1$  الإحداثي السيني لنقطة رأس القطع.

56

تمرّن  
2-3

### الدوال التربيعية والقطع المكافئ

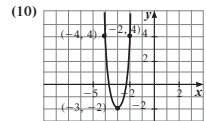
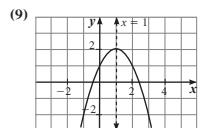
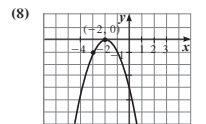
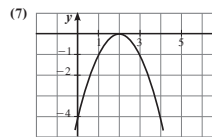
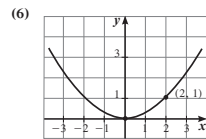
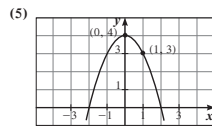
#### Quadratic Functions and Parabolas

#### المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1-4)، كل نقطة تقع على قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل. اكتب معادلة هذا القطع المكافئ، واذكر ما إذا كان الرسم البياني مفتوحاً إلى أعلى أم إلى أسفل.

- (1)  $F(3, 2)$  (2)  $F(8, -12)$  (3)  $H(-6, -2)$  (4)  $G(-2, 5)$

في التمارين (5-10)، اكتب معادلة كل قطع مكافئ بدلالة إحداثيات رأسه.

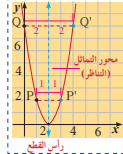


24



## في نشاط (1)

ناقش مع الطلاب الفقرتين (a), (b) واستمع جيدًا إلى ملاحظاتهم وأسئلتهم، وتأكد من أنهم قد وجدوا بشكل صحيح إحداثيات النقاط المناظرة للنقاط المعطاة على القطع المكافئ وأنهم قد تفهموا جيدًا الدور الذي يمثله محور التماثل في القطع المكافئ.



- نشاط (1)**  
 مستخدمًا الرسم البياني الموضح،  
 أوجد إحداثيات الرأس.  
 حدد معادلة محور التماثل.  
 حدد النقطة المناظرة لكل من  $P(1, 2)$ ,  $Q(4, 8)$   
 رأس القطع.

**ملاحظة:** معادلة الدالة التي تمثل قطعًا مكافئًا رأسه  $(0, 0)$  هي:  $y = ax^2$   
 لإيجاد قيمة  $a$ ، استخدم إحداثيات نقطة على المنحنى غير نقطة الرأس.  
 معادلة محور تماثل هذا القطع المكافئ هي  $x = 0$ .

### مثال (1)

كل نقطة مما يلي تقع على قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل. اكتب معادلة تربيعية لهذا القطع المكافئ واذكر ما إذا كان بيانه مفتوحًا إلى أعلى أم إلى أسفل.

a  $F(-1, 6)$

b  $H(-4, -8)$

الحل:

معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل هي على الصورة:  $y = ax^2$

يمر القطع المكافئ بالنقطة  $F(-1, 6)$

$$6 = a(-1)^2 \Rightarrow a = 6$$

$$y = 6x^2$$

$$\therefore a = 6, 6 > 0$$

$\therefore$  القطع المكافئ مفتوح إلى أعلى.

معادلة القطع المكافئ هي على الصورة:  $y = ax^2$

يمر القطع المكافئ بالنقطة  $H(-4, -8)$

$$-8 = a(-4)^2$$

$$16a = -8 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x^2$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} < 0$$

$\therefore$  القطع المكافئ مفتوح إلى أسفل.

### حاول أن تحل

كل نقطة مما يلي تقع على قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل.

اكتب معادلة تربيعية لهذا القطع المكافئ واذكر ما إذا كان بيانه مفتوحًا إلى أعلى أم إلى أسفل.

a  $E(4, 2)$

b  $D(1, -5)$

57

## في المثال (2)

أكد للطلاب أن خطوط التوتر العالي والتي تستند على الأعمدة تأخذ دائمًا شكل قطع مكافئ مفتوحًا إلى الأعلى لأسباب تتعلق بدرجة الحرارة.

شجعهم على القيام ببحث أو التواصل مع معلم مادة الفيزياء حول هذا الموضوع.

## في المثال (3)

ركّز على إزاحة القطوع المكافئة والربط بين المعادلة:

$y = ax^2$ ، والمعادلة:  $y = a(x-h)^2 + k$ ، حيث إن رأس القطع المكافئ سوف يتحول من نقطة الأصل  $(0, 0)$  إلى نقطة  $(h, k)$  دون أن يتغير شكله أو فتحته.

## في المثالين (4), (5)

أعط أمثلة بديلة، واطلب إلى متطوعين رسم قطع مكافئ بدلالة إحداثيات رأسه، ومحور التماثل وكيفية استخدامه.

## في المثال (6)

وضّح للطلاب كيفية استخدام نموذج الدالة التربيعية التي تمثل قطعًا مكافئًا في موقف قد يشاهدونه في ملاعب كرة المضرب.

## في المثال (7)

تطبيق القيمة العظمى في القطع المكافئ على الأرباح في مجال التسويق. وسوف يرى الطلاب لاحقًا أمثلة كثيرة تستخدم فيها القيمة العظمى أو القيمة الصغرى في مجالات إنتاجية وصناعية متعددة.

في المثالين (11-18)، ارمم منحنى كل دالة من الدوال التالية:

(11)  $y = (x+3)^2$

(12)  $y = (x-2)^2$

(13)  $y = -(x+1)^2$

(14)  $y = -x^2 + 3$

(15)  $y = (x+4)^2 + 1$

(16)  $y = 3(x-2)^2 + 4$

(17)  $y = -4(x+3)^2$

(18)  $y = -2(x+1)^2 - 4$

(19) الكتابة: صف الخطوات التي سوف تستخدمها لرسم الدالة،  $y = -2(x-3)^2 + 4$  بيانيًا.

(20) السؤال المفتوح: اكتب معادلة لدالة يمثلها بيانيًا قطع مكافئ له محور التماثل التالي،  $x = -2$ .

في المثالين (21-25)، ارمم كل قطع مكافئ مستخدمًا المعلومات المعطاة. ثم اكتب معادلته بدلالة إحداثيات الرأس.

(21) الرأس  $V(0, 0)$  ويمر بالنقطة  $P(2, 10)$

(22) الرأس  $V(0, 0)$  ويمر بالنقطة  $P(-2, -10)$

(23) الرأس  $V(0, 5)$  ويمر بالنقطة  $P(1, -2)$

(24) الرأس  $V(3, 1)$  والجزء المقطوع من محور الصادات  $-2$

(25) الرأس  $V(-2, 6)$  والجزء المقطوع من محور السينات  $2$

### المجموعة B تمارين موضوعية

في المثالين (1-5)، ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة وظلل (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) المعادلة  $y = 2x^2 - 2(3-x)^2$  تمثل معادلة قطع مكافئ.

(2) القطع المكافئ  $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 - 3$  فتحته إلى الأعلى.

(3) المعادلة  $y = 2(x-1)^2 + 2$  يكون بيانيًا أكثر اتساعًا من بيان الدالة  $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ .

(4) توجد عند رأس منحنى الدالة  $y = -(x-3)^2 - 2$  قيمة عظمى.

(5) منحنى القطع المكافئ  $y = (-x+2)^2 + 3$  يمر بالنقطة  $P(2, 3)$ .

في المثالين (6-11)، ظلل رمز الدائرة الذي عليه الإشارة الصحيحة.

(6) الدالة  $y = a(3-x)^2 - 2$  يكون رسمها أوسع من رسم بيان الدالة  $y = -2x^2 - 2$  إذا كان:

- (a)  $|a| = 2$  (b)  $|a| > 2$  (c)  $a < 2$  (d)  $|a| < 2$

(7) معادلة القطع المكافئ  $y = 2x^2$  الذي تم إزاحة رأسه وحدتين يسارًا و4 وحدات لأعلى هي:

- (a)  $y = (2x+2)^2 + 4$  (b)  $y = 2(x-2)^2 + 4$

- (c)  $y = 2(x+2)^2 + 4$  (d)  $y = 2(x+2)^2 - 4$

25

## 6 الربط

الأمثلة (7), (6), (2) تحقق الربط بين القطع المكافئ واستخداماته في مجالات متعددة.

## 7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في كتابة إحداثيات رأس القطع

المكافئ من المعادلة:  $y = a(x - h)^2 + k$

ساعدهم على المقارنة بأمثلة متعددة. مثال ذلك:

$$y = 2(x + 3)^2 - 4, \quad h = -3, \quad k = -4$$

وبالتالي إحداثيات الرأس هي  $(-3, -4)$

## 8 التقييم

راقب الطلاب وهم يجيبون عن أسئلة فقرات «حاول أن تحل» للتأكد من سلامة أدائهم وفهمهم لما ورد في الدرس.

## اختبار سريع

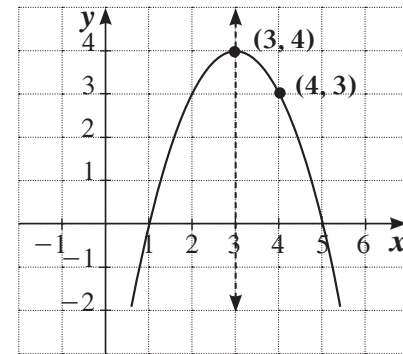
1 أوجد معادلة قطع مكافئ إحداثيات رأسه

$(-3, 4)$  ويمر بالنقطة  $(1, -2)$

$$f(x) = -3(x + 3)^2 + 4$$

2 مستخدماً الرسم التالي، اكتب معادلة القطع

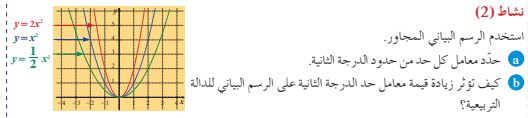
المكافئ بدلالة إحداثيات الرأس ثم بالصورة العامة.



بدلالة إحداثيات الرأس:  $f(x) = -(x - 3)^2 + 4$

بالصورة العامة:  $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

كل القطوع المكافئة لها الشكل العام نفسه، ويتغير اتساع القطع المكافئ تبعاً لتغير معامل حد الدرجة الثانية.



## مثال (2) الصلة بالواقع

الكهرباء: توضع أعمدة خط التوتر العالي لنقل الطاقة الكهربائية بارتفاع مناسب فإذا كان البعد الرئيس بين العمودين هو 400 m، يتدلى السلك حوالي 2 m في الوسط بين العمودين.

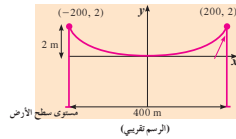


أوجد معادلة القطع المكافئ والتي قد تمثل سلك أبراج خط التوتر العالي.

الفرض أن رأس القطع المكافئ هو نقطة الأصل.

الحل:

أبدأ برسم الشكل



الرسم تقريبي

بما أن النقطة  $(200, 2)$  تقع على الرسم البياني، عوض بالقيم في المعادلة:

$$y = ax^2$$

$$a(200)^2 = 2$$

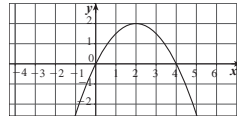
$$a = \frac{2}{40000}$$

$$a = 0.00005$$

المعادلة التي تصف الشكل الناتج عن السلك هي:  $y = 0.00005x^2$

58

(8) الشكل أدناه يمثل منحنى قطع مكافئ معادلته هي،



(a)  $y = (x - 2)^2 + 2$

(b)  $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2$

(c)  $y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 - 2$

(d)  $y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2$

(9) القطع المكافئ:  $y = a(x - h)^2 + k$  يقطع المحورين على الأكثر في،

(a) نقطة

(b) نقطتين

(c) نقاط 3

(d) نقاط 4

(10) القيمة الصغرى للدالة  $y = \frac{1}{3}(3 - x)^2 - 2$  هي عند النقطة،

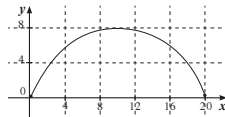
(a)  $(3, -2)$

(b)  $(-3, 2)$

(c)  $(-3, -2)$

(d)  $(3, 2)$

(11) يقع جسر على شكل قطع مكافئ فوق نهر. يبلغ البعد بين قاعدتيه 20 m وارتفاعه الأقصى 8 m معادلة القطع المكافئ هي،



(a)  $y = 0.08(x - 10)^2 + 8$

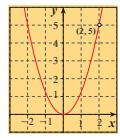
(b)  $y = -0.08(x - 10)^2 + 8$

(c)  $y = -0.08(x - 20)^2 + 8$

(d)  $y = 0.08(x + 10)^2 + 8$

26

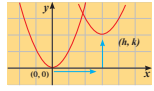
«عمل تعاوني»



حاول أن تحل  
 2. البيان المقابل يمثل دالة:  $y = ax^2$   
 أوجد معادلة هذه الدالة

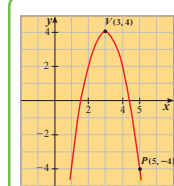
معادلات بعض القطوع المكافئة بدلالة إحداثيات رؤوسها وخصائصها

Equations of some Parabolas in terms of the Coordinates of Vertices



ليس بالضرورة أن يكون رأس القطع المكافئ نقطة الأصل.  
 المعادلة في الصورة:  $y = a(x-h)^2 + k$ ,  $a \neq 0$ ,  $h, k \in \mathbb{R}$   
 تسمى **معادلة القطع المكافئ بدلالة إحداثيات رأسه  $(h, k)$**  وهي عبارة عن إزاحة لبيان منحنى الدالة:  $y = ax^2$   
 وتذكر أنه عندما تكون  $h, k$  موجبتين فإن الإزاحة تحرك المنحنى عدد  $h$  من الوحدات يمينًا وعدد  $k$  من الوحدات إلى الأعلى كما في الشكل. وعندما تكون  $h$  سالبة يزاح المنحنى عدد من الوحدات إلى اليسار، وعندما تكون  $k$  سالبة، يزاح المنحنى عدد من الوحدات إلى الأسفل.

بعض خصائص القطوع المكافئة  
 المعادلة على الصورة:  $y = a(x-h)^2 + k$ ، هي دالة مكوّنة بدلالة إحداثيات الرأس، وهذه المعادلة تعتمد بالمعلومات التالية:  
 رأس المنحنى هو النقطة  $(h, k)$  ومحور التماثل هو الخط:  $x = h$   
 تكون فتحة القطع المكافئ إلى الأعلى عندما تكون  $a$  موجبة، وتكون فتحة القطع المكافئ إلى الأسفل عندما تكون  $a$  سالبة.  
 إذا كان  $|a| < 1$ ، فإن الرسم سوف يكون أوسع من رسم الدالة:  $y = x^2$   
 إذا كان  $|a| > 1$ ، فإن الرسم سوف يكون أضيق من رسم الدالة:  $y = x^2$



مثال (3)  
 في الشكل المقابل اكتب معادلة القطع المكافئ الذي رأسه  $V(3, 4)$  ويمر بالنقطة  $P(5, -4)$   
 الحل:  
 رأس القطع:  $(h, k) = (3, 4)$   
 لذلك استخدم المعادلة، ثم حلها لإيجاد قيمة  $a$ :

- 50 cm
- $y = -0.35x^2 + 50$

$x$	0	2	4	5	6
$y$	50	48.6	44.4	41.25	37.4

أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة هو 50 cm عند  $x = 0$ .  
 نطابق النتائج عند النظر إلى الرسم وعند حساب أعلى قيمة لـ  $y$ ، فنحصل على  $y = 50$  كأعلى قيمة.

- تتنوع الإجابات. مثال:  
 القيمة العظمى لـ  $y =$  الارتفاع الأقصى

«نشاط (1)»

- (2, 0)
- $x = 2$
- $P'(3, 2)$   
 $Q(0, 8)$

«حاول أن تحل»

- رأس القطع المكافئ هو النقطة  $(0, 0)$   
 في المعادلة:  $y = ax^2$   
 (a) يمر المنحنى في النقطة  $E(4, 2)$  نعوض:  
 $2 = a(4)^2$  فنحصل على  $a = \frac{1}{8}$   
 والمعادلة:  $y = \frac{1}{8}x^2$   
 والمنحنى مفتوح إلى الأعلى.  
 (b)  $-5 = a(1)^2$ ، ومنه  $a = -5$   
 والمعادلة:  $y = -5x^2$   
 والمنحنى مفتوح إلى الأسفل.
- $y = ax^2$  المنحنى يمر بالنقطة  $(2, 5)$   
 $5 = a(2)^2$ ,  $a = \frac{5}{4}$   
 المعادلة:  $y = \frac{5}{4}x^2$

### 3 رأس القطع المكافئ هو النقطة (2, 4)

فتكون المعادلة:  $y = a(x-2)^2 + 4$

يمر المنحنى في النقطة (0, 0)

فيكون:  $0 = a(0-2)^2 + 4$  ومنه  $a = -1$

والمعادلة:  $y = -(x-2)^2 + 4$

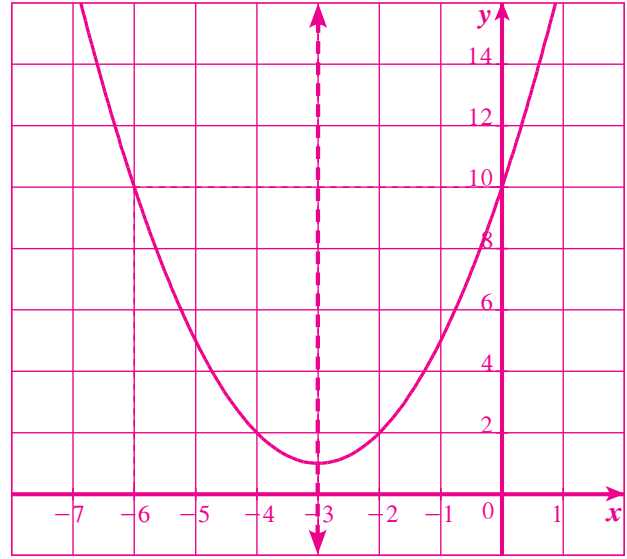
### 4 رأس المنحنى (-3, 1)

محور التماثل  $x = -3$

إذا  $x = 0$  تكون  $y = 10$ ، إذا  $x = -6$  تكون  $y = 10$

النقطة (0, 10) هي انعكاس للنقطة (-6, 10) في

محور التماثل:  $x = -3$



$$y = a(x-h)^2 + k$$

$$y = a(x-3)^2 + 4$$

$$-4 = a(5-3)^2 + 4$$

$$-8 = 4a$$

$$-2 = a$$

$$h = 3, k = 4$$

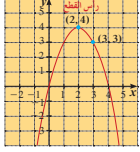
عوض بالنقطة (5, -4)

اختصر

حل لإيجاد قيمة  $a$

∴ معادلة القطع المكافئ هي:  $y = -2(x-3)^2 + 4$

حاول أن تحل



أوجد معادلة القطع المكافئ في الرسم المقابل.

يمكنك استخدام خصائص القطع المكافئ لرسم بيان الدوال التربيعية

مثال (4)

ارسم منحنى الدالة:  $y = 2(x+1)^2 - 2$  باستخدام خواص القطع المكافئ.

الحل:

∴ المعادلة تربيعية على الصورة  $y = a(x-h)^2 + k$  فهي تمثل قطعاً مكافئاً.

∴  $h = -1, k = -2$

∴ رأس المنحنى (-1, -2)

وكذلك  $a = 2, 2 > 0$

∴ فتحة المنحنى لأعلى

والرأس عنده قيمة صغرى للدالة.

معادلة محور التماثل هي:  $x = h$

∴  $x = -1$  هو محور التماثل.

نرسم محور التماثل.

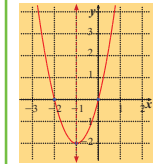


60

أوجد نقطة أخرى: عند  $x = 0$  فإن  $y = 0$   
أي أن المنحنى يمر بنقطة الأصل.  
حدّد انعكاس نقطة الأصل حول محور التماثل.  
ارسم منحنى يمر في النقاط الثلاث.

حاول أن تحل

4 ارسم منحنى الدالة:  $y = (x+3)^2 + 1$



مثال (5)

ارسم منحنى الدالة:  $y = -0.5(x-2)^2 + 3$  باستخدام خواص القطع المكافئ.

الحل:

∴ المعادلة تربيعية على الصورة  $y = a(x-h)^2 + k$  فهي تمثل قطعاً مكافئاً.

∴  $h = 2, k = 3$

∴ رأس المنحنى (2, 3)

∴  $a = -0.5, -0.5 < 0$

∴ فتحة المنحنى إلى أسفل والرأس عنده قيمة عظمى للدالة.

معادلة محور التماثل هي  $x = h$

∴  $x = 2$  هو محور التماثل

نرسم محور التماثل.

أوجد نقطة أخرى: عند  $x = 0$  فإن  $y = 1$

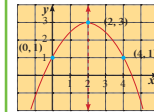
حدّد موقع النقطة (0, 1)

حدّد موقع انعكاس النقطة (0, 1) حول محور التماثل وهي (4, 1)

ارسم منحنى يمر في النقاط الثلاث.

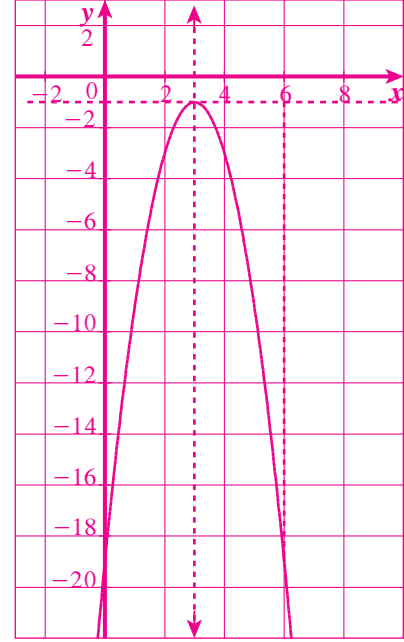
حاول أن تحل

5 ارسم منحنى الدالة:  $y = -2(x-3)^2 - 1$



61

- 5 رأس المنحنى  $(-1, 3)$ ، محور التماثل  $x = 3$  إذا  
 $x = 0$  فتكون  $y = -19$  إذا  $x = 6$  فتكون  $y = 19$   
 وبالتالي النقطة  $(0, -19)$  هي انعكاس للنقطة  
 $(6, 19)$  في محور التماثل  $x = 3$   
 الرسم البياني:



مثال (6) تطبيقات حياتية

رُميت كرة من فوق حاجز بارتفاع 150 cm عن سطح الملعب فاجازت الكرة الحاجز الشبكي ثم سقطت على الأرض مبتعدة 300 cm عن قاعدة الحاجز. استخدم الحاجز كمحور تناظر واكتب معادلة تنمذج مسار الكرة. افترض أن نقطة الأصل هي حيث يتقاطع الحاجز مع الأرض.



الحل:  
 يمكن نمذجة المسألة كما بين الرسم، باعتباره قطع مكافئ.

معادلة القطع المكافئ بدلالة إحداثيات الرأس هي:

$$y = a(x - h)^2 + k$$

∴ إحداثيات الرأس:  $(0, 150)$

$$\therefore h = 0, k = 150$$

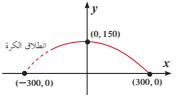
$$y = a(x - 0)^2 + 150, \quad y = ax^2 + 150$$

يسر البيان بالنقطة  $(300, 0)$  فيكون:

$$a(300)^2 + 150 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{600}$$

معادلة مسار الكرة هي:

$$y = -\frac{1}{600}x^2 + 150$$



حاول أن تتحل

6 في ملعب لكرة المضرب، رُمي لاعب الكرة من فوق الشبكة بارتفاع 1 m عن سطح الملعب فاجازت الكرة الشبكة ثم سقطت على الأرض مبتعدة 6 m عن قاعدتها. افترض أن نقطة الأصل هي حيث يتقاطع المستقيم الرأس في منتصف الشبكة مع أرض الملعب.



استخدم المستقيم كمحور تناظر واكتب معادلة تنمذج مسار الكرة.

الربط بالحياة:

كرة المضرب (Tennis) هي إحدى النشاطات الرياضية الحاضرة على عدد كبير من تشجع الجماهير. حيث يجازي فيها لاعبان في مباريات الفردي أو فريقان مكونان من لاعبين في مباريات الزوجي.

يستخدم كل لاعب مضرب يستخدمه في إرسال الكرة إلى منطقة الخصم بهدف تسجيل النقاط. وما يميز لعبة كرة المضرب عن غيرها من بقية الألعاب هو أنها تفتقد إجراء كثيرة من الجسم فضلاً عن التوافق بين الذهن وكثافة عضلات الجسم.



6 الرأس (0, 1)

$$y = a(x - h)^2 + k$$

$$y = a(x - 0) + 1$$

$$y = ax^2 + 1$$

يمر المنحنى بالنقطة (6, 0) فيكون:  $0 = 36a + 1$

$$\text{أي } a = -\frac{1}{36} \text{ والمعادلة: } y = -\frac{1}{36}x^2 + 1$$

$$7 \text{ في الدالة: } y = -100(x - 1.75)^2 + 300$$

إذا لم يكن هناك لا ربح ولا خسارة فتكون  $y = 0$

$$\text{ومنه: } -100(x - 1.75)^2 + 300 = 0$$

$$x = 3.48 \text{ دنانير أو } x = 0.018 \text{ دينار}$$

«نشاط (2)»

$$(a) \ 2, 1, \frac{1}{2}$$

(b) كلما صغر مُعامل حد الدرجة الثانية توسعت فتحة بيان الدالة التربيعية.

تطبيقات حياتية (مثال 7)

يبيع أحد المحلات عددًا أكبر من الفطائر عندما يخفض السعر، لكن ربحه يتغير. تُمَدج أرباح هذا المحل (بالدينار) وفقًا للدالة التالية:  $y = -100(x - 1.75)^2 + 300$  حيث  $x$  سعر الفطيرة بالدينار، و  $y$  أرباح هذا المحل بالدينار. يرغب صاحب المحل في تحقيق القيمة العظمى لربحه من البيع.



- صف المجال الواقعي للدالة.
- أوجد أرباحه اليومية إذا باع الفطيرة الواحدة، بـ 2 دينار. وإذا باع الفطيرة الواحدة بـ 1.25 دينار.
- ما السعر الذي يجب أن يبيع به الفطيرة الواحدة لتحقيق الربح الأكبر؟ وما قيمة هذا الربح؟

الحل:

a حيث إن  $x$  تمثل سعر الفطيرة يجب أن تكون  $x > 0$ .

$$y = -100(x - 1.75)^2 + 300$$

$$\text{عند } x = 2$$

$$y = -100(2 - 1.75)^2 + 300$$

$$y = 293.75$$

أي يكون ربحه 293.75 دينارًا.

$$\text{عند } x = 1.25$$

$$y = -100(1.25 - 1.75)^2 + 300$$

$$y = 275$$

أي يكون ربحه 275 دينارًا.

b تمثل الدالة قطعًا مكافئًا له قيمة عظمى لأن  $a < 0$ ، وبالتالي إحداثيات رأسه (1.75, 300)، حيث إن 1.75 دينار هو السعر الذي يحقق الربح الأكبر وقيمة هذا الربح الأكبر هي 300 دينار.

حاول أن تحل

7 في المثال (7) أوجد سعر بيع الفطيرة الواحدة إذا لم يربح ولم يخسر في أحد الأيام.

## 4-2: مقارنة بين صورة معادلة الدالة التربيعية بدلالة إحداثيات رأس المنحنى والصورة العامة

### 1 الأهداف

- يوجد رأس منحنى الدالة من الدالة التربيعية بالصورة العامة.
- يكتب المعادلات بدلالة إحداثيات الرأس وفي الصورة العامة.

### 2 المفردات والمفاهيم الجديدة

رأس القطع المكافئ - الصورة العامة.

### 3 الأدوات والوسائل

مسطرة - آلة حاسبة بيانية - ورق رسم بياني - جهاز إسقاط (Data Show) - حاسوب.

### 4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

- (a) أوجد إحداثيات رأس القطع المكافئ ومحور التماثل في:  $y = (x + 2)^2 - 3$ .
- (b) أوجد إحداثيات رأس القطع المكافئ ومحور التماثل في:  $y = 3x^2 + 4$ .
- (c) أوجد إحداثيات انعكاس النقطة  $(3, -3)$  في محور تماثل القطع المكافئ حيث معادلته:  $y = 2(x - 2)^2 - 5$ .

### 5 التدريس

يقدم هذا الدرس مقارنة بين صورة المعادلة التربيعية بدلالة إحداثيات رأس المنحنى والصورة العامة وكيفية التحويل من الصورة  $y = a(x - h)^2 + k$  إلى الصورة  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) ويوفر الربط بين الثوابت  $a, b, c, h, k$  ويوجد علاقة بين معادلة محور التماثل  $x = h$  مع  $-\frac{b}{2a}$  فنحصل على  $x = -\frac{b}{2a}$ . تابع بدقة فقرة «عمل تعاوني» للتأكد من أنهم استطاعوا الربط جيّدًا بين الصورة العامة والصورة بدلالة إحداثيات الرأس.

## 4-2

مقارنة بين صورة معادلة الدالة التربيعية بدلالة إحداثيات رأس المنحنى والصورة العامة

### Comparing Vertex and General Form Equation of Quadratic Functions

#### عمل تعاوني

اعدل في مجموعات قوامها أربعة طلاب. أولاً، اطلب من كل مجموعة رسم بيان زوج من المعادلات التالية. ويمكنك استخدام الآلة الحاسبة البيانية في رسم بيان زوج من المعادلات التالية على الشاشة نفسها للآلة الحاسبة.

$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ (الصورة العامة)	$a$	$b$	$y = a(x - h)^2 + k, a \neq 0$ (صورة المعادلة بدلالة إحداثيات رأس المنحنى)	$h$
1. $y = x^2 - 4x + 4$			$y = (x - 2)^2$	
2. $y = x^2 + 6x + 8$			$y = (x + 3)^2 - 1$	
3. $y = -3x^2 - 12x - 8$			$y = -3(x + 2)^2 + 4$	
4. $y = 2x^2 + 12x + 19$			$y = 2(x + 3)^2 + 1$	

- ب) ما الذي تلاحظه في رسوم كل زوج من المعادلات؟  
 ج) هل كل زوج من المعادلات يمثل معادلتين متكافئتين؟  
 د) أقطاب: أكمل الجدول أعلاه.  
 هـ) انظر إلى القيم  $h, b$  في أول زوجين من المعادلات. اكتب صيغة توضح العلاقة بين  $h, b$ .  
 و) استخدم الزوجين الآخرين من المعادلات لتوسع الصيغة التي حصلت عليها ولكن توضح العلاقة بين  $h, b, a$ .  
 ز) ثالثاً، ما العلاقة بين محور التماثل ورأس القطع المكافئ؟  
 ح) ما معادلة محور التماثل للقطع المكافئ:  $y = ax^2 + bx + c$ .  
 ط) ما معادلة محور التماثل للقطع المكافئ:  $y = 2x^2 + 10x + 7$ .

في فقرة «عمل تعاوني»، بحثت في كيفية تحديد رأس منحنى الدالة التربيعية. عندما تكتب معادلة الدالة في الصورة العامة، فإن الإحداثي السيني لرأس القطع المكافئ يكون  $-\frac{b}{2a}$ ، ولايجاد الإحداثي الصادي  $k$ ، عوض بقيمة الإحداثي السيني  $h$  في المعادلة ثم بسط.

سوف تتعلم  
 • إيجاد رأس منحنى الدالة من التربيعية بالصورة العامة.  
 • كتابة المعادلات بدلالة إحداثيات الرأس وفي الصورة العامة.

المفردات والمصطلحات  
 • رأس القطع المكافئ  
 • Vertex of a Parabola  
 • الصورة العامة  
 • General Form

#### رابط بالحياة:

تسمح الآلات الحاسبة البيانية برسم بيانات الدوال ومنها الدوال التربيعية. تختلف المخططات المتجعة من حاسبة لأخرى لكن معطياتها بسط كثيرًا. عجلة الرسم كالتالي:

1. اضغط على زر GRAPH.  
 2. اكتب معادلة الدالة.  
 3. اضغط على: EXE،  
 يظهر بيان الدالة على الشاشة.



## تموّن 2-4

مقارنة بين صورة المعادلة التربيعية بدلالة إحداثيات رأس المنحنى والصورة العامة

### Comparing Vertex and General Form Equation of Quadratic Functions

#### المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1-7)، اكتب كلًا من الدوال التالية بدلالة إحداثيات الرأس:

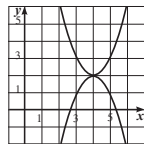
- (1)  $y = x^2 - 4x + 6$  (2)  $y = x^2 + 2x + 5$  (3)  $y = 4x^2 + 7x$   
 (4)  $f(x) = -2x^2 + 35$  (5)  $y = -8x^2$  (6)  $f(x) = 2x^2 + x$   
 (7)  $y = -3x^2 - 2x + 1$

في التمارين (8-13)، اكتب معادلة كل قطع مكافئ في الصورة العامة.

- (8)  $y = (x + 3)^2 - 4$  (9)  $f(x) = 2(x - 2)^2 + 5$  (10)  $f(x) = -(x - 7)^2 + 10$   
 (11)  $y = (5x + 6)^2 - 9$  (12)  $f(x) = -(3x - 4)^2 + 6$  (13)  $f(x) = -2x(x + 7) + 8x$

(14) التفكير الناقد: معادلة أحد الرسمين البيانيين أدناه هي:  $y = x^2 - 8x + 18$

اكتب معادلة الرسم البياني الآخر في الصورة العامة.



(15) منحنى الدالة:  $y = 2x^2 - 12x + c$ ، له رأس عند النقطة  $(3, 5)$ . فما قيمة  $c$ ؟

(16) منحنى الدالة:  $y = ax^2 + bx + 8$ ، له رأس عند النقطة  $(-2, -4)$ . فما قيم  $a, b$ ؟

(17) أرادت السلطات المسؤولة في إحدى المدن إقامة بناء لرعاية الأطفال، على أن يكون أمام البناء ملعب مستطيل الشكل وأن يكون الملعب محاطًا بسور من الجهات الثلاث، حيث إن الجهة الرابعة هي البناء.

ما مساحة أكبر ملعب يمكن إحاطته بسور طوله 100م فقط؟

## في المثال (1)

شجع الطلاب على إيجاد أولاً قيمة  $h = -\frac{b}{2a}$ ، ثم تعويض هذه القيمة في الصيغة العامة لإيجاد قيمة  $k$ ، وبذلك يكون التحول من الصورة العامة إلى الصورة بدلالة إحداثيات الرأس.

## في المثال (2)

يؤكد الصلة بالواقع واستخدام المعطيات الجديدة في إيجاد إحداثيات رأس القطع المكافئ التي تعبر عن القيمة العظمى أو القيمة الصغرى إذا تمّ تعويض  $x = -\frac{b}{2a}$  في المعادلة الأساسية أي في الصورة العامة.

## في المثال (3)

تحويل من الصورة بدلالة إحداثيات الرأس إلى الصورة العامة وذلك بتفكيك المربع الكامل، ثم تجميع الحدود المتشابهة.

## في المثال (4)

يستخدم رأس القطع المكافئ لإيجاد قيم مجهولة في معادلته.

## في المثال (5)

تطبيقات حياتية باستخدام رأس القطع المكافئ لإيجاد قيمة عظمى.

## 6 الربط

يوفر هذا الدرس أمثلة متعددة في الاقتصاد والتسويق والإنشاءات، وذلك باستخدام القيمة العظمى عند إحداثيات رأس القطع المكافئ كما في المثالين (5)، (2)

## 7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في إيجاد الإحداثي السيني لرأس القطع المكافئ فيكتبون:  $h = \frac{b}{2a}$  أو  $h = -\frac{b}{a}$  أشر إليهم أن الإحداثي السيني لرأس القطع المكافئ هو  $h = -\frac{b}{2a}$ ، ثم نعوض هذه القيمة في الصورة العامة لإيجاد الإحداثي الصادي.

**مثال (1)**  
اكتب الدالة:  $y = 2x^2 + 10x + 7$  بدلالة إحداثيات الرأس.  
الحل:  
صورة المعادلة بدلالة إحداثيات الرأس  $(h, k)$  هي:  $y = a(x-h)^2 + k$   
الإحداثي السيني:  
استخدم  $-\frac{b}{2a}$  لإيجاد الإحداثي السيني  
عوض بقم  $a, b$   
 $h = -\frac{b}{2a}$   
 $= -\frac{10}{2(2)}$   
 $= -2.5$   
الإحداثي الصادي:  
عوض بـ  $x = -2.5$   
في المعادلة الأصلية  
المعادلة بدلالة إحداثيات الرأس هي:  $y = 2(x + 2.5)^2 - 5.5$   
اكتب الدالة:  $y = 2x^2 + 10x + 5 - 3x^2 + 12x + 5$  بدلالة إحداثيات رأس المنحنى، ثم ارسم بيانيها.

المصطلحات  
مع المحيط:  
Perimetre (P)  
المساحة: Area (A)  
الطول: Length (L)  
العرض: Width (W)  
الإرتفاع: Height (h)  
المستطيل: Rectangle

يمكنك استخدام رأس القطع المكافئ في تطبيقات حياتية تتطلب إيجاد أكبر مساحة وأصغر مساحة

**مثال (2)**  
الصلة بالواقع  
إذا قمت بالخطيب لصنع بروز مستطيل الشكل لمجموعة من الصور، وذلك تقديماً كهدية تخرج لأحد الأصدقاء، وكان لديك قطعة من الخشب طولها 2.8 m لصنع بروز. فما أبعاد البرواز التي تعطيك أكبر مساحة (A) لوضع مجموعة الصور؟ وما هي أكبر مساحة؟  
الحل:  
استخدم صيغة المحيط (P) لإيجاد تعبير رياضي (مقدار) يعبر عن طول البرواز (L) بدلالة العرض (W).  
المحيط  $2 = (\text{الطول} + \text{العرض})$   
 $P = 2(L + W)$   
 $2(W + L) = 280$   
 $L = 140 - W$   
بسط، وحل لإيجاد الطول

مراجعة سريعة:  
إيجاد محيط المستطيل ومساحته، استخدم ما يلي:  
المحيط = 2(الطول + العرض)  
 $P = 2(L + W)$   
المساحة = الطول × العرض  
 $A = L \times W$

## المجموعة B تمارين موضوعية

- في التمارين (1-4)، ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.
- (1) المعادلة  $y = -2(x+3)^2 + 4$  هي معادلة قطع مكافئ بدلالة إحداثيات رأس المنحنى. (a) (b)
- (2) المعادلة  $y = 3(x-2)^2 + 4(x-2) + 1$  هي معادلة قطع مكافئ في الصورة العامة. (a) (b)
- (3) رأس القطع المكافئ الذي معادلته  $y = x^2 - 2x - 3$  هو  $(1, -4)$ . (a) (b)
- (4) معادلة محور التماثل للقطع المكافئ:  $y = 3x^2 + 12x + 8$  هي  $y = -4$ . (a) (b)
- في التمارين (5-12)، ظلل رمز الدائرة الدالة على الإجابة الصحيحة.
- (5) رأس القطع المكافئ الذي معادلته  $y = ax^2 + 2ax + 5$ ،  $a \neq 0$  يمكن أن يكون: (a) (1, 1) (b) (-1, 1) (c) (1, 5) (d) (-1, 5)
- (6) معادلة القطع المكافئ المار بالنقطة  $(-3, 10)$  ورأسه  $(0, 1)$  هي: (a)  $y = 5x^2 + 1$  (b)  $y = -3x^2 + 10$  (c)  $y = x^2 + 1$  (d)  $y = -x^2 - 1$
- (7) منحنى الدالة  $y = -2x^2 + 4x - 5$  له رأس عند النقطة: (a)  $(-2, -3)$  (b)  $(1, -3)$  (c)  $(1, -1)$  (d)  $(-1, -3)$
- (8) يقع رأس منحنى  $y = -x^2 - 16x - 62$  في الربع: (a) الأول (b) الثاني (c) الثالث (d) الرابع
- (9) معادلة محور التماثل للقطع المكافئ  $y = x^2 - 6x + 2$  هي: (a)  $x = 12$  (b)  $x = 6$  (c)  $x = 3$  (d)  $x = 2$
- (10) المساحة العظمى بالوحدات المربعة لمستطيل محيطه 128 m هي: (a) 4096 (b) 1024 (c) 256 (d) 32
- (11) نمذج مدخول إحدى الشركات بالعلاقة  $R = -15p^2 + 300p + 12000$  حيث  $p$  (بالدينار) هو سعر مبيع إحدى القطع المنتجة. قيمة  $p$  التي تعطي أعلى مدخول هي: (a) 30 (b) 10 (c) 15 (d) 12
- (12) أي منحنى من الدوال أدناه له خط تماثل  $x = 3$ ? (a)  $y = 2(x+3)^2$  (b)  $y = x^2 - 6x + 9$  (c)  $y = x^2 + 3x + 6$  (d)  $y = 4(x+3)^2$



## 8 التقييم

توفر فقرات «حاول أن تحل» فرصة مهمة للمعلم ليتعرف على مدى متابعة الطلاب لما ورد في هذا الدرس وكيفية التحويل من صيغة إلى أخرى دون ارتكاب أخطاء.

### اختبار سريع

1 اكتب الدالة:  $f(x) = 2x^2 + 8x - 5$

بدلالة إحداثيات الرأس.

$$f(x) = 2(x + 2)^2 - 13$$

2 اكتب الدالة:  $f(x) = (x + 2)^2 - 1$

بالصورة العامة.

$$f(x) = x^2 + 4x + 3$$

## 9 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

أولاً: (a) تحقق من عمل الطلاب على الآلة الحاسبة.

(b) يجب أن تبين الآلة الحاسبة الرسوم البيانية

نفسها لكل زوج من المعادلات في الصورة

العامة والصورة بدلالة إحداثيات الرأس.

(c) كل زوج من المعادلات، يمثل شكلين مختلفين

للمعادلة نفسها.

ثانياً: (a)

$y = ax^2 + bx + c$ (الصورة العامة)	$a$	$b$	$y = a(x - h)^2 + k$ (صورة المعادلة بدلالة إحداثيات رأس المنحنى)	$h$
$y = x^2 - 4x + 4$	1	-4	$y = (x - 2)^2$	2
$y = x^2 + 6x + 8$	1	6	$y = (x + 3)^2 - 1$	-3
$y = -3x^2 - 12x - 8$	-3	-12	$y = -3(x + 2)^2 + 4$	-2
$y = 2x^2 + 12x + 19$	2	12	$y = 2(x + 3)^2 + 1$	-3

اكتب معادلة لإيجاد مساحة البرواز  
المساحة = الطول × العرض  
عرض بالطول والعرض  
بتسط

$$A = L \times W$$

$$A = (140 - W)(W)$$

$$A = -W^2 + 140W$$

المساحة دالة تربيعية ويانها قطع مكافئ له قيمة عظمى عند رأس المنحنى  $\frac{-b}{2a}$   
نحصل على أكبر مساحة عندما يكون

$$W = \frac{-b}{2a} = -\frac{-140}{2(-1)} = 70 \text{ cm}$$

$$L = 140 - W$$

$$L = 140 - 70 = 70 \text{ cm}$$

وحتى إن  
وتتحقق أكبر مساحة للبرواز عندما يكون كل من طول وعرض البرواز يساوي 70 cm  
وتكون أكبر مساحة:  $70 \times 70 = 4900 \text{ cm}^2$   
أي أكبر مساحة:  $4900 \text{ cm}^2$

حاول أن تحل

- 2 a ما أفضل تسمية للشكل الهندسي الذي يعطي أكبر مساحة للبرواز في المثال (2)؟  
b هل تعتقد أن هذا الشكل يعطي دائماً أكبر مساحة لشكل مستطيل محيطه معلوم؟  
c أوجد عددين موجبين  $c, d$  على أن يكون:  $c + d = 18$  و  $c > d$  أكبر ما يمكن.

لقد حولت معادلة الدالة التربيعية من الصورة العامة إلى الصورة بدلالة إحداثيات الرأس.  
يمكنك أيضاً تحويل معادلة الدالة التربيعية من صورتها بدلالة إحداثيات الرأس إلى الصورة العامة.

مثال (3)

اكتب المعادلة:  $y = 3(x - 1)^2 + 12$  في الصورة العامة.

الحل:

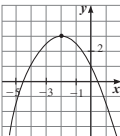
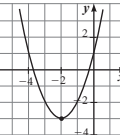
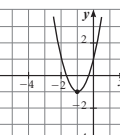
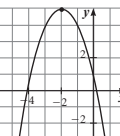
$$y = 3(x - 1)^2 + 12$$

$$y = 3(x^2 - 2x + 1) + 12 \quad \text{أوجد } (x - 1)(x - 1)$$

$$y = 3x^2 - 6x + 3 + 12 \quad \text{استخدم خاصية التوزيع}$$

$$y = 3x^2 - 6x + 15 \quad \text{بتسط}$$

في التمارين (13-15) لديك قائمتان، اختر من القائمة (2) ما يناسبه في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.

القائمة (1)	القائمة (2)
<p>الصيغ البيانية للدالة:</p> <p>(13) <math>y = x^2 + 4x + 1</math> هو،</p>	<p>(a) </p>
<p>(14) <math>y = -x^2 - 4x + 1</math> هو،</p>	<p>(b) </p>
<p>(15) <math>y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1</math> هو،</p>	<p>(c) </p>
	<p>(d) </p>

**حاول أن تحل**

a اكتب المعادلة:  $y = -2(x+3)^2 - 7$  في الصورة العامة، وارسم بيانيها.  
b تعطي كل من المعادلة في الصورة بدلالة إحداثيات الرأس والصورة العامة معلومات عن الدالة. ما مميزات استخدام كل صورة لرسم بيان الدالة؟

**مثال (4)**

منحنى الدالة  $y = ax^2 + bx + 12$  له رأس عند النقطة (1, 8) فما قيم  $a, b$  ؟

الحل:  
طريقة أولى:  
النقطة (1, 8) تنتمي إلى منحنى الدالة  
∴ بالتعويض

$$8 = a(1) + b(1) + 12$$

$$8 = a + b + 12$$

$$a + b = -4 \quad (1)$$

$$x = -\frac{b}{2a}$$

الإحداثي السيني لرأس القطع المكافئ:

$$\therefore 1 = -\frac{b}{2a} \Rightarrow b = -2a \quad (2)$$

$$\begin{cases} a + b = -4 \\ b = -2a \end{cases}$$

نحل النظام

$$a - 2a = -4$$

$$-a = -4 \Rightarrow a = 4$$

في 1 نعوض عن  $b$  بقيمتها في 2 فنحصل على:

$$b = -2(4) = -8$$

$$a = 4, b = -8 \therefore$$

طريقة ثانية:

بالمقارنة مع الدالة المعطاة  $y = ax^2 + bx + 12$

$$y = a(x-1)^2 + 8$$

$$= a(x^2 - 2x + 1) + 8$$

$$= ax^2 - 2ax + a + 8$$

$$a + 8 = 12 \Rightarrow a = 4$$

$$-2a = b \Rightarrow b = -2(4) = -8$$

نجد أن

**حاول أن تحل**

4 منحنى الدالة  $y = ax^2 + 4x + c$  له رأس عند النقطة (-1, 5). فما قيم  $a, c$  ؟

(b) نلاحظ أن:  $h = -\frac{b}{2}$  وذلك في المعادلتين الأولى والثانية.

(c) نلاحظ أن:  $h = -\frac{b}{2a}$  وذلك في المعادلتين الثالثة والرابعة وهذا ينطبق على الحالتين في الفقرة (b)، لأن  $a = 1$

ثالثًا: (a) معادلة محور التماثل هو قيمة الإحداثي السيني

$$x = -\frac{b}{2a}$$

$$(b) x = -\frac{b}{2a}$$

$$(c) x = \frac{-10}{2 \times 2} = \frac{-5}{2}$$

«حاول أن تحل»

$$1 \quad y = -3x^2 + 12x + 5$$

$$h = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2(-3)} = 2, \quad h = 2$$

نعوض  $x = 2$  بـ  $y$  فيكون  $y = 17$  والمعادلة بدلالة إحداثيات الرأس هي:

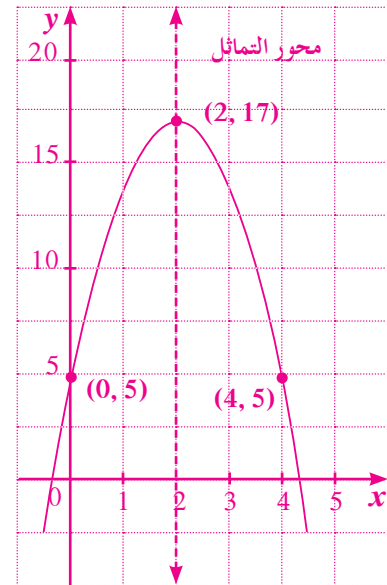
$$y = -3(x-2)^2 + 17$$

الرأس (2, 17)، محور التماثل  $x = 2$

نقطة على المنحنى (4, 5) انعكاسها في محور

التماثل النقطة (0, 5).

الرسم البياني:



**مثال (5) تطبيقات حياتية**

وجد صاحب محل لبيع الأحذية الرياضية أنه يمكن نمذجة ربحه بالدالة:

$$f(x) = -15x^2 + 600x + 50$$

حيث  $x$  تمثل سعر الحذاء بالدينار.

**a** ما سعر الحذاء الذي يحقق أعلى ربح؟  
**b** ما قيمة أعلى ربح؟

الحل:

**a**  $f(x) = -15x^2 + 600x + 50$

رسمها البياني قطع مكافئ له قيمة عظمى، نتحقق القيمة العظمى عند

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$x = \frac{-600}{2(-15)} = 20$$

أي أن ثمن الحذاء الذي يحقق أعلى ربح هو 20 دينارًا.

**b**  $f(20) = -15(20)^2 + 600(20) + 50 = 6050$

∴ الربح الأعلى يساوي 6 050 دينارًا.

**حاول أن تحل**

**5** لاحظ صاحب محل لبيع الدراجات النارية أن بالإمكان نمذجة ربحه بالدالة:

$$f(x) = -x^2 + 2200x - 1150000$$

حيث  $x$  تمثل سعر مبيع الدراجة النارية بالدينار.

**a** أوجد سعر مبيع الدراجة النارية الذي يحقق أعلى ربح.  
**b** أوجد قيمة أعلى ربح.

**2 (a)** بما أن الطول = العرض = 70 cm، فإن الشكل

الهندسي الحاصل هو مربع.

**(b)** عموماً إذا كان لدينا مستطيل محيطه معلوم

فمساحته العظمى تتحقق عندما يكون الطول

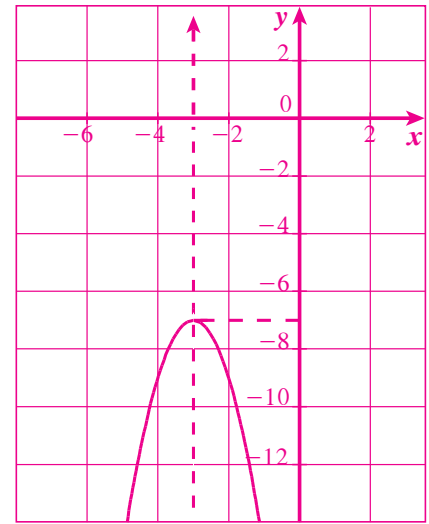
يساوي العرض أي مربع.

**(c)** مشابه لما سبق لذا يتحقق أكبر ناتج ضرب إذا

تساوى العددين أي  $c = d = 9$

وبالتالي:  $c \times d = 9 \times 9 = 81$

**3 (a)**  $y = -2x^2 - 12x - 25$



**(b)** المعادلة بدلالة إحداثيات الرأس توفر بسرعة

إحداثيات الرأس ومحور التماثل. أما المعادلة

بالصورة العامة فتوفر بسرعة تقاطع المنحنى مع

محور الصادات ومحور التماثل  $x = \frac{-b}{2a}$

**4**  $-1 = \frac{-4}{2a}$  ومنه نحصل على  $a = 2$

$c = 7$  ومنه  $5 = 2(-1)^2 + 4(-1) + c$

وتصبح المعادلة:  $y = 2x^2 + 4x + 7$

**5 (a)**  $x = -\frac{b}{2a}$

$$x = \frac{-2200}{-2} = 1100$$

السعر الذي يحقق أعلى ربح = 1100 دينار

**(b)**

$$f(1100) = -(1100)^2 + 2200(1100) - 1500000$$

$$= 60000$$

قيمة أعلى ربح تساوي 60 000 دينار.

## 2-5: المعكوسات ودوال الجذر التربيعي

### 1 الأهداف

- يوجد معكوس الدالة.
- يستخدم دوال الجذر التربيعي.

### 2 المفردات والمفاهيم الجديدة

المعكوس - معكوس دالة - دوال الجذر التربيعي.

### 3 الأدوات والوسائل

مسطرة - آلة حاسبة - ورق رسم بياني - جهاز إسقاط (Data Show) - حاسوب.

### 4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

- (a) النقطة  $A(2, 4)$  في المستوى الإحداثي. أوجد إحداثيات صورة انعكاسها في محور السينات، ثم إحداثيات صورة انعكاسها في محور الصادات.
- (b) ارسم في المستوى الإحداثي الخط المستقيم  $l$  ومعادلته  $y = x$ . أوجد إحداثيات صورة انعكاس النقطة  $B(0, 4)$  في المستقيم  $l$ ، ثم إحداثيات صورة انعكاس النقطة  $C(3, 0)$  في المستقيم  $l$ .
- (c) أوجد مجموعة حل المعادلة:  $3 = \sqrt{x^2 + 5}$

2-5

### المعكوسات ودوال الجذر التربيعي

#### Inverses and Square Root Functions



#### عمل تعاوني

هل تعلم أن هناك ارتباطاً بين طول قطعة الجليد الموضحة بالصورة وطول قطر أكبر مقطع دائري لها؟

1 يمكن استخدام الدالة  $L = 11d - 0.5$  لمعرفة الطول التقريبي  $L$  لقطعة الجليد إذا علم طول قطرها  $d$  عند أكبر مقطع دائري لها.

2 يبلغ طول قطر أكبر مقطع لقطعة جليدية مدلاة 5 cm أوجد طولها.

3 اشرح الخطوات التي استخدمتها لإيجاد الطول في الجزء (a).

4 يبلغ طول قطعة جليدية مدلاة 27 cm أوجد طول قطر أكبر مقطع.

5 اشرح الخطوات التي استخدمتها لإيجاد القطر في الفقرة (a).

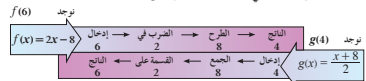
الخطوات التي سبق لك استخدامها لإيجاد طول قطر أكبر مقطع لقطعة جليدية مدلاة عند معرفة طولها مشابهة لتلك المستخدمة في إيجاد ما يسمى **معكوس الدالة**.

#### نشاط:

اعتبر الدالتين:  $f(x) = 2x - 8$  ،  $g(x) = \frac{x+8}{2}$

مجال الدالة  $f$  هو  $R$  ومجال الدالة  $g$  هو  $R$  أيضاً.

فإذا أخذنا أي عدد ينتمي لمجال الدالة  $f$  وليكن 6.



الدالتان:  $f(x) = 2x - 8$  ،  $g(x) = \frac{x+8}{2}$  كلًا منهما تعكس عمليات الأخرى.

لذلك تسمى  $g$  معكوس الدالة  $f$  أو  $f$  معكوس الدالة  $g$ .

1 ارسم الدالتين:  $f$  ،  $g$  في مستوى إحداثي واحد.

2 أوجد ثلاث نقاط على الرسم البياني للدالة  $f$ .

3 اعكس إحداثيات كل نقطة، ثم ارسم النقاط الجديدة.

4 ماذا تلاحظ؟

69

تمارين  
2-5

### المعكوسات ودوال الجذر التربيعي

#### Inverses and Square Root Functions

#### المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1-3)، ارسم بيانياً الدالة المعطاة ومعكوسها على محاور الإحداثيات نفسها. ثم اكتب معادلة المعكوس.

- (1)  $y = \frac{1}{2}x$  (2)  $y = \frac{x-1}{3}$  (3)  $y = 5x + 3$

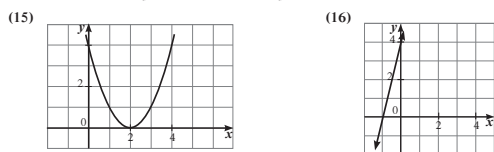
في التمارين (4-10)، اكتب معادلة المعكوس لكل دالة مما يلي:

- (4)  $y = \frac{1}{2}x^2$  (5)  $y = x^2 - 1$  (6)  $y = (x-2)^2 + 1$  (7)  $y = \frac{x+5}{3}$   
(8)  $y = 6x + 2$  (9)  $y = x^2 - 3$  (10)  $y = (x+5)^2 + 2$

في التمارين (11-14)، ارسم كل دالة جذر تربيعي. ثم اذكر المجال والمدى.

- (11)  $y = -\sqrt{x-1}$  (12)  $y = -\sqrt{x+2}$  (13)  $y = \sqrt{x-4} + 2$  (14)  $y = -\sqrt{x+3} - 2$

في التمارين (15-16)، ارسم مخططاً لمعكوس الرسم البياني، ثم اكتب معادلة كل رسم بياني، ومعادلة معكوسه.



(17) (a) الرياضيات في الإعلانات التجارية: اكتب دالة تعطي ثمن البيع  $y$  للثمن الأصلي  $x$  بالنسبة إلى السلع في الإعلان المجاور.

(b) أوجد معكوس الدالة التي أوجدتها في الفقرة (a).

(c) الكتابة: ماذا تمثل الدالة التي كتبتها في السؤال (b)؟

حسومات أسرع!

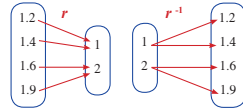
سوف تنتهي الحسومات في 31 يناير  
وفى 20% فقط

30

تعرفت سابقاً ماهية الدالة الحقيقية ومتى تكون علاقة ما دالة، واستخدمت اختبار الخط المستقيم الرأسى لتعرف إذا كان منحنى يمثل دالة حقيقية أم لا. وفي هذا الدرس، سوف توجد معكوس دالة حقيقية وتختبر ما إذا كان هذا المعكوس يمثل دالة حقيقية أم لا. وبالتالي سوف يقودنا إلى التعامل مع دوال الجذر التربيعي انطلاقاً من معرفتنا بالدوال التربيعية التي درسناها في بداية هذه الوحدة. من المهم جداً الإشارة إلى أن الطلاب قد تعاملوا سابقاً مع المعكوسات دون معرفتهم بذلك، فمثلاً في القاعدة:  $d = v \times t$ ، أي المسافة = معدل السرعة  $\times$  الزمن عندما نعكس المعطيات نكتب:  $v = \frac{d}{t}$  أو  $t = \frac{d}{v}$  أو عند استخدام قاعدة المساحة في المستطيل:  $A = L \cdot W$  عندما نعكس المعطيات نكتب:  $L = \frac{A}{W}$  أو  $W = \frac{A}{L}$  وهذه هي الفكرة الرئيسة في فقرة «نشاط»، لذا يطلب إلى المعلم إجراء نقاش موسع مع الطلاب أثناء التعامل مع مخطط: عدد يدخل  $\leftarrow$  عدد يخرج.

إذا كانت  $r$  علاقة تصل بين عنصر  $a$  من مجال  $r$  وعنصر  $b$  من مدى  $r$  فإن معكوس العلاقة  $r^{-1}$  يصل من  $b$  إلى  $a$ .

إذا كان  $(a, b)$  زوج مرتب من علاقة  $r$  فإن  $(b, a)$  هو زوج مرتب من معكوس هذه العلاقة بين المخطط أدناه علاقة  $r$  ومعكوسها  $r^{-1}$ .



معلومة:  
يعبر عن معكوس العلاقة  $r$  بالرمز  $r^{-1}$ .

**مثال توضيحي**

بين الجدول المقابل علاقة  $S$

x	1	2	3	4
y	-1	0	1	1

أوجد معكوس العلاقة  $S$

نقل بيان  $S$  وبيان معكوسها

سقف العلاقة بين المستقيم  $x = y$  وبيان  $S$  وبيان معكوسها.

هل العلاقة  $S$  تمثل دالة؟ هل معكوس  $S$  يمثل دالة؟

الحل: **أ** نعدل قيم  $x, y$  في الجدول.

**ب** بيان  $S$  وبيان معكوسها

**ج** المستقيم  $x = y$  هو خط انعكاس لبيان  $S$  وبيان معكوسها.

**د** العلاقة  $S$  تمثل دالة لأن كل عنصر من المجال يقترن بعنصر واحد فقط من المجال المقابل بينما معكوس  $S$  لا يمثل دالة لأن العنصر (1) من المجال يقترن بعنصرين من المجال المقابل.

في المثال التوضيحي:

ركز انتباه الطلاب على الترابط بين العلاقة  $S$  ومعكوسها. فالزوج المرتب  $(x, y)$  في العلاقة  $S$  يصبح الزوج المرتب  $(y, x)$  في معكوس  $S$ . ساعدهم على اختبار الرسم البياني والتأكد من أن القطعة المستقيمة الواصلة بين كل نقطة تمثل  $(x, y)$ ، والنقطة التي تمثل  $(y, x)$  هي دائماً عمودية على المستقيم الذي معادلته  $y = x$  أخبرهم أن هذا المستقيم هو محور انعكاس لبيان العلاقة  $S$  وبيان معكوسها.

في المثال (1)

هذا المثال له أهمية كبرى، لأنه يوفر خطوات فعالة ومدرسة ليتمكن الطالب من فهم التبديل الحاصل على إحداثيات النقطة انطلاقاً من حالات خاصة. فالنقطة  $(0, 4)$  سوف تصبح  $(4, 0)$ ، أي كل  $x$  سوف تصبح  $y$  وكل  $y$  سوف تصبح  $x$  ونلاحظ أيضاً أن معكوس الدالة الخطية هو دالة خطية.

المجموعة B تمارين موضوعية

- في التمارين (1-5)، ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.
- (1) إذا كانت النقطة  $M(x, y)$  تنتمي لبیان الدالة  $f$  فإن النقطة  $N(y, x)$  تنتمي لبیان معكوس هذه الدالة.
- (2) إذا كانت  $f(x) = x + 1$ ،  $g(x) = x - 1$  فإن الدالتين كل منهما معكوس للأخرى.
- (3) المستقيم  $y = x$  هو خط انعكاس لبیان دالة  $f$  وبيان معكوسها.
- (4) إذا مر بيان دالة بنقطة الأصل فإن بيان معكوسها يمر أيضاً بنقطة الأصل.
- (5) لا يتغير مجال دالة الجذر التربيعي بعد إزاحة بيانها 3 وحدات يميناً.
- في التمارين (6-10)، ظلل رمز الدائرة الدالة على الإجابة الصحيحة:
- (6) إذا اتهمت النقطة  $A(2, 3)$  إلى بيان دالة فإن النقطة التي تنتمي إلى بيان معكوس تلك الدالة هي:
- (a)  $(-2, 3)$  (b)  $(2, -3)$  (c)  $(3, -2)$  (d)  $(3, 2)$
- (7) بيان الدالة  $2 - \sqrt{x+2}$  هو انسحاب لبیان الدالة  $y = \sqrt{x}$
- (a) وحدتين إلى اليسار وواحدتين للأعلى (b) وحدتين إلى اليسار وواحدتين للأسفل
- (c) وحدتين إلى اليمين وواحدتين للأسفل (d) وحدتين إلى اليمين وواحدتين للأعلى
- (8) معكوس الدالة  $y = x^2 + 2$  هو:
- (a)  $y = \sqrt{x-2}$  (b)  $y = -\sqrt{x-2}$
- (c)  $y = \pm\sqrt{x-2}$  (d) ليس أي مما سبق صحيحاً
- (9) معكوس الدالة  $y = 5x - 1$  هو:
- (a)  $y = 5x + 1$  (b)  $y = \frac{x+1}{5}$
- (c)  $y = \frac{x}{5} + 1$  (d)  $y = \frac{x}{5} - 1$
- (10) مجال معكوس الدالة  $y = \sqrt{x+3} - 1$  هو:
- (a)  $\mathbb{R}$  (b)  $(-1, \infty)$
- (c)  $(-\infty, 1)$  (d)  $[-1, \infty)$

## في المثال (2)

يساعد الطالب على فهم كيفية إيجاد معكوس علاقة من علاقة معطاة، حيث يمكن الإفادة من المثال التوضيحي إذ يفترض إبدال المتغيرين  $x, y$  ويتضح عندها أن معكوس العلاقة التي تمثل مستقيماً سيكون علاقة تمثل مستقيماً ويبقى المستقيم  $y = x$  هو محور انعكاس بينهما.

## في المثال (3)

يواجه الطالب في هذا المثال مشكلة وهي أن الدالة التي نبحث عن معكوسها هي دالة تربيعية وبالتالي عند التحويل بين  $x, y$  سوف يواجه مشكلة إيجاد الجذر التربيعي لذا على الطالب أن يتذكر دائماً أن  $a \geq 0$ ،  $x^2 = a$  تعطي دائماً  $x = \pm \sqrt{a}$  لذا كان السؤال: هل معكوس دالة تربيعية هو دالة؟

وبالتالي، مناقشة الحلول في هذا المثال مهمة للإجابة عن السؤال أعلاه ومن هنا كان المدخل إلى دوال الجذر التربيعي.

## في المثال (4)

يمكن الإشارة إلى دوال المرجع  $y = \sqrt{x}$  أو  $y = -\sqrt{x}$  ورسومها البيانية وانطلاقاً منها يمكن فهم الإزاحة على الصورة:  $y = \sqrt{x-h} + k$  أو  $y = -\sqrt{x-h} + k$ ، حيث  $h, k$  كميتان ثابتتان.

من المهم الإشارة إلى الطلاب أن معكوس دالة الجذر التربيعي هو دالة ولكن معكوس الدالة التربيعية ليس بالضرورة دالة، حيث يلزم شروط في مجال تعريفها.

## 6 الربط

يوفر المثال (5) الربط بين الواقع ودالة الجذر التربيعي، حيث العلاقة بين مساحة شاشة الإعلانات وطول القطر، علماً أن شكل الشاشة هو مستطيل عموماً.

## 7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب فيكتبون أن معكوس الدالة التربيعية هو دالة. ذكرهم دائماً باستخدام اختبار الخط المستقيم الرأسي ليتأكدوا من عدم الوقوع في هذا الخطأ أثناء كتابتهم معكوس الدالة التربيعية.

إذا كانت النقطة  $(a, b)$  تنتمي إلى بيان دالة فإن النقطة  $(b, a)$  تنتمي إلى بيان معكوس هذه الدالة ولكي ترسم معكوس الدالة بياناً اعكس الترتيب لكل زوج مرتب ينتمي لبيان الدالة.

معكوس الدالة الخطية هو دالة خطية أيضاً.

### مثال (1)

ارسم بيان الدالة  $y = \frac{x-4}{2}$  ومعكوسها ثم اكتب معادلة المعكوس.  
الحل:

نرسم بيان الدالة الأصلية  $y = \frac{x-4}{2}$  وهي دالة خطية

x	0	2	4
y	-2	-1	0

∴ تنتمي لبيان الدالة:  $(0, -2), (2, -1), (4, 0)$ .

∴ تنتمي لبيان معكوس الدالة  $y$  وهو خط مستقيم.

ارسم المستقيم المار بالنقطتين الجديدتين.

كتابة معادلة هذا المستقيم:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, (x_2 \neq x_1)$$

$$= \frac{4 - 0}{0 - (-2)} = 2$$

معادلة المستقيم المار بالنقطة  $(0, 4)$  وميله 2 هي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = 2(x - 0)$$

$$y = 2x + 4$$

معادلة المعكوس هي:  $y = 2x + 4$

### حاول أن تحل

2 ارسم الدالة  $y = -3x + 5$  ومعكوسها، ثم اكتب معادلة المعكوس.

طريقة أخرى لإيجاد معكوس الدالة جبرياً وهي التبدل بين متغيرات الدالة  $x, y$  ثم الحل بالنسبة إلى  $y$  إذا كانت الدالة تستخدم الرمز  $f(x)$  عوض عن  $y = f(x)$

## 8 التقييم

تابع عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل»، لتأكد من فهمهم لمعكوس الدالة بشكل صحيح ومن أنهم يستخدمون الإزاحة في رسم دوال الجذر التربيعي.

### اختبار سريع

1 أوجد معكوس الدالة:  $y = 3x - 4$

$$y = \frac{x+4}{3}$$

2 أوجد معكوس الدالة:  $y = -x^2 + 4$

هل المعكوس دالة؟ اشرح.

$y = \pm \sqrt{-x+4}$  ليس دالة، لأنه توجد قيمتان

للمتغير التابع  $y$  وذلك لقيم  $x \leq 4$

3 تمت إزاحة الرسم البياني للدالة:  $y = \sqrt{x}$

4 وحدات إلى اليسار، 3 وحدات إلى الأعلى.

اكتب معادلة الدالة المزاحة.

$$y = \sqrt{x+4} + 3$$

## 9 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

1 (a)  $L = 11d - 0.5$

$$L = 11(5) - 0.5, L = 54.5 \text{ cm}$$

(b) نعوض  $d$  بقيمتها ونحل المعادلة.

2 (a)  $27 = L = 11d - 0.5, d = 2.5 \text{ cm}$

(b) نعوض  $L$  بقيمتها ونحل المعادلة.

فمثلاً لإيجاد معكوس الدالة  $y = \frac{x-4}{2}$  نبدل بين المتغيرات فيكون:  $x = \frac{y-4}{2}$

$2x = y - 4$   
 $y = 2x + 4$

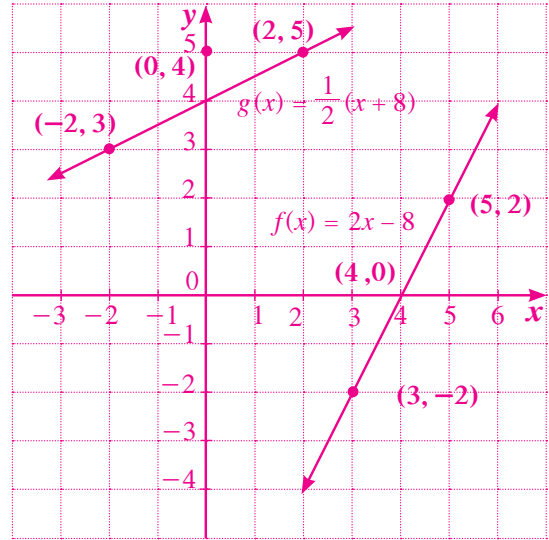
**مثال (2)**  
أوجد معكوس الدالة:  
الحل:  
بدل  $x, y$   
حل بالنسبة إلى  $y$   
 $y = 5x - 4$   
 $x = 5y - 4$   
 $5y = x + 4$   
 $y = \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$

معكوس الدالة  $y = 5x - 4$  هو  $y = \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$

**حاول أن تحل**  
2 أوجد معكوس الدالة:  
a  $y = \frac{2x-1}{3}$   
b  $y = 2(x+1) - 3$

**مثال (3)**  
أوجد معكوس الدالة:  $f(x) = x^2 + 3$  وناقش الحلول:  
الحل:  
عوض عن  $f(x)$  بـ  $y$   
بدل  $x, y$   
حل بالنسبة إلى  $y$   
أوجد الجذر التربيعي للطرفين  
معكوس الدالة  $f(x) = x^2 + 3$  هو:  
 $y = \pm \sqrt{x-3}$   
الرسم البياني للدالة:  $y = x^2 + 3$ ، ومعكوسها:  
 $y = \pm \sqrt{x-3}$  يوضح إلى اليسار، وكما ترى فإن معكوس الدالة ربما لا يكون دالة ومعكوس القطع المكافئ المنفلط بالدالة:  
 $y = x^2 + 3$ ، هو قطع مكافئ مفتوح لليمين، وهو ليس دالة لأنه توجد قيمتان لـ  $y$  لبعض قيم  $x$ .

1 (a)



(b)  $(3, -2)$

$(4, 0)$

$(5, 2)$

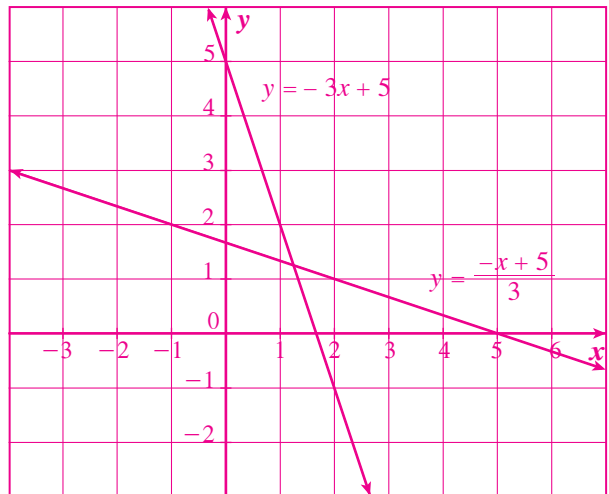
(c)  $(-2, 3), (0, 4), (2, 5)$

ينعكس ترتيب كل زوج مركب.

«حاول أن تحل»

1 معكوس:  $y = -3x + 5$

هو  $y = \frac{-x + 5}{3}$



مناقشة الحلول:

- a ما معادلة المعكوس للدالة:  $y = x^2 + 3$  عند  $x \geq 0$  ؟  
 b هل المعكوس دالة؟ نعم  
 c ما معادلة المعكوس للدالة:  $y = x^2 + 3$  عند  $x \leq 0$  ؟  
 d هل المعكوس دالة؟ نعم

حاول أن تحل

3 أوجد معكوس الدالة:  $f(x) = (x + 3)^2 - 4$ . ناقش الحلول.

Square Root Functions

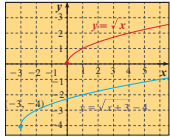
دوال الجذر التربيعي

المعادلة  $y = \sqrt{x}$  دالة جذر تربيعي. الشكل المرسوم يمثل بيان هذه الدالة ويبدأ من  $(0, 0)$ ، حيث إن الدالة معرفة فقط بالنسبة إلى صفر وإلى القيم الموجبة لـ  $x$ . أي أنها معرفة عندما  $x \geq 0$ .

فيكون مجالها  $[0, \infty)$ ، والمدى هو  $0 \leq y$  لأن  $0 \leq x$  وهي قيم الدالة عند المجال المعطى.

التشغيل البياني لدالة الجذر التربيعي  $y = \sqrt{x-h} + k$

ينتج من إزاحة بيان دالة المرجع  $y = \sqrt{x}$  كما التالي:



■ عندما تكون  $k, h$  موجبتين فإن الإزاحة تكون بعدد  $h$  من الوحدات يميناً وعدد  $k$  من الوحدات إلى الأعلى.

■ وعندما تكون  $h$  سالبة يروح البيان إلى اليسار.

■ وعندما تكون  $k$  سالبة يروح البيان إلى الأسفل.

فمثلاً بيان الدالة:  $y = \sqrt{x-3} - 4$  أو  $y = \sqrt{x+3} - 4$  ينتج من إزاحة بيان الدالة  $y = \sqrt{x}$  ثلاث وحدات إلى اليسار وأربع وحدات إلى الأسفل.

مثال (4)

ارسم الدالة:  $y = \sqrt{x-4} - 2$ ، وعين المجال والمدى للدالة:

الحل:

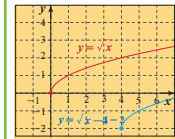
أزح بيان دالة المرجع:  $y = \sqrt{x}$

4 وحدات يميناً و 2 وحدة إلى الأسفل.

يبدأ بيان الدالة  $y = \sqrt{x-4} - 2$  عند النقطة  $(4, -2)$

ويعين الرسم البياني لها أن المجال  $[4, \infty)$

والمدى  $[-2, \infty)$





**سؤال أن تحل**

4 ا رسم بيانياً:  $y = \sqrt{x-2} + 1$   
 عت المجال والمدى للدالة.  
 5 إذا تم إزاحة بيان الدالة:  $y = \sqrt{x}$ ، وحدات بيئاً 2 وحدة إلى الأسفل.  
 اكتب معادلة الدالة الناتجة عن الإزاحة.

يمكنك استخدام دالة الجذر التربيعي لتمثيل مواقف حياتية.

**مثال (5) الصلة بالواقع**

مقاس شاشة إعلانات هو طول قطر الشاشة،  $d$ ، بالوحدة (in).  
 المعادلة:  $d = \sqrt{2A}$ ، تقدر طول قطر شاشة إعلانات بالمساحة  $A$ .  
 لفرض أن تاجر يريد شراء شاشة إعلانات مساحتها ضعف مساحة شاشته القديمة التي مساحتها  $100 \text{ in}^2$ ، فما مقاس الشاشة التي يجب أن يشتريها؟

الحل:  
 مساحة الشاشة الجديدة  $2 \times 100 \text{ in}^2$  أو  $200 \text{ in}^2$ .  
 الطريقة الأولى: استخدام التعويض  
 استخدام دالة الجذر التربيعي  
 عوض  $200$  عن  $A$   
 $d = \sqrt{2A}$   
 $= \sqrt{2(200)}$   
 $= \sqrt{400} = 20$   
 يجب أن يشتري شاشة  $20 \text{ in}$   
 الطريقة الثانية: الربط بالتكنولوجيا (إلزامي)  
 استخدام الآلة الحاسبة البيانية.  
 أدخل  $y = \sqrt{2x}$   
 اقرأ قيمة  $y$  عند  $x = 200$   
 يجب أن يشتري شاشة  $20 \text{ in}$   
 ملاحظة:  $1 \text{ in} = 2.54 \text{ cm}$

**سؤال أن تحل**

6 إذا كان لدى تاجر شاشة إعلانات قياسها  $42 \text{ in}$  (طول القطر  $42 \text{ in}$ ).  
 فما هي مساحة الشاشة علمًا بأن المعادلة:  $d = \sqrt{2A}$  تحدد العلاقة بين طول القطر  $d$  والمساحة  $A$  لشاشة الإعلانات؟

2 (a)  $y = \frac{3x+1}{2}$

(b)  $y = \frac{x+1}{2}$

2  $y = (x+3)^2 - 4$

لإيجاد المعكوس نبدل بين  $x, y$

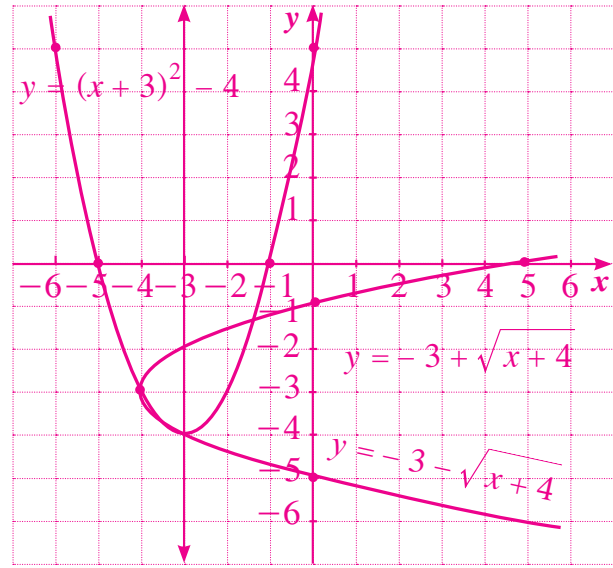
$x = (y+3)^2 - 4$  ومنه  $y = -3 \pm \sqrt{x+4}$

فيكون لدينا دالتان:

$y_1 = -3 + \sqrt{x+4}$

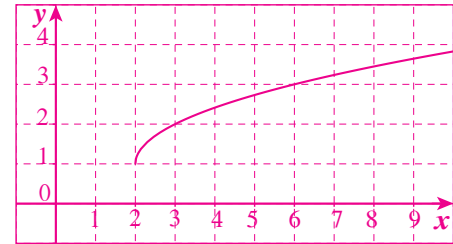
$y_2 = -3 - \sqrt{x+4}$

انظر الرسم البياني:



4 (a)  $y = \sqrt{x-2} + 1$

المجال:  $x \geq 2$ ، المدى:  $y \geq 1$



(b) المعادلة الناتجة عن الإزاحة:  $y = \sqrt{x-5} - 2$

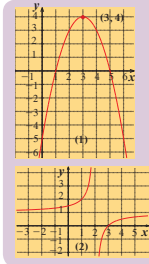
مساحة الشاشة:  $882 \text{ in}^2$  5

## 6-2: حل المتباينات

2-6

حل المتباينات

Solving Inequalities



**عمل تعاوني**  
أولاً: يبين الرسم البياني المقابل (1) منحنى  $f(x) = -x^2 + 6x - 5$  ومن الرسم أوجد:

- a. قيم  $x$  حيث  $f(x) = 0$   
b. قيم  $x$  حيث  $f(x) > 0$   
c. قيم  $x$  حيث  $f(x) < 0$

ثانياً: يبين الرسم البياني المقابل (2) للدالة  $f(x) = \frac{x-3}{x-2}$  أجب عن الأسئلة a, b, c.

**سوف تتعلم**  
• حل متباينات من الدرجة الثانية في متغير واحد.  
• حل متباينات تتضمن حدوديات نسبية في متغير واحد.  
• إيجاد مجال دالة جذرية.

**المفردات والمصطلحات**  
• متباينة Inequality  
• حدوديات نسبية Rational Expressions  
• متباينة من الدرجة الثانية Quadratic Inequality

من العمل التعاوني السابق يمكننا أن نعبّر عن اتحاد مجموعتي القيم  $(-\infty, 1) \cup (5, \infty)$  بصورة أخرى وهي  $\mathbb{R} \setminus (1, 5)$ .

يبين الجدول التالي كيفية كتابة اتحاد فترتين بصورة أخرى في بعض الحالات.

رمز الفترة	صورة أخرى لرمز الفترة	التصنيف البياني
$(-\infty, a) \cup (b, \infty)$	$\mathbb{R} \setminus [a, b]$	
$(-\infty, a) \cup [b, \infty)$	$\mathbb{R} \setminus (a, b]$	
$(-\infty, a) \cup [b, \infty)$	$\mathbb{R} \setminus (a, b)$	
$(-\infty, a] \cup [b, \infty)$	$\mathbb{R} \setminus (a, b)$	

**تذكر:**  
إذا كان  $a > b$   
فإن  $a = 0$ ،  $b = 0$

**مثال (1)**

أوجد مجموعة حل المتباينة:  $x^2 - x - 6 < 0$

**الحل:**  
المعادلة المناظرة  
 $x^2 - x - 6 = 0$   
 $(x+2)(x-3) = 0$   
تحلل

75

### 1 الأهداف

- يحل متباينات من الدرجة الثانية في متغير واحد.
- يحل متباينات تتضمن حدوديات نسبية في متغير واحد.
- يوجد مجال دالة جذرية.

### 2 المفردات والمفاهيم الجديدة

متباينة - حدوديات نسبية - متباينة من الدرجة الثانية.

### 3 الأدوات والوسائل

مسطرة - آلة حاسبة - ورق رسم بياني - جهاز إسقاط (Data Show) - حاسوب .

### 4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) أوجد مجموعة حل المتباينة:  $2x + 7 < 0$

(b) أوجد مجموعة حل المتباينة:  $-3x + 4 \leq 7$

(c) حلّل المقدار:  $x^2 - 5x + 6$  إلى عوامل خطية.

### 5 التدريس

تعرفت سابقاً إلى حلول المتباينات من الدرجة الأولى في متغير واحد، ومثلت مجموعة الحلول على خط الأعداد.

في هذا الدرس، سوف تتعرف حلول متباينات من الدرجة

الثانية في متغير واحد فقط وأيضاً حلول متباينات ذات

حدوديات نسبية بأشكال بسيطة. وهذه الحلول سوف

تكون جبرية وبيانية لذا من المهم جداً الربط في ما بينها.

فالحلول البيانية للمتباينة تساعد الطالب على فهم المتغير

التابع  $y$  وعلاقته بالمتغير المستقل  $x$ .

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

$$\text{أو}$$

$$x-3=0 \Rightarrow x=3$$

لنبحث عن قيم  $x$  التي تحقق  $(x+2)(x-3) < 0$  نضع التالي:

$$x+2 < 0 \Rightarrow x < -2 \quad | \quad x-3 < 0 \Rightarrow x < 3$$

$$x+2 > 0 \Rightarrow x > -2 \quad | \quad x-3 > 0 \Rightarrow x > 3$$

تكون الجدول:

$x$	$-\infty$	$-2$	$3$	$+\infty$
$x+2$	-	0	+	+
$x-3$	-	-	0	+
$(x+2)(x-3)$	+	0	-	+

يبين الجدول أن  $(x+2)(x-3) < 0$  لكل قيم  $x$  حيث  $-2 < x < 3$ .  
مجموعة الحل =  $(-2, 3)$ .

**حاول أن تحل**

أوجد مجموعة حل المتباينة:  $x^2 + 4x + 3 \leq 0$

**مثال (2)**

أوجد مجموعة حل المتباينة:  $-x^2 + 7x - 10 \leq 0$

**الحل:**

$$-x^2 + 7x - 10 \leq 0$$

$$x^2 - 7x + 10 \geq 0$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$x-5=0 \Rightarrow x=5$$

لنبحث عن قيم  $x$  التي تحقق:  $(x-2)(x-5) \geq 0$  نضع التالي:

$$x-2 < 0 \Rightarrow x < 2 \quad | \quad x-5 < 0 \Rightarrow x < 5$$

$$x-2 > 0 \Rightarrow x > 2 \quad | \quad x-5 > 0 \Rightarrow x > 5$$

**تذكر:**  
عند ضرب طرفي متباينة في عدد سالب لعكس علامة الترتيب.

76

## في المثالين (1)، (2)

نلاحظ أن تحليل المقدار إلى عوامل خطية، ثم إيجاد مجموعة الحلول لكل عامل استناداً إلى ما تعلمه الطالب في مرحلة سابقة، ثم التعبير عن مجموعة حل المتباينة كل عامل بجدول يساعد على إيجاد مجموعة حل المتباينة من الدرجة الثانية.

## في المثال (3)

يمكن استخدام هذا المثال في مواقف حياتية يحتاج إليها الأشخاص إذا كان لديهم شروط محددة في الإنشاءات والبناء.

## في المثالين (4)، (5)

يساعدان كثيراً على فهم كيفية إيجاد مجموعة الحل عندما يكون لدينا متباينات من حدوديات نسبية. وذلك باستخدام الجدول لكل من حدوديات البسط والمقام.

## في المثالين (6)، (7)

يعالجان إشكالية العامل المشترك بين البسط والمقام في المتباينة الحدودية النسبية وهذا مهم جداً. ركز انتباه الطلاب إلى قيمة المتغير  $x$  عند تبسيط الحدودية النسبية، حيث لا يصح التبسيط مع العدد صفر.

## في المثال (8)

من المهم جداً التركيز على طريقة إيجاد مجموعة الحل في استخدام الرسم البياني. راجع مع الطلاب مجموعة الحل في فقرة «عمل تعاوني». أعط أمثلة مشابهة، ومن ثم يمكن الانتقال إلى إيجاد مجموعة الحل لمتباينات تربط بين دالتين  $f(x)$ ,  $g(x)$

## 6 الربط

يمكن تعميم فكرة المثال (3) لاستخدامها في إقامة سور من الشريط الشائك حول مساحة من الأرض مستطيلة الشكل ومحاولة إيجاد طول هذه الحديقة وعرضها.

## 7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في المتباينة ذات الحدوديات النسبية فيستخدمون الضرب التقاطعي. أرشدهم إلى الطريقة الصحيحة وأخبرهم أن ذلك لا يصح إلا في المعادلة. وقد يخطئ الطلاب في استبعاد أصفار المقام من مجموعة الحل. أرشدهم إلى تأكيد استبعادها بعد الاختصار.

تكون الجدول:

$x$	$-\infty$	$2$	$5$	$+\infty$
$x-2$		$-$	$0$	$+$
$x-5$		$-$	$-$	$0$
$(x-2)(x-5)$		$+$	$0$	$+$

يبين الجدول أن  $(x-2)(x-5) \geq 0$  لكل قيم  $x$  حيث  $x \leq 2$  أو  $x \geq 5$ .  
 $\therefore$  مجموعة الحل =  $(-\infty, 2] \cup [5, +\infty)$   
 أو  $R \setminus (2, 5)$

حاول أن تحل

أوجد مجموعة قيم  $x$  التي تحقق المتباينة:  $-2x^2 + 5x - 3 > 0$ .

تذكر:  
 يمكنك ضرب طرفي المتباينة في (-1) لتسهيلها.

### مثال (3)

#### تطبيقات حياتية

صمم مهندس مخططاً لحديقة منزل على شكل مستطيل طول أحد بعديها  $x$  ومحيطها  $20$  m.  
 ما المجال الواقعي للمتغير  $x$ ؟



$P = 2(L + W) = 20$  m  
 $L + W = \frac{20}{2} = 10$  m

$0 < x < 10$   
 $x \in (0, 10)$

$f(x) = L \times W$

$f(x) = x(10 - x) = -x^2 + 10x$

$f(x) < 24$

$-x^2 + 10x < 24 \Rightarrow -x^2 + 10x - 24 < 0$

إذا اعتبرنا أحد البعدين يساوي  $x$ ، البعد الآخر  $10 - x$ .

المجال الواقعي للمتغير هو:

المساحة = الطول  $\times$  العرض

$-x^2 + 10x - 24 = 0$

$(-x+4)(x-6) = 0$

$x-6=0$  أو  $-x+4=0$

$\therefore x=6$      $\therefore x=4$

لإيجاد قيم  $x$  التي تحقق:  $(-x+4)(x-6) < 0$  نضع التالي:

$$\begin{array}{l|l} -x+4 < 0 \Rightarrow x > 4 & x-6 < 0 \Rightarrow x < 6 \\ -x+4 > 0 \Rightarrow x < 4 & x-6 > 0 \Rightarrow x > 6 \end{array}$$

تكون الجدول مع مراعاة  $(0, 10)$

$x$	$0$	$4$	$6$	$10$
$-x+4$		$+$	$0$	$-$
$x-6$		$-$	$-$	$0$
$(-x+4)(x-6)$		$-$	$0$	$-$

من الجدول: مجموعة الحل =  $(0, 4) \cup (6, 10)$

$f(x) > 9$

$-x^2 + 10x > 9 \Rightarrow -x^2 + 10x - 9 > 0$

$-x^2 + 10x - 9 = 0$

$(-x+1)(x-9) = 0$

$x-9=0$  أو  $-x+1=0$

$\therefore x=9$      $\therefore x=1$

لإيجاد قيم  $x$  التي تحقق:  $(-x+1)(x-9) > 0$  نضع التالي:

$$\begin{array}{l|l} -x+1 < 0 \Rightarrow x > 1 & x-9 < 0 \Rightarrow x < 9 \\ -x+1 > 0 \Rightarrow x < 1 & x-9 > 0 \Rightarrow x > 9 \end{array}$$

تكون الجدول مع مراعاة  $(0, 10)$

$x$	$0$	$1$	$9$	$10$
$-x+1$		$+$	$0$	$-$
$x-9$		$-$	$-$	$0$
$(-x+1)(x-9)$		$-$	$0$	$-$

من الجدول: مجموعة الحل =  $(1, 9)$

## 8 التقييم

تابع باهتمام أعمال الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من أنهم يجدون مجموعة الحلول الصحيحة في كل متباينة. ساعدهم على فهم الحلول في الرسوم البيانية.

### حاول أن تحل

- 3 إذا كان محيط مستطيل يساوي 16 m وكان  $x$  طول أحد بعديه.  
 a ما المجال الواقعي للمتغير  $x$ ?  
 b إذا اعتبرنا  $f$  دالة مساحة المستطيل فعبّر عنها بدلالة  $x$ .  
 c ما مجموعة حل المتباينة  $f(x) > 7$ ؟

### مثال (4) تطبيق على مجال الدالة

أوجد مجال كل دالة مما يلي:

- a  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$   
 b  $g(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$

الحل:

a  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

$x^2 - 4 \geq 0$

$x^2 - 4 = 0$

$(x-2)(x+2) = 0$

$x = 2$  أو  $x = -2$

مجال الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق الشرط  
 توجد المعادلة المناظرة

حل:

لايجاد قيم  $x$  التي تحقق:  $(x-2)(x+2) \geq 0$  نضع التالي:

$$\begin{array}{l|l} x-2 < 0 \Rightarrow x < 2 & x+2 < 0 \Rightarrow x < -2 \\ x-2 > 0 \Rightarrow x > 2 & x+2 > 0 \Rightarrow x > -2 \end{array}$$

تكون الجدول:

$x$	$-\infty$	$-2$	$2$	$+\infty$
$x-2$	-	0	-	+
$x+2$	-	0	+	+
$(x-2)(x+2)$	+	0	-	+

مجال الدالة هو:  $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$   
 $= \mathbb{R} \setminus (-2, 2)$

79

## اختبار سريع

1 أوجد مجموعة حل المتباينة:  $-x^2 + 4x + 5 \geq 0$   
 $x \in [-1, 5]$

2 لتكن  $x$  عرض مستطيل محيطه يساوي 30 m

أوجد مساحة هذا المستطيل بدلالة  $x$ ، ثم قيم  $x$  التي تحقق  $f(x) \geq 14$

نصف المحيط:  $\frac{30}{2} = 15$

الطول:  $x - 15$ ، حيث  $x \in (0, 15)$

المساحة:  $f(x) = x(15 - x) = -x^2 + 15x$

$f(x) \geq 14$  تعطي:  $-x^2 + 15x - 14 \geq 0$

نستنتج أن:  $x \in [1, 14]$

3 أوجد مجموعة حل المتباينة:  $\frac{4x+3}{x-2} \geq 3$

حيث  $x \neq 2$

$x \in (-\infty, -9] \cup (2, +\infty)$

## 9 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

أولاً:

(a)  $x = 1$ ,  $x = 5$

(b)  $x < x < 5$

(c)  $x < 1$  أو  $x > 5$

ثانياً: (a)  $f(x) = 0$  عند  $x = 3$

(b)  $f(x) > 0$  إذا  $x > 3$  أو  $x < 2$

(c)  $f(x) < 0$  إذا  $2 < x < 3$

b  $g(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$

الحل:

$-x^2 + 4x - 3 \geq 0$

$-x^2 + 4x - 3 = 0$

$(-x+1)(x-3) = 0$

$x = 1$  أو  $x = 3$

مجال الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق الشرط

المعادلة المناظرة

تحليل إلى عوامل

الأصغار

لايجاد قيم  $x$  التي تحقق:  $(-x+1)(x-3) \geq 0$  نضع التالي:

$$\begin{array}{l|l} -x+1 < 0 \Rightarrow x > 1 & x-3 < 0 \Rightarrow x < 3 \\ -x+1 > 0 \Rightarrow x < 1 & x-3 > 0 \Rightarrow x > 3 \end{array}$$

تكون الجدول:

$x$	$-\infty$	$1$	$3$	$+\infty$
$-x+1$	+	0	-	-
$x-3$	-	-	0	+
$(-x+1)(x-3)$	-	0	+	-

مجال الدالة هو:  $[1, 3]$

### حاول أن تحل

4 هل يمكنك إيجاد مجال الدالة  $y = \sqrt{x^2 - 4}$  بطريقة أخرى.

أوجد مجال كل دالة مما يلي:

1  $h(x) = \sqrt{x^2 - x}$

2  $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$

80

«حاول أن تحل»

1  $[-3, -1]$

2  $(1, 1.5)$

3 (a) نصف المحيط:  $\frac{16}{2} = 8$

$8 - x =$  عرض المستطيل أي  $8 - x > 0$  ومنه

$0 < x < 8$

(b)  $f(x) = x(8 - x)$

(c)  $f(x) > 7$  تعطي  $x(8 - x) > 7$

$-x^2 + 8x - 7 > 0 \Rightarrow 1 < x < 7$

4 (a) نعم، باستخدام متباينة المطلق كالتالي:

$x^2 - 4 \geq 0$

$x^2 \geq 4$

$|x| \geq 2$

$x \geq 2$  أو  $x \leq -2$

∴ مجال الدالة هو:  $R \setminus (-2, 2)$

(b) (1)  $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$

(2)  $[-3, 3]$

5  $\frac{3}{2} < x \leq \frac{5}{3}$

**مثال (5)**  
أوجد مجموعة حل المتباينة:  $\frac{3x+7}{x+2} \geq 2$   
الحل:  
 $\frac{3x+7}{x+2} \geq 2$   
 $\frac{3x+7}{x+2} - 2 \geq 0$   
 $\frac{3x+7-2x-4}{x+2} \geq 0$  مقام مشترك  
 $\frac{x+3}{x+2} \geq 0$   
أصفار البسط:  $x+3=0 \Rightarrow x=-3$   
أصفار المقام:  $x+2=0 \Rightarrow x=-2$   
لايجاد قيم  $x$  التي تحقق:  $\frac{x+3}{x+2} \geq 0$  نضع التالي:  
 $x+3 < 0 \Rightarrow x < -3$  |  $x+2 < 0 \Rightarrow x < -2$   
 $x+3 > 0 \Rightarrow x > -3$  |  $x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$   
تكون الجدول:  

$x$	$-\infty$	$-3$	$-2$	$+\infty$
$x+3$	-	0	+	+
$x+2$	-	-	0	+
$\frac{x+3}{x+2}$	+	0	-	+

  
مجموعة الحل:  
 $(-\infty, -3] \cup (-2, \infty)$   
 $= R \setminus (-3, -2]$   
حاول أن تحل  
6 أوجد مجموعة حل المتباينة:  $\frac{3x-5}{-2x+3} \geq 0$

**مثال (6)**  
أوجد مجموعة حل المتباينة:  $\frac{x^2-5x+3}{x+4} < 3$   
الحل:  
 $\frac{x^2-5x+3}{x+4} < 3$   
 $\frac{x^2-5x+3}{x+4} - 3 < 0$   
 $\frac{x^2-5x+3-3x-12}{x+4} < 0$  مقام مشترك  
 $\frac{x^2-8x-9}{x+4} < 0$  البسط  
حلل البسط:  
 $(x+1)(x-9) < 0$   
أصفار البسط:  
 $(x+1)(x-9) = 0$   
 $x = -1$  أو  $x = 9$   
أصفار المقام:  
 $x+4 = 0 \Rightarrow x = -4$   
لايجاد قيم  $x$  التي تحقق:  $\frac{(x+1)(x-9)}{x+4} < 0$  نضع التالي:  
 $x+4 < 0 \Rightarrow x < -4$  |  $x-9 < 0 \Rightarrow x < 9$  |  $x+1 < 0 \Rightarrow x < -1$   
 $x+4 > 0 \Rightarrow x > -4$  |  $x-9 > 0 \Rightarrow x > 9$  |  $x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$   
تكون الجدول:  

$x$	$-\infty$	$-4$	$-1$	$9$	$+\infty$
$x+1$	-	-	0	+	+
$x-9$	-	-	-	0	+
$x+4$	-	0	+	+	+
$\frac{(x+1)(x-9)}{x+4}$	-	-	+	-	+

  
مجموعة حل المتباينة:  $(-\infty, -4) \cup (-1, 9)$   
حاول أن تحل  
6 أوجد مجموعة حل المتباينة:  $\frac{x^2+5x}{x+3} > -2$

$$6 \quad \frac{(x+1)(x+6)}{(x+3)} > 0$$

$x$	$-\infty$	$-6$	$-3$	$-1$	$\infty$
$x+1$	-	-	-	•	+
$x+6$	-	•	+	+	+
$x+3$	-	-	•	+	+
$\frac{(x+1)(x+6)}{(x+3)}$	-	+	-	-	+

∴ مجموعة حل المتباينة =  $(-6, -3) \cup (-1, \infty)$

$$7 \quad \frac{(x-7)(x+7)}{x+7} < 0$$

يمكن تبسيط الحدودية النسبية إذا كان العامل  $x+7 \neq 0$

فيصبح  $x \neq -7$  ومنه  $x-7 < 0 \Rightarrow x < 7$

لذا مجموعة الحل:  $(-\infty, -7) \cup (-7, 7)$

**مثال (7)**  
أوجد مجموعة حل المتباينة  $\frac{x^2-5x+6}{x-3} > 0$   
الحل:  
 $x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$   
 $\frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)} > 0$   
 $x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$   
تحليل البسط:  
تكتب المتباينة:  
قبل التبسيط نحدد أصفار المقام:  
نسقط المتباينة:  
القيمة  $x=3$  غير مقبولة لأنها صفر المقام  
مجموعة الحل =  $(2, \infty) \cup \{3\}$   
 $(2, 3) \cup (3, \infty)$   
حاول أن تحل  
أوجد مجموعة حل المتباينة:  $\frac{x^2-49}{x+7} \leq 0$

**مثال (8)**  
تطبيق على الرسم البياني  
بين الرسم البياني منحى الدالة:  
 $y = 5$  والمستقيم  $f(x) = x^2 + 2x - 3$   
ادرس بيانياً المتباينة  $f(x) < y$   
ادرس بيانياً المتباينة  $f(x) > y$   
تحقق حسابياً من النتائج التي حصلت عليها في (a) و (b)  
الحل:  
في الشكل يقطع المستقيم  $y=5$  المنحى الدالة في النقطتين  $(-4, 5)$  و  $(2, 5)$   
لاحظ أن  
نلاحظ أن  
للتحقق حسابياً:  
ضع:  
المعادلة المناظرة  
لايجاد قيم  $x$  التي تحقق  $(x-2)(x+4) < 0$  تضع التالي:

تمرن  
2-6

حل المتباينات  
Solving Inequalities

المجموعة A تمارين مقالية

- (1) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات التالية:  
(a)  $(x-3)(2x+5) < 0$  (b)  $2x^2-3x-5 \geq 0$  (c)  $-3x^2+2x < -1$   
(d)  $4x^2+12x+9 \geq 0$  (e)  $-9x^2+6x < 1$  (f)  $21+4x > x^2$
- (2) لنعبر عرض مستطيل  $(x-2)$  cm وطوله  $2x$  cm  
(a) وضح لماذا يجب أن تكون قيمة  $x$  أكبر من 2  
(b) اكتب المعادلة التي تعطي مساحة هذا المستطيل.  
(c) علماً أن  $x$  عدد صحيح، أوجد قيمة  $x$  لتكون مساحة المستطيل بين  $90 \text{ cm}^2$  و  $100 \text{ cm}^2$ ، ثم استنتج طول المستطيل وعرضه.
- في التمارين (3-9)، حل المتباينات التالية:  
(3)  $\frac{x-1}{x^2-4} < 0$  (4)  $\frac{x^2-1}{x^2+1} \leq 0$  (5)  $\frac{x^2+x-12}{x^2-4x+4} > 0$   
(6)  $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-3} \leq 0$  (7)  $\frac{1}{x+2} - \frac{2}{x-1} > 0$  (8)  $\frac{x}{x+1} + \frac{2}{x-1} \geq 0$   
(9)  $\frac{2x+1}{x} + \frac{3x}{1-2x} \leq 0$
- (10) عمر جدّ أحمد يساوي 8 أضعاف عمر أحمد، بعد 3 سنوات، سيتخطى تربع عمر أحمد ضعف عمر جدّه (للمرة الأولى). أوجد عمر أحمد وعمر جدّه الآن.  
(11) لنعتبر معادلة المستقيم  $y = -1$ ،  $(d)$ ، أوجد بيانياً الحل لـ  $f(x) > y$ ،  $f(x) < y$ ،  $f(x) = y$  في كل من الحالات التالية:  
(a)  $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$  (b)  $f(x) = x^2 + 1$  (c)  $f(x) = -x^2 + 4x - 1$   
(12) لنعتبر معادلة المستقيم  $y = 2$ ،  $(d)$ ، أوجد بيانياً الحل لـ  $f(x) \geq y$ ،  $f(x) < y$  في كل من الحالتين التاليتين:  
(a)  $f(x) = 3x^2 + 2$  (b)  $f(x) = x^2 - x - 2$

8 يقطع المستقيم  $x = -3$  منحنى الدالة:

$f(x) = x^2 - 6x + 5$  في نقطتين، حيث الإحداثيات

السينية  $x = 2$  ,  $x = 4$

$f(x) < y$ ، إذا كانت  $2 < x < 4$

$f(x) \geq y$ ، إذا كانت  $x \leq 2$  أو  $x \geq 4$

تكون الجدول:

$x$	$-\infty$	$-4$	$2$	$+\infty$
$x+4$	-	0	+	+
$x-2$	-	-	0	+
$(x-2)(x+4)$	+	0	-	+

من الجدول نستنتج:

$f(x) < 5 \quad \forall x \in (-4, 2)$

$f(x) > 5 \quad \forall x \in (-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$

تأريخ أن تجعل

يتم الرسم البياني منحنى الدالة:

$f(x) = x^2 - 6x + 5$  والمستقيم  $y = -3$

ادرس يائلاً:  $f(x) = y$  ,  $f(x) < y$  ,  $f(x) \geq y$

84

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-5)، ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة:

- (1) مجموعة حل المتباينة  $(x+3)^2 > 0$  هي  $\mathbb{R}$  (a) (b)
- (2) كل  $x$  ينتمي للفترة  $(0, \infty)$  هو حل للمتباينة  $\frac{x-1}{x^2-x} \geq 0$  (a) (b)
- (3) مجموعة حل المتباينة  $(x+3)^2 + 2 < 1$  هي المجموعة الخالية  $\emptyset$  (a) (b)
- (4) مجموعة حل المتباينة  $\frac{x+2}{x+1} \geq 1$  هي  $(-1, \infty)$  (a) (b)
- (5) مجموعة حل المتباينة  $(-x-3)^2 < 0$  هي  $\{3\}$  (a) (b)
- في التمارين (6-13)، ظلل رمز الدائرة الدالة على الإجابة الصحيحة.
- (6) المعادلة المناظرة للمتباينة  $2 \leq (x + \frac{1}{x}) \leq 3(x+1)$  هي: (a)  $-3x^2 + 2x - \frac{5}{3} = 0$  (b)  $x^2 + \frac{4}{3}x + 1 = 0$  (c)  $-3x^2 + 4x - 3 = 0$  (d)  $-3x^2 + 2x + 1 = 0$
- (7) إن مجموعة حل المتباينة  $(1-2x)(4+5x) < 0$  هي: (a)  $(-\frac{4}{5}, \frac{1}{2})$  (b)  $(-\infty, -\frac{4}{5}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$
- (c)  $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{4}{5}, \infty)$  (d)  $(-\infty, -\frac{4}{5}) \cup (-\frac{1}{2}, \infty)$
- (8) إن مجموعة حل المتباينة  $\frac{(x^2+1)(x-3)}{x-3} > 0$  هي: (a)  $\mathbb{R}$  (b)  $\mathbb{R}^*$  (c)  $\mathbb{R} - \{3\}$  (d)  $\mathbb{R} - \{0, 3\}$
- (9) المتباينة التي مجموعة حلها  $[-2, 3]$  هي: (a)  $x^2 - x - 6 < 0$  (b)  $x^2 - x - 6 \leq 0$  (c)  $x^2 - x - 6 > 0$  (d)  $x^2 - x - 6 \geq 0$
- (10) مجموعة حل المتباينة  $x^2 + |x| > 0$  هي: (a)  $\mathbb{R}$  (b)  $(0, \infty)$  (c)  $\mathbb{R} - \{0\}$  (d) ليس أياً مما سبق صحيحاً
- (11) إذا كانت  $f(x) = \frac{x(x+1)}{(2x-3)(3x+2)}$  فإن قيم  $x$  التي تجعل  $f$  غير معرّفة هي: (a)  $\{\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}\}$  (b)  $\{-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\}$  (c)  $\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\}$  (d)  $\{-\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}\}$
- (12) مجموعة حل المعادلة  $x^2 + |x| - 2 = 0$  هي: (a)  $\{1, -2\}$  (b)  $\{-1, 2\}$  (c)  $\{-1, 1\}$  (d)  $\{-2, 2\}$
- (13) إذا كانت  $f(x) = -3x^2 + x - \frac{1}{12}$  فإن قيم  $x$  التي تجعل  $f(x)$  غير موجبة ولا تساوي الصفر هي: (a)  $(-\infty, 0)$  (b)  $(0, \infty)$  (c)  $\{\frac{1}{6}\}$  (d)  $\mathbb{R} - \{\frac{1}{6}\}$

33

# المرشد لحل المسائل

## إجابات «مسائل إضافية»

$$1 \quad \frac{300}{x} + \frac{300}{x-20} = 7.5$$

سيكون معدل سرعته ذهابًا  $91 \text{ km/h}$  تقريبًا ومعدل سرعته إيابًا  $71 \text{ km/h}$  تقريبًا.

$$1 \quad (a) \quad f(100) = -(100)^2 + 250(100) - 2400$$

فيكون ربحه  $12\,600$

(b)

$$f(x) = -(x^2 - 250x + 15\,625 - 15\,625) - 2400$$

$$f(x) = -(x - 125)^2 + 13\,225$$

يجب أن يبيع الحاسوب بمبلغ  $125$  دينارًا.

(c) أكبر ربح هو  $13\,225$  دينارًا.

## المرشد لحل المسائل

المسافة بين المدينة A والمدينة B على الطريق السريع هي  $300 \text{ km}$  قاد خالد سيارته من المدينة A باتجاه المدينة B بمعدل سرعة  $x \text{ km/h}$  وفي طريق العودة من المدينة B إلى المدينة A، كان معدل سرعته  $(x - 20) \text{ km/h}$  استغرقت هذه الرحلة  $5 \text{ h } 30 \text{ min}$  أوجد معدل سرعة السيارة ذهابًا وإيابًا.



كيف يمكنني حل هذه المسألة؟

أنا أعرف أن المسافة = الزمن  $\times$  معدل السرعة.

لدي معدل السرعة  $x$  في الذهاب، ثم  $x - 20$  في العودة.

أنا أعرف أن مجموع الزمن المستغرق هو  $5 \text{ h } 30 \text{ min}$  ويمكن تحويلها إلى  $5.5$  أنا أعرف المسافة بين المدينتين  $300 \text{ km}$  باستخدام القاعدة أكسب،

$$\frac{300}{x} + \frac{300}{x-20} = 5.5$$

$$5.5x^2 - 710x + 6000 = 0$$

$$1.1x^2 - 142x + 1200 = 0$$

$$x^2 - \frac{142}{1.1}x + \frac{1200}{1.1} = 0$$

$$\left(x - \frac{71}{1.1} - \frac{61}{1.1}\right)^2 - \frac{3721}{1.21} = 0$$

$$\left(x - \frac{71}{1.1} - \frac{61}{1.1}\right)\left(x - \frac{71}{1.1} + \frac{61}{1.1}\right) = 0$$

المعدل السرعة =

المقام المشترك

بالتبسيط

أحلل المعادلة التربيعية إلى عوامل أولية.

بالقسمة على  $1.1$

المربع الكامل

التحليل

ومنه أحصل على قيمة مقبولة  $x = 120$

أي أن معدل سرعة خالد في الذهاب هو  $120 \text{ km/h}$ ، ومعدل سرعته في العودة  $100 \text{ km/h}$

مسائل إضافية

1 كم سيكون معدل سرعة السيارة إذا أراد خالد أن تكون مدة الرحلة المستغرقة  $5 \text{ h } 30 \text{ min}$ ؟

2 يبيع أحد المحلات الحواسيب، وقد لاحظ أن ربحه يمكن نمذجته بالمعادلة.

$$f(x) = -x^2 + 250x - 2400$$

حيث  $x$  ثمن الحاسوب الواحد بالدينار الكويتي.

3 إذا باع الحاسوب الواحد بسعر  $100$  دينار، فما هو ربحه؟

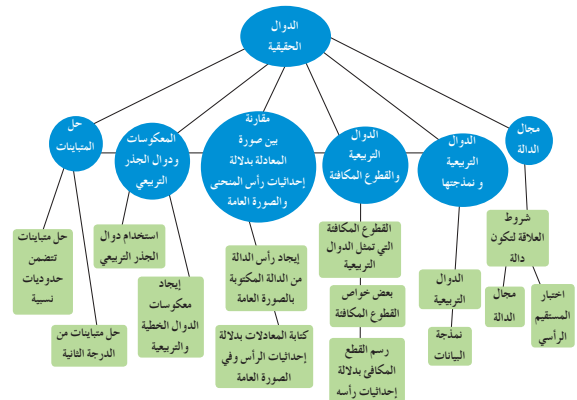
4 إذا أراد البائع تحقيق أكبر ربح، فيكم سوف يبيع الحاسوب الواحد؟

5 ما قيمة أكبر ربح؟

## ملخص

- تكون العلاقة دالة إذا كان كل عنصر (عدد) في المجال مرتبطًا بعنصر (عدد) واحد فقط من المدى.
- كل دالة التي مجالها ومجالها المقابل مجموعتان جزئيتان من الأعداد الحقيقية تسمى دالة حقيقية.
- تكتب الدالة التربيعية على الصورة:  $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$
- يمكن كتابة بعض البيانات على الصورة الخطية:  $y = ax + b$  أو على الصورة التربيعية.
- مجال الدالة هو الجزء من الأعداد الحقيقية أو كل الأعداد الحقيقية حيث يوجد المتغير  $x$  لتكون  $f(x)$  معرّف.
- المدى للدالة  $f(x)$  هو الجزء من الأعداد الحقيقية أو كل الأعداد الحقيقية حيث  $f(x)$  موجودة.
- القيمة الصغرى للدالة التربيعية هي أصغر قيمة للدالة  $f(x)$  على محور الصادات.
- القيمة العظمى للدالة التربيعية هي أكبر قيمة للدالة  $f(x)$  على محور الصادات.
- يمكن رسم القطع المكافئ إذا كان على الصورة:  $k = a(x - h)^2 + k$ ، حيث  $(h, k)$  إحداثيات الرأس.
- يمكن إيجاد الصورة العامة  $f(x) = ax^2 + bx + c$  من الصورة  $f(x) = a(x - h)^2 + k$  وبالعكس أيضًا.
- يمكن إيجاد معكوس الدوال الخطية والتربيعية بتبديل  $x, y$ .
- لإيجاد مجموعة حلول متباينة من الدرجة الثانية في متغير واحد، فإننا نحللها إلى عوامل أولية ونستخدم الجدول.
- لإيجاد مجموعة حلول متباينة من حدوديات نسبية فإننا نستخدم الجدول.

## مخطط تنظيمي للوحدة الثانية





### تمارين إثرائية

في التمرين (1-2)، أوجد مجال كل من الدوال التالية:

$$(1) f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{x+1} - \frac{x}{\sqrt{2+x}} + \frac{\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{9-x^2}}$$

$$(2) f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{\sqrt{x^2+7-4}}$$

(3) في إحدى مباريات كرة القدم، تواجد أحد اللاعبين منفرداً وجهاً لوجه مع حارس مرمى الفريق المنافس فقرر رفع الكرة فوق الحارس أملاً ألا تغلو مرمى الفريق المنافس، وكان هذا اللاعب على بعد 16 m من خط المرمى، بينما الحارس يقف على بعد 7 m من اللاعب. يُمذَج مسار الكرة المنطلقة من الأرض عبر تسديدة اللاعب على شكل قطع مكافئ معادلته:  $y = a(x-10)^2 + 3$

(a) أوجد قيمة  $a$  معبِراً نقطة انطلاق تسديدة اللاعب هي نقطة الأصل.

(b) علماً أن الحارس عند استخدام يديه يصل إلى ارتفاع 2.53 m وأن ارتفاع المرمى هو 2.44 m فهل ستتخطى الكرة الحارس؟ وهل سيسجل اللاعب هدفاً؟

(4) في إحدى دورات كرة المضرب، تواجد أحد اللاعبين على بعد 3 m من الشبكة، فقرر اللاعب الثاني المتواجد على الخط الخلفي من الملعب رفع الكرة فوق منافسه على أن تأتي الكرة داخل ملعب منافسه. علماً أن طول ملعب كرة المضرب 23.8 m وتوسطه الشبكة التي تقسم الملعب إلى قسمين متساويين.

(a) إذا اعتبرنا أن مسار الكرة من مضرب اللاعب على ارتفاع 1 m على شكل قطع مكافئ معادلته:  $y = -0.08(x-9)^2 + k$  فما قيمة  $k$ ؟

(b) ما الارتفاع الأقصى للكرة عن أرض الملعب؟

(c) هل ستتخطى الكرة اللاعب المنافس إذا كان أقصى ارتفاع يمكن الوصول إليه باستخدام مضربه هو 3.3 m؟

(d) هل ستسقط الكرة داخل ملعب اللاعب المنافس؟ إذا كانت إجابتك نعم، أوجد بعدها عن خط الملعب.

(a) ارسم بيانياً منحنى الدالة:  $y = x^2 - 4x$

(b) أوجد معكوس الدالة، ثم ارسمه على المستوى الإحداثي نفسه.

في التمرين (6-10)، حل كلًا من المتباينات التالية:

$$(6) (x-3)(x+2) > (x-3)(2x-1)$$

$$(7) 4x^2 - 9 \leq (3-2x)(x+1)$$

$$(8) x^2(x-3) > 0$$

$$(9) (x-6)^2(x-5) > 0$$

$$(10) \frac{3x-1}{(2x-7)^2} \geq 0$$

36

### اختبار الوحدة الثانية

في التمرين (1-2)، أوجد مجال كل من الدوال التالية:

$$(1) f(x) = \frac{\sqrt{9x^2-4}+2}{2x-3}$$

$$(2) g(x) = \frac{\sqrt{-x+2}-3}{\sqrt{x^2-4}}$$

(3) يبيّن الجدول العلاقة بين ربح إحدى الشركات  $y$  بألاف الدنانير وعدد القطع المنتجة  $x$ . اكتب دالة تربيعية تُمذَج العلاقة بين  $x, y$ .

$x$	1	2	3	4	5
$y$	0	-1	0	3	8

في التمرين (4-5)، ارسم كل مجموعة بيانات مما يلي، ثم اكتب معادلة كل منها:

$$(4) \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline x & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline f(x) & -1 & -3 & -1 & 5 & 15 & 29 \\ \hline \end{array}$$

$$(5) \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline x & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline f(x) & -2 & 1 & 6 & 13 & 22 \\ \hline \end{array}$$

في التمرين (6-7)، ارسم منحنى القطع المكافئ إذا عرفت إحداثيات الرأس ونقطة إضافية يمر بها.

(6) الرأس  $A(-3, 3)$ ,  $V(0, 0)$

(7) الرأس  $A(2, 11)$ ,  $V(1, 5)$

في التمرين (8-11)، ارسم كل دالة تربيعية ثم حدّد إحداثيات الرأس.

$$(8) f(x) = x^2 - 7$$

$$(9) f(x) = x^2 + 2x + 6$$

$$(10) f(x) = -x^2 + 5x - 3$$

$$(11) f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 8$$

في التمرين (12-15)، أوجد معكوس كل دالة مما يلي:

$$(12) y = 4x + 1$$

$$(13) y = \frac{2}{3}x - 6$$

$$(14) y = x^2 - 10$$

$$(15) y = (x+2)^2 - 3$$

(16) سؤال مفتوح: اكتب معادلة دالة، حيث منحنى معكوسها هو قطع مكافئ.

في التمرين (17-20)، اكتب كل دالة بدلالة إحداثيات الرأس ثم ارسم منحنى القطع المكافئ وحدّد إحداثيات الرأس.

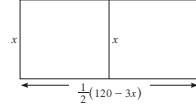
$$(17) y = x^2 - 6x + 5$$

$$(18) y = -x^2 + 8x - 10$$

$$(19) y = 2x^2 - 3x + 1$$

$$(20) y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 9$$

(21) أوجد أكبر مساحة لحديقة مكونة من مستطيلين لهما ضلع مشترك ويمكن إحاطتهما بشريط طوله 120 m. (انظر الصورة المقابلة).



34

(11) (a) أكمل الجدولين التاليين. اكتب في الصف الأخير من كل منهما الفرق بين قيم  $y$  المتتالية.

جدول (2)

5	4	3	2	1	0	$x$
50	32	18	8	2	0	$y = 2x^2$
			6	2		الفرق

جدول (1)

5	4	3	2	1	0	$x$
10	8	6	4	2	0	$y = 2x$
			2	2		الفرق

(b) أي من الدالتين دالة تربيعية؟

(c) أي نمط تراه في الصف الأخير من الجدول (1)؟ ومن الجدول (2)؟

(d) كَوْنِ جدولاً لكلٍّ من الدالتين:  $y = -x^2 + 4$ ,  $y = -x + 4$ . مستخدماً قيم  $x$  نفسها في الفقرة (a). هل ترى الأنماط نفسها كما في الفقرة (c)؟

(e) كيف تساعدك قيم  $y$  لمجموعة البيانات في توقع ما إذا كانت الدالة الخطية أو الدالة التربيعية هي النموذج الأفضل؟

(12) يبيّن الجدول التالي العلاقة بين عمق المياه في المحيط  $y$  بالأمتار (m) وسرعة التسونامي  $x$  (متر في الثانية m/s).

$x$	52	58	61	65	71	76	82	98
$y$	270.40	336.40	372.10	422.50	504.10	577.60	672.40	960.40

استخدم البيانات المدونة في الجدول لإيجاد معادلة تربيعية تُمذَج العلاقة بين  $x, y$  ثم تحقق.

(استخدم الآلة الحاسبة)

37

(22) أوجد مجموعة حل كل متباينة مما يلي:

$$(a) x^2 - 8x + 15 \leq 0 \quad (b) -x^2 + 7x - 120 < 0 \quad (c) \frac{3x-4}{x-2} \geq -1 \quad (x \neq 2)$$

(23) (a) ارسم منحنى الدالة:  $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ ، والخط المستقيم  $y = -8$  على شبكة إحداثيات واحدة.

(b) ادرس بيانياً:  $f(x) > -8$ ,  $f(x) < -8$ ,  $f(x) = -8$ .

(c) تحقّق حسابياً من النتائج التي حصلت عليها في الفقرة (b).

35

# Polynomials

## الوحدة الثالثة: كثيرات الحدود

قسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

1 - 3: دوال القوى ومعكوساتها

جزء 1: استكشاف دوال القوى ومعكوساتها.

جزء 2: الدوال الزوجية والدوال الفردية.

جزء 3: معكوس العلاقة  $(r^{-1})$ .

2 - 3: الدوال الحدودية

جزء 1: الدالة الحدودية.

جزء 2: سلوك النهاية.

3 - 3: العوامل الخطية لكثيرات الحدود

جزء 1: عوامل وأصفار دالة كثيرة الحدود.

4 - 3: قسمة كثيرات الحدود

جزء 1: القسمة المطولة.

جزء 2: استخدام القسمة التركيبية.

5 - 3: حل معادلات كثيرات الحدود

جزء 1: حل المعادلات بالتحليل.

جزء 2: الأصفار النسبية الممكنة.

# مقدمة الوحدة

## الوحدة الثالثة

### كثيرات الحدود

#### Polynomials

**مشروع الوحدة: المنتجات بالتصميم**

- 1 مقدمة المشروع: يمكن اختيار المنحنى المرسوم في الشكل أدناه لدالة كثيرة الحدود. تعد هذه الحقيقة محور تصميم السيارة الحديثة حيث يقوم المصمم أولاً بتصميم أشكال المعادلات وفق مقياس معين، يوضح التصميم الأشياء الصغيرة مثل مقابض الأبواب. وعندما تكتمل عملية النمذجة، يتحول كل منحنى في التصميم إلى معادلة تضبط على الحاسوب بواسطة المصمم ويمكن إجراء بعض التعديلات الدقيقة على المعادلة، عندما ينتهي التصميم تستخدم هذه المعلومات لصنع القوالب اللازمة لإنتاج السيارة.
- 2 الهدف: البحث عن تصميم سيارة أو أي شيء آخر له أجزاء منحنية، والرسم على ورقة رسم يائي منحنى الشيء الذي اخترت البحث عنه.
- 3 المزايا: أوراق رسم، شبكة مربعات، آلة حاسبة يائنة، حاسوب.
- 4 أسئلة حول التطبيق:

نموذج غطاء محرك سيارة جديدة بالمعادلة:

$$y = 0.00143x^4 + 0.00166x^3 - 0.236x^2 + 1.53x + 0.739 \quad x > 0$$

بيان هذه المعادلة مبن على السيارة.

اشرح كيف يمكن أن تصمم السيارة، ارس منحنى تراه مناسباً أكثر لغطاء المحرك.

متر في نقاط على المنحنى واكتب إحداثياتها.

أوجد المعادلة التكميلية المتوافقة مع هذه النقاط.

استخدم المعادلة:  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

اختر قسماً آخر منحنياً من السيارة ثم اكتب معادلة تصفح هذا القسم.

التقرير: ضع تقريراً مفصلاً حول تنفيذ المشروع مستفيداً من دروس الوحدة.

نقد ملاحظاً لعرض تصميمك ورسمك البيانية التي استخدمتها.

#### دروس الوحدة

دوال القوى ومعكوساتها	الدوال الحدودية	العوامل الخطية لكثيرات الحدود	قسمة كثيرات الحدود	حل معادلات كثيرات الحدود
3-1	3-2	3-3	3-4	3-5

الجبر هو أحد المجالات المهمة في الرياضيات، وقد جاء اسمه في كتاب عالم الرياضيات والفلك «محمد بن موسى الخوارزمي» تحت عنوان «الكتاب المختصر في حساب الجبر والمقارنة»، وقد شرح «الخوارزمي» في هذا الكتاب كيفية استخدام العمليات الجبرية التي تنظم إيجاد الحلول للمعادلات الخطية والتربيعية والتي تعتبر جزءاً من معادلات كثيرات الحدود.

والمتعارف عليه أن الجبر ينقسم إلى عدة فروع:

(أ) الجبر الابتدائي: يتم فيه دراسة خصائص الأعداد الحقيقية، وتستخدم الرموز للتعبير عن المتغيرات والثوابت. كما يتم دراسة العمليات على الأعداد وكثيرات الحدود وطرائق إيجاد جذورها.

(ب) الجبر التجريدي: يتم فيه دراسة البنى الجبرية، مثل المجموعات والزممر والحلقات والحقول وفضاء المتجهات...

(ج) الجبر الخطي: يتم فيه دراسة المتجهات، التحويلات الخطية، نظم المعادلات الخطية. والمهم لدينا الآن هو أن الجبر الابتدائي يتم تدريسه لطلاب في المرحلة الثانوية، حيث يتوجه إلى معرفة الرياضيات ما بعد الأعداد فيتعامل مع كثيرات الحدود والمعادلات وطرائق إيجاد الجذور لها.

ويعتمد على العمليات الأساسية: الجمع ومعكوسه الطرح، وعلى الضرب ومعكوسه القسمة، كما يعتمد على رقمين لهما أهمية كبرى هما: الصفر ويسمى المحايد الجمعي، والواحد ويسمى المحايد الضربي.

وفي الختام لا بد من الإشارة إلى النظرية الأساسية في علم الجبر لعالم الرياضيات «فريدريك غاوس» «Frederic Gauss» والتي تنص على ما يلي: «كل معادلة كثيرة الحدود، غير الحد الثابت، لها على الأقل جذر واحد».

## مشروع الوحدة

يوفر هذا المشروع فرصة للطلاب لتعرف ناحية مهمة من فنون التصميم، وذلك باستخدام الرياضيات وخاصة الدوال الحدودية.

اطلب إليهم إجراء بحث مستفيض عن كيفية تصميم كل قطعة في السيارة، وكيفية استخدام منحنيات للدوال الحدودية. شجعهم على زيارة مؤسسات أو أصحاب اختصاص في عالم السيارات ليأخذوا أفكارًا تساعدهم على إتمام هذا المشروع.

اشرح لهم أن المعادلة الموجودة في هذا المشروع والتي تنمذج غطاء محرك سيارة جديدة لم تأت من المجهول بل هي نتيجة لدراسة تصاميم متعددة، ومن ثمّ تمّ استخدام إحداثيات بعض النقاط لإيجاد معادلة دالة كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة. أخبرهم أن تصميم السيارة يركز على الهيكل من الخارج لمعالجة الاحتكاك على الطريق، ومع الهواء، وتخفيض كمية الوقود المستهلكة.

## إجابات «أسئلة حول التطبيق»

تحقق من عمل الطلاب في الخطوات من (a) إلى (d).

## التقرير

من المهم جدًا أن يعكس التقرير الجهد والأبحاث والدراسات لكل من شارك في تنفيذ المشروع. اعرض تقريرك أمام زملائك في غرفة الصف، وناقش معهم النتائج والحسابات التي توصلت إليها، ثم أعد النظر ببعضها إذا كان ذلك ضروريًا.

## الوحدة الثالثة

### أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت كتابة دوال خطية ورسومها بيانيًا.
- تعلمت حل أنظمة معادلات أو متباينات خطية وحلها جبريًا وبيانيًا.
- تعلمت حل معادلات تربيعية.
- تعلمت رسم معادلات تربيعية بيانيًا.
- تعلمت حل متباينات تربيعية في متغير واحد.

### أضف إلى معلوماتك

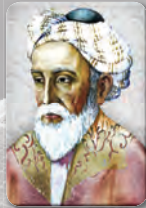
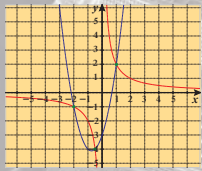
عمر الخيام هو شاعر وفيلسوف تخصص في الرياضيات. اقترح طريقة لحل معادلات جبرية من الدرجة الثالثة تقزم على إيجاد التقاطع بين قطع مكافئ وقطع الزائد. وفي عصرنا الحالي، حيث يمكن استخدام الحاسوب في وضع رسوم دقيقة للدوال القوى، أصبحت طريقة عمر الخيام من أفضل الطرق المنبئة لحل معادلات الدرجة الثالثة.

مثال على ذلك:

$$2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$2x^3 + 3x^2 - 3x = 2$$

$$2x^2 + 3x - 3 = \frac{2}{x} \quad (x \neq 0)$$



عمر الخيام

### ماذا سوف تتعلم؟

- استكشاف الرسوم البيانية للدوال القوى.
- استخدام القوى والحدود لحل المعادلات.
- وصف منحنيات كثيرات الحدود.
- تحليل كثيرات الحدود إلى عوامل.
- كتابة دالة كثيرة الحدود باستخدام أصغرها.
- حل معادلات كثيرات الحدود بطرق مختلفة.
- قسمة كثيرات الحدود.
- إيجاد أصغر دالة كثيرة الحدود.

### المصطلحات الأساسية

دالة القوى - معكوس دالة القوى - دالة زوجية - دالة فردية - درجة دالة كثيرة الحدود - الصورة العامة - سلوك النهاية - صورة عوامل - القيمة العظمى النسبية - القيمة الصغرى النسبية - نظرية العامل - القسمة المطولة - القسمة التركيبية - نظرية الباقي - جدور - أصغر كثيرة الحدود - تحليل إلى عوامل - الأصغر النسبية الممكنة.

## سلم التقييم

4	التصميم والرسوم صحيحة بالكامل - المعادلات دقيقة ومفصلة - الحسابات صحيحة - التقرير واضح ومعبر.
3	معظم التصميم والرسوم صحيحة - معظم المعادلات دقيقة ومفصلة - أخطاء طفيفة في الحسابات - التقرير بمعظمه واضح.
2	بعض التصميم والرسوم صحيحة - بعض المعادلات مفصلة - أخطاء كثيرة في الحسابات - التقرير بحاجة إلى تفصيل وإيضاح.
1	معظم عناصر المشروع غير كاملة.

# 1-3: دوال القوى ومعكوساتها

## 1 الأهداف

- يستكشف الرسوم البيانية لدوال القوى.
- يستخدم القوى والجذور لحل المعادلات.

## 2 المفردات والمفاهيم الجديدة

دالة القوى – دالة زوجية – دالة فردية – المجال.

## 3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة بيانية – ورق رسم بياني – جهاز إسقاط (Data show) – حاسوب.

## 4 التمهيدي

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) اكتب الدالة التربيعية:  $y = x^2 - 4x + 3$

بدلالة إحداثيات الرأس، ثم مثلها بيانيًا.

ما هي معادلة خط التماثل؟

(b) أوجد معكوس الدالة:  $y = x^2 - 4$

هل المعكوس هو دالة؟ اشرح إجابتك مستعينًا باختبار المستقيم الرأسي.

(c) حلل:  $y = x^2 - 4$  إلى عوامل خطية،

ثم أوجد مجموعة الحل عندما  $y = 0$

## 5 التدريس

تساعد الآلة الحاسبة العلمية على وضع جداول لقيم  $y$ ,  $x$  لدوال القوى مما يسمح بالمقارنة بينها.

ساعد الطلاب على استكشاف هذه العلاقات في

الجدول الواردة في فقرة «عمل تعاوني».

3-1

دوال القوى ومعكوساتها

Power Functions and their Inverses



**عمل تعاوني**  
1 استخدم آلة حاسبة لحل النظام:  
 $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x^4 \end{cases}$   
تحقق من كل حل.

2 بين الجدول المقابل  $y_1 = x^2$ ,  $y_2 = x^4$   
ما قيم  $x$  في الجدول التي تحقق  $x^2 < x^4$ ؟  
ما قيم  $x$  في الجدول التي تحقق  $x^2 > x^4$ ؟

$x$	$y_1 = x^2$	$y_2 = x^4$
-1.6	2.56	6.5536
-1.2	1.44	2.0736
-0.8	0.64	0.4096
-0.4	0.16	0.0256
0	0	0
0.4	0.16	0.0256
0.8	0.64	0.4096
1.2	1.44	2.0736
1.6	2.56	6.5536

3 استخدم رسمًا بيانيًا لإيجاد مجموعة حل كل من المتباينتين:  
a  $x^2 < x^4$       b  $x^2 > x^4$

4 أوجد مجموعة حل المتباينة:  $x^6 < x^4$

ارسم بيانيًا دالة القوى:  $y = x^6$  باستخدام آلة حاسبة بيانية وتحقق من إجابتك.

سوف تتعلم  
• استكشاف الرسوم البيانية لدوال القوى  
• استخدام القوى والجذور لحل المعادلات.  
المفردات والمصطلحات:  
دوال القوى  
Power Functions  
دالة فردية  
Odd Function  
دالة زوجية  
Even Function  
المجال  
Domain

معلومة:  
مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ومزها:  $\mathbb{Z}^+$

ملاحظة:  
 $y = ax^n$  يمكن كتابتها أيضًا على الصورة:  $f(x) = ax^n$

استكشاف دوال القوى ومعكوساتها

Exploring Power Functions and their Inverses

الدوال مثل:  $y = x^4$ ,  $w = 0.014c^3$  هي دوال قوى.

تكون دوال القوى على الشكل:

$$y = ax^n, \quad a \neq 0, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

مثال (1) تطبيقات حياتية

تستخدم الصيغة:  $w = 0.014c^3$  لتقدير وزن  $w$  برقالة الجرام ( $g$ )، بدلالة  $c$  محيط أكبر مقطع دائري فيها بالسنتيمتر ( $cm$ ). قدر وزن برقالة محيط أكبر مقطع دائري فيها  $20\text{ cm}$



$$\begin{aligned} w &= 0.014c^3 \\ &= 0.014(20)^3 \\ &= 112\text{ g} \end{aligned}$$

يكون وزن الرقالة التي يبلغ محيطها  $20\text{ cm}$  حوالي  $112\text{ g}$

حاول أن تحل

1 قدر وزن برقالة محيط أكبر مقطع دائري فيها  $22\text{ cm}$  باستخدام الصيغة في مثال (1).

90

تمارين  
3-1

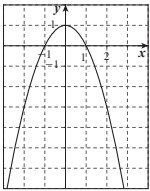
دوال القوى ومعكوساتها

Power Functions and their Inverses

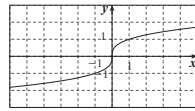
المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1-4)، الأشكال التالية تمثل دوال. صف تماثل كل دالة ثم وضع هل هي زوجية أم فردية أم ليست زوجية وليست فردية.

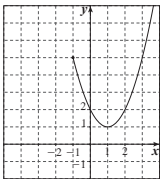
(1)  $y = -x^2 + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$



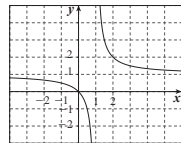
(2)  $y = \sqrt[3]{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$



(3)  $y = x^2 - 2x + 2 \quad \forall x \in [-1, \infty)$



(4)  $y = \frac{x}{x-1} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$



38

ثم اطلب إليهم الربط بين النتائج التي توصلوا إليها بيانيًا وتلك الموجودة على جدول القيم للدالتين:

$$y = x^2, y = x^4$$

### في المثال (1)

تستخدم دالة القوى في حالات متعددة من جوانب الحياة والبيئة، إذ نلاحظ أن:  $w = 0.014c^3$  هي دالة قوى من الدرجة الثالثة تربط وزن برتقالة بالجرام (g) بمحيط أكبر مقطع دائري فيها بالسنتيمتر (cm). اطلب إلى الطلاب إيجاد قيمة  $c$  بدلالة  $w$ .

### في المثالين (3)، (4)

وضّح للطلاب أن معرفة الدوال الزوجية والدوال الفردية تساعدهم كثيرًا على رسم بيان الدالة، إذ يمكن رسم جزء من بيان الدالة واستنتاج الجزء الآخر بالانعكاس في محور الصادات أو في نقطة الأصل.

### في المثالين (5)، (6)

ذكّر الطلاب بمعكوس الدالة (الدرس 5-2)، وأشر إلى أن معكوس الدالة ليس بالضرورة دالة، ثم لاحظ العلاقة بين مدى الدالة ومجال معكوسها.

### 6 الربط

يوفر المثالان (1)، (2) فرصة جيدة أمام الطلاب لاستخدام دوال القوى ومعكوساتها في مواقف حياتية متعددة.

### 7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يجد الطلاب صعوبة في التحويل بين دالة القوى ومعكوسها، ساعدهم على ربط  $n\sqrt{x^m}$  بـ  $x^{\frac{m}{n}}$  حيث إن:

$$n\sqrt{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

### 8 التقييم

توفر فقرات «حاول أن تحل» فرصة مهمة للمعلم كي يتابع طلابه، ويتأكد من مدى استيعابهم مفاهيم هذا الدرس ومهاراته.

**مثال (2) علم الحيوان**

الدالة  $w(x) = 15.625x^3$  هي تقريب للوزن  $w$  (بالكجم) لأض الزرافة بدلالة طولها  $x$  (بالمتر (m)). أوجد وزن كل من إناث الزرافة التي طولها 3.175m ، 3.268m.

الحل:  
احسب  $w(x)$  للتولين.

$w(x) = 15.625x^3$   
 $w(3.175) = 15.625 \times (3.175)^3 \approx 500 \text{ kg}$   
 $w(3.268) = 15.625 \times (3.268)^3 \approx 545.34 \text{ kg}$

حاول أن تحل  
في المثال (2)، أوجد وزن زرافة طولها 3.3m.



**الربط بالتكنولوجيا:**  
استخدم الآلة الحاسبة البيانية في أعلى الشاشة احفظ على  $y_1 = \square$   
 $y_2 = \square$   
 $y_3 = \square$   
 $y_4 = \square$   
(يمكن رسم بيانات عدة دوال (أو) فترات للحصول على بيان الدالة:  $y = x^2$   
• احفظ على المربع قرب  $y$   
• لا تقم بإدخال علامة  $\sqrt{\quad}$  داخله  
• احفظ على  $\square$  ثم  $\square$   
• بلية  $\square$  ثم  $\square$

**نشاط 1**

يوضح الجدول المقابل بعض القيم للدالة  $y = x^3$  أكمل ما يلي:

x	y
-3	-27
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8
3	27

في أي ربعين من المستوى الإحداثي تتوقع ظهور الرسم البياني لهذه الدالة؟  
أكمل كل زوج من النقاط التي تنتمي إلى بيان الدالة: (4, 64)،  $(\square, 0.125)$ ،  $(-0.5, -0.125)$ ،  $(-4, \square)$   
لفرض أن النقطة  $(a, b)$  تنتمي إلى بيان الدالة:  $y = x^3$ ، فأين من النقاط التالية سوف تنتمي أيضًا إلى بيان هذه الدالة؟  
1  $(a, -b)$  2  $(-a, b)$  3  $(-a, -b)$  4  $(2a, 3b)$

مما سبق ومن فقرة «عمل تعاوني» لاحظنا أن بيان الدوال ذات الأسس الزوجية مثل  $y = x^2$ ،  $y = x^4$  يشبه في الشكلين أدناه.

وهذا يمثل الشكل العام للدوال التي على الصورة  $y = ax^n$  حيث  $n$  عددًا زوجيًا،  $a \neq 0$ .

في التمارين (5-9)، اذكر ما إذا كانت كل من الدوال التالية فردية أم زوجية وليست زوجية.

(5)  $y = x^3$  (6)  $y = (x-1)^3 + 2$  (7)  $y = x^4$   
(8)  $y = -x^4 + 3$  (9)  $y = -4/x$

في التمارين (10-15)، أوجد معكوس كل دالة مما يلي:

(10)  $y = \frac{1}{3}x^3$  (11)  $y = 2\sqrt{x}$  (12)  $y = \frac{1}{3}x^4$   
(13)  $y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{x}$  (14)  $y = \sqrt{x-1}$  (15)  $y = (x+2)^4 - 3$

(16) (a) تمثل العلاقة:  $M = 0.008p^3$ ، وزن بطيخة  $M$ ، بالجرام حيث محيطها  $p$  (بالسنتيمتر (cm)).  
قدّر وزن بطيخة محيطها 80 cm.  
(b) حل المعادلة:  $M = 0.008p^3$  بدلالة  $p$ .  
(c) أوجد محيط البطيخة التي وزنها 3.250 kg.

(17) السؤال المفتوح: اكتب دالة قوى يقع رسمها البياني في الربع الثاني والربع الرابع.

(18) عندما تدور دائرة حول خط مثل الخط الموضح في الشكل أدناه، فإن السطح الناتج يسمى «تور» مستديرًا (torus or donut) ويعطى حجمه بالعلاقة:  $V = 2\pi^2 R_1 R_2^2$

(a) افرض أن:  $R_1 = 3R_2$ ، تحقق أن:  $V = 6\pi^2 R_2^3$   
(b) أوجد  $V$  إذا  $R_2 = 1.27 \text{ cm}$ ، حيث  $R_1 = 3R_2$  إلى أقرب جزء من 10.

(19) وضّح كيف أن المقدار  $(-64)^{\frac{2}{3}}$  لا يمثل عددًا حقيقيًا، في حين أن المقدار  $(-64)^{\frac{3}{2}}$  يمثل عددًا حقيقيًا.

(20) التفكير الناقد: صف بيان الدالة  $f(x) = ax^n$  بحسب الشروط الموضوعة على  $a$ ،  $n$ .

(a) عدد صحيح زوجي،  $a > 0$  (b) عدد صحيح زوجي،  $a < 0$   
(c) عدد صحيح فردي،  $a > 0$  (d) عدد صحيح فردي،  $a < 0$

### المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة، و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

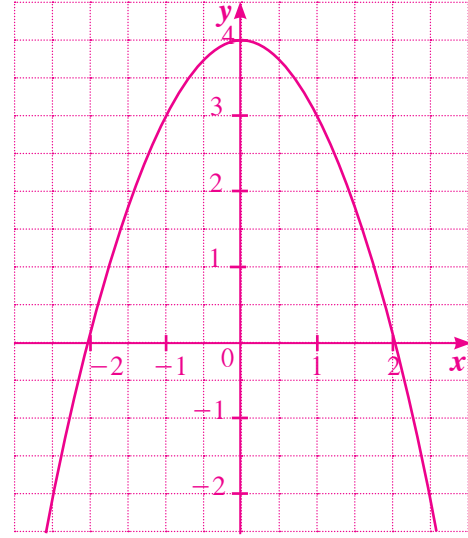
(1)  $y = \sqrt{x^3}$  دالة قوى (a) (b)  
(2)  $f: [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ،  $f(x) = x^5$  دالة فردية (a) (b)  
(3)  $y = x\sqrt{x}$  دالة زوجية (a) (b)  
(4)  $y = (x+4)^2$  دالة زوجية (a) (b)

## اختبار سريع

1 أثبت أن:  $f(x) = -x^2 + 4$  هي دالة زوجية. ثم مثلها بيانياً.

$$f(-x) = -(-x)^2 + 4 = -x^2 + 4 = f(x), \forall x, -x \in \mathbb{R}$$

لذا  $f(x)$  هي دالة زوجية.

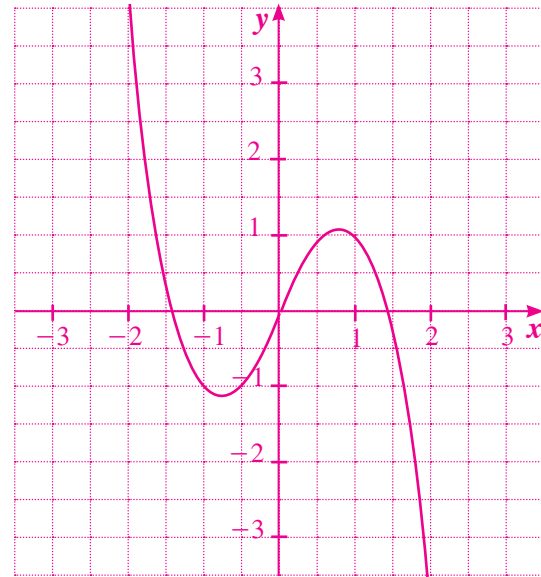


$$f(x) = -x^2 + 4$$

2 أثبت أن:  $f(x) = -x^3 + 2x$  هي دالة فردية. ثم مثلها بيانياً.

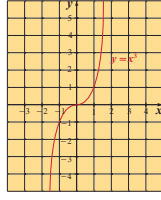
$$f(-x) = -(-x)^3 + 2(-x) = x^3 - 2x = -(x^3 + 2x) = -f(x), \forall x, -x \in \mathbb{R}$$

لذا  $f(x)$  هي دالة فردية.



$$f(x) = -x^3 + 2x$$

كذلك لاحظنا من تنشيط \*1 أن بيان الدوال ذات الأسس الفردية مثل  $y = x^3$  وكما في الشكل.

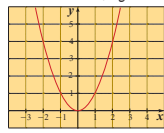


وهذا يمثل الشكل العام للدوال التي على الصورة  $y = ax^n$  حيث  $n$  عدداً فردياً،  $a \neq 0$ .

الدوال الزوجية والدوال الفردية Even Functions and Odd Functions

**تعريف**  
تكون الدالة  $f(x) = y$  التي مجالها  $D$  دالة زوجية إذا وفقط إذا كان:  
 $f(-x) = f(x) \quad \forall x, -x \in D$

في مستوى الإحداثيات، المحور الصادي هو محور تماثل (تناظر) لبيان كل دالة زوجية فمثلاً:

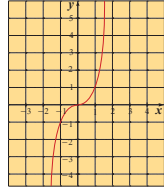


وذلك لأن:  $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ ، هما دالتان زوجيتان مجال كل منهما  $\mathbb{R}$ .

فإن:  $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

وكذلك:  $h(-x) = (-x)^4 = x^4 = h(x)$

**معلومة**  
يكون لبيان دالة نقطة تماثل (مركز تناظر) إذا دار بيان الدالة بزاوية قياسها  $180^\circ$  حول هذه النقطة وانطبق على نفسه.



**تعريف**  
تكون الدالة  $f(x) = y$  التي مجالها  $D$  دالة فردية إذا وفقط إذا كان:  
 $f(-x) = -f(x) \quad \forall x, -x \in D$

في مستوى الإحداثيات نقطة الأصل هي نقطة تماثل (تناظر) لبيان كل دالة فردية.

فمثلاً:  $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ ، الدالة  $f(x) = x^3$  هي دالة فردية.

وذلك لأن:  $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ ،

فإن:  $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

**ملاحظة:**  
توجد دوال ليست زوجية وليست فردية.

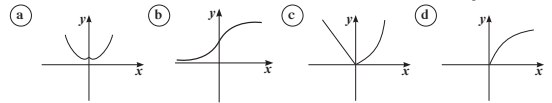
92

(5) المستقيم الذي معادلته  $y = x$  هو خط تناظر بين النقاط التي تمثل (a) (b)

المستقيم الذي معادلته  $y = x$  هو خط تناظر بين النقاط التي تمثل معكوسها.

في الصارين (6-10)، ظلل دائرة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة.

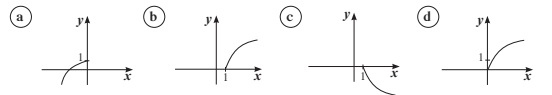
(6) معكوس دالة القوى  $y = 0.2x^4$  هو، (a)  $y = \sqrt[4]{\frac{x}{0.2}}$  (b)  $y = \pm \sqrt[4]{\frac{x}{0.2}}$  (c)  $y = \pm \sqrt[4]{\frac{x}{2}}$  (d)  $y = \pm \sqrt[4]{5x}$



(8) الدالة  $y = 4.9x^2$  زوجية إذا كان مجالها، (a)  $[-4, 4]$  (b)  $[-4, 2]$  (c)  $[-2, 2]$  (d)  $[0, \infty)$

(9) إذا كانت  $f(x) = \frac{x^3}{64}$ ، فإن مجال  $f^{-1}$  هو، (a)  $\mathbb{R}$  (b)  $\mathbb{R}^+$  (c)  $[-4, 4]$  (d)  $[-1, 1]$

(10) ليكن بيان  $f^{-1}$  كما هو موضح في الشكل المقابل. بيان  $f$  يمكن أن يكون، (a) (b) (c) (d)



في التمرين (11-12)، لديك قائمتان اختر من القائمة (2) ما يناسب السؤال في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.

القائمة (1)	القائمة (2)
(11) بيان دالة زوجية متمائل حول،	(a) المستقيم الذي معادلته $x = 0$
(12) بيان دالة فردية متمائل حول،	(b) المستقيم الذي معادلته $y = 0$
	(c) المستقيم الذي معادلته $y = x$
	(d) نقطة الأصل

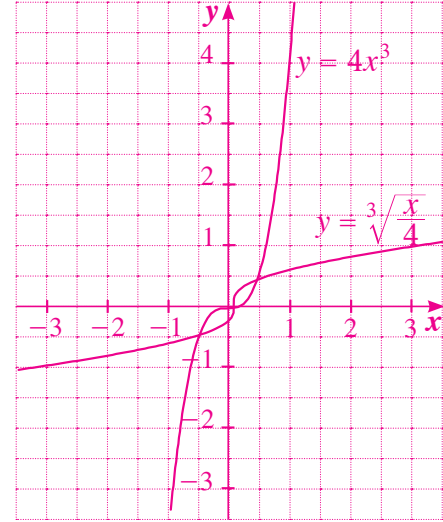
40

3 أوجد معكوس دالة القوى:  $y = 4x^3$ ،

ثم مثل الدالة ومكوسها بيانياً.

$$y = 4x^3 \implies x = 4y^3$$

$$y^3 = \frac{x}{4} \implies y = \sqrt[3]{\frac{x}{4}}$$



مثال (3)

بين ما إذا كانت كل دالة مما يلي زوجية أو فردية أو ليست زوجية وليست فردية.

a  $f(x) = 2x^7$

b  $y = -x^8$

c  $y = (x+2)^2$

d  $h(x) = 4$

الحل:

a  $f(x) = 2x^7$

$$f(-x) = 2(-x)^7 = -2x^7 = -f(x) \quad \forall x, -x \in \mathbb{R}$$

$f(-x) = -f(x)$  : الدالة فردية لأن:

b  $y = -x^8$

$$g(-x) = -(-x)^8 = -x^8 = g(x) \quad \forall x, -x \in \mathbb{R}$$

$g(-x) = g(x)$  : الدالة زوجية لأن:

c  $y = (x+2)^2$

$$v(-x) = (-x+2)^2 \neq (x+2)^2 \quad \forall x, -x \in \mathbb{R}$$

$v(-x) \neq v(x)$  : الدالة ليست زوجية:

$$v(-x) \neq -(x+2)^2$$

$v(-x) \neq -v(x)$  : الدالة ليست فردية

d  $h(x) = 4$

$$h(-x) = 4 = h(x) \quad \forall x, -x \in \mathbb{R}$$

$h(-x) = h(x)$  : الدالة زوجية لأن:

حاول أن تحل

3 بين ما إذا كانت كل دالة مما يلي زوجية أو فردية أو ليست زوجية وليست فردية.

a  $f_1(x) = x^5$

b  $f_2(x) = x$

c  $f_3(x) = 2x^4$

d  $f_4(x) = (x+3)^3$

تذكر:  
إذا لم يذكر المجال تكون  
الدالة معرفة على مجالها.

9 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

- 1  $x = 0, 1, -1$
- 2  $(-1.6, -1.2, 1.2, 1.6)$  ;  $(-0.8, -0.4, 0.4, 0.8)$
- 3 (a)  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$   
(b)  $(-1, 0) \cup (0, 1)$
- 4  $(-1, 0) \cup (0, 1)$

تحقق من عمل الطلاب

«حاول أن تحل»

- 1  $c = 22 \text{ cm}$  ,  $w \approx 149 \text{ g}$
- 2  $w(3.3) \approx 561.5 \text{ Kg}$



3 (a)  $f_1(x) = x^5$   
 $f_1(-x) = (-x)^5 = -x^5$   
 $= -f_1(x)$   
 $\therefore$  الدالة فردية.

(b)  $f_2(x) = x$   
 $f_2(-x) = -x = -f_2(x)$   
 $\therefore$  الدالة فردية.

(c)  $f_3(x) = 2x^4$   
 $f_3(-x) = 2(-x)^4 = 2x^4$   
 $= f_3(x)$   
 $\therefore$  الدالة زوجية.

(d)  $f_4(x) = (x+3)^3$   
 $f_4(-x) = (-x+3)^3 = -(x-3)^3$   
 $\therefore$  الدالة ليست زوجية وليست فردية.

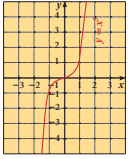
4 (a) نقطة الأصل هي نقطة تماثل  $\therefore$  فردية.

(b) المحور الصادي هو محور تماثل  $\therefore$  زوجية.

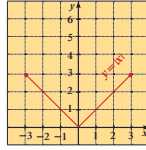
(c) نقطة الأصل هي نقطة تماثل  $\therefore$  فردية.

مثال (4) الأشكال التالية تمثل دوال. صف تماثل كل دالة ثم وضع هل هي زوجية أم فردية أم ليست زوجية وليست فردية.

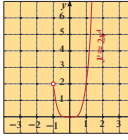
a)  $y = x^3, x \in \mathbb{R}$



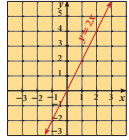
b)  $y = |x|, x \in [-3, 3]$



c)  $y = 2x^4, x \in (-1, \infty)$



d)  $y = 2x, x \in \mathbb{R}$

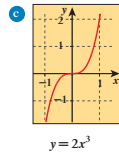
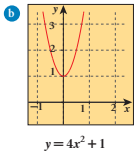
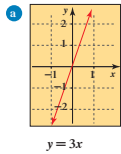


الحل:

- a) نقطة الأصل هي نقطة تماثل (تماثل)  $\therefore$  الدالة فردية  
b) المحور الصادي هو محور تماثل (تماثل)  $\therefore$  الدالة زوجية  
c) ليس لها نقطة تماثل ولا محور تماثل  $\therefore$  الدالة ليست زوجية وليست فردية  
d) نقطة الأصل هي نقطة تماثل (تماثل)  $\therefore$  الدالة فردية

حاول أن تحل

4 الأشكال التالية تمثل دوال. صف تماثل كل دالة ثم وضع هل هي زوجية أم فردية أم ليست زوجية وليست فردية.



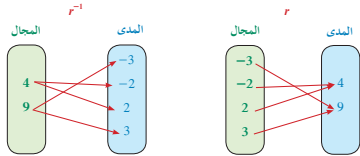
94

Inverse Relation ( $r^{-1}$ )

معكوس العلاقة ( $r^{-1}$ )

تعرفت في الوحدة الثانية على معكوس العلاقة. ونذكر بالنقاط التالية:

- إذا كانت علاقة  $r$  تربط عنصراً  $a$  من المجال بعنصر  $b$  من المدى، فمعكوس العلاقة يربط بالعنصر  $b$  بالعنصر  $a$ .
- إذا كان  $(a, b)$  عنصراً من العلاقة  $r$  فإن  $(b, a)$  هو عنصر من معكوس العلاقة  $r^{-1}$ .
- مجال معكوس العلاقة ( $r^{-1}$ ) هو مدى العلاقة  $r$ .
- المستقيم الذي معادلته  $y = x$  هو خط تماثل بين النقاط التي تمثل العلاقة  $r$  والنقاط التي تمثل معكوسها.



بعض العلاقات تعتبر دوال لذلك إذا كان لدينا دالة فيمكننا إيجاد معكوسها مع ملاحظة أنه ليس بالضرورة أن يكون المعكوس دالة.

مثال (5)

أوجد معكوس الدالة:  $y = 2x^4$   
الحل:

لاحظ أن  $0 \leq y$   
اعكس المتغيرين  $x, y$   
حل بالنسبة إلى المتغير  $y$   
أوجد الجذر الرابع لكل من الطرفين  
عندما  $x > 0$  توجد قيمتان للجذر الرابع  
معكوس  $y = 2x^4$  هو  $y = \pm 4\sqrt[4]{\frac{x}{2}}$

حاول أن تحل

3 أوجد معكوس الدالة:  $y = 5x^3$

95

$$5 \quad y = 5x^3$$

$$\frac{y}{5} = x^3$$

$$\frac{x}{5} = y^3$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{x}{5}}$$

$$6 \quad y = x^2 + 4, \quad x \geq 0$$

«تدريب»

$$y = x^3 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x}, \text{ المعكوس دالة}$$

$$y = x^4 \Rightarrow y = \pm \sqrt[4]{x}, \text{ المعكوس ليس دالة}$$

«نشاط 1»

(a) في الربع الأول والربع الثالث من المستوى الإحداثي

$$(b) (-4, -64), (0.5, 0.125)$$

$$(c) (-a, -b)$$

**مثال (6)**

أوجد معكوس الدالة:  $f(x) = \sqrt{x+2}$

الحل:

أعد كتابة الدالة باستخدام  $y$

اعكس المتغيرين  $x, y$

زيع طرفي المعادلة

حل في  $y$

∴ معكوس الدالة  $f(x) = \sqrt{x+2}$  هو

$f^{-1}(x) = x^2 - 2, \quad x \geq -2$

**حاول أن تحل**

**6** أوجد معكوس الدالة:  $f(x) = \sqrt{x-4}$

**معلومة:**

• إذا كانت النقطة  $(a, b)$  تقع على بيان دالة ما فإن  $(b, a)$  تقع على بيان معكوسها.

• عندما يقطع مستقيم رأسي المنحني في موضعين فهذا المنحني لا يمثل دالة.

**تدريب**

تحقق بدقة الرسوم البيانية لدوال القوى ومعكوساتها ثم أكمل الجدول. لاحظ العلاقة بين مدى الدالة ومجال معكوسها.

ملاحظات	بيان المعكوس	المعكوس	بيان الدالة	دوال القوى
المعكوس ليس دالة		$y = \pm\sqrt{x}$		$y = x^2$
.....		.....		$y = x^3$
.....		.....		$y = x^4$

## 2-3: الدوال الحدودية

### 1 الأهداف

- يصف منحنيات كثيرات الحدود.
- يمدج بيانات باستخدام دوال كثيرات الحدود.
- يصف سلوك النهاية لدوال كثيرات الحدود.

### 2 المفردات والمفاهيم الجديدة

المعامل الرئيسي - حد تكعيبي - حد تربيعي - حد خطي - حد ثابت - سلوك النهاية - درجة - الصورة العامة - حدودية أو كثيرة حدود.

### 3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة بيانية - ورق رسم بياني - جهاز إسقاط (Data show) - حاسوب.

### 4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

- (a) ارسم بيان الدالة:  $y = x^2 + 2$ ، ثم اذكر ما إذا كانت زوجية أو فردية وحدد نوع التماثل.
- (b) ارسم بيان الدالة:  $y = x^3 + x$ ، ثم اذكر ما إذا كانت زوجية أو فردية وحدد نوع التماثل.
- (c) أوجد معكوس العلاقة  $r$  الممثلة على الجدول، ثم مثل على مستوى إحداثي واحد العلاقة  $r$  ومعكوسها  $r^{-1}$ .

$x$	-1	0	1	2
$y$	3	1	-1	-3

### 5 التدريس

تابع عمل الطلاب بعناية في فقرة «عمل تعاوني» وبخاصة عند رسم بيان الدوال على الآلة الحاسبة البيانية، وعند محاولتهم رسم كل دالة على بطاقة. ناقش معهم الإجابات التي توصلوا إليها في الأسئلة (2)، (3)، (4)، (5)، لأن ذلك سوف يساعدهم كثيرًا على فهم طبيعة منحنيات دوال كثيرة الحدود، وسلوك النهاية لمنحنى كل دالة بحسب درجتها. توسع في هذه الفقرة في الشرح والنقاش والحوار.

## 2-3

### الدوال الحدودية

#### Polynomial Functions

#### عمل تعاوني

1. اعمل في مجموعات. كل مجموعة تحتاج إلى آلة حاسبة بيانية وعشر بطاقات ورقية. ارسم بيانيًا كل دالة مكتوبة جهة اليسار وخط كل رسم على بطاقة منفصلة. عنون كل رسم بمعادلته.
2. صنف الرسوم البيانية في مجموعات تبعًا لأشكالها.
3. فيم تشابه الرسوم البيانية للمعادلات الخطية؟
4. فيم تشابه الرسوم البيانية للمعادلات التربيعية؟
5. فيم تشابه الرسوم البيانية للمعادلات المتبقية؟ وفيم تختلف؟
6. قدر الجزء (الأجزاء) المقطوع من محور السينات لكل رسم بياني واكتبه على البطاقة الخاصة به.
7. ماذا تلاحظ بالنسبة إلى عدد الأجزاء المقطوعة من محور السينات في كل رسم بياني وأكبر أس يوجد في معادلته؟

عندما تجمع دوال قوى مختلفة وثوابت أو تطرحها فإنك تحصل على دالة حدودية (دالة كثيرة الحدود).

#### تعريف الدالة الحدودية (كثيرة الحدود)

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

حيث  $n$  عدد صحيح موجب.

$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0$  أعدادًا حقيقية

الدوال في «عمل تعاوني» كلها دوال كثيرات الحدود مثل الدالة  $P(x)$  التالية، دالة كثيرة حدود

$$P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 2x - 5$$

$$P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 2x - 5$$

$$P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 2x - 5$$

$$P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 2x - 5$$

$$P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 2x - 5$$

$$P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 2x - 5$$

$$P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 2x - 5$$

$$P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 2x - 5$$

يحدد الأس في كل حد **درجة** الحد. الحدود في كثيرة الحدود الموضحة أعلاه مرتبة تنازليًا بحسب درجاتها. هذا الترتيب يسمى **الصورة العامة**. وفي الصورة العامة تجمع كل الحدود المتشابهة. يمكنك أن تصنف أو تصنف كثيرة الحدود في الصورة العامة بعدد الحدود التي تحتويها أو بأعلى درجة لها.

97

### الدوال الحدودية

#### Polynomial Functions

#### المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1-9)، اكتب كل كثيرة حدود مما يلي بالصورة العامة ثم صنفها تبعًا للدرجة وعدد الحدود.

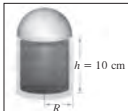
- (1)  $(2x^2 + 9) - (3x^2 - 7)$
- (2)  $(7x^2 + 8x - 5) + (9x^2 - 9x)$
- (3)  $(7x^3 + 9x^2 + 8x + 11) - (5x^3 - 13x - 16)$
- (4)  $(30x^3 - 49x^2 + 7x) + (50x^3 - 75x - 60x^2)$
- (5)  $\frac{3x^3 + 4x}{6}$
- (6)  $5x^2(6x - 2)$
- (7)  $(x^2 + 1)^2$
- (8)  $(2c - 3)(2c + 4)(2c - 1)$
- (9)  $(w - 1)^4$

(10) السؤال المفتوح: اكتب دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة.

كون جدولًا للقيم وارسم الدالة بيانيًا.

أوجد الأجزاء المقطوعة من محور السينات ومحور الصادات.

(11) تصميم العبوات: الشكل أدناه يوضِّح زجاجة عطر تتكون من قاعدة أسطوانية وغطاء نصف كروي.



(a) اكتب مقدارًا يعبر عن حجم الأسطوانة.

(b) اكتب مقدارًا يعبر عن حجم الغطاء نصف الكروي.

(c) اكتب كثيرة حدود تمثل الحجم الكلي.

في التمارين (12-16) عين سلوك النهاية لبيان كل دالة

- (12)  $y = 3x + 2$
- (13)  $f(x) = -x^2 + x$
- (14)  $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2$
- (15)  $y = -4x^4 + 5x^5$
- (16)  $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + x - 1$

## في المثال (1)

يساعد هذا المثال الطلاب على كتابة كل كثيرة حدود بالصورة العامة لإيجاد درجتها، وكتابة اسمها باستخدام عدد حدودها. ركز انتباه الطلاب على اسم كثيرة الحدود باستخدام درجتها. أخبرهم أنه يوجد كثيرة حدود ثابتة حيث درجتها الصفر وكثيرة حدود خطية درجتها واحد وكثيرة حدود تربيعية درجتها اثنان وكثيرة حدود تكعيبية ودرجتها ثلاثة. وضح لهم أنه من الدرجة الرابعة وما فوق نقول حدودية من الدرجة الرابعة أو حدودية من الدرجة الخامسة.... ألفت انتباه الطلاب إلى الفرق بين عدد الحدود ودرجة كثيرة الحدود لتفادي الالتباس.

الحدودية	الدرجة	الاسم باستخدام الدرجة	عدد الحدود	الاسم باستخدام عدد الحدود
6	الصفرية	ثابتة	1	أحادية
$x + 3$	الأولى	خطية	2	ثنائية
$3x^2 + 5x - 2$	الثانية	تربيعية	3	ثلاثية
$2x^3 - 5x^2$	الثالثة	تكعيبية	2	ثنائية
$-x^4 + x^3 - 1$	الرابعة	ذات القوة الرابعة	3	ثلاثية

### مثال (1)

اكتب كل كثيرة حدود بالصورة العامة ثم صنفها تبعًا للدرجة وعدد الحدود.

- a  $(2l - 5)(l^2 - 1)$     b  $5x^3 - (4x^2 + 5x) + 2x^2$     c  $-7x + 5x^4$

الحل:

a  $-7x + 5x^4 = 5x^4 - 7x$

الحد الذي له أكبر درجة هو  $5x^4$   
∴ حدودية من الدرجة الرابعة لها حدان ∴ ثنائية.

b  $5x^3 - (4x^2 + 5x) + 2x^2$   
 $= 5x^3 - 4x^2 - 5x + 2x^2$   
 $= -2x^2$

الحد الذي له أكبر درجة هو  $-2x^2$   
∴ حدودية من الدرجة الثانية لها حد واحد ∴ أحادية.

c  $(2l - 5)(l^2 - 1)$   
 $= 2l^3 - 2l - 5l^2 + 5$   
 $= 2l^3 - 5l^2 - 2l + 5$

الحد الذي له أكبر درجة هو  $2l^3$   
∴ حدودية من الدرجة الثالثة لها أربعة حدود ∴ رباعية.

ملاحظة:

إذا كانت الدالة الحدودية من الدرجة  $n$  فإن لها على الأكثر  $(n + 1)$  حدًا.

98

## في «نشاط إثرائي»

يوفر هذا النشاط فرصة أمام الطلاب لنمذجة بيانات واقعية بدالة كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة حيث إن هذه البيانات تتضمن خمس قيم. وبالتالي يمكن توقع نتائج معقولة تعبر عن تطور إنتاج الذهب في العالم خلال أي سنة.

## في المثال (2)

ركز مع الطلاب على مفهوم سلوك النهاية انطلاقًا من درجة كل دالة كثيرة الحدود واستنادًا إلى إشارة المعامل الرئيسي في كل دالة. هذا المفهوم سيساعد الطلاب لاحقًا على تصحيح أخطاء الرسم البياني.

## 6 الربط

يربط النشاط الإثرائي بيانات من الحياة الواقعية بنموذج من الدوال الحدودية.

## 7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في تحديد سلوك النهاية لبيان دالة كثيرة الحدود. ساعدهم على فهم سلوك النهاية بالترابط مع درجة الدالة وإشارة المعامل الرئيسي لهذه الدالة، من حيث كونها موجبة أو سالبة.

## 8 التقييم

لاحظ الطلاب أثناء إجاباتهم عن فقرات «حاول أن تحل» لتكوّن فكرة واضحة عن مدى فهمهم لما ورد في هذا الدرس.

### المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

- (1) كثيرة الحدود،  $f(x) = ax^3 + (a+2)x^2 + 5$ ،  $\forall a \in \mathbb{R}$  هي من الدرجة الثالثة. (a) (b)  
 (2) المعامل الرئيسي لكثيرة الحدود  $f(x) = 2x^3 - 3x^2(1-x^2)$  هو 2 (a) (b)  
 (3) كثيرة الحدود  $(x+1)(x^2-1)$  هي من الدرجة السابعة. (a) (b)  
 (4) إذا كانت الدالة الحدودية من الدرجة  $n$  فإن لها  $n$  حدًا. (a) (b)  
 في التمارين (5-7)، ظلّل دائرة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة. (5)  $(x+1)^3$  يساوي: (a)  $x^3 + 1$  (b)  $(x+1)(x^2 + x + 1)$

- (c)  $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$  (d)  $x^3 + x^2 + x + 1$   
 (6) أي مما يلي يساوي  $2x^4 - 3x + 6$ ? (a)  $(x^4 - 2x^2 + 3) - (x^4 - x^2 - 9)$  (b)  $2x^4 - 3(x+6)$

- (c)  $(3x^4 - x + 3) + (3 - 2x - x^4)$  (d)  $x(2x^3 - 3x) + 6$

(7) سلوك نهاية الدالة هو: 

- (a) (∞, ∞) (b) (∞, ∞) (c) (∞, ∞) (d) (∞, ∞)

في التمارين (8-11) لديك قائمتان، اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في من القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.

القائمة (1)	القائمة (2)
سلوك نهاية الدالة: (8) $f(x) = x^4 - 2x^3$ (9) $g(x) = 2x + x^3 + 5$	(a) (∞, ∞) (b) (∞, ∞) (c) (∞, ∞) (d) (∞, ∞)
سلوك نهاية الدالة: (10) $f(x) = -x^6 + 7x$ (11) $g(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2$	(a) (∞, ∞) (b) (∞, ∞) (c) (∞, ∞) (d) (∞, ∞)

42

## اختبار سريع

1 اكتب كثيرة الحدود بالصورة العامة،  
وصنفها من حيث الدرجة وعدد الحدود

$$2x(3x - 5) + x^3 - 4x^2 + 2$$

$$6x^2 - 10x + x^3 - 4x^2 + 2 = x^3 + 2x^2 - 10x + 2$$

من الدرجة الثالثة، رباعية الحدود.

2 عيّن سلوك النهاية:

(a)  $f(x) = -x^4 + 4x^2 + 5$

المعامل الرئيسي = -1 سالب. سلوك النهاية لجهة اليمين هو إلى أسفل. درجة كثيرة الحدود = 4 زوجية. سلوك النهاية لجهة اليسار مشابه لليمين، لذا سلوك النهاية:  $(\infty, \infty)$ .

(b)  $f(x) = x^5 + 3x^2 - 2$

المعامل الرئيسي = 1 موجب. سلوك النهاية لجهة اليمين هو إلى أعلى. درجة كثيرة الحدود = 5 فردية. سلوك النهاية لجهة اليسار معاكس لليمين، لذا سلوك النهاية:  $(\infty, -\infty)$ .

### حاول أن تحل

1 اكتب كل كثيرة حدود بالصورة العامة ثم صنفها تبعاً للدرجة وعدد الحدود.

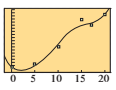
a.  $4x - 6x + 5$       b.  $3x^3 + x^2 - (4x + 2x^3)$       c.  $6 - 2x^5$

لقد استخدمت سابقاً الخطوط المستقيمة والمنحنيات لتمثيل البيانات. يمكنك أحياناً إحكام تمثيل البيانات باستخدام كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة أو أكثر.

### نشاط إثرائي (الربط بالحياة)

يبين الجدول أدناه إنتاج العالم من الذهب لعدة سنوات. أوجد كثيرة حدود من الدرجة الرابعة لنمذجة البيانات، ثم استخدمها لتقدير الإنتاج العالمي من الذهب سنة 1988.

السنة	1975	1980	1985	1990	1995	2000
الإنتاج مليون أونصة	38.5	39.2	49.3	70.2	71.6	82.6



يظهر على شاشة الآلة الحاسبة

الحل:  
استخدم آلة حاسبة يابانية.

أدخل البيانات. ليكن 0 يمثل 1975.

استخدم نموذجاً من الدرجة الرابعة.

ارسم بيانياً نموذج كثيرة الحدود:

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + \dots + a_0$$

$$a_4 = 9.0333333 \times 10^{-4}$$

$$a_3 = -0.0519296296$$

$$a_2 = 0.9590277778$$

$$a_1 = -3.898753421$$

$$a_0 = 38.85753968$$

$$f(x) = 0.00090333x^4 - 0.05193x^3 + 0.959x^2 - 3.899x + 38.86$$

هي نموذج تقديري من الدرجة الرابعة.

لتقدير قيمة إنتاج الذهب سنة 1988 نستخدم جدول القيم.

جدول القيم

x	y
8	46.157
9	49.519
10	52.875
11	56.12
12	59.168
13	61.959

استناداً لهذا النموذج، يقدر إنتاج الذهب سنة 1988 بحوالي 62 مليون أونصة.

• استخدم كثيرة الحدود في هذا النشاط لتقدير إنتاج الذهب سنة 1997.

### معلومة:

يلغ وزن أونصة الذهب  
once (oz).  
28.349 g  
أي حوالي  
28.35 g

### ملاحظة:

يجب احتياراً آلة حاسبة لها  
هذه الخاصية وتغير طريقة  
الرمز من آلة إلى أخرى.

### ملاحظة:

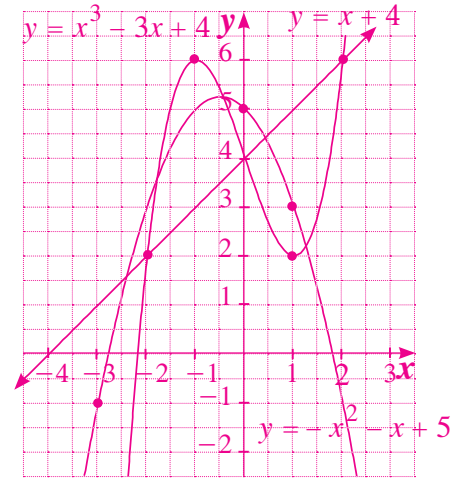
يبطل العدد 13 سنة 1988.

## خلفية علمية

استخدم آلة حاسبة بيانية لتحديد أفضلية التمثيل بين النموذج الخطي والنموذج التربيعي والنموذج التكعيبي للبيانات في الجدول التالي:

$x$	-3	-2	-1	0	1	2
$y$	-1	2	6	5	2	6

أدخل البيانات إلى الآلة الحاسبة البيانية، ثم قارن بين البيانات التي تحصل عليها، تجد النموذج التكعيبي هو الأفضل، لأنك تلاحظ أن النموذج الخطي يمر بنقطتين فقط، وأن النموذج التربيعي يمر بثلاث نقاط، ولكن النموذج التكعيبي يمر بأربع نقاط.



## 9 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

تحقق من إجابات الطلاب، وناقشهم في كل ما يتوصلون إليه من إجابات، ثم شجعهم على التعاون مع بعضهم بعضاً.

«حاول أن تحل»

1 (a)  $-2x + 5$

من الدرجة الأولى، ثنائية الحدود.

(b)  $x^3 + x^2 - 4x$

من الدرجة الثالثة، ثلاثية الحدود.

(c)  $-2x^5 + 6$

من الدرجة الخامسة، ثنائية الحدود.

### سلوك النهاية

سلوك النهاية لمنحنى دالة يصف امتداد طرفيه الأيسر والأيسر، وتوجد أربعة نماذج لسلوك النهاية لكثيرة حدود وهي لأعلى ولأسفل، لأعلى ولأسفل، لأعلى ولأسفل، ولأسفل ولأعلى. وهذا نظام لإعطاء الإشارات بواسطة علمين يوضح النماذج الأربعة لسلوك النهاية لكل دالة كثيرة حدود مبنية أدناه يعين سلوك النهاية بواسطة الحد الذي له أعلى درجة في كثيرة الحدود.

نظام الإشارات	الدالة وبياناتها	المعامل الرئيسي موجب، سالب	سلوك النهاية	الدرجة زوجي أم فردي
	 $y = x^4 - 3x^3 + 5x$	1 عدد موجب		الرابعة زوجي
	 $y = -x^2 + 6x$	-1 عدد سالب		الثانية زوجي
	 $y = x^3$	1 عدد موجب		الثالثة فردي
	 $y = -0.3x^3 + 4x + 2$	-0.3 عدد سالب		الثالثة فردي

## 2 (a) كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة (فردية)

المعامل الرئيسي =  $-1$  (سالبة)

سلوك النهاية جهة اليمين لأسفل، سلوك النهاية جهة اليسار معاكس لجهة اليمين.

∴ سلوك النهاية هو:  $(\searrow, \swarrow)$

(b) المعامل الرئيسي =  $+4$  (موجب)

درجة كثيرة الحدود =  $4$  (زوجي)

سلوك النهاية جهة اليمين لأعلى سلوك النهاية جهة اليسار مشابه لجهة اليمين.

∴ سلوك النهاية هو:  $(\swarrow, \swarrow)$

(c) كثيرة حدود من الثالثة (فردية)

المعامل الرئيسي =  $2$  (موجب)

سلوك النهاية جهة اليمين لأعلى، وسلوك النهاية جهة اليسار معاكس لجهة اليمين.

∴ سلوك النهاية هو:  $(\swarrow, \swarrow)$

(d) كثيرة حدود من الدرجة الرابعة (زوجي)

المعامل الرئيسي =  $-1$  (سالبة)

سلوك النهاية جهة اليمين لأسفل، سلوك النهاية جهة اليسار مشابه لجهة اليمين.

∴ سلوك النهاية هو:  $(\swarrow, \searrow)$

«نشاط إثرائي» (الربط بالحياة)

نوجد:  $f(22) = 0.0009033(22)^4 - 0.0519(22)^3$

$+0.959(22)^2 - 3.899(22) + 38.86$

ومنه (مليون أونصة)  $f(22) \approx 76$

مثال (2)

وضح سلوك النهاية لبيان كل دالة كثيرة الحدود.

a.  $y = 4x^3 - 3x$

c.  $g(x) = x^2 - 4x + 3$

b.  $f(x) = -2x^4 + 8x^3 - 8x^2$

d.  $h(x) = -x^3 + 2x + 2$

الحل:

a. المعامل الرئيسي 4 (عدد موجب)

∴ سلوك النهاية جهة اليمين هو لأعلى.

∴ كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة (فردية).

∴ سلوك النهاية جهة اليسار معاكس لسلوك النهاية جهة اليمين أي لأسفل.

∴ سلوك النهاية هو  $(\swarrow, \swarrow)$ .

b. المعامل الرئيسي  $-2$  (عدد سالب)

∴ سلوك النهاية جهة اليمين هو لأسفل.

∴ كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة (زوجي).

∴ سلوك النهاية جهة اليسار هو نفسه سلوك النهاية جهة اليمين أي لأسفل.

∴ سلوك النهاية هو  $(\swarrow, \swarrow)$ .

c. المعامل الرئيسي 1 (عدد موجب)

∴ سلوك النهاية جهة اليمين هو لأعلى.

∴ كثيرة الحدود من الدرجة الثانية (زوجي).

∴ سلوك النهاية جهة اليسار هو نفسه سلوك النهاية جهة اليمين أي لأعلى.

∴ سلوك النهاية هو  $(\swarrow, \swarrow)$ .

d. المعامل الرئيسي  $-1$  (عدد سالب)

∴ سلوك النهاية جهة اليمين هو لأسفل.

∴ كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة (فردية).

∴ سلوك النهاية جهة اليسار معاكس لسلوك النهاية جهة اليمين أي لأعلى.

∴ سلوك النهاية هو  $(\swarrow, \searrow)$ .

مثال (2)

وضح سلوك النهاية لبيان كل دالة كثيرة الحدود.

a.  $y = -x^3 + 2x^2 + 6$

c.  $f(x) = 2x^3 - x$

b.  $y = 4x^4 - 3x$

d.  $h(x) = x - x^4$

## 3-3: العوامل الخطية لكثيرات الحدود

### 1 الأهداف

- يحلل كثيرة الحدود إلى عوامل.
- يكتب دالة كثيرة الحدود باستخدام أصفارها.
- يربط بين الأصفار والعوامل.

### 2 المفردات والمفاهيم الجديدة

- عوامل دالة حدودية - أصفار دالة حدودية - القيمة العظمى - نظرية العامل.

### 3 الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة بيانية - ورق رسم بياني - جهاز إسقاط (Data show) - حاسوب.

### 4 التمهيدي

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) ارسم بيان الدالة التالية:

$$y = x^2 + 4x + 3$$

(b) حدّد سلوكك النهائية لكل دالة مما يلي:

$$(1) y = -x^2 + 3x - 5$$

$$(2) y = -x^3 + 4x^2 + 2$$

$$(3) y = x^3 + 4x - 1$$

$$(4) y = x^4 - 4x^2 + 3$$

### العوامل الخطية لكثيرات الحدود

#### Linear Factors of Polynomials

#### دعنا نفكر ونتناقش

كثيرة الحدود في صورة عوامل من المفيد أحياناً التعامل مع كثيرات الحدود في صورة عوامل. فمثلاً عوامل كثيرة الحدود،  $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$  هي،

$$(x-3), (x+2), (x-1)$$

كيف يمكنك التحقق من أن،  $(x-3), (x+2), (x-1)$  هي عوامل لكثيرة الحدود.

ما العلاقة بين كل حد ثابت لعوامل كثيرة الحدود وعوامل الحد الثابت؟

عندما نحلل كثيرة الحدود إلى عوامل خطية فلا يمكن القيام بتحليلات أخرى لإيجاد عوامل إضافية.

#### مثال (1)

اكتب التعبير:  $(x+1)(x+2)(x+5)$  في شكل كثيرة حدود في الصورة العامة.

الحل:

$$\text{اضرب } (x+2), (x+5) \Rightarrow (x+5)(x^2+8x+10) = (x+1)(x^2+8x+10)$$

$$\text{بنسط} = (x+1)(x^2+8x+10)$$

$$\text{اضرب} = x^3 + 7x^2 + 10x + 7x + 10$$

$$\text{بنسط} = x^3 + 8x^2 + 17x + 10$$

الصورة العامة للتعبير هي  $(x+1)(x+2)(x+5)$  هي  $x^3 + 8x^2 + 17x + 10$

#### حاول أن تحل

1 اكتب التعبير:  $(x+1)(x+1)(x-2)$  في شكل كثيرة حدود في الصورة العامة.

سوف نتعلم  
• تحليل كثيرة الحدود إلى عوامل.  
• كتابة دالة كثيرة الحدود باستخدام أصفارها.  
• الربط بين الأصفار والعوامل.  
المفردات والمصطلحات:  
• القيمة العظمى  
Maximum Value  
عوامل دالة حدودية  
Factors of a Polynomial Function  
أصفار دالة حدودية  
Zeros of a Polynomial Function  
• نظرية العامل  
Factor Theorem

معلومة:  
عندما نقول عوامل العدد فإننا نعني بها العوامل الموجبة والعوامل السالبة لهذا العدد.  
فمثلاً عوامل العدد 6 هي:  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

### تمرن

3-3

### العوامل الخطية لكثيرات الحدود

#### Linear Factors of Polynomials

#### المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1-3)، اكتب كل دالة كثيرة حدود في الصورة العامة واذكر درجتها.

$$(1) y = (x+3)(x+4)(x+5) \quad (2) y = (x-3)^2(x-1) \quad (3) y = x(x-1)(x+1)$$

(4) الهندسة: إذا كان طول صندوق  $2x+1$  من الوحدات، وعرضه  $x+4$  من الوحدات، وارتفاعه  $x+3$  من الوحدات، وقد كونته باستخدام الكتل الخشبية  $x^3, x^2, x$  الوحدة (1). فإلى كم كتلة تحتاج من كل منها؟

(5) الهندسة: صندوق على شكل شبه مكعب طوله،  $2x+3$  من الوحدات، عرضه  $2x-3$  من الوحدات، ارتفاعه  $3x$  من الوحدات. عتّر عن حجم الصندوق في صورة كثيرة حدود.

في التمارين (6-8)، عتّن أصفار كل دالة وتكرارها.

$$(6) y = (x-1)(x+2) \quad (7) y = (x+3)^3 \quad (8) y = x(x-2)^2(x+9)$$

في التمارين (9-12)، أوجد أصفار كل دالة مما يلي ثم ارسم بياناً تقريبياً لكل منها مراعاة سلوك النهاية لبيان كل دالة.

$$(9) y = (x-2)(x+2) \quad (10) y = (x+1)(x-2)(x-3)$$

$$(11) y = x(x+2)^2 \quad (12) y = (x+1)^2(x-2)(x-1)$$

(13) التفكير الناقد: كيف تعرف نقاط تقاطع الرسم البياني لدالة كثيرة الحدود مع محور الصادات دون رسمها بيانياً؟

(14) الهندسة التحليلية: يوضح الشكل أدناه منطقة مستطيلة الشكل، أحد أركانها يقع على الرسم البياني للدالة،  $y = -x^2 + 2x + 4$

(a) اكتب مساحة المنطقة المستطيلة (A) كدالة كثيرة حدود في الصورة العامة.

(b) أوجد مساحة المنطقة المستطيلة إذا كانت  $x = 2\frac{1}{2}$

(15) السؤال المفتوح: اكتب دالة كثيرة حدود لها المميزات التالية:

ثلاثة أصفار مختلفة، أحد أصفارها هو العدد 1، وصفر آخر من أصفارها مكرر مرتين.





## 5 التدريس

يوفر هذا الدرس فرصة أمام الطلاب لتبيان العلاقة بين الصورة العامة لدالة كثيرة الحدود وتحليلها إلى عوامل خطية، مما يساعد كثيرًا على إيجاد الحلول الجبرية لمعادلات كثيرات الحدود، كما أنه يركز على العلاقة بين الحلول الجبرية والحلول البيانية لكثيرات الحدود من درجات مختلفة.

### في المثالين (1)، (2)

ينمذجان العلاقة بين الصورة التحليلية إلى عوامل والصورة العامة وبالعكس. فترى أنه بتفكيك الصورة التحليلية نحصل على الصورة العامة، كما أن تحليل الصورة العامة يعطينا الصورة التحليلية إلى عوامل خطية.

### في المثال (3)

ينمذج حالة واقعية إلى دالة كثيرة الحدود يستخدم فيها الصورة التحليلية والرسم البياني لإيجاد قيمة عظمى لحجم علبة ضمن شروط محددة.

### في المثال (4)

يساعد الطالب على إيجاد أصفار الدالة وتكوين جدول قيم لرسم منحنى تقريبي لدالة كثيرة الحدود مراعيًا سلوك النهاية، وذلك من دون استخدام الآلة الحاسبة.

### في المثال (5)

وضح للطلاب كيفية كتابة العوامل الخطية لدالة كثيرة الحدود إذا عرفت أصفارها. أخبرهم أن  $x = a$  هي أحد أصفار الدالة، فإن  $(x - a)$  هو عامل خطي لهذه الدالة.

## 6 الربط

يوفر المثال (3) فرصة أمام الطلاب لربط حالة حياتية بدالة كثيرة الحدود، لإيجاد نتائج محددة لا يمكن الحصول عليها إلا برسم منحنى الدالة.

### مثال (2)

حلل كثيرة الحدود:  $2x^3 + 10x^2 + 12x$  إلى عوامل ثم تحقق.  
الحل:  
 $2x^3 + 10x^2 + 12x = 2x(x^2 + 5x + 6)$   
 $= 2x(x+2)(x+3)$   
تحقق:  $2x(x+2)(x+3) = 2x(x^2 + 5x + 6) = 2x^3 + 10x^2 + 12x$

### مثال (3)

حلل كثيرة الحدود:  $12x^3 - 12x^2 + 3x$  إلى عوامل، ثم تحقق.  
يمكنك استخدام دوال كثيرات الحدود لحل مسائل حياتية.  
اعتبر الدالة التالية للحجم: ح = الطول × العرض × العمق (الارتفاع)  
 $V = l \cdot w \cdot h$   
واعتبر كل من هذه الأبعاد هو عامل خطي للدالة كثيرة الحدود.

### تطبيقات حياتية

تريد صنع علبة دون غطاء من قطعة كرتون مربعة الشكل طول ضلعها 3 dm لذلك تقطع من كل زاوية قطعة مربعة طول ضلعها x cm بالظلي واللصق تحصل على العلبة.  
كون الدالة التي تربط حجم العلبة  $V$ ، بـ  $x$ .

صف المجال الواقعي للدالة.  
إذا انضغنا مربعًا من كل زاوية، يصبح طول ضلع القطعة  $(3 - 2x)$ .

وَصِّحْ أبعادها:  $(3 - 2x)$ ،  $(3 - 2x)$ ،  $x$ .

العلاقة: الحجم = الطول × العرض × الارتفاع

عوض

بنظ

∴ دالة الحجم بدلالة  $x$  هي:

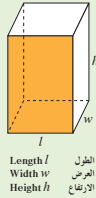
$V(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x$

أبعاد للعلبة

∴  $x > 0$  ،  $(3 - 2x) > 0$

∴  $x < 1.5$  ،  $x > 0$

وبذلك يكون المجال الواقعي:  $(0, 1.5)$



الطول  $l$   
العرض  $w$   
الارتفاع  $h$

(16) الصناعات الخشبية: بدأ نجار عمله باستخدام كتلة خشبية كما موضحة في الشكل.

(a) عتبر عن حجم الكتلة الخشبية الأصلية وحجم التجويف في شكل كثيرتي حدود في الصورة العامة.

(b) اكتب كثيرة حدود لحجم الخشب المتبقي.

في التمارين (17-20)، اكتب دالة كثيرة الحدود في الصورة العامة مستخدمًا الأصفار المعطاة:

(مكرر مرتين) (17)  $1, -1$  (18)  $0, 1, 2$  (19)  $-4, -1, 3$  (20)  $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2$

### المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت  $f$  تقبل القسمة على  $(2x+3)$  فإن  $f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$

(2) إذا كانت  $(x+2)$  عامل من عوامل الحدودية  $g$  فإن  $g(-2) = 0$

(3) إذا قبلت  $f(x) = x^4 - 2x^2 + k + 1$  القسمة على  $x$  فإن  $k = -1$

(4) باقي قسمة حدودية من الدرجة  $n$  على حدودية من الدرجة الأولى هو عدد ثابت.

(5)  $(x+1)$  عامل من عوامل الحدودية،  $p(x) = x^3 - x^2 - 2x$

في التمارين (6-13)، ظلّل دائرة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا كان  $x = -2a$  صفر من أصفار كثيرة حدود فإن أحد عواملها هو:

(a)  $(x - 2a)$  (b)  $(2x + a)$  (c)  $(2x - a)$  (d)  $(x + 2a)$

(7) أي من المقادير التالية إذا ضرب في  $(x-1)$  يصبح الناتج كثيرة حدود تكعيبية ثلاثية:

(a)  $(x-1)^2$  (b)  $x^2 - x$  (c)  $x^2 - 1$  (d)  $x^2 + 1$

(8) ليكن بيان  $f$  كما في الشكل المرسوم فإن مجموعة حل المعادلة  $f(x) = 0$  هي:

(a)  $\{-1, 2, 3\}$  (b)  $\{1, -2, -3\}$

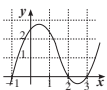
(c)  $\{-1, 0, 2, 3\}$  (d)  $\{0\}$

(9) شبه مكعب أبعاد  $2x+3$ ،  $2x-3$ ،  $3x$  فتكون دالة الحجم  $f(x)$  تساوي:

(a)  $4x^3 - 9$  (b)  $3x(4x^2 + 9)$  (c)  $12x^3 - 9x$  (d)  $12x^3 - 27x$

(10) قيمة  $k$  التي تجعل  $(x-1)$  عاملًا من عوامل  $f(x) = (x^2 + x - 2) + 2k$  هي:

(a) 1 (b) 2 (c) 0 (d)  $\frac{1}{2}$



## 7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في كتابة دالة كثيرة الحدود إذا عرفت أصفارها. اعرض أمامهم حالتين مثل:  $x = 2$  أو  $x = -3$  لتحديد العامل الخطي المقابل فيكون  $(x - 2)$  هو عامل خطي، ثم  $(x + 3)$  هو عامل خطي آخر. ركز معهم على أن  $x$  أيضاً عامل خطي صفره الصفر.

## 8 التقييم

تساعد فقرات «حاول أن تحل» المعلم على تكوين فكرة واضحة عن إمكانيات طلابه في التعامل مع دالة كثيرة الحدود، عند تحليلها إلى عوامل خطية أو كتابتها بالصورة العامة.

## اختبار سريع

1 اكتب:  $(x - 2)(-3x + 4)(2x - 1)$  بالصورة العامة.

$$-6x^3 + 23x^2 - 26x + 8$$

2 حلل كثيرة الحدود:  $-3x^3 + 27x$  إلى عوامل خطية.

$$-3x(x - 3)(x + 3)$$

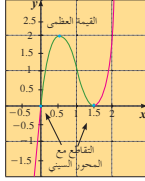
3 اكتب دالة كثيرة الحدود حيث أصفارها:  $4, -2, 3$  بالصورة العامة.

$$f(x) = (x - 4)(x + 2)(x - 3) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$$

### حاول أن تحل

- 3 قطعة خشب على شكل شبه مكعب طولها 12 cm وعرضها 8 cm وسماكتها  $x$  cm. القطع من إحدى زواياها مكعب طول حرفه  $x$  cm.
- 4 كون الدالة التي تربط حجم قطعة الخشب المتبقية بـ  $x$ .
- 5 صف المجال الواقعي للدالة.

الشكل المقابل يمثل بيان الدالة:  $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x$  من مثال (3)



ونلاحظ أن:  $x = 1.5$  هو صفر مكرر و  $x = 0$  هو صفر بسيط. الأجزاء المقطوعة من محور السينات تسمى **أصفار الدالة**. لأن قيمة الدالة تساوي صفراً عند هذه الأجزاء. نستنتج أن القيمة العظمى للدالة على المجال  $(0, 1.5)$  هي 2 عندما تكون  $x = 0.5$ . أي أن القيمة العظمى لحجم العلية هي  $2 \text{ dm}^3$  عندما يكون ارتفاع العلية  $0.5 \text{ dm}$  وطول ضلع القاعدة المربعة:  $3 - 2 \times (0.5) = 2 \text{ dm}$

عوامل وأصفار دالة كثيرة الحدود

### Factors and Zeros of a Polynomial Function

إذا كانت دالة كثيرة الحدود في صورة العوامل، فإنه بإمكانك استخدام خاصية الضرب في الصفر لإيجاد القيم التي تجعل الدالة تساوي صفراً.

### مثال (4)

$$y = (x - 2)(x + 1)(x + 3)$$

أوجد أصفار  $y = (x - 2)(x + 1)(x + 3)$

ثم اوسم بياناً تقريبياً للدالة مراعيًا سلوك نهاية الدالة.

الحل:

باستخدام خاصية الضرب في الصفر، أوجد صفراً لكل عامل خطي.

$$x - 2 = 0 \quad \text{أو} \quad x + 1 = 0 \quad \text{أو} \quad x + 3 = 0$$

$$x = 2 \quad \text{أو} \quad x = -1 \quad \text{أو} \quad x = -3$$

∴ أصفار الدالة هي:  $2, -1, -3$ .

### مراجعة سريعة:

تنص خاصية الضرب في الصفر على أنه عندما يساوي ناتج الضرب صفراً، فإن أحد العوامل على الأقل يجب أن يساوي صفراً.

## 9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

1 - 2 تحقق من إجابات الطلاب.

«حاول أن تحل»

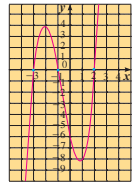
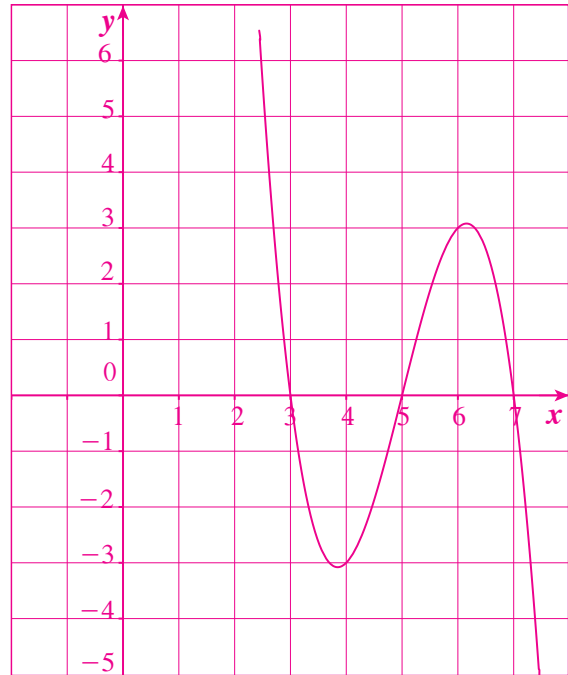
1  $x^3 - 3x - 2$

2  $3x(2x - 1)^2$

3 (a)  $V(x) = 96x - x^3$

(b)  $0 < x < 8$

4  $x = 7$  أو  $x = 5$  أو  $x = 3$



$y = (x-2)(x+1)(x+3)$

لرسم بيان تقريبي للدالة:

أصغار الدالة هي:  $-3, -1, 2$ .

سلوك النهاية:

• السلوك النهائي موجب (لماذا؟)

• السلوك النهائي جهة اليمين لأعلى

• الحدودية من الدرجة الثالثة (لماذا؟)

• السلوك النهائي جهة اليسار معاكس

لسلوك النهاية جهة اليمين (لأسفل).

• السلوك النهائي  $(\infty, \infty)$ .

تكون الجدول:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-18	0	4	0	-6	-8	0	24

حاول أن تحل

1 أوجد أصغار الدالة  $(x-7)(x-5)(3-x)$ ،  $y$ .

ثم ارسم بياناً تقريبياً للدالة مراعيًا سلوك نهاية الدالة.

يمكنك عكس هذه العمليات وكتابة العوامل الخطية عندما تعلم أصغار الدالة.

تسمى هذه العلاقة بنظرية العامل.

نظرية العامل

المقدار  $(x-a)$  هو عامل خطي لكثيرة الحدود  $\iff a$  صفر من أصغار كثيرة الحدود.

ويعني أنه إذا كان  $(x-a)$  عاملاً خطياً لكثيرة الحدود فإن  $a$  صفر من أصغار دالة كثيرة الحدود والعكس صحيح.

فمثلاً  $(x-5)$  عامل خطي لكثيرة الحدود  $\iff 5$  صفر لها.

أي أنه إذا كان  $(x-5)$  عاملاً خطياً لكثيرة الحدود فإن  $5$  صفر لها والعكس صحيح.

وكذلك  $(x+3)$  عاملاً خطياً لكثيرة الحدود  $\iff -3$  صفر لها.

معلومة:  
الرمز  $\iff$  يقرأ  
إذا وفقط إذا

5 (a)  $f(x) = (x+4)(x+2)(x-1)$

$$f(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 8$$

(b)  $f(x) = x(x+4)(x+2)$

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 8x$$

(c)  $f(x) = (x-3)^2(x+1)$

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9$$

- (d) يمكن ضرب العامل  $x$  في الدالة الحدودية بعدد ثابت لا يساوي الصفر:  $f(x) = x(x+4)(x+2)$ ، علمًا أن الصفر مضروبًا بأي عدد حقيقي يكون الناتج صفرًا.
- (e) لا، إذا ضربت  $f(x)$  بـ  $k$  حيث  $k \neq 0$  نحصل على دالة جديدة لها أصفار  $f(x)$  نفسها.

(5) مثال

اكتب دالة كثيرة حدود حيث أصفارها: 3, -2, 3 في الصورة العامة:

الحل:

أصفار الدالة هي:

$$\begin{array}{ccc} -2 & , & 3 & , & 3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (x - (-2)), & (x - 3), & (x - 3) \end{array}$$

∴ عوامل كثيرة الحدود هي:  $(x - (-2)), (x - 3), (x - 3)$ .

$$f(x) = (x+2)(x-3)(x-3)$$

$$= (x+2)(x^2 - 6x + 9)$$

اضرب  $(x-3)(x-3)$

$$= x(x^2 - 6x + 9) + 2(x^2 - 6x + 9)$$

خاصية التوزيع

$$= x^3 - 6x^2 + 9x + 2x^2 - 12x + 18$$

بسّط

$$= x^3 - 4x^2 - 3x + 18$$

∴ الدالة هي:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$$

حاول أن تحل

- 5 (a) اكتب دالة كثيرة حدود في الصورة العامة حيث أصفارها: 1, -2, -4.
- (b) اكتب دالة كثيرة حدود في الصورة العامة حيث أصفارها: 0, -2, -4.
- (c) اكتب دالة كثيرة حدود في الصورة العامة حيث 3 صفر مكرر مرتين و-1 صفر بسيط.
- (d) الفكرة الناقد: اشرح لماذا الصفر عند 0 في (b) يعطي أكثر من إمكانية واحدة للإجابة.
- (e) هل كل دالة من الدوال التي حصلت عليها من (a), (b) وحدة؟
- فسر إجابتك.

نلاحظ مما سبق أن لنظرية العامل أربعة مفاهيم مرتبطة بكثيرة الحدود. وهذه الألفاظ متكافئة، بمعنى أنك إذا علمت إحداها، فسوف تعلم الكل.

- (1) حل للمعادلة:  $x^2 + 3x - 4 = 0$
- (2) جزء مقطوع من محور السينات لمنحنى الدالة:  $y = x^2 + 3x - 4$
- (3) صفر من أصفار الدالة:  $x = x^2 + 3x - 4$
- (4) عامل من عوامل كثيرة حدود:  $x^2 + 3x - 4$

(11)  $f(x) = x^3 - x$  تقبل القسمة على  $x - k$  إذا كان  $k$  ينتمي إلى المجموعة:

- (a) {0} (b) {-1} (c) {1} (d) {0, -1, 1}

(12) إذا كانت  $f(x)$  تقبل القسمة على  $(x-2)^2$  فإن:

- (a)  $x = 2$  صفر من أصفار الدالة  $f$  (b)  $x = 2$  صفر مكرر من أصفار الدالة  $f$
- (c)  $x = -2$  صفر من أصفار الدالة  $f$  (d)  $x = -2$  صفر مكرر من أصفار الدالة  $f$

(13)  $x + m$  عامل من عوامل:

- (a)  $f(x) = x^2 + m$  (b)  $f(x) = x^3 + mx$
- (c)  $f(x) = x^3 + mx^2$  (d)  $f(x) = x^2 + m^2$

## 3-4: قسمة كثيرات الحدود

### 1 الأهداف

- يوجد ناتج قسمة كثيرات الحدود باستخدام القسمة المطولة.
- يوجد ناتج قسمة كثيرات الحدود باستخدام القسمة التركيبية.
- يوجد الباقي باستخدام نظرية الباقي.

### 2 المفردات والمفاهيم الجديدة

- القسمة المطولة - القسمة التركيبية - ناتج القسمة - المقسوم - المقسوم عليه - نظرية الباقي - باقي القسمة.

### 3 الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية - جهاز إسقاط (Data show) - حاسوب.

### 4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

- (a) اكتب  $f(x) = (2x - 3)(x + 1)(x - 4)$  بالصورة العامة، ثم أوجد  $f(1)$ ,  $f(-1)$ .
- (b) اكتب أصفار المعادلة التالية:
- $$(x + 1)(2x + 3)(3x - 4) = 0$$
- (c) اكتب دالة كثيرة حدود أصفارها:  $-1, 2, 3, -2$

### قسمة كثيرات الحدود

#### Dividing Polynomials

#### دعنا نفكر ونتناقش

يمكن استخدام قسمة كثيرات الحدود للمساعدة على إيجاد أصفار دالة كثيرة الحدود. وأعلم أن قسمة كثيرات الحدود مشابهة لقسمة الأعداد.

تذكر أنه عندما يكون الباقي صفراً، فإن المقسوم عليه وناتج القسمة هما من عوامل المقسوم.

فمثلاً:  $56 \div 8 = 7$  ونلاحظ أن 8، 7 من عوامل 56

أما إذا كان الباقي لا يساوي صفراً، فإن المقسوم عليه وناتج القسمة لا

يكونا من عوامل المقسوم.

فمثلاً:  $42 \div 5 = 8$  والباقي 2

ونلاحظ أن 5، 8 ليسا من عوامل 42

بالتالي، تسمح القسمة بمعرفة ما إذا كان عدد من عوامل عدد آخر.

وهذا أيضاً صحيح بالنسبة إلى قسمة كثيرات الحدود.

إذا قسمت كثيرة حدود على أحد عواملها تحصل على عامل آخر.

وعندما يكون باقي القسمة صفراً تكون قد حولت كثيرة الحدود إلى عوامل.

فمثلاً:  $2x^2 \div x = 2x$

ونلاحظ أن  $x$ ،  $2x$  من عوامل  $2x^2$

والقسمة المطولة

عند قسمة كثيرة حدود على أخرى اتبع الخطوات المستخدمة في قسمة الأعداد الكلية.

#### مثال (1)

اقسم:

$$\text{a) } x^2 + 6x + 8 \text{ على } (x + 4)$$

$$\text{b) } x^2 + 3x - 12 \text{ على } (x - 2)$$

الحل:

نوجد الناتج باستخدام القسمة المطولة.

107

$$\begin{array}{r} x \\ x+4 \overline{) x^2 + 6x + 8} \\ \underline{-x^2 - 4x} \phantom{+ 8} \\ 2x + 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x+2 \\ x+4 \overline{) x^2 + 6x + 8} \\ \underline{-x^2 - 4x} \phantom{+ 8} \\ 2x + 8 \\ \underline{-2x - 8} \\ 0 \end{array}$$

$$(x+2)(x+4) = x^2 + 4x + 2x + 8 = x^2 + 6x + 8$$

القسمة:  $\frac{x^2}{x} = x$

اضرب:  $x(x+4) = x^2 + 4x$

اطرح:  $(x^2 + 6x) - (x^2 + 4x) = 2x$

أزل  $+8$

القسمة:  $\frac{2x}{x} = 2$

اضرب:  $2(x+4) = 2x + 8$

الباقي صفر

∴ ناتج القسمة  $(x+2)$  والباقي صفر.

تحقق من النتيجة:

$$\begin{array}{r} x \\ x-2 \overline{) x^2 + 3x - 12} \\ \underline{-x^2 + 2x} \phantom{- 12} \\ 5x - 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x+5 \\ x-2 \overline{) x^2 + 3x - 12} \\ \underline{-x^2 + 2x} \phantom{- 12} \\ 5x - 12 \\ \underline{-5x + 10} \\ -2 \end{array}$$

$$(x+5)(x-2) + (-2) = x^2 - 2x + 5x - 10 - 2 = x^2 + 3x - 12$$

القسمة:  $\frac{x^2}{x} = x$

اضرب:  $x(x-2) = x^2 - 2x$

اطرح:  $(x^2 + 3x) - (x^2 - 2x) = 5x$

أزل  $-12$

القسمة:  $\frac{5x}{x} = 5$

اضرب:  $5(x-2) = 5x - 10$

اطرح:  $(5x - 12) - (5x - 10) = -2$

الباقي  $-2$

∴ ناتج القسمة  $(x+5)$  والباقي  $-2$ .

تحقق من النتيجة:

حاول أن تحل

القسمة:

a)  $x+2 \overline{) x^2 + 5x + 6}$

b)  $x-8 \overline{) 2x^2 - 19x + 24}$

108

## 5 التدريس

بعد أن تعرف الطالب العمليات الثلاث على الدوال كثيرات الحدود (الجمع والطرح والضرب)، سوف يتعرف الآن قسمة كثيرات الحدود وذلك باستخدام طريقتين مختلفتين.

أخبر الطلاب أن الطريقة المطولة يمكن استخدامها عند قسمة كثيرات الحدود مهما كانت درجة المقسوم ودرجة المقسوم عليه، أما طريقة القسمة التركيبية فتستخدم عندما يكون المقسوم عليه كثيرة حدود من الدرجة الأولى على الصورة:  $(x + a)$ .

شدّد على الطلاب البدء أولاً بترتيب كثيرات الحدود تنازلياً بحسب الحدود المكونة.

وعند القسمة يجب دائماً في كل مرحلة قسمة الحد الأكبر من المقسوم على الحد الأكبر من المقسوم عليه، ولكن عند ضرب الناتج يجب إجراء الضرب مع كل حدود المقسوم عليه، وهذا يحدث مع كل خطوة في عملية القسمة المطولة.

لذا، فمن المستحسن متابعة عمل الطلاب بدقة.

### في المثالين (1)، (2)

ركّز على فكرة أنه عندما نحصل على باقٍ غير الصفر فإن المقسوم عليه لا يمثل أحد عوامل المقسوم، أما إذا كان الباقي يساوي صفراً، فإن المقسوم عليه هو حتماً أحد عوامل المقسوم.

يمكنك استخدام قسمة كثيرات الحدود المطولة لإيجاد عوامل كثيرة الحدود.

#### مثال (2)

تحقق ما إذا كان  $(x + 4)$  عامل من عوامل كل كثيرة حدود باستخدام القسمة المطولة

a)  $x^3 + 3x^2 - 6x - 7$

b)  $x^3 + 64$

الحل:

$$\begin{array}{r} x^3 - x - 2 \\ x + 4 \overline{) x^3 + 3x^2 - 6x - 7} \\ \underline{-x^3 + 4x^2} \phantom{- 7} \\ 4x^2 - 6x - 7 \\ \underline{+x^2 - 4x} \phantom{- 7} \\ -2x - 7 \\ \underline{+2x - 8} \\ -1 \end{array}$$

∴ الباقي  $\neq 0$

∴  $(x + 4)$  ليس من عوامل  $(x^3 + 3x^2 - 6x - 7)$ .

$$\begin{array}{r} x^2 - 4x + 16 \\ x + 4 \overline{) x^3 + 64} \\ \underline{-x^3 + 4x^2} \phantom{+ 64} \\ 4x^2 + 64 \\ \underline{+4x^2 - 16x} \\ 16x + 64 \\ \underline{-16x + 64} \\ 0 \end{array}$$

∴ الباقي = 0

∴  $(x + 4)$  هو عامل من عوامل  $x^3 + 64$ .

#### حاول أن تحل

تحقق ما إذا كان كل مقسوم عليه هو من عوامل المقسوم.

a)  $(x^3 + 4x^2 + x - 6) \div (x + 2)$

b)  $(x^3 - x + 1) \div (x + 1)$

#### Using Synthetic Division

#### استخدام القسمة التركيبية

عندما نقسم على عامل خطي على الصورة  $(x - a)$  يمكننا استخدام عمليات مختصرة تعرف بالقسمة التركيبية، وفيها نعمل كل المتغيرات والأسس من المقسوم واستخدام صفر العامل الخطي  $a$ ، ويتم إجراء عملية الجمع بدلاً من الطرح خلال العمليات والمثال التالي يوضح ذلك.

**معلومة:**  
إذا كان المقسوم كثيرة حدود من الدرجة  $n$  والمقسوم عليه من الدرجة الأولى فإن ناتج القسمة من الدرجة  $n - 1$  حيث  $n \geq 1$

#### ملاحظة:

$$x^3 + 64 = x^3 + 0x^2 + 0x + 64$$

#### مثال توضيحي

استخدم القسمة التركيبية لقسمة:

$$(x + 4) \text{ على } x^3 - 13x + 12$$

الحل:

خطوة 1:

ضع المقسوم بالصورة العامة ثم اكتب جميع معاملات كثيرة الحدود واستخدم الصفر مكان الحدود الناقصة.  
حدد صفر المقسوم عليه.

$$\begin{array}{r|rrrr} x + 4 & x^3 & + 0x^2 & -13x & +12 \\ & -4 & & & \end{array}$$

أدخل  $0x^2$   
اكتب معاملات المقسوم وحفر المقسوم عليه

خطوة 2: أنزل أول معامل.

$$\begin{array}{r|rrrr} -4 & 1 & 0 & -13 & 12 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & 1 & & & \end{array}$$

أنزل العدد 1  
بذلك يبدأ ناتج القسمة

خطوة 3: اضرب المعامل الأول في  $(-4)$

اكتب الناتج تحت المعامل التالي واجمع

$$\begin{array}{r|rrrr} -4 & 1 & 0 & -13 & 12 \\ & & -4 & & \\ \times & & 1 & -4 & \\ & & & & \end{array}$$

اضرب 1 في  $-4$   
اكتب الناتج تحت 0  
اجمع  $-4$ .

خطوة 4: اضرب ناتج الجمع  $(-4)$  في  $(-4)$

اكتب الناتج تحت المعامل التالي  $(-13)$  واجمع

$$\begin{array}{r|rrrr} -4 & 1 & 0 & -13 & 12 \\ & & -4 & 16 & \\ \times & & 1 & -4 & 3 \\ & & & & \end{array}$$

اضرب  $-4$  في  $-4$   
اكتب الناتج تحت  $-13$   
اجمع  $-13$ .

**معلومة:**  
عند كتابة كثيرة الحدود بالصورة العامة ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً يمكن إضافة الحد الناقص على أن يكون معامله صفراً مثلاً:  
 $x^3 + x - 3 = x^3 + 0x^2 + x - 3$   
نكتب:

**معلومة:**  
الأعداد الناتجة من عملية القسمة التركيبية هي معاملات لكثيرة حدود في الصورة العامة

### في المثال (3)

القسمة التركيبية هي طريقة سريعة، ولكنها تستخدم في حالات خاصة، أي عندما يكون المقسوم عليه على الصورة  $(x+a)$ .

دع الطلاب يحلون تمارين متعددة لكي يتمكنوا من استيعاب الخطوات المتبعة في هذه العملية، ثم أخبرهم أنه يمكن اختصار هذه الخطوات كما هو موضح في المثال (4).

### في المثال (7)

أخبرهم أن نظرية الباقي لا يمكن استخدامها إلا إذا كان المقسوم عليه كثيرة حدود من الدرجة الأولى، أي على الصورة  $(ax+b)$ .

### 6 الربط

يوفر المثالان (6)، (5) الربط بين حالة حياتية واقعية تستخدم فيها القسمة بين كثيرات الحدود لإيجاد عوامل المقسوم.

### 7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام القسمة التركيبية، وذلك في العمليات على الأعداد. ساعدهم على تخطي هذه الأخطاء بعدة أمثلة تحت إشرافك.

### 8 التقييم

تابع عمل الطلاب بدقة في فقرات «حاول أن تحل»، لتأكد من حسن أدائهم في قسمة كثيرات الحدود.

خطوة 5: اضرب ناتج الجمع (3) في (-4)

اكتب الناتج تحت المعامل التالي (الحد الثابت 12) واجمع.

اضرب 3 في -4

اكتب الناتج تحت 12

اجمع 12، 12

البقي:  $x^2 - 4x + 3$

ناتج القسمة:  $x^2 - 4x + 3$

ناتج القسمة من الدرجة الثانية (لماذا؟)

مثال (3)

استخدم القسمة التركيبية للقسمة  $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$  على  $(x+2)$  ثم أوجد باقي العوامل.

الحل:

لتحديد صغر المقسوم عليه إشارة الحد الثابت في  $(x+2)$  فيصبح -2

اكتب جميع معاملات كثيرة الحدود.

ناتج القسمة:  $x^2 - 5x + 4$  والباقي صفر:

نحل:

$x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$

∴ باقي العوامل هي:  $(x-1)$ ،  $(x-4)$

حاول أن تحل

1. استخدم القسمة التركيبية للقسمة  $2x^2 - 5x + 6$  على  $(x+2)$

2. استخدم الإجابة في 1 لتحليل  $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$  إلى عوامل.

### قسمة كثيرات الحدود Dividing Polynomials

#### المجموعة A تمارين مقالية

- في التمارين (1-4)، اقم مستخدماً قسمة كثيرة الحدود المطولة.
- (1)  $(x^2 - 3x - 40) \div (x + 5)$  (2)  $(x^3 + 3x^2 - x + 2) \div (x - 1)$
- (3)  $(x^3 - 13x - 12) \div (x - 4)$  (4)  $(9x^3 - 18x^2 - x + 2) \div (3x + 1)$
- في التمارين (5-6)، بين ما إذا كانت كل ثنائية حد عاملاً من عوامل  $x^3 + 4x^2 + x - 6$
- (5)  $x - 3$  (6)  $x + 2$
- في التمارين (7-11)، اقم مستخدماً القسمة التركيبية.
- (7)  $(x^3 + 3x^2 - x - 3) \div (x - 1)$  (8)  $(-2x^3 + 5x^2 - x + 2) \div (x + 2)$
- (9)  $(2x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 45) \div (x + 3)$  (10)  $(x^3 - 3x^2 - 5x - 25) \div (x - 5)$
- (11)  $(2x^3 + 4x^2 - 10x - 9) \div (x - 3)$
- في التمارين (12-13)، استخدم القسمة التركيبية والعامل المعطى لتحليل كل دالة كثيرة حدود بالكامل.
- (12)  $y = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ ;  $x + 1$  (13)  $y = x^3 - 4x^2 - 9x + 36$ ;  $x + 3$
- (14) الهندسة: يعطى حجم صندوق بالمعادلة  $V(x) = x^3 + x^2 - 6x$  بالامتار المكعبة ( $m^3$ ) ما الأبعاد الممكنة لهذا الصندوق؟
- في التمارين (15-18)، استخدم القسمة التركيبية ونظرية الباقي لإيجاد  $f(a)$
- (15)  $f(x) = x^3 + 4x^2 - 8x - 6$ ;  $a = -2$  (16)  $f(x) = x^3 - 7x^2 + 15x - 9$ ;  $a = 3$
- (17)  $f(x) = 2x^3 - x^2 + 10x + 5$ ;  $a = \frac{1}{2}$  (18)  $f(x) = 2x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 45$ ;  $a = -3$
- (19) التفكير المنطقي: كثيرة حدود  $f(x)$  قسمت على ثنائية الحد  $(x-a)$  والباقي صفر. ماذا يمكنك أن تستنتج؟ فسر.
- (b) تفكير ناقد: وضح لماذا لا يمكن تحليلها باستخدام أعداد حقيقية؟
- (c) اكتشاف الخطأ: حلّ طالب كثيرة الحدود:  $2x - x^3 - x^2$  إلى ثلاثة عوامل، وكان  $(x-1)$  أحد هذه العوامل. استخدم القسمة لتثبت أن الطالب ارتكب خطأ.

## اختبار سريع

1 اقسّم:  $2x^3 - 3x^2 - 9x + 10$  باستخدام القسمة المطولة.

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 7x + 5 \\ x + 2 \overline{) 2x^3 - 3x^2 - 9x + 10} \\ \underline{-2x^3 - 4x^2} \phantom{- 9x + 10} \\ 0 - 7x^2 - 9x + 10 \\ \phantom{0 - } \underline{+ 7x^2 + 14x} \\ 0 + \phantom{0} 5x + 10 \\ \phantom{0 + \phantom{0}} \underline{- 5x - 10} \\ 0 \end{array}$$

2 استخدم القسمة التركيبية لتوجد ناتج قسمة:

$2x^4 - 5x^3 - 11x^2 + 20x + 15$  على  $(x - 2)$ .

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 2} \quad -5 \quad -11 \quad 20 \quad 15 \\ \underline{4} \quad -2 \quad -26 \quad -12 \\ 2 \quad -1 \quad -13 \quad -6 \quad 3 \end{array}$$

ناتج القسمة  $= 2x^3 - x^2 - 13x - 6$  والباقي  $= 3$

3 من دون استخدام أي طريقة في القسمة، أوجد

الباقي عند قسمة  $f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 6x + 2$

على  $(x + 2)$ . ماذا تستنتج؟ اشرح.

باستخدام نظرية الباقي نوجد  $f(-2)$

$$f(-2) = -2(-2)^4 + 3(-2)^2 - 6(-2) + 2 = -6$$

فيكون الباقي  $= -6$ ، لذا  $(x + 2)$  ليس من عوامل

كثيرة الحدود  $f(x)$

## 9 إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

1 (a)  $x + 3$   
 $x + 2 \overline{) x^2 + 5x + 6}$

$$\begin{array}{r} -x^2 - 2x \\ \underline{3x + 6} \\ -3x - 6 \\ \underline{0} \end{array}$$

(b)  $2x - 3$   
 $x - 8 \overline{) 2x^2 - 19x + 24}$

$$\begin{array}{r} -2x^2 + 16x \\ \underline{-3x + 24} \\ +3x - 24 \\ \underline{0} \end{array}$$

### مثال (4)

استخدم القسمة التركيبية لقسمة  $x^3 + 2x^2 + x - 5$  على  $(x + 3)$ .  
الحل:  
أعكس إشارة الحد الثابت في المقسوم عليه فنصبح  $-3$   
أكتب جميع معاملات كثيرة الحدود.

$$\begin{array}{r} -3 \overline{) 1} \quad 2 \quad 1 \quad -5 \\ \underline{-3} \quad -1 \quad 4 \quad -17 \\ \phantom{-3 \overline{) }} \underline{-1} \quad -x^2 \quad -x \quad +4 \quad \text{الباقي} \end{array}$$

ناتج القسمة:  $x^2 - x + 4$ ، الباقي  $-17$

### حاول أن تحل

4 استخدم القسمة التركيبية لقسمة  $x^3 + 4x^2 + x - 6$  على  $(x + 1)$

### مثال (5)



يعطى حجم أحد الحجارة الضخمة قرب قلعة بعلبك بالمعادلة:

$$V = x^3 + 21x^2 + 56x + 36$$

a إذا كان  $m(x + 2)$  أحد أبعاد هذا الحجر.

فأوجد البعدين الآخرين.

b إذا كان أكبر أبعاد هذا الحجر يساوي  $21 \text{ m}$

فأوجد البعدين الآخرين.

الحل:

a استخدم القسمة التركيبية لقسمة  $x^3 + 21x^2 + 56x + 36$  على  $(x + 2)$

$$\begin{array}{r} -2 \overline{) 1} \quad 21 \quad 56 \quad 36 \\ \underline{-2} \quad -38 \quad -36 \\ 1 \quad 19 \quad 18 \quad 0 \end{array}$$

ناتج القسمة:  $x^2 + 19x + 18$  والباقي صفر

بالتحليل:  $x^2 + 19x + 18 = (x + 1)(x + 18)$

∴ البعدان الآخران هما  $(x + 1)$ ،  $(x + 18)$  بالأمتار (m)

112

b ∴ أكبر الأبعاد يساوي  $21 \text{ m}$

$$\begin{aligned} \therefore x + 18 &= 21 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

وبالتعويض في البعدين الآخرين:

$$\begin{aligned} x + 1 &= 3 + 1 = 4 \\ x + 2 &= 3 + 2 = 5 \end{aligned}$$

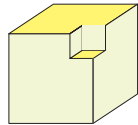
بعدا الحجر الآخران هما:  $4 \text{ m}$ ،  $5 \text{ m}$

### حاول أن تحل

5 في مثال (5) هل يمكن أن يكون  $(x + 3)$  أحد أبعاد هذا الحجر؟ فسر.

### مثال (6)

يبين الشكل المقابل منحوتة على شكل شبه مكعب وقد أقطع مكعب من إحدى زواياه.



أبعاد شبه المكعب قبل القطع المكعب هي:

$$h = 2x + 7, \quad w = x + 5, \quad l = x + 8$$

وطول ضلع المكعب المقطوع  $x$  (الأبعاد بال cm)

وأصبح حجم المنحوتة يساوي  $762 \text{ cm}^3$

a أثبت أن  $x = 2$  هي القيمة الوحيدة المقبولة.

b أوجد أبعاد شبه المكعب.

الحل:

$$V_1 = (x + 8)(x + 5)(2x + 7)$$

$$V_2 = x^3$$

$$V = V_1 - V_2 = (x + 8)(x + 5)(2x + 7) - x^3$$

$$(x + 8)(x + 5)(2x + 7) - x^3 = 762$$

$$x^3 + 33x^2 + 171x = 482$$

$$(2^3) + 33(2^2) + 171(2) = 482$$

حجم شبه المكعب

حجم المكعب المقطوع

حجم المنحوتة

نكتب المعادلة

بالتبسيط

بالتعويض عن  $x = 2$ :

$$482 = 482$$

∴  $x = 2$  قيمة مقبولة.

للتحقق من أن  $x = 2$  هي القيمة الوحيدة المقبولة:

$$x^3 + 33x^2 + 171x - 482 = (x - 2)$$

للحصول على قيم  $x$  المتبقية نستخدم القسمة التركيبية.

113



2 (a)

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x - 3 \\ x + 2 \overline{) x^3 + 4x^2 + x - 6} \\ \underline{-x^3 - 2x^2} \phantom{- 6} \\ 0 + 2x^2 + x - 6 \\ \phantom{0 +} \underline{-2x^2 - 4x} \phantom{- 6} \\ \phantom{0 + 2x^2 +} -3x - 6 \\ \phantom{0 + 2x^2 +} \underline{+3x + 6} \\ \phantom{0 + 2x^2 + 3x +} 0 \end{array}$$

فيكون  $(x+2)$  هو أحد عوامل:  $x^3 + 4x^2 + x - 6$

(b)

$$\begin{array}{r} x^2 - x \\ x + 1 \overline{) x^3 - x + 1} \\ \underline{-x^3 - x^2} \phantom{+ 1} \\ 0 - x^2 - x + 1 \\ \phantom{0 -} \underline{+x^2 + x} \\ \phantom{0 - x^2 -} 1 \end{array}$$

بما أن الباقي 1، لذا  $(x+1)$  ليس من عوامل  $(x^3 - x + 1)$

نظرية الباقي  
إذا قسمت كثيرة الحدود  $f(x)$  من الدرجة  $n \geq 1$  على  $(x-a)$  حيث  $a$  ثابت، فإن باقي القسمة هو  $f(a)$

مثال (7)

باستخدام نظرية الباقي أوجد باقي قسمة  $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4x + 12$  على  $(x+4)$   
ثم تحقق باستخدام القسمة التركيبية.

الحل:  
 $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4x + 12$   
 $f(-4) = (-4)^4 - 5(-4)^2 + 4(-4) + 12$   
 $= 256 - 80 - 16 + 12$   
 $= 172$

استخدم نظرية الباقي

∴ باقي القسمة = 172  
ولنتحقق من صحة الإجابة باستخدام القسمة التركيبية.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -4 & 1 & 0 & -5 & 4 & 12 \\ & & -4 & 16 & -44 & 160 \\ \hline & 1 & -4 & 11 & -40 & 172 \end{array}$$

حاول أن تحل

استخدم نظرية الباقي لإيجاد باقي قسمة  $f(x) = 2x^4 + 6x^3 - 5x^2 - 60$  على  $(x+1)$ ، ثم تحقق من صحة الإجابة باستخدام القسمة التركيبية.

في التمارين (20-22)، اقم ما يلي:

- (20)  $(2x^3 + 9x^2 + 14x + 5) \div (2x + 1)$       (21)  $(x^5 + 1) \div (x + 1)$   
(22)  $(3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 3x - 2) \div (3x - 2)$
- في التمارين (23-25)، اقم ثم أوجد نمطاً في الإجابات.  
(23)  $(x^2 - 1) \div (x - 1)$       (24)  $(x^3 - 1) \div (x - 1)$       (25)  $(x^4 - 1) \div (x - 1)$   
(26) مستخدماً الأنماط، اقم  $(x^5 - 1) \div (x - 1)$   
في التمارين (27-29)، اقم ثم أوجد نمطاً في الإجابات.  
(27)  $(x^3 + 1) \div (x + 1)$       (28)  $(x^5 + 1) \div (x + 1)$       (29)  $(x^7 + 1) \div (x + 1)$   
(30) مستخدماً الأنماط، أوجد  $(x^9 + 1) \div (x + 1)$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-5)، ظلل الدائرة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

- (1) إذا كان باقي قسمة كثيرة الحدود  $f(x)$  على  $(x+a)$  يساوي صفراً فإن  $\alpha$  عامل من عوامل  $f$   
(a)      (b)  
(2) الدالة  $f(x) = (x-2)^2 - 1$  تقبل القسمة على  $(x-1)$   
(a)      (b)  
(3) باقي قسمة  $(x^3 + a^3)$  على  $(x-a)$  هو  $2a^3$   
(a)      (b)  
(4) ناتج قسمة حدودية من الدرجة  $n$  حيث  $n \geq 2$  على حدودية من الدرجة الثانية تكون حدودية من الدرجة  $(n-2)$   
(a)      (b)  
(5) ناتج قسمة حدودية من الدرجة السادسة على حدودية من الدرجة الثالثة تكون حدودية من الدرجة الثانية.  
(a)      (b)  
في التمارين (6-12)، ظلل دائرة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة.  
(6) باقي قسمة  $f(x)$  على  $x-k$  هو:  
(a)  $g(k)$       (b)  $f(k)$       (c)  $f(-k)$       (d)  $-k$   
(7) إذا كانت  $f$  حدودية من الدرجة  $(n+2)$  حيث  $n \geq 2$ ،  $g$  حدودية من الدرجة الثالثة فإن باقي قسمة  $f$  على  $g$  لا يمكن أن يكون من الدرجة:  
(a) الصفرية      (b)  $n-1$       (c)  $n$       (d)  $n-2$   
(8) باقي قسمة  $(x^4 + 2)$  على  $(x-3)$  هو:  
(a) 3      (b) 27      (c) 81      (d) 83

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 33 & 171 & -482 \\ & & 2 & 70 & 482 \\ \hline & 1 & 35 & 241 & 0 \end{array}$$

ناتج القسمة:  $g(x) = x^2 + 35x + 241$   
باستخدام الآلة الحاسبة، جذرا المعادلة التربيعية  $x^2 + 35x + 241 = 0$  هما:  $x_1 \approx -9.42$ ،  $x_2 \approx -25.58$   
وهما يعطيان قيمًا سالبة لطول المكعب.  
∴ القيمان مرفوضتان.

ب. بالتعويض عن  $x$  بـ 2، نحصل على:  $h = 11 \text{ cm}$ ،  $w = 7 \text{ cm}$ ،  $l = 10 \text{ cm}$

حاول أن تحل

ج. مبن على شكل شبه مكعب، يعطى حجمه بالعلاقة:  $V = x^3 + 4x^2 - x - 4$  إذا كان:  
أ. أحد أبعاد المبنى. فأوجد البعد الأخرين.  
ب. أصغر أبعاد المبنى يساوي 10 m فأوجد البعد الأخرين.

مثال توضيحي

ليكن:  $f(x) = x^2 - 2x - 8$

أ. أوجد ناتج قسمة  $f(x)$  على  $(x-4)$  ثم أوجد  $f(4)$

ب. أوجد ناتج قسمة  $f(x)$  على  $(x+1)$  ثم أوجد  $f(-1)$

نلاحظ أن  $f(x)$  تقبل القسمة على  $(x-4)$

أي أن  $(x-4)$  أحد عواملها

∴ 4 أحد أصفارها

أي أن  $f(4) = 0$

بينما  $f(x)$  لا تقبل القسمة على  $(x+1)$

أي أن  $(x+1)$  ليس من عواملها

∴  $(-1)$  ليس من أصفارها.

لأن  $f(-1) = -5 \neq 0$  لا يساوي الصفر وهو باقي القسمة.

- (9) ناتج قسمة  $(2x^4 - 8x^2)$  على  $(x+2)$  يساوي،  
 (a)  $2x^3 - 4x^2$  (b)  $2x^3 - 8x^2$  (c)  $x^3 - 4x^2$  (d)  $2x^3 - 4x^2 + 2x$
- (10) إذا كان 0 هو باقي قسمة  $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + kx - 1$  على  $(x+1)$  فإن  $k$  تساوي،  
 (a) 7 (b) -7 (c) -3 (d) 3
- (11) إذا كان باقي قسمة  $f(x) = x^4 - kx^2 + x - k$  على  $(x-1)$  هو 3 فإن  $k$  تساوي،  
 (a)  $\frac{1}{2}$  (b) 3 (c)  $-\frac{1}{2}$  (d)  $\frac{5}{2}$
- (12) إذا كان  $f(-1) = f(0) = f(3) = -2$  فإن  $f(x)$  يمكن أن تكون،  
 (a)  $x^3 - x^2 + 3x - 2$  (b)  $x^3 - 2x^2 - 3x$   
 (c)  $2x^3 - 2x^2 - 3x - 2$  (d)  $2x^3 - 4x^2 - 6x - 2$

48

3 (a) 
$$\begin{array}{r} -2 \overline{) 1-2-5-6} \\ \underline{-2-8-6} \\ 1-4-3-0 \end{array}$$

فيكون ناتج القسمة  $x^2 - 4x + 3$  والباقي  $0 =$

(b)  $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$   
 $\therefore x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x+2)(x-3)$

4 
$$\begin{array}{r} -1 \overline{) 1-4-1-6} \\ \underline{-1-3-2} \\ 1-3-2-4 \end{array}$$

ناتج القسمة  $x^2 + 3x - 2 =$  والباقي  $-4 =$

5 
$$\begin{array}{r} -3 \overline{) 1-21-56-36} \\ \underline{-3-54-6} \\ 1-18-2-30 \end{array}$$

ناتج القسمة  $x^2 + 18x + 2 =$  والباقي  $30 =$ ، لذا  
 $(x+3)$  ليست من أبعاد هذا الحجر.

6 (a)  $V = (x+4)(x-1)(x+1)$

(b)  $x-1 = 10 \Rightarrow x = 11$

$x+1 = 12$  ,  $x+4 = 15$

7 نوجد  $f(-1)$  حيث إن:

$f(-1) = 2(-1)^4 + 6(-1)^3 - 5(-1)^2 - 60$

$-69 = f(-1) =$  أي أن الباقي  $-69 =$

$$\begin{array}{r} -1 \overline{) 2-6-5-0-60} \\ \underline{-2-4+9-9} \\ 2-4-9+9-69 \end{array}$$

## 3-5: حل معادلات كثيرات الحدود

### 1 الأهداف

- يحل معادلات كثيرات الحدود بالتحليل.
- يحل معادلات كثيرات الحدود بالأصفار الممكنة.

### 2 المفردات والمفاهيم الجديدة

- أصفار نسبية ممكنة - المُعامل الرئيسي - عامل مشترك - تحليل بالتقسيم.

### 3 الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة بيانية - ورق رسم بياني - جهاز إسقاط (Data show) - حاسوب.

### 4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) اقسام:  $2x^2 - 5x + 3$  على  $(x - 1)$

(b) استخدم المميز لإيجاد جذور المعادلة:

$$x^2 - 25x + 150 = 0$$

(c) أثبت أن  $(x + 2)$  هو عامل خطي للدالة:

$$2x^3 + 9x^2 + 13x + 6$$

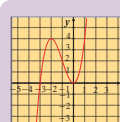
ثم استخدم المميز لإيجاد عوامل الدالة التربيعية.

### 5 التدريس

سوف تساعد، دروس هذه الوحدة، الطالب على حل المعادلات المكونة من كثيرات الحدود بدرجات مختلفة وذلك باستخدام التحليل إلى عوامل أو باستخدام الرسم البياني. وهنا لا بد من الإشارة إلى أنه يمكن استخدام المميز:  $\Delta = b^2 - 4ac$  عندما نجد أحد العوامل من الدرجة الثانية، وهذا يسهل كثيرًا في حل المعادلة كثيرة الحدود. فالمعادلة:  $(2x - 5)(5x^2 + 9x - 2) = 0$  تعطي:  $2x - 5 = 0$  أو  $5x^2 + 9x - 2 = 0$  حل المعادلة الأولى  $x = \frac{5}{2}$ ، أما المعادلة الثانية فيكون من الأفضل استخدام المميز، لأن تحليلها إلى عوامل صعب.

### حل معادلات كثيرات الحدود Solving Polynomial Equations

3-5



#### دعنا نفكر ونتناقش

a بين الشكل المقابل بيان الدالة:  $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 3$

مثل بيانيًا  $g(x) = x + 3$  على الشبكة البيانية نفسها. ثم استخدم الرسم لإيجاد مجموعة حل المعادلة:

$$x^3 + 3x^2 = x + 3$$

بيانيًا هناك 3 نقاط تقاطع.

الإحداثيات النسبية لنقاط التقاطع:

$$-3, -1, 1$$

∴ للمعادلة  $x^3 + 3x^2 = x + 3$  ثلاثة حلول:

$$x = -3, x = -1, x = 1$$

∴ مجموعة الحل:  $\{-3, -1, 1\}$

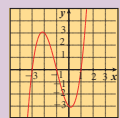
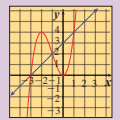
b يمثل الشكل المقابل بيان الدالة:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$$

استخدم الشكل لإيجاد مجموعة حل المعادلة:

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$$

c قارن بين مجموعتي الحل في a و b. فتر.



#### Solving Equations by Factorising

#### حل المعادلات بالتحليل

عندما تحلل كثيرة الحدود، فإنك تحول شكلها من مجموع (أو فرق) حدود إلى ناتج ضرب عوامل كما هو موضح بالجدول.

الصورة بالتحليل (العوامل)	الصورة العامة
$(x + 2)(x - 6)$	$x^2 - 4x - 12$
$3x(x - 2)(x + 2)$	$3x^3 - 12x$
$(3x + 2)(x + 1)$	$3x^2 + 5x + 2$
$(x + 1)(x + 2)(x + 3)$	$x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

يمكنك حل بعض معادلات كثيرات الحدود بالتحليل واستخدام خاصية الضرب في الصفر أو نظرية العامل.

سوف تتعلم

- حل معادلات كثيرات الحدود بالتحليل.
- حل معادلات كثيرات الحدود بيانيًا.

المفردات والمصطلحات:

- أصفار نسبية ممكنة
- Possible Rational Zeros
- المعامل الرئيسي
- Leading Coefficient
- عامل مشترك
- Common Factor
- تحليل بالتقسيم
- Factorising by Division

#### الرابط بالتكنولوجيا:

يمكنك حل معادلات كثيرة الحدود بواسطة آلة حاسبة بيانية وباستخدام TABLE أو TRACE ثم CALC و ZOOM وسوف تساعد الآليات والوسيلة الآلة على إيجاد الحلول.



116

#### مثال (1)

أوجد مجموعة حل المعادلة:  $3x^3 + 6x^2 - 9x = 0$  بالتحليل ثم تحقق من صحة الحل.

الحل:

$$3x^3 + 6x^2 - 9x = 0$$

$$3x(x^2 + 2x - 3) = 0$$

$$3x(x + 3)(x - 1) = 0$$

$$x = 0, x = -3, x = 1$$

حلل باخراج العامل المشترك الأعلى:  $3x$

$$x^2 + 2x - 3$$

استخدم نظرية العامل

مجموعة الحل =  $\{1, -3, 0\}$

تحقق:

$$\begin{array}{l} 3x^3 + 6x^2 - 9x = 0 \quad | \quad 3x^3 + 6x^2 - 9x = 0 \quad | \quad 3x^3 + 6x^2 - 9x = 0 \\ 3(0)^3 + 6(0)^2 - 9(0) \stackrel{?}{=} 0 \quad | \quad 3(-3)^3 + 6(-3)^2 - 9(-3) \stackrel{?}{=} 0 \quad | \quad 3(1)^3 + 6(1)^2 - 9(1) \stackrel{?}{=} 0 \\ 0 = 0 \checkmark \quad | \quad -81 + 54 + 27 \stackrel{?}{=} 0 \quad | \quad 3 + 6 - 9 \stackrel{?}{=} 0 \\ 0 = 0 \checkmark \quad | \quad 0 = 0 \checkmark \quad | \quad 0 = 0 \checkmark \end{array}$$

#### سأزل أن تحل

1 أوجد مجموعة حل المعادلة:  $4x^3 - 16x^2 - 20x = 0$  بالتحليل ثم تحقق من صحة الحل.

2 تفكير ناقذ: صف طريقين يمكنك بهما حل المعادلة:  $2x^3 + 10x^2 + 8x = 0$  أي طريقة تفضل؟ ولماذا؟

لا يتوجب عليك أحيانًا تحليل معادلة كثيرة الحدود تحليلًا كاملاً لحلها. فمتى أوجدت عاملاً يمكنك استخدام القانون العام لحل المعادلة التربيعية.

#### مثال (2)

أوجد مجموعة حل المعادلة:  $2x^3 - 4x^2 = 10x$

الحل:

$$2x^3 - 4x^2 = 10x$$

$$2x^3 - 4x^2 - 10x = 0$$

$$2x(x^2 - 2x - 5) = 0$$

$$2x = 0 \text{ أو } x^2 - 2x - 5 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 20}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{24}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{6}}{2}$$

$$= 1 \pm \sqrt{6}$$

مجموعة الحل =  $\{0, 1 + \sqrt{6}, 1 - \sqrt{6}\}$

117

فنجند:  $x = \frac{-9 \pm \sqrt{121}}{10}$  أي:  $x = -2$  أو  $x = \frac{1}{5}$

في الأمثلة (1)، (2)، (3)

شجّع الطلاب على محاولة استخراج عوامل لمعادلة كثيرات الحدود، وعندما يصبح الباقي كثيرة حدود من الدرجة الثانية، اطلب إليهم استخدام التحليل أو المميز:  $\Delta = b^2 - 4ac$  لإيجاد بقية العوامل حيث:  $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$  ركّز لديهم فكرة أن  $x = a$  أحد الأصفار يعني أن  $(x - a)$  هو أحد العوامل. حفّزهم على التأكد من صحة الحلول التي توصلوا إليها وذلك بالتعويض.

في المثال (4)

تعتبر محاولة البحث عن مجموعة الحل لأي معادلة حدودية مهمة جداً، وتأتي طريقة عوامل الحد الثابت وعوامل الحد الرئيسي كأصفار للمعادلة في مقدمة هذه المحاولات.

أخبر الطلاب أن في المعادلة من الدرجة الثالثة نكتفي بإيجاد واحد من أصفار المعادلة، ثم نستخدم طريقة القسمة على العامل المقابل لهذا الصفر، وبعد ذلك نستخدم التحليل أو المميز.

أمّا في المعادلة من الدرجة الرابعة فنحاول إيجاد اثنين من الأصفار، ثم نستخدم طريقة القسمة على ناتج ضرب العاملين المقابلين للصفرين، وبعد ذلك نستخدم التحليل أو المميز.

## 6 الربط

في تطبيقات حياتية «إثرائية»، حيث توجد أبعاد قفص باستخدام دالة كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة له حجم ثابت، وذلك عن طريق الرسم البياني.

حاول أن تحل

أوجد مجموعة حل كل معادلة مما يلي:

a.  $2x^3 = 3x - 5x^2$

b.  $x^3 - x^2 - 3x = 0$

يمكن حل بعض معادلات كثيرات الحدود باستخدام التحليل بطريقة التقسيم حيث يمكن تقسيم الحدود بطريقة تساعدنا على تحويل كثيرة الحدود إلى حاصل ضرب عوامل.

مثال (3)

أوجد مجموعة حل المعادلة:

a.  $x^3 + 3x^2 = x + 3$

b.  $x^3 - 3x = 6 - 2x^2$

الحل:

a.  $x^3 + 3x^2 = x + 3$

$x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$

$(x^3 + 3x^2) + (-x - 3) = 0$

$x^2(x + 3) - (x + 3) = 0$

$(x + 3)(x^2 - 1) = 0$

$(x + 3)(x + 1)(x - 1) = 0$

$x - 1 = 0$  أو  $x + 1 = 0$  أو  $x + 3 = 0$

$x = 1$

$x = -1$

$x = -3$

اجعل أحد الطرفين يساوي الصفر

حلّ بالتقسيم

خذ العامل المشترك  $(x + 3)$

حلّ

استخدم خاصية الصفر

مجموعة الحل  $\{-3, 1, -1\}$

b.  $x^3 - 3x = 6 - 2x^2$

$x^3 - 3x - 6 + 2x^2 = 0$

$(x^3 - 3x) + (-6 + 2x^2) = 0$

$x(x^2 - 3) + 2(x^2 - 3) = 0$

$(x^2 - 3)(x + 2) = 0$

$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x + 2) = 0$

$x = \sqrt{3}$  أو  $x = -\sqrt{3}$  أو  $x = -2$

اجعل أحد الطرفين يساوي الصفر

خاصية التجميع

حلّ

خذ العامل المشترك  $(x^2 - 3)$

حلّ

مجموعة حل المعادلة  $\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -2\}$

حاول أن تحل

أوجد مجموعة حل المعادلة:  $x^3 + 2x^2 - 4x = 8$

## 7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام التحليل إلى عوامل. ساعدهم على استخدام عوامل الحد الثابت في كثيرة الحدود كأعداد صحيحة ثم تطبيق نظرية الباقي، إذا كان يساوي صفرًا يكون لديك عامل في العوامل.

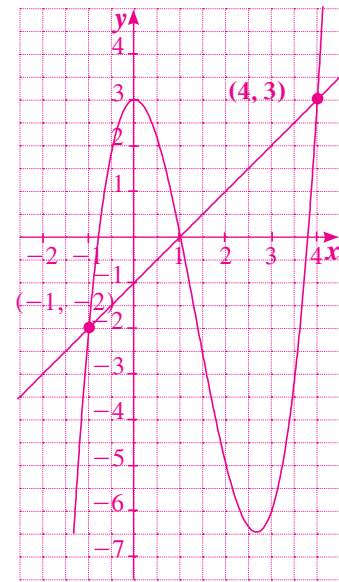
## 8 التقسيم

تابع الطلاب وهم يجيبون عن فقرات «حاول أن تحل» لتأكد من فهمهم لما ورد من مفاهيم ومهارات في هذا الدرس.

## اختبار سريع

1 حلّ بيانيًا المعادلة:  $x^3 - 4x + 3 = x - 1$

نأخذ  $y_1 = x^3 - 4x^2 + 3$  ,  $y_2 = x - 1$



يوضح الرسم البياني أن مجموعة الحل =  $\{4, -1\}$

2 أوجد حل المعادلة:  $3x^3 - 2x^2 - 17x - 12 = 0$

بالتحليل.

نجد أن  $x = -1$  هي حل للمعادلة، وبالقسمة على  $(x + 1)$  نجد الناتج  $3x^2 - 5x - 12$ .

وباستخدام المميز  $\Delta = 169$ :  $x = 3$  أو  $x = -\frac{4}{3}$   
وبالتالي، مجموعة الحل =  $\{3, -\frac{4}{3}, -1\}$



### تطبيقات حياتية (إثري)

يمكن كتابة أبعاد قفص على شكل شبه مكعب لنقل قطة مسيابة كما يلي:

الطول  $(l = x + 7)$  (cm)  
العرض  $(w = x + 1)$  (cm)  
أوجد أبعاد القفص إذا كان حجمه  $11340 \text{ cm}^3$ .

الحل:

اكتب المعادلة

عزّض

ارسم بيانيًا:

$y_1 = 11340$ ,  $y_2 = (x + 7)(x + 1)(x)$

استخدم اختيار التقاطع من الخاصية .CALC

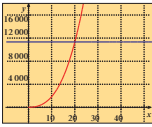
عندما  $x = 20$ ,  $y = 11340$

$x + 7 = 27$ ,  $x + 1 = 21$  ∴

أبعاد القفص هي: 27 cm, 21 cm, 20 cm

$$V = l \cdot w \cdot h$$

$$11340 = (x + 7)(x + 1)(x)$$



Possible Rational Zeros

الأصغار النسبية الممكنة

نظرية

يفرض أن:  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ;  $a_n \neq 0$

حيث  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$  أعداد صحيحة فتكون مجموعة الأصغار النسبية الممكنة

لـ  $f(x)$  هي:

$\left\{ \frac{p}{q} \mid a \text{ عامل من عوامل الحد الثابت } a_0, b \text{ عامل من عوامل المعامل الرئيسي } a_n \right\}$

تظهر أهمية هذه النظرية إذا اردنا معرفة اصغار حدودية ولا يمكننا استخدام طريقة التحليل أو التقسيم. يمكننا تخمين الأصغار النسبية الممكنة باستخدام النظرية ثم نتحقق من هذه الأصغار باستخدام نظرية الباقي.

الربط بالتكنولوجيا:  
استخدم الآلة الحاسبة البيانية  
في أعلى الشاشة اضغط على

يظهر على الشاشة:

$y_1 = \square$   
 $y_2 = \square$   
 $y_3 = \square$

لتشغيل  $y_1$  اضغط على

المرجع إلى يسارها لتظهر في

داخله علامة  $\square$  ثم اكتب في

المرجع إلى يمين  $y_1$ :  
 $(x + 7)(x + 1)(x)$   
نشط  $y_2$  بالطريقة نفسها ثم

اكتب قرب  $y_2$ :  
11340

ثم اضغط على

يظهر على الشاشة بيان كل

من الدالتين

اخر من

Analysis  
ثم  
G-Solve  
Intercept  
الشاشة  
 $x = 20$ ,  $y = 11340$

119

تمرّن  
3-5

## حل معادلات كثيرات الحدود Solving Polynomial Equations

### المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1-9)، حل كل معادلة مما يأتي وقرب إجابتك لأقرب جزء من مئة عندما يكون ذلك ضروريًا.

- (1)  $6y^2 = 48y$  (2)  $3x^3 - 6x^2 - 9x = 0$  (3)  $12x^3 - 60x^2 + 75x = 0$   
(4)  $4x^3 = 4x^2 + 3x$  (5)  $2a^4 - 5a^3 - 3a^2 = 0$  (6)  $2d^4 + 18d^3 = 0$   
(7)  $x^3 - 6x^2 + 6x = 0$  (8)  $x^3 + 13x = 10x^2$  (9)  $2x^3 - 5x^2 = 12x$

في التمارين (10-12)، استخدم التقسيم لحل كل من المعادلات التالية:

- (10)  $x^3 - 2x^2 - 3 = x - 5$  (11)  $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$  (12)  $x^3 + 2x(x - 1) = 1$

في التمارين (13-18)، استخدم الأصغار النسبية الممكنة لحل المعادلات التالية:

- (13)  $x^4 + 2x^3 + x^2 = 4x^2 + 8x + 4$  (14)  $x^3 - 3x + 2 = 0$   
(15)  $x^3 + x^2 - 8x - 12 = 0$  (16)  $x^3 - 7x + 6 = 0$   
(17)  $x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8 = 0$  (18)  $2x^4 - 5x^3 - 17x^2 + 41x - 21 = 0$

(19) السؤال المفتوح: لحل معادلة كثيرة حدود، يمكنك استخدام طريقة أو أكثر من الطرق التالية: الرسم البياني، التحليل إلى عوامل، القانون العام لحل المعادلة التربيعية. اكتب معادلة وحلها لتوضح كل طريقة.

### المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

- (1) مجموعة حل المعادلة  $9x^2 + 16 = 0$  هي  $\left\{-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right\}$  (a) (b)  
(2) مجموعة حل المعادلة  $2x^2 + 2 = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$  هي مجموعة أعداد. (a) (b)  
(3) إذا كانت  $2k$  تنتمي إلى مجموعة حل المعادلة  $(4x^2 + 1)\left(\frac{x^2}{4} - 1\right) = 0$  فإن  $k \in \{-1, 1\}$  (a) (b)  
(4) إن  $\{1\}$  هي مجموعة حل المعادلة  $3x^4 + 12x^2 - 15 = 0$  (a) (b)  
(5)  $\frac{3}{2}$  يمكن أن يكون صفرًا للحدودية  $f(x) = 2x^3 + bx^2 + cx - 3$  حيث  $b, c \in \mathbb{R}$  (a) (b)

49

## 9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

تحقق من إجابات الطلاب.

«حاول أن تحل»

1 (a)  $4x(x+1)(x-5) = 0$

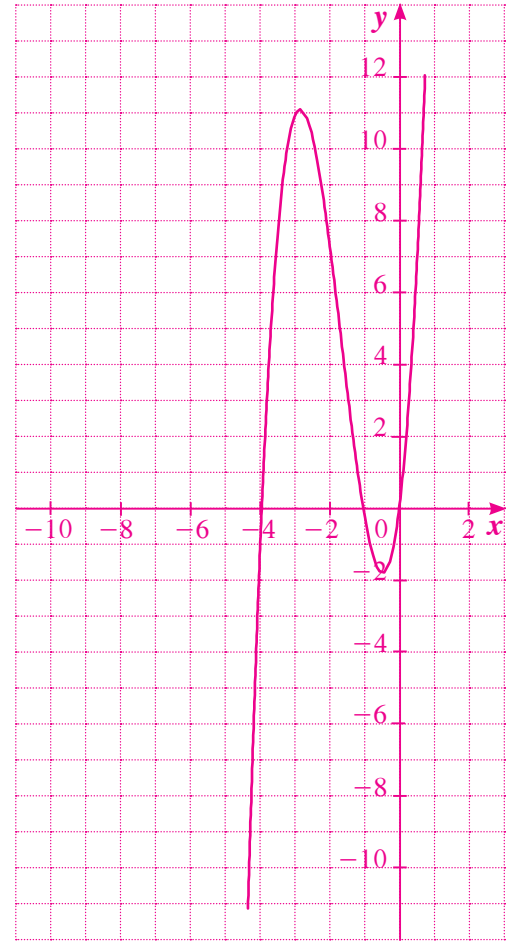
مجموعة الحل  $\{0, -1, 5\}$

(b)  $2x(x+1)(x+4) = 0$  طريقة أولى:

مجموعة الحل  $\{-4, -1, 0\}$

طريقة ثانية: الرسم البياني للدالة: (باستخدام الآلة الحاسبة)

$f(x) = 2x^3 + 10x^2 + 8x$



نأخذ تقاطع منحنى الدالة مع محور السينات فنجد مجموعة

الحل  $\{-4, -1, 0\}$

الرسم البياني أسرع وأفضل. يمكن أن تتنوع الإجابات.

فمثلاً لتحديد الأصفار النسبية الممكنة لـ  $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 6$

تبع الخطوات التالية:

أولاً: نحدد عوامل الحد الثابت (6) وهي:  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

ثانياً: نحدد عوامل المعامل الرئيسي (2) وهي:  $\pm 1, \pm 2$

ثالثاً: بتطبيق النظرية تكون الأصفار النسبية الممكنة:  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$

تدريب

الأصفار النسبية الممكنة لـ

a  $f(x) = x^3 + 5x - 3$

b  $g(x) = x^3 - 27$

..... هي:

..... هي:

مثال (4)

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية:

a  $x^3 - 4x^2 + 3 = 0$

b  $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x = 2$

الحل:

a  $x^3 - 4x^2 + 3 = 0$  1: خطرة

عوامل الحد الثابت (3):  $\pm 1, \pm 3$

عوامل المعامل الرئيسي (1):  $\pm 1$

∴ الأصفار النسبية الممكنة:  $\pm 1, \pm 3$

خطرة 2: لتكن  $P(x) = x^3 - 4x^2 + 3$

$P(1) = (1)^3 - 4(1)^2 + 3 = 0$

∴ 1 صفر من أصفار الحدودية،

$P(x) = (x-1) \cdot Q(x)$

نقسم:  $P(x)$  على  $(x-1)$ :

$P(x) = x^3 - 4x^2 + 0x + 3$

1	1	-4	0	3
		1	-3	-3
		1	-3	0

ناتج القسمة:  $q(x) = x^2 - 3x - 3$

نحل المعادلة  $x^2 - 3x - 3 = 0$  باستخدام القانون

$x_1 = \frac{3 + \sqrt{21}}{2}, x_2 = \frac{3 - \sqrt{21}}{2}$

∴ مجموعة حل المعادلة  $\left\{1, \frac{3 - \sqrt{21}}{2}, \frac{3 + \sqrt{21}}{2}\right\}$

**b** خطرة 1:  $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0$

عوامل الحد الثابت (-2): هي:  $\pm 1, \pm 2$

عوامل المعامل الرئيسي (1): هي:  $\pm 1$

$\therefore$  الأصفار النسبية الممكنة هي:  $\pm 1, \pm 2$

خطوة 2: لنكن  $P(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$

$P(1) = (1)^4 - 3(1)^3 + (1)^2 + 3(1) - 2 = 0$

$\therefore$  1 صفر من أصفار  $P(x)$ ، عامل  $(x-1)$  عامل من عوامل  $P(x)$

$P(-1) = (-1)^4 - 3(-1)^3 + (-1)^2 + 3(-1) - 2 = 0$

$\therefore$  -1 صفر من أصفار  $P(x)$ ، عامل  $(x+1)$  عامل من عوامل  $P(x)$

نقسم:  $P(x)$  على  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

نستخدم القسمة المطولة

$$\begin{array}{r} x^2 - 3x + 2 \\ x^2 - 1 \overline{) x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2} \\ \underline{-x^4 + x^2} \phantom{+ 3x - 2} \\ -3x^3 + 2x^2 + 3x \phantom{- 2} \\ \underline{+3x^3 - 3x} \phantom{- 2} \\ 2x^2 - 2 \phantom{- 2} \\ \underline{-2x^2 + 2} \\ 0 \end{array}$$

نتائج القسمة:  $q(x) = x^2 - 3x + 2$

نحل المعادلة:  $x^2 - 3x + 2 = 0$

$x_1 = 1; x_2 = 2$

مجموعة حل المعادلة =  $\{-1, 1, 2\}$

**ملاحظة:**  
لاحظ أن 1 هو صفر مكرر.

**حاول أن تحل**

**4** تفكير ناقص: هل يمكن حل المعادلة في المثال (4) بطرق أخرى؟ وضح ذلك.

**b** أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية:

1  $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$

2  $x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x = 18$

**2 (a)**  $2x^3 + 5x^2 - 3x = 0$

$$x(2x^2 + 5x - 3) = 0$$

$$\left\{0, -3, \frac{1}{2}\right\} = \text{مجموعة الحل}$$

**(b)**  $x(x^2 - x - 3) = 0$

$$\{0, -1.3, 2.3\} = \text{مجموعة الحل}$$

**3**  $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$  تعطي:

$$x^2(x+2) - 4(x+2) = 0$$

$$(x+2)(x^2 - 4) = 0 \text{ أي:}$$

$$(x+2)(x+2)(x-2) = 0 \text{ ومنه}$$

$$\{2, -2\} = \text{مجموعة الحل}$$

**4 (a)**  $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x^2 + 3x - 2 = 0$

$$x^2(x^2 - 3x + 2) - (x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 1) = 0$$

$$(x-1)(x-2)(x-1)(x+1) = 0$$

وبالتالي، مجموعة الحل =  $\{-1, 1, 2\}$

**(b) 1**  $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$

عوامل الحد الثابت:  $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

عوامل العامل الرئيسي:  $\pm 1$

فتكون الأصفار النسبية:  $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

$x = -1$  هي صفر للمعادلة لذا نقسم على  $(x+1)$

$$\begin{array}{r} -1 \overline{) 1 \quad 1 \quad -4 \quad -4} \\ \underline{-1 \quad 0 \quad 4} \\ -1 \quad 0 \quad -4 \quad 0 \end{array}$$

النتيجة  $x^2 - 4 = 0$  والباقي = 0

التحليل  $(x+1)(x-2)(x+2) = 0$

مجموعة الحل =  $\{-2, -1, 2\}$

أو:  $x^2(x+1) - 4(x+1) = 0$

$$\implies (x+1)(x^2 - 4) = 0$$

$$\implies (x+1)(x-2)(x+2) = 0$$

مجموعة الحل =  $\{-2, -1, 2\}$

$$2 \quad x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18 = 0$$

عوامل الحد الثابت:  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$   
عوامل العامل الرئيسي  $\pm 1$ ، فتكون الأصفار النسبية هي:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$$

1 هو صفر للمعادلة:

$$(1)^4 - 3(1)^3 - 7(1)^2 + 27(1) - 18 = 0$$

2 هو صفر للمعادلة:

$$(2)^4 - 3(2)^3 - 7(2)^2 + 27(2) - 18 = 0$$

وبالتالي،  $(x-1)$ ،  $(x-2)$  عاملان للمعادلة

تقسم على  $(x-1)(x-2)$

$$\begin{array}{r} x^2 - 9 \\ x^2 - 3x + 2 \overline{) x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18} \\ \underline{-x^4 + 3x^3 - 2x^2} \phantom{- 18} \\ -9x^2 + 27x - 18 \\ \underline{+ 9x^2 - 27x + 18} \\ 0 \end{array}$$

ويصبح تحليل المعادلة:

$$(x-2)(x-1)(x-3)(x+3) = 0$$

$$\{-3, 1, 2, 3\} = 0 \text{ مجموعة الحل}$$

«تدريب»

$$(a) \pm 1, \pm 3$$

$$(b) \pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm 27$$

في التمارين (6-8)، ظلل دائرة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) يمكن أن يكون صفراً من أصفار الحدودية  $f(x)$  تساوي،  
 (a)  $ax^3 + x^4 + 5$  (b)  $x^3 - 1$  (c)  $5x^3 + 6x - 1$  (d)  $(x+5)(x^2+25)$

(7) أي قيمة مما يلي ليست حلاً للمعادلة:  $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ ،  
 (a) -1 (b) -3 (c) 3 (d) 2

(8) إذا كان  $f(1) = f(n) = f(-1) = 0$  فإن  $f$  يمكن أن تكون،  
 (a)  $f(x) = (x-1)(x+m)(x+n)$  (b)  $f(x) = (x-1)(x-m)^2(x-n)$   
 (c)  $f(x) = (x+1)(x-m)(x-n)^2$  (d)  $f(x) = (x+1)(x-mn)$

في التمارين (9-11)، لديك قائمتان اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.

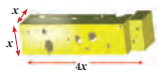
(2) القائمة	(1) القائمة
(a)	(9) مجموعة حل $f(x) = 0$ هي $\{-1, 2, 3\}$ ∴ بيان الدالة $f$ يمكن أن يكون.
(b)	(10) مجموعة حل $f(x) = 0$ هي $\{-1, 2\}$ ∴ بيان الدالة $f$ يمكن أن يكون.
(c)	(11) مجموعة حل $f(x) = 0$ هي $\{1, -2, -3\}$ ∴ بيان الدالة $f$ يمكن أن يكون.
(d)	

50



# المرشد لحل المسائل

## المرشد لحل المسائل

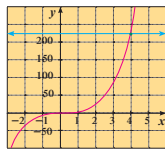


نستخدم الآلة الحاسبة  
البيانية في حل المسألة

$$V = l \cdot w \cdot h$$

$$224 = (4x-2)(x)(x)$$

$$224 = 4x^2 - 2x^2$$



المعادلة تكعيبية ويطلب إلى حلها بيانياً.  
سأمثل المعادلتين وأجد التقاطع.  $y_1 = 4x^2 - 2x^2$ ,  $y_2 = 224$   
سأعدل الشاشة لتتناسب مع القيمة  $y = 224$   
استخدم خاصية التقاطع  
 $x = 4$ ,  $y = 224$   
استخدم قيمة  $x$  لإيجاد أبعاد القالب الأساسي.  
العرض = الارتفاع =  $4 = x$   
الطول =  $4x = 4(4) = 16$   
أبعاد قالب الجينة:  $4\text{cm}$ ,  $4\text{cm}$ ,  $16\text{cm}$

مسألة إضافية

قطعة خشبية مكمية الشكل (طول ضلعها عدد صحيح)، قصت منها 4 قطع على شكل مكعب بسمكة  $\frac{1}{2}\text{cm}$   
حجم القطعة المتبقية يساوي  $7200\text{cm}^3$   
أوجد طول ضلع قطعة الخشب الأساسية.

122

إجابة «مسألة إضافية»

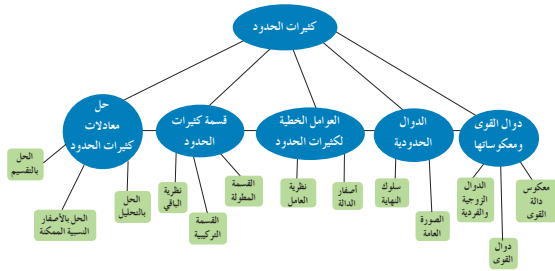
ليكن  $x$  طول ضلع القطعة الخشبية التي قصت من الشكل  
فيكون حجمها  $\frac{1}{2}x^2$   
نكتب المعادلة:

$$V = 4\left(\frac{1}{2}x^2\right) + 7200$$

$$= 2x^2 + 7200$$

أقرب عدد صحيح مكعب إلى  $7200$  هو  $8000$   
وبالتالي، طول ضلع الخشبة  $20\text{cm}$   
لاحظ أن:  $19^3 = 6859 < 7200$

## مخطط تنظيمي للوحدة الثالثة



### ملخص

- تكون دالة القوى على الشكل  $y = ax^n$  حيث  $a \neq 0$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$
- الدالة الزوجية هي دالة مجال تعريفها  $D$ ، تحقق:  $f(-x) = f(x)$ ,  $\forall x, -x \in D$ ، والعكس صحيح في مستوى إحداثي، المحاور الصادي هو محور تماثل لبيان الدوال الزوجية.
- الدالة الفردية هي دالة مجال تعريفها  $D$ ، تحقق:  $f(-x) = -f(x)$ ,  $\forall x, -x \in D$ ، والعكس صحيح. نقطة الأصل هي نقطة تماثل لبيان الدوال الفردية.
- إذا كانت النقطة  $(a, b)$  تقع على بيان دالة ما فإن  $(b, a)$  تقع على بيان معكوسها.
- الدالة الحدودية  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  حيث  $n$  عدد صحيح موجب،  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$  أعداد حقيقية.
- في الصورة العامة لدالة حدودية ترتب الحدود تنازلياً وتجمع الحدود المتشابهة.
- يصف سلوك النهاية لرسم بياني امتداد طرفه الأيمن والأيسر.
- القيمة العظمى هي أكبر قيمة لـ  $y$  في فترة محددة.
- القيمة الصغرى هي أصغر قيمة لـ  $y$  في فترة محددة.
- المقدار  $(x - a)$  هو عامل خطي لكثيرات الحدود إذا وفقط إذا  $a$  صفر من أصفار كثيرة حدود.
- إذا قسمت كثيرة الحدود  $f(x)$  من الدرجة  $n \geq 1$  على  $(x - a)$  حيث  $a$  ثابت فإن الباقي هو  $f(a)$
- افرض أن  $a_n \neq 0$ ,  $a_0 \neq 0$ ,  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  حيث  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$  أعداد صحيحة فتكون مجموعة الأصفار النسبية الممكنة لـ  $f(x)$  هي:  $\left\{ \frac{a}{b} \mid a \text{ عامل من عوامل الحد الثابت } a_0, b \text{ عامل من عوامل المعامل الرئيسي } a_n \right\}$

123

### اختبار الوحدة الثالثة

في التمارين (1-4)، أوجد معكوس كل دالة مما يلي:

(1)  $y = \frac{1}{2}x^4$  (2)  $y = (x+1)^3$  (3)  $y = (x+1)^2 - 3$  (4)  $y = \sqrt{x+5}$

في التمارين (5-7)، اكتب كل دالة كثيرة حدود في الصورة العامة، ثم صنفها بحسب عدد الحدود وبحسب الدرجة.

(5)  $f(x) = 3x^2 - 7x^4 + 9 - x^4$  (6)  $f(x) = 11x^2 + 8x - 3x^2$  (7)  $f(x) = 2x(x-3)(x+2)$

في التمارين (8-9)، أوجد أصفار الدالة ثم ارمس بياناً تقريبياً لها مراعيًا سلوك النهاية. (قرب إلى أقرب جزء من عشرة عند الضرورة).

(8)  $f(x) = x(x-3)(x+2)$  (9)  $f(x) = (x-2)^2(x-1)$

في التمارين (10-13)، حل كل معادلة. أعط الإجابة الدقيقة أو قرب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

(10)  $(x-3)(x^2+3x-4) = 0$  (11)  $(x+2)(x^2+5x+1) = 0$   
(12)  $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$  (13)  $x^4 - 2x^2 - x + 2 = 0$

في التمارين (14-15)، اكتب دالة كثيرة حدود في الصورة العامة إذا علمت أصفارها:

(14) 0, 4, -2 (15) 2, -1 (مكرر مرتين)

في التمارين (16-17)، اقم مستخدمًا قسمة كثيرة الحدود المطولة.

(16)  $(x^3 + 7x^2 - 36) \div (x + 3)$  (17)  $(x^3 + 7x^2 - 5x - 6) \div (x + 2)$

في التمارين (18-19)، اقم مستخدمًا القسمة التركيبية.

(18)  $(x^3 + x^2 + x - 14) \div (x - 3)$  (19)  $(x^4 - 5x^2 + 4x + 12) \div (x + 1)$

في التمارين (20-21)، استخدم القسمة التركيبية ونظرية الباقي لإيجاد  $f(a)$ .

(20)  $f(x) = 2x^4 + 19x^3 - 2x^2 - 44x - 24$ ,  $a = \frac{-2}{3}$

(21)  $f(x) = -x^3 - x^2 + x$ ,  $a = 0$

### تمارين إثرائية

(1) لتكن:  $g(x) = (m+1)x^3 + 11x^2 + 4x - 4$

أوجد قيمة  $m$  بحيث يكون  $\frac{1}{2}$  أحد أصفار كثيرة الحدود.

(2) أوجد مجموعة حل:

(a)  $2x^4 + x^3 - 11x^2 + 11x - 3 = 0$  (b)  $4x^4 - x^2 + 6x - 9 = 0$

(3) أوجد قيمة  $a$  بحيث تكون:  $(a-3)x - (a+5)x^2 - 6x^3 - 14x^4 = x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - (a+5)x - (a-3)$  قابلة للقسمة على  $(x+1)^2$

(4) بسط ما يلي:  $\frac{x^3 - 7x + 6}{x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6}$

(5)  $g(x) = 4x^4 - 11x^3 - 2x^2 + 23x - 14$

(a) حلّل  $g(x)$  إلى عوامل.

(b) أوجد مجموعة حل المعادلة:  $g(x) = 0$ . قرب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.

(6) لتكن:  $f(x) = x^3 - (3a+2b)x^2 + (a+b)x$

(a) أوجد قيم  $a, b$  بحيث تكون  $(x-2), (x-1)$  من عوامل  $f(x)$ .

(b) حلّل في هذه الحالة  $f(x)$  إلى عوامل.

(7) أوجد دالة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية تقبل القسمة على  $(2x-1), (x+5)$  وباقى قسمتها على  $(x-3)$  يساوي 40

(8) لتكن:  $g(x) = x^3 + 8$

(a) أوجد صفرًا لكثيرة الحدود.

(b) حلّل  $g(x)$  إلى عوامل.

(9) اكتب  $V(x) = (x^2 + ax + b)^2$  في الصورة العامة.

(b) أثبت أن:  $f(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$  هي مربع لكثيرة حدود من الدرجة الثانية.

(10) أوجد نموذجًا تكعيبيًا للدالة التي تمر في:  $(-1, -3), (0, 0), (1, -1), (2, 0)$ . ثم استخدم هذا النموذج لتقدير قيمة  $y$  عندما  $x = 17$

(11) الهندسة: استخدم العلاقة:  $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rd + d^2)$ ، لإيجاد حجم

$d = 3.8 \times 10^2$  cm

$h = 3.5 \times 10^2$  cm

$R = 5.6 \times 10^2$  cm

المخروط الناقص الموضح في الشكل.

اكتب إجابتك في الصورة العلمية.

(12) الهندسة: صندوق يقل عرضه 2 m عن طوله، و يقل ارتفاعه 1 m عن طوله.

أوجد طول الصندوق عندما يكون حجمه  $60 \text{ m}^3$

(13) تريد شركة للتخزين صنع صندوق للتخزين حجمه مثل حجم أكبر صندوق تخزين لديها، إذا كانت أبعاد أكبر صندوق تخزين لديها هي 120 cm طولًا، 100 cm عرضًا،

90 cm ارتفاعًا، ويراد صنع الصندوق الجديد بزيادة كل بعد المقدار نفسه، فأوجد الزيادة في كل بعد.

(14) الحساب الذهني: إذا كان ناتج ضرب ثلاثة أعداد صحيحة متتالية:  $(n-1), n, (n+1)$  هو 210، فأكتب معادلة وأوجد حلها لإيجاد الأعداد.

(15) الهندسة: حجم خزان  $(V)$  يمثل بالدالة:  $V(x) = x^3 + 8x^2 + 15x$ . لنفرض أن  $x$  تمثل العرض،  $x+3$  تمثل الطول،  $x+5$  تمثل الارتفاع، حجم الخزان  $70 \text{ m}^3$ ، فما أبعاده؟

## الوحدة الرابعة: الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية

### Exponential and Logarithmic Functions

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

1 - 4: استكشاف النماذج الأسية

جزء 1: استخدام الدوال الأسية.

2 - 4: الدوال الأسية وتمثيلها بيانيًا

جزء 1: التمثيل البياني للدوال الأسية.

جزء 2: الرمز  $e$ .

3 - 4: الدوال اللوغاريتمية وتمثيلها بيانيًا

جزء 1: كتابة المقادير اللوغاريتمية وحسابها.

جزء 2: التمثيل البياني للدوال اللوغاريتمية.

جزء 3: انسحاب الدوال اللوغاريتمية.

4 - 4: خواص اللوغاريتمات

جزء 1: خواص اللوغاريتمات.

جزء 2: تطبيقات على خواص اللوغاريتمات.

5 - 4: المعادلات الأسية واللوغاريتمية

جزء 1: حل معادلات أسية.

جزء 2: حل معادلات لوغاريتمية.

6 - 4: اللوغاريتم الطبيعي

# مقدمة الوحدة

## الوحدة الرابعة

### الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية

#### Exponential and Logarithmic Functions

##### مشروع الوحدة: الآثار المتبقية

1 مقدمة المشروع: علماء الآثار هم مجموعة من العلماء يهتمون بدراسة إنجازات الحضارات القديمة من خلال آثارها الباقية. نذكر منها على سبيل المثال المومياء المصرية الشهيرة التي حفظت منذ حوالي 3400 سنة ق.م ولا تزال معروضة حتى الآن في المتحف الوطني المصري.



المومياء

2 الهدف: في هذه الوحدة، سوف نتحرى طرق مختلفة لتحديد عمر قطعة أثرية.  
3 الواجب: آلة حاسبة علمية.  
4 أسئلة حول التطبيق:

إحدى طرق تأريخ الإمداعات الإنسانية تسمى التأريخ بالكربون المشع. العنصر التي تم سردها في الجدول تم اكتشافها داخل المقابر الأثرية.

$$t = 1.904 \times 10^4 \times \log\left(\frac{13.7}{n}\right)$$

حيث تمثل  $t$  عمر العنصر بالسنوات، و  $n$  عدد انبعاثات أشعة بيتا لكل دقيقة لكل جرام من الكربون في العنصر.



الماموت

العنصر	وزن الكربون بالجرام (g)	انبعاثات أشعة بيتا لكل دقيقة
عظم ماموت	400	$1640 \pm 30$
شظايا عظمية	15	$61.5 \pm 1.5$
قطعة فخار	25	$342 \pm 7$
فحم نباتي	10	$41.0 \pm 1.3$
قضية رمح	250	$1020 \pm 30$

a احسب عمر كل عنصر.

b ما الاستثناء في البيانات أعلاه؟ كيف يمكنك تفسيره؟

c التأريخ بالإشعاع الكربوني هي طريقة لاستخدام معلومات عن فترة نصف العمر نظير ما لتحديد عمر عنصر، للكربون ( $c-14$ ) هي  $5730 \pm 40$  سنة. مقياس فأس فيه  $42$  ج من الكربون ( $c-14$ ) يعتقد أنه كان موجوداً منذ حوالي 19040 سنة. اشرح كيف يمكن لعالم آثار استخدام العلاقة أعلاه لإيجاد معدل انبعاث أشعة بيتا من مقياس الفأس.

5 التقرير: ضع تقريراً مفصلاً حول تنفيذ المشروع مستفيداً من دروس الوحدة. ضحّن تقريرك صوراً لآثار قديمة وملصفاً ورسوماً بيانية سبق أن استخدمتها.

##### دروس الوحدة

اكتشاف النماذج الأسية	الدوال الأسية وتطبيقاتها	الدوال اللوغاريتمية وتطبيقاتها	خواص	المعادلات الأسية واللوغاريتمية	اللوغاريتم الطبيعي
4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6

124

يدرس علماء الآثار أي دليل قد يساعدهم على التعرف إلى حياة البشر الذين عاشوا على سطح الأرض في العصور القديمة، فتنوع الأدلة الأثرية بين بقايا مدينة وبعض قطع الحجارة والعظام والأواني وغيرها. يستخدم علماء الآثار تقنيات مغناطيسية ووسائل خاصة بهدف جمع الدلائل الأثرية بطريقة دقيقة ومنهجية، ثم ينظمون سجلات تفصيلية عن هذه الآثار.

الهدف الأساسي لعلم الآثار هو دراسة الإنسان منذ بداية ظهوره، ومخلفاته التي تركها على مدى العصور، والحقب التي مرت.

من المعروف أنه تبعاً لبعض التقديرات، فإن عمر الإنسان على الأرض يعود إلى حوالي عشرة ملايين سنة. لذا يعتبر علم الآثار مهماً في الكشف عن حضارات وثقافات لم تكن الكتابة خلالها معروفة. وذلك أن الكتابة لا يعدو تاريخ معرفتها أكثر من ستة آلاف سنة، وهي قد بدأت في وادي النيل وفي بلاد ما بين النهرين وذلك في القرن الثاني والثلاثين قبل الميلاد. يركز عالم الآثار اهتمامه على كل شيء يعثر عليه لأنه يجد فيه مادته التي يبني عليها معلوماته. أدى العثور في تربة جافة في مدينة «أور» في العراق على طبعة قيثارة من الخشب بليت بالكامل مما أدى إلى إعادة تشكيلها وهي تعود إلى عصر حضارة «سومر».

## مشروع الوحدة

يقدم مشروع الوحدة إحدى الوسائل المستخدمة في تأريخ الإبداعات الإنسانية وتعرف الحضارات التي سادت على الأرض في العصور الغابرة.

إن استخدام الكربون المشع في العلاقة:

$$t = 1.904 \times 10^4 \times \log \frac{13.7}{n}$$

لإيجاد عمر العنصر بالسنوات بدلالة انبعاث أشعة بيتا.

حيث  $\log$  هي اختصار لكلمة logarithm اعتيادي

وأساسه العدد 10،  $n$  عدد انبعاثات أشعة بيتا في الدقيقة.

### إجابات «أسئلة حول التطبيق»

(a) عظم ماموث: 9976 سنة

شظايا عظمية: 9976 سنة

قطعة فخار: 12 سنة

فحم نباتي: 9976 سنة

قصبه رمح: 10016 سنة

(b) إن عمر قطعة الفخار لم يتطابق مع أعمار بقية

العناصر في الجدول.

(c) في العلاقة نعوض المتغير التابع  $t$  بالقيمة 19 040،

ونوجد قيمة  $n$ ، ثم نضرب قيمة  $n$  في العدد 42

فنحصل على الإجابة.

### التقرير

اكتب تقريراً مفصلاً عن النتائج التي توصلت إليها. اعرض

مشروعك مصوراً أمام زملائك في غرفة الصف. ناقش

معهم جميع النقاط الواردة، ثم أعد النظر ببعضها إذا كان

ذلك ضرورياً، وتأكد من حساباتك.

## الوحدة الرابعة

### أين أت الان (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت نمذجة الدوال الخطية وحل معادلات خطية.
- تعلمت نمذجة الدوال التربيعية وحل معادلات تربيعية.
- تعلمت نمذجة دوال كثيرات الحدود وحل معادلات كثيرات الحدود.
- تعلمت إيجاد معكوس الدالة وتمثيله بيانياً.

### ماذا سوف تتعلم؟

- تمثيل النمو الأسي والنضال الأسي.
- تمثيل بيان بعض الدوال الأسية.
- استخدام الرمز  $e$  كأساس.
- إيجاد قيمة المقادير اللوغاريتمية.
- تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانياً.
- اختصار المقادير اللوغاريتمية وفكها.
- حل معادلات أسية.
- استخدام اللوغاريتمات والأسس لحل معادلات لوغاريتمية.
- علاقة اللوغاريتم الطبيعي بالدالة الأسية.

### المصطلحات الأساسية

الدوال الأسية - معامل النمو - معامل النضال - الرمز  $e$  - الدوال اللوغاريتمية - اللوغاريتمات المعتادة - المعادلات الأسية - اللوغاريتم الطبيعي.

### أضف إلى معلوماتك

تستخدم الدوال الأسية لتمثيل الاضمحلال الإشعاعي في المادة الإشعاعية، وتمثيل نمو البكتيريا، ولحل المسائل التي تتضمن نمواً أو تضاعفاً أسياً. فإنك تحتاج إلى معرفة كيفية استخدام الدوال الأسية ومعكوماتها وهي الدوال اللوغاريتمية.

### معلومة جغرافية:

جزيرة فيلدا (فيلجا) جزيرة كوييتا تقع مساحتها  $4.3 \text{ km}^2$ . تقع في الركن الشمالي الغربي من الخليج العربي ويبعد  $20 \text{ km}$  عن سواحل مدينة الكويت. تتخذ شكل مثلث قاعدته من الغرب ورأسه في الجنوب الشرقي. يعتقد أن اسمها مشتق من كلمة العربية تعني نقطة تمر أو موقع بعيد بُعد أرضها من الأراضي القطبية الصالحة للزراعة.



وفي الجزيرة أيضاً آثار تعود لالاسكندر المقدوني وعلم لعبد الصالح الجعفر وبنان أربة تعود إلى الألف الثالث قبل الميلاد. في عام 1973 عثر في الجزيرة على حجر سويتس منحوش عليه باللغة اليونانية وإثر هذا الاكتشاف بدأت عمليات التنقيب عن الآثار مما أظهر ارتباط الجزيرة بحضارة دلمون تلك الحضارة التي كانت تضم البحرين والساحل الشرقي لشيبة الجزيرة العربية.

125

## سلم التقييم

4	الحسابات دقيقة بالكامل - البحث والشروح موثقة وصحيحة - العرض واضح ويقدم المعطيات بطريقة منطقية.
3	معظم الحسابات دقيقة - البحث والشروح بحاجة إلى بعض الإيضاح - معظم العرض واضح.
2	تتضمن الحسابات أخطاء كثيرة - البحث والشروح غير واضحة - العرض غير منظم وغير مقبول.
1	معظم عناصر المشروع ناقصة.

## 4-1: استكشاف النماذج الأسية

### 1 الأهداف

- يتعرف كيفية تمثيل النمو الأسي وتطبيقاته.
- يتعرف كيفية تمثيل التضاؤل الأسي وتطبيقاته.

### 2 المفردات والمفاهيم الجديدة

الدوال الأسية – عامل النمو – عامل التضاؤل – النسبة المئوية للتغير – نمو أسي – تضاؤل أسي – عامل التغير – معدل التغير.

### 3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – ورق رسم بياني – جهاز إسقاط (Data Show) – حاسوب.

### 4 التمهيدي

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(1) أوجد ناتج ما يلي:

- (a)  $x^3 \times x^4$   
 (b)  $(x^2)^5$   
 (c)  $\frac{x^7}{x^3}$   
 (d)  $x^4 \times y^2 \times x^5 \times y^{-1}$

(2) إذا كان  $f(x) = 2^{x+1}$ ، فأوجد:

- (a)  $f(-1)$  (b)  $f(0)$  (c)  $f(0.1)$

### 5 التدريس

سوف يتعرف الطالب نموذج الدالة الأسية حيث يستكشف لأول مرة، دالة أساسها ثابت والأس متغير، بعد أن كان يتعامل مع دوال مكونة من حدوديات أساسها متغير وأسسها ثابت. لذا، كان من المهم متابعة عمل الطلاب في فقرة «عمل تعاوني» للتأكد من كونهم قد تفهموا أن كل فريقين سوف يتنافسان في كل مباريات، وأنه في كل دورة جميع الفرق المتبقية سوف تشارك في المباراة. أخبرهم أن عدد الفرق المشاركة هو 64 وعدد المباريات في الدورة الأولى هو 32، ويجب أن يكون هناك فريق رابح في كل لعبة، ولا يوجد انسحابات من بين الفرق المشاركة.

## 4-1

### استكشاف النماذج الأسية Exploring Exponential Models

#### عمل تعاوني

تقام في دولة الكويت مسابقات لكرة قدم الصالات وبشرك فيها 64 فريقاً مختلفاً، على أن يستعد الفريق الخاسر من المنافسة في كل مباراة.

1 اعمل مع زميل لك لتحديد عدد الفرق المتبقية في المسابقة بعد الدور الأول من المسابقة.

2 أكمل الجدول حتى يتبقى فريق واحد.



عدد الفرق المتبقية في المسابقة (y)	بعد الدور (x)
64	0
	1
	2
⋮	⋮

3 كم دوراً يجب لعبه حتى نهاية المسابقة؟

4 عيّن النقاط (x, y) من جدولك على ورقة رسم بياني.

5 هل الرسم البياني يمثل دالة خطية؟ قمّر إجابتك.

6 كيف تقارن عدد الفرق المتبقية في كل دور بعدد الفرق في الدور الذي يسبقه؟

#### استخدام الدوال الأسية Using Exponential Functions

تعتبر الدالة التي تمثل عدد الفرق المتبقية في مسابقة كرة قدم الصالات بعد كل دورة مثالاً على الدالة الأسية.

الدالة:	
$y = ab^x$	$\forall x \in \mathbb{R}$
(عدد ثابت)	$a \in \mathbb{R}^*$
(الأساس)	$b \in \mathbb{R}^* - \{1\}$
تسمى دالة أسية.	

الدالة الأسية التي فيها  $a > 0$  يمكن أن تستخدم كنموذج للنمو أو للتضاؤل معتمداً على قيمة  $b$ ، كالتالي:

126

تمرّن  
4-1

### استكشاف النماذج الأسية Exploring Exponential Models

#### المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1-5)، اذكر ما إذا كانت كل دالة تمثل نمواً أسياً أو تضاؤلاً أسياً، ما النسبة المئوية لزيادة الدالة أو نقصانها؟

(1)  $y = 1298(1.63)^x$  (2)  $y = 0.65(1.3)^x$  (3)  $f(x) = 2(0.65)^x$

(4)  $f(t) = 0.8\left(\frac{1}{8}\right)^t$  (5)  $y = 5(6)^x$

(6) الدراسات الاجتماعية: يعرض الجدول التالي معلومات عن عدد السكان في أكبر أربع مدن في العالم في سنة 1994.

الترتيب في سنة 1994	المدينة (الدولة)	عدد السكان في سنة 1994	متوسط معدل النمو السنوي (i)
1	طوكيو (اليابان)	26 518 000	1.4%
2	نيويورك (الولايات المتحدة)	16 271 000	0.3%
3	ساو باولو (البرازيل)	16 110 000	2.0%
4	مكسيكو (المكسيك)	15 525 000	0.7%

(a) لتفترض استمرار هذه المعدلات للنمو، اكتب معادلة تمثل النمو المستقبلي لعدد السكان في كل مدينة.

(b) استخدم معادلاتك كي تتوقع عدد سكان كل مدينة في سنة 2004. هل تغير الترتيب؟

في الصريين (7-8)، مثل كل دالة بيانياً. بين ما إذا كانت الدالة تمثل نمواً أسياً أو تضاؤلاً أسياً محدداً العامل.

(7)  $y = 100(0.5)^x$  (8)  $f(x) = 2^x$

(9) السؤال المفتوح: اكتب مسألة حياتية تمثل نمواً أسياً أو تضاؤلاً أسياً لكل دالة في التمرينين (7) و(8).

(10) الاقتصاد: افترض أنك تريد شراء سيارة ثمنها 4 500 دينار. من المتوقع أن تنخفض قيمتها بمعدل 20% سنوياً، إذا أخذت قرضاً مدته أربع سنوات لشراء السيارة، فكم ستكون قيمة السيارة بعد أن تسدد القرض في أربع سنوات؟

في التمارين (11-14)، اكتب دالة أسية لتصل (نمذجة) كل موقف مما يلي. أوجد قيمة الدالة بعد خمس سنوات.

(11) تجنّع من الضفادع مؤلف من 250 ضفدعة، يتزايد بمعدل 22% سنوياً.

(12) مجموعة طوايح ثمنها 35 ديناراً، يتزايد ثمنها بمعدل 7.5% سنوياً.

54

## في المثال (1)

اطلب إلى الطلاب ملاحظة الفرق بين  $x^2$ ،  $2^x$ . دعهم يكونون جدولاً للدالة  $x^2$  بالقيم نفسها التي استخدمت للدالة  $2^x$ ، ثم رسم بيان الدالة  $x^2$  لملاحظة الفرق بينهما. أسألهم ما إذا كانت هذه الدالة تزايدية أم تناقصية.

## في المثال (2)

أسأل ما إذا كانت هذه الدالة تزايدية أم تناقصية، وكيفية اختلافها عن الدالة في المثال (1). اطلب إليهم التمعن بأساس كل دالة، ثم كتابة الاستنتاج.

## في المثال (3)

هو تطبيق الدالة الأسية على نمو السكان. ساعدهم على فهم عامل النمو. أخبرهم أن عامل النمو (عامل التضائل) سيكون دائماً هو الأساس في الدالة الأسية، وأن  $b = 1 + I$ ، حيث  $I$  هو معدل التغير (موجباً أو سالباً).

## في المثال (4)

يبين كيفية إيجاد دالة أسية إذا كان رسمها البياني يمر عبر نقطتين، علماً بأن الدالة الأسية  $y = ab^x$  تتضمن ثابتين  $a, b$  لذا يجب معرفة إحداثيات نقطتين.

## في المثال (5)

يوفر هذا المثال فرصة أمام الطالب لتعرف كيفية استخدام الدالة الأسية في الانخفاض (التناقص) باستخدام القاعدة  $y = ab^x$ ، حيث  $b$  هي أساس الدالة الأسية، وهي قيمة الانخفاض (التناقص) وتكون قيمة ثابتة.



عندما تكون  $0 < b < 1$ ، فإن الدالة تضائل. تضائل أسّي، وتكون  $b$  هي عامل التضائل.

عندما تكون  $b > 1$ ، فإن الدالة تضائل. نمو أسّي، وتكون  $b$  هي عامل النمو.

### مثال (1)

مثل بيان الدالة  $y = 2^x$ . ثم بين ما إذا كانت الدالة تضائل نمو أسّي أو تضائل أسّي وحدد العامل.

الحل:

الخطوة 1: اصنع جدول قيم  
الخطوة 2: مثل بيان الإحداثيات. حل بين النقاط بمنحى.  
∴  $b = 2$   
∴  $b > 1$   
∴ الدالة تضائل نمو أسّي.  
∴ عامل النمو:  $b = 2$



x	2 <sup>x</sup>	y
-3	2 <sup>-3</sup>	0.125
-2	2 <sup>-2</sup>	0.25
-1	2 <sup>-1</sup>	0.5
0	2 <sup>0</sup>	1
1	2 <sup>1</sup>	2
2	2 <sup>2</sup>	4
3	2 <sup>3</sup>	8

### سأول أن تحل

مثل بياناً كلاً من الدورال التالية، ثم بين ما إذا كانت تضائل نمو أسّي أو تضائل أسّي وحدد العامل.

1.  $y = 4(2)^x$

2.  $y = 3^x$

### مثال (2)

مثل بياناً الدالة  $y = 4\left(\frac{1}{2}\right)^x$

ثم بين ما إذا كانت الدالة تضائل نمو أسّي أو تضائل أسّي وحدد العامل.

127

(13) سيارة شحن صغيرة ثمنها 1 750 ديناراً تنخفض قيمتها بمعدل 11% سنوياً.

(14) قطع من الماعز عدده 115 يتناقص بمعدل 1.25% سنوياً.

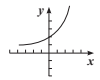
(15) لنفترض أنك تشتري سيارة جديدة، وتريد أن يكون لهذه السيارة أعلى قيمة بعد مرور خمس سنوات على شرائها، أي اختيار من الاختيارات الثلاثة الموضحة في الجدول التالي سوف تختار؟

السيارة	السعر الأساسي	قيمة الانخفاض المتوقع
1	4 275 ديناراً	10%
2	4 500 ديناراً	12%
3	4 850 ديناراً	15%

### المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-4)، ظلّل إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت خاطئة.

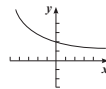
- (1) الدالة  $y = 3(2)^x$  تمثل تضائل أسّي. (a) (b)  
 (2) الدالة  $y = 2\left(\frac{1}{3}\right)^x$  تمثل نمو أسّي. (a) (b)  
 (3) عامل النمو للدالة  $y = \frac{1}{3}(2)^{2x}$  هو 2. (a) (b)  
 (4) إذا كان بيان الدالة  $y = b^x$  كما في الشكل المقابل فإن  $b > 1$ . (a) (b)



في التمارين (5-8)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) عامل النمو للدالة  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$  هو، (a)  $\frac{1}{3}$  (b)  $\frac{1}{9}$  (c) 3 (d) 9

- (6) ليكن بيان الدالة:  $y = 2b^x$  كما في الشكل المقابل، فإن  $b$  يمكن أن تساوي. (a) -2 (b) 0 (c)  $\frac{1}{2}$  (d) 2



- (7) الدالة الأسية  $y = ab^x$  تُمذِّج التزايد السكاني، إذا كان معدل التزايد السكاني في مدينة ما هو 2.5% فإن عامل النمو يساوي: (a) 0.025 (b) 1.25 (c) 1.025 (d) 3.5

55

## 6 الربط

المثالان (5)، (3) يوفران فرصة أمام الطلاب لتعرف كيفية استخدام الدوال الأسية، لإيجاد التزايد أو التناقص في عدد السكان أو في استهلاك منتج معين خلال فترة زمنية محددة.

## 7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في كتابة النسبة المئوية لتزايد عدد السكان، فمثلاً 2% زيادة قد يحولونها إلى 0.2 في الصورة العشرية وهذا خطأ. أخبرهم أن 2% هي  $\frac{2}{100}$  وهي أصغر من 1، لذا تكون 2% هي 0.02 وليس 0.2 والتي تعادل 20%.

أوجد عامل النمو.

كون الدالة الأسية التي تصف التغير السكاني حيث بلغ عدد سكان الكويت من المواطنين 1 038 598 مواطناً (المصدر: 30 يونيو 2007 الإدارة المركزية للإحصاء).

إذا فرضنا أن معدل التزايد ثابت، فكم سيكون عدد سكان الكويت من المواطنين سنة 2013؟

الحل:  
عامل النمو:

$$b = 1 + I$$

$$= 1 + 0.0244$$

$$\therefore b = 1.0244$$

يزداد السكان أسياً لذلك نستخدم الدالة الأسية  $y = ab^x$ ، حيث  $x$  عدد السنوات بعد 2007،  $y$  عدد السكان بالمليون.

أي أن:  
(عدد السكان سنة 2007)  
عندما  $x = 0$  (سنة البدء 2007)

$$1038\ 598 = a(1.0244)^0$$

$$1038\ 598 = a \times 1$$

$$a = 1\ 038\ 598$$

أي عدد غير صفري مرفوع للأس صفري يساوي واحد

أي أن:  
دالة التغير السكاني هي:

سنة 2013 هي السنة السادسة  
أي أن  $x = 6$

من المتوقع أن يصبح عدد مواطني الكويت مليوناً ومئتي ألف و 231 نسمة في سنة 2013.

حاول أن تحل

من المعلومات في مثال (3)  
إذا بقي معدل التزايد ثابتاً، فكم توقع أن يكون عدد مواطني الكويت سنة 2017؟  
التفكير الناقد: لماذا قد لا يكون التوقع صحيحاً لسنة 2017؟

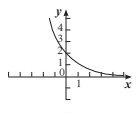
يمكن كتابة دالة أسية بمعلومية نقطتين على رسمها البياني.

### مثال (4)

اكتب دالة أسية:  $y = ab^x$ ، يمر بيانها بالنقطتين:  $P(2, 2)$ ،  $Q(3, 4)$

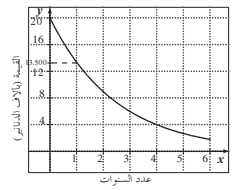
الحل:  
استخدم الدالة الأسية  
عزض عن  $(x, y) = (2, 2)$

$$y = ab^x$$

$$ab^2 = 2$$


(8) أي من الدوال الأسية التالية يمكن أن يمثلها الرسم البياني المقابل.

- (a)  $y = \frac{1}{2}(2)^x$  (b)  $y = 2\left(\frac{1}{3}\right)^x$  (c)  $y = -3(2)^x$  (d)  $y = -2(3)^x$
- في التمارين (9-11)، لديك قائمتان اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين من القائمة (1) للحصول على إجابة صحيحة. بين التمثيل البياني الأسي المقابل الانخفاض في قيمة سيارة خلال 4 سنوات.



القائمة (1)	القائمة (2)
(9) مقدار التغير (بالآلاف) =	(a) -0.325
(10) نسبة التغير =	(b) 0.675
(11) عامل الانخفاض =	(c) 0.325
	(d) 6.5

معلومات:  
معدل التغير الذي يكون معدل تزايد أو معدل تناقص.

الحل:  
الخطوة 1: اصنع جدول قيم.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	32	16	8	4	2	1	0.5

الخطوة 2: مثل بيانياً الإحداثيات. صل بين النقاط بمنحنى.

$b = \frac{1}{2}$   
 $\therefore 0 < b < 1$

$\therefore$  الدالة تمثل تنازلاً أسياً  
 $\therefore$  عامل التنازل:  $b = \frac{1}{2}$

حاول أن تحل

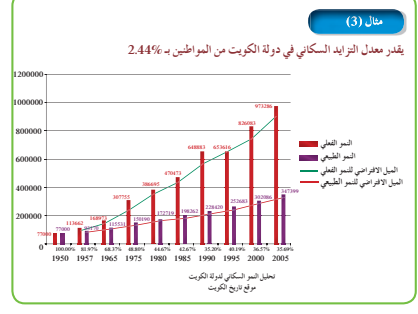
مثل بيانياً ثم بين ما إذا كانت الدالة تمثل نمواً أسياً أو تنازلاً أسياً وحدد العامل.

(a)  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$  (b)  $y = 2(0.1)^x$

لتدريب

اكتب دالة تمثل نمواً أسياً.  
اكتب دالة تمثل تنازلاً أسياً.

يمكنك استخدام الدوال الأسية  $y = ab^x$  لتمنجة التغير السكاني إذا عرفت معدل التغير I. يمكنك إيجاد عامل النمو  $b$  باستخدام المعادلة:  $b = 1 + I$





## 8 التقييم

تساعد فقرات «حاول أن تحل» المعلم على متابعة الطلاب وإدراك مدى فهمهم هذا النموذج الجديد من الدوال.

### اختبار سريع

- هل الدالة  $y = 234(0.87)^x$  تمثل نموًا أسيًا أم تضاهلاً أسيًا؟ اشرح. **تضاهلاً أسيًا. الأساس أصغر من 1**
- اشترت حاسوباً بسعر 350 ديناراً وتوقع أن يتناقص سعره 25% كل سنة. كم سيصبح سعره بعد 4 سنوات؟ **110.7 دينار**
- مستعمرة حشرات مؤلفة من 414 حشرة تتزايد بمعدل 45% كل أسبوع، كم سيكون عدد حشرات هذه المستعمرة بعد 4 أسابيع؟ **1 830 حشرة**

## 9 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

1 32 فرقة

2 (a)

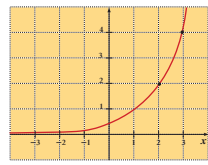
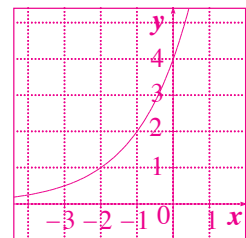
عدد الفرق المتبقية في المسابقة (y)	بعد الدور (x)
64	0
32	1
16	2
8	3
4	4
2	5
1	6

(b) 6 أدوار بـ 63 مباراة.

5 - 3 تحقق من عمل الطلاب.

«حاول أن تحل»

1 (a)  $y = 4(2)^x$



اقسم على  $b^2$

$$\frac{2}{b^2} = a$$

عوض عن  $(x, y) = (3, 4)$

$$4 = \frac{2}{b^2} \cdot b^3$$

عوض عن  $a = \frac{2}{b^2}$

خاصية قسمة الأسس

$$4 = 2b^{3-2}$$

بسط

$$4 = 2b$$

$$b = \frac{2}{2}$$

$$a = \frac{2}{b^2}$$

عوض عن  $b = 2$

$$\therefore a = \frac{2}{2^2}$$

بسط

$$a = \frac{1}{2}$$

عوض عن  $a = \frac{1}{2}$

$$\therefore y = \frac{1}{2}(2)^x$$

الدالة الأسية التي يمر بيانيها بالنقطتين (2, 2) ، (3, 4) هي:  $y = \frac{1}{2}(2)^x$ .

حاول أن تحل

1 اكتب دالة أسية بالصورة  $y = ab^x$  يمر بيانيها بالنقطتين:  $H(2, 4)$  ،  $S(3, 16)$

التخفيض (تضاهل) القيمة: هو نقص قيمة سلعة ما نتيجة الزمن  $t$  أو استهلاكها. عندما تفقد السلعة تقريباً النسبة المئوية نفسها من قيمتها كل عام، فإنه يمكنك استخدام دالة أسية لتمثيل التخفيض القيمة.

النسبة المئوية للتغير =  $\frac{\text{مقدار التغير}}{\text{القيمة الابتدائية}} \times 100\%$

علماً أن مقدار التغير = القيمة النهائية - القيمة الابتدائية.

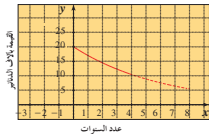
مثال (5)

يبين المخطط البياني الأسّي المقابل الانخفاض (التناقص) في قيمة سيارة خلال 4 سنوات.

- لقد النسبة المئوية لانخفاض قيمة السيارة في نهاية السنة الأولى.
- كون دالة أسية  $ab^x = y$  ويمكن أن يمثلها هذا البيان لتقدير قيمة السيارة في نهاية السنة السادسة.

الحل:

- من الشكل القيمة الابتدائية للسيارة 20000 دينار. بعد سنة واحدة تصبح قيمتها حوالي 17000 دينار.



نسبة الانخفاض =  $\frac{\text{القيمة النهائية} - \text{القيمة الابتدائية}}{\text{القيمة الابتدائية}}$

Decay Ratio =  $\frac{17000 - 20000}{20000}$   
 $= -0.15$   
 $-0.15 \times 100\% = -15\%$

النسبة المئوية للانخفاض:  
 تخفيض قيمة السيارة بمقدار 15% في العام الأول.

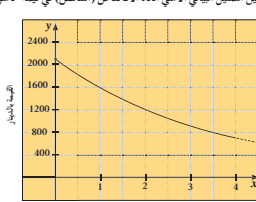
**b** نستخدم الدالة الأسية:  $y = ab^x$  لتقدير قيمة السيارة بعد 6 سنوات،  
 حيث (x) عدد السنوات، (y) قيمة السيارة بالدينار، b هو عامل الانخفاض (التضائل).  
 $\therefore$  عامل الانخفاض  $b = 1 + I$ ، حيث I معدل التغير.  
 عامل الانخفاض:  $b = 1 - 0.15 = 0.85$   
 عوض عن y بـ 20000، عن x بـ 0

$20000 = a(0.85)^0$   
 $a = 20000$   
 $\therefore y = 20000(0.85)^x$   
 $y = 20000(0.85)^6$   
 $y = 7542.99$

عوض عن x بـ 6  
 بنظ  
 تصبح قيمة السيارة بعد 6 سنوات حوالي 7540 ديناراً.

حاول أن تحل

**5** يبين التمثيل البياني الآسي أدناه الانخفاض (التناقص) في قيمة حاسوب خلال 4 سنوات.



قدر النسبة المئوية للانخفاض في نهاية السنة الأولى.  
 كون دالة أسية  $y = ab^x$  يمكن أن يظهرك هذا البيان ثم استخدمها لتقدير قيمة الحاسوب في نهاية السنة الرابعة.

يجب إيجاد  $a, b$

$$y = \frac{1}{4}(4)^x$$

**5** (a) مقدار التغيير:  $1600 - 2100 = -500$   
 $\therefore$  قيمة الانخفاض: 500

النسبة المئوية للتغيير:

$$\frac{-500}{2100} \times 100\% \approx -23.8\%$$

(b) الدالة الأسية تكتب على الشكل التالي:

$$y = a(b)^x ; 2100 = a(b)^0$$

$$a = 2100 \text{ ومنه}$$

$$b = 1 + I$$

$$b = 1 - 0.238 \text{ أي}$$

$$b = 0.762$$

تصبح الدالة الأسية:  $y = 2100(0.762)^x$

قيمة الحاسوب في السنة الرابعة:

708 دنانير تقريباً

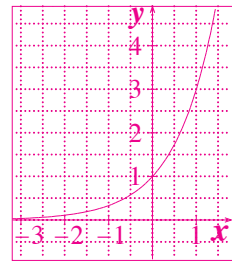
«تدريب»

$$y = 2(3)^x \quad 1$$

$$y = 3\left(\frac{1}{4}\right)^x \quad 2$$

$$(b) y = 3^x$$

x	-2	-1	0	1
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3



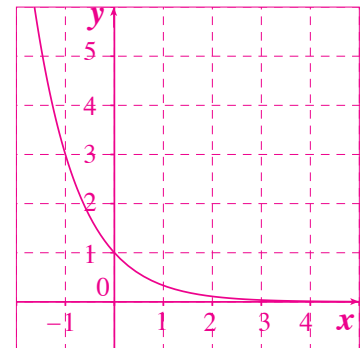
$$2 \quad (a) y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$\therefore b = \frac{1}{3}, 0 < b < 1$$

$\therefore$  الدالة تمثل تضائلاً أسياً

$\therefore$  عامل التضائل  $b = \frac{1}{3}$

x	y
-2	9
-1	3
0	1
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$



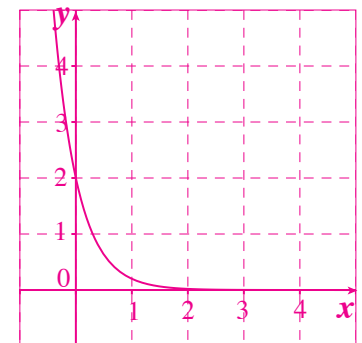
$$(b) y = 2 \times (0.1)^x$$

x	0	1	2	3
y	2	0.2	0.02	0.002

$$\therefore b = 0.1, 0 < b < 1$$

$\therefore$  الدالة تمثل تضائلاً أسياً

$\therefore$  عامل التضائل  $b = 0.1$



$$y = 1038598(1.0244)^{10} \approx 1321731 \quad 3$$

(a) أي أن عدد سكان الكويت سوف يكون تقريباً

1 321 731 نسمة.

(b) لأن نسبة الزيادة قد لا تكون ثابتة أي 2.44%.

الدالة الأسية بالصيغة القياسية هي:  $y = a(b)^x$  4

## 2-4: الدوال الأسية وتمثيلها بيانياً

### 1 الأهداف

- يرسم التمثيل البياني لبعض الدوال الأسية.
- يحدد دور الثوابت في الدوال الأسية.
- يستخدم العدد  $e$  كأساس في الدوال الأسية.

### 2 المفردات والمفاهيم الجديدة

انعكاس - انسحاب - العدد  $e$ .

### 3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة بيانية - ورق رسم بياني - جهاز إسقاط (Data Show) - حاسوب.

### 4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) ارسم بيان الدالة:  $y = 3(2)^x$

(b) ارسم بيان الدالة:  $y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^x$

(c) أوجد قيم:  $a, b$  في الدالة:  $y = a(b)^x$  إذا كان الرسم البياني لهذه الدالة يمر بالنقاط:  $(25, 1), (75, 2)$ .

### 5 التدريس

تعتبر الدوال الأسية ذات أهمية كبرى لما لها من استخدامات في التطبيقات الحياتية.

#### في المثال (1)

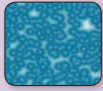
ركز انتباه الطلاب على جدول القيم، اسألهم إذا لاحظوا ما يحدث لقيم  $3^x$  و  $\left(\frac{1}{3}\right)^x$  عندما تتزايد  $x$  في العمود الأول لجهة اليسار. اطلب إليهم الربط بين قيم  $3^x$  وقيم  $\left(\frac{1}{3}\right)^x$  على الجدول عند القيم  $-1, -2$  والقيم  $1, 2$ . شجعهم على استنتاج التزايد على منحنى  $3^x$  واستنتاج التناقص على منحنى  $\left(\frac{1}{3}\right)^x$  وذلك عند تزايد المتغير  $x$ .

#### في المثال (2)

اشرح للطلاب أن الدالة  $(a < 0)$   $y = ab^x$  لها منحنى وهو انعكاس لمنحنى الدالة  $(a > 0)$   $y = ab^x$  في محور السينات. شجعهم على ملاحظة قيم  $\frac{1}{2}(2)^x$  وقيم  $-\frac{1}{2}(2)^x$

### الدوال الأسية وتمثيلها بيانياً

#### Exponential Functions and their Graphs



#### عمل تعاوني نمو البكتيريا

ليكن  $f(t)$  عدد البكتيريا (بالآلاف) في اللحظة  $t$  (بالساعات) حيث  $f(t) = a \cdot b^t$ . من خلال الملاحظة توصلنا إلى ما يلي:

- $f(0) = 1$
- يتضاعف عدد البكتيريا كل ساعة.
- على فترات زمنية متساوية، عامل النمو هو نفسه.

a أوجد عامل التنام على فترة نصف ساعة، وعلى فترة ربع ساعة.

b أكمل الجدول التالي: (قرب الإجابات إلى أقرب جزء من مئة)

$t$	0	0.25	0.50	0.75	1	1.25	1.50	1.75	2	2.25	2.50	2.75	3	3.25	3.50	3.75	4
$f(t)$	1																

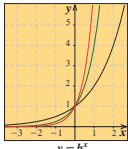
c ضع رسماً بيانياً يمثل نمو البكتيريا خلال الساعات الأربع.

d استخدم آلة حاسبة علمية لمقارنة قيم  $f(t)$  في الجدول مع قيم  $g(t) = 2^t$  ماذا تلاحظ؟

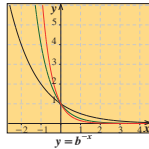
#### Graphing Exponential Functions التمثيل البياني للدوال الأسية

يمكن دراسة تأثير القيم المختلفة لكل من  $a, b$  على الدالة الأسية  $y = ab^x$  حيث  $a \neq 0, b > 0, b \neq 1$  باستخدام الرسوم البيانية كالتالي:

أولاً: عندما  $a$  موجب



- (1)  $y = 2^x$   
(2)  $y = 4^x$   
(3)  $y = 7^x$



- (4)  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = (2)^{-x}$   
(5)  $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x = (4)^{-x}$   
(6)  $y = \left(\frac{1}{7}\right)^x = (7)^{-x}$

تلاحظ أن بيان الدالة  $y = b^{-x}$  حيث  $b > 0, b \neq 1$  ينتج من انعكاس لبيان الدالة  $y = b^x$  في المحور الصادي.

132

تمؤن  
4-2

### الدوال الأسية وتمثيلها بيانياً

#### Exponential Functions and their Graphs

#### المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1-4)، مثل بيانياً كلًا من الدوال الأسية التالية:

- (1)  $y = 4^x$  (2)  $y = 6^x + 3$  (3)  $y = 2^{-x}$  (4)  $y = -3^{x+4}$

في التمارين (5-8)، مثل بيانياً كلًا من الدوال الأسية التالية مستخدماً دالة المرجع:

- (5)  $y = (5)^x - 1$  (6)  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$  (7)  $y = (4)^{x-2} + 3$  (8)  $y = -2(3)^{2x} + 1$

في التمارين (9-13)، استخدم تلك الحاسبة لإيجاد ناتج كل مقدار مقرباً الناتج إلى أربعة أرقام عشرية.

- (9)  $e^3$  (10)  $5e^6$  (11)  $\left(\frac{2}{3}\right)e^{\frac{1}{2}}$   
(12)  $\frac{4}{e^6}$  (13)  $e^e$

(14) أوجد قيمة  $a$  التي يصبح عندها الرسم البياني للدالة  $y = ab^x$  خطاً أفقياً.

(a) (15) الكيمياء: تعطي العلاقة:  $A = Pe^{-0.0001t}$  الكمية المتبقية  $A$  بالميكروجرام من مادة إشعاعية معينة بعد  $t$  سنة من التناؤل؛  $P$  هي الكمية الأولية للمادة المشعة. استخدم العلاقة لإكمال الجدول التالي:

الكمية المتبقية من المادة (A)	السنوات (t)	الكمية الأولية من المادة (P)
	5	10 000
	5	7 500
	5	6 000
	5	5 000
	5	2 500
	5	2 000

(b) قارن بين قيم كل من  $A, P$ . ماذا تلاحظ؟

(16) علم المحيطات: كلما غصنا في أعماق المحيط، قلت شدة أشعة الشمس. إذا كانت شدة أشعة الشمس على سطح المحيط هي  $y$ ، فإن النسبة المئوية من  $y$  التي تصل إلى عمق  $x$  م تعطي بالعلاقة:  $y = 20 \times (0.92)^x$

(يعد هذا النموذج مناسباً للأعماق من 6 m إلى 180 m تحت مستوى سطح البحر).

(a) أوجد النسبة المئوية لأشعة الشمس الموجودة على عمق 15 m تحت مستوى سطح البحر.

(b) إذا كان أقصى عمق مسجل لرياضة الغطس هو 107 m تحت مستوى سطح البحر، فأوجد النسبة المئوية لأشعة الشمس عند هذا العمق.

57

على الجدول عندما تتغير  $x$ . اعرض أمامهم على جهاز الإسقاط أمثلة متعددة عن بيان دالتين حيث إشارة  $a$  سالبة وموجبة.

### في المثال (3)

شجع الطلاب على استخدام الانسحاب في التمثيلات البيانية للدوال الأسية لأنه يساعدهم كثيرًا. فسّر لهم جيدًا الرموز المستخدمة وكيفية التعامل معها بين الدالتين:  
 $y = ab^x$  ,  $y = a(b)^{x-h} + k$

### في المثال (5)

يعالج هذا المثال حالة خاصة من قيم  $b$  في الدالة الأسية، حيث  $b = e$  علمًا أن:  $e \approx 2.718$ ، أي أن الدالة  $y = e^x$  هي تزايدية لأن  $e > 1$ . أخبرهم أن  $y = e^{-x}$  هي دالة تناقصية.

### تطبيق إثرائي (الطب)

يبين كيفية تطبيق التضاؤل باستخدام الدالة الأسية وذلك على مادة مشعة تستخدم في المستشفيات. اشرح لهم معنى نصف العمر. ثم اطلب إليهم إجراء بحث أو القيام بزيارة لمستشفى للتعرف أكثر إلى طبيعة هذه المادة.

## 6 الربط

التطبيق الإثرائي في الطب يوفر الربط بين الدوال الأسية لجهة التضاؤل والمواقف التي تهتم كل واحد منا في حياته اليومية.

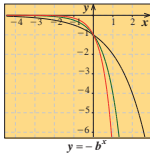
## 7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام الإزاحة (الانسحاب) مع الدالة  $y = a(b)^{x-h} + k$  والدالة الأساسية  $y = a(b)^x$ .  
 شدد على فكرة أن  $h$  هي إزاحة إلى اليمين إذا كانت موجبة وإزاحة إلى اليسار إذا كانت سالبة، وأن  $k$  إزاحة إلى أعلى إذا كانت موجبة وإزاحة إلى أسفل إذا كانت سالبة.

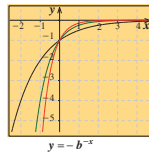
## 8 التقييم

تابع الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» للتأكد من إمكانياتهم على إستيعاب المفاهيم والمهارات التي اكتسبوها في هذا الدرس.

نائبًا: عندما  $a$  سالب



- (1)  $y = -2^x$
- (2)  $y = -4^x$
- (3)  $y = -7^x$



- (4)  $y = -(\frac{1}{2})^x = -(2)^{-x}$
- (5)  $y = -(\frac{1}{4})^x = -(4)^{-x}$
- (6)  $y = -(\frac{1}{7})^x = -(7)^{-x}$

نلاحظ أيضًا أن بيان الدالة  $y = -b^{-x}$  حيث  $b \neq 1$ ،  $b > 0$  ينتج من انعكاس بيان الدالة  $y = -b^x$  في المحور الصادي. ملاحظة: من أولًا ونائبًا نلاحظ أن بيان الدالة  $y = -b^x$  حيث  $b \neq 1$ ،  $b > 0$  ينتج من انعكاس بيان الدالة  $y = b^x$  في المحور السيني.

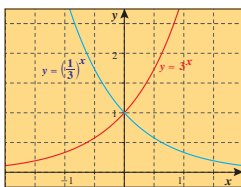
مثال (1)

مثل بيانًا كل من:  $y = (\frac{1}{3})^x$ ،  $y = 3^x$  في نفس المستوى الإحداثي.

الحل:

الخطوة 2: مثل بيانًا الدالتين.

الخطوة 1: اصنع جدول قيم.



x	$y = 3^x$	$y = (\frac{1}{3})^x$
-2	0.111	9
-1	0.333	3
0	1	1
1	3	0.333
2	9	0.111
3	27	0.037

حاول أن تحل

مثل بيانًا كلًا من:  $y = (\frac{1}{5})^x$ ،  $y = 5^x$  في نفس المستوى الإحداثي.

133

### المجموعة B تمارين موضوعية

- في التمارين (1-5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة، و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.
- (1) جميع الدوال الأسية على الصورة:  $y = ab^x$ ،  $a \neq 0$ ،  $b > 0$ ،  $b \neq 1$  متقاطعة.
  - (2) بيان الدالة  $y = -2^x$  هو انعكاس في محور السينات لبيان الدالة  $y = 2^x$ .
  - (3) بيان الدالة  $y = -(3)^x$  هو انعكاس في محور الصادات لبيان الدالة  $y = (3)^x$ .
  - (4) بيان الدالة  $y = 3(5)^{x-2}$  هو انسحاب لبيان الدالة  $y = 3(5)^x$  بمقدار وحدتين جهة اليمين.
  - (5) بيان الدالة  $y = 3(2)^x$  يقطع جزءًا من محور الصادات قدره 3 وحدات.
- في البود (6-12)، ظلّل رمز الدالة الدال على الإجابة الصحيحة.
- (6) لتكن  $5 + 3(\frac{1}{2})^{x+1}$  فإن دالة المرجع لها يمكن أن تكون،  
 (a)  $y = 3(2)^x$  (b)  $y = 3(2)^{-x}$  (c)  $y = 3(\frac{1}{2})^{x+1}$  (d)  $y = (\frac{1}{2})^x$
  - (7) باستخدام بيان الدالة  $y = \frac{1}{3}(4)^x$  كدالة مرجع يمكن رسم بيان الدالة،  
 (a)  $y = 3(4)^x$  (b)  $y = 3(4)^{-x}$  (c)  $y = \frac{1}{3}(2)^{2x} + 1$  (d)  $y = \frac{1}{3}(2)^{3x}$
  - (8) قيمة  $x$  التي تجعل بيان الدالة  $y = 8(\frac{1}{2})^{x+2} + 3$  خطأً أفقيًا هي،  
 (a) -3 (b) -2 (c) -8 (d) 0
  - (9) بيان الدالة  $f(x) = 3(5)^x - 1$  هو انعكاس في محور الصادات لبيان الدالة  $g(x) = 3(5)^x + 1$   
 (a)  $3(5)^x + 1$  (b)  $3(5)^x - 1$  (c)  $-3(5)^x + 1$  (d)  $3(5)^{-x} + 1$
  - (10) يمكن رسم بيان الدالة  $y = \frac{1}{2}(5)^{x+2} - 3$  باستخدام بيان الدالة  $y = \frac{1}{2}(5)^x$  بانسحاب،  
 (a) وحدتين جهة اليسار و3 وحدات لأسفل (b) وحدتين جهة اليمين و3 وحدات لأسفل  
 (c) 3 وحدات جهة اليمين وحدتين لأعلى (d) وحدتين جهة اليمين و3 وحدات لأعلى
  - (11) معادلة الدالة الأسية التي على الصورة  $y = a(b)^x$  حيث الأساس يساوي 0.6 ويمر رسمها البياني بالنقطة (2, 1.8) هي،  
 (a)  $y = 1.8(2)^x$  (b)  $y = 0.2(1.8)^x$  (c)  $y = 2(0.6)^x$  (d)  $y = 5(0.6)^x$
  - (12) أي من الدوال التالية تنمذج بيانات الجدول المقابل،  

x	0	1	2	3
y	4	5.2	6.76	8.79

 (a)  $y = x^2 + \frac{1}{2}x + 4$  (b)  $y = 4(1.3)^x$  (c)  $y = 1.6(4)^x$  (d)  $y = 4(0.6)^x + 2.8$

58

### اختبار سريع

- 1 استخدم آلة حاسبة لمعرفة قيمة  $\frac{e^5}{3}$  إلى أقرب جزء من عشرة آلاف. 49.4711
- 2 اكتب دالة أسية أساسها 2 وتمر بالنقطة (3, 12).

$$y = \frac{3}{2}(2)^x$$

### 9 إجابات وحلول

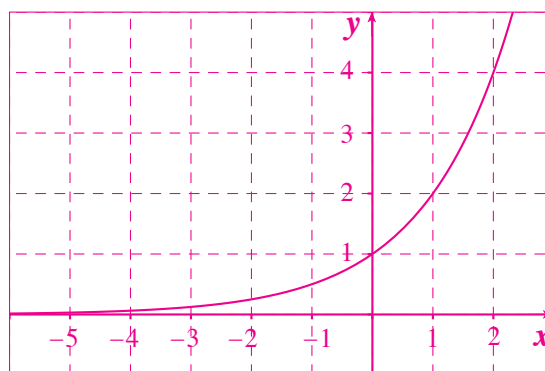
«عمل تعاوني»

(a) عامل النمو ثابت وهو 2.

(b)

$t$	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.50	1.75
$f(t)$	1	1.19	1.41	1.68	2	2.38	2.83	3.36
	2	2.25	2.50	2.75	3	3.25	3.50	4
	4	4.76	5.66	6.73	8	9.51	11.31	13.45
								16

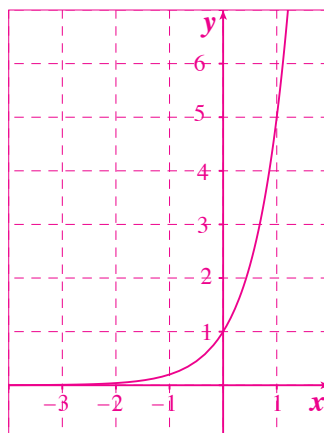
(c)  $y = 2^x$



(d) تحقق من إجابات الطلاب.

«حاول أن تحل»

1  $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$



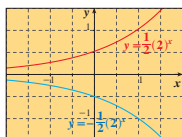
مثال (2)

مثل بيانياً كلًا من:  $y = \frac{1}{2}(2)^x$ ,  $y = -\frac{1}{2}(2)^x$  في نفس المستوى الإحداثي.

الحل:

الخطوة 1: اصنع جدول قيم.

$x$	$y = \frac{1}{2}(2)^x$	$y = -\frac{1}{2}(2)^x$
-2	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$
-1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
1	1	-1
2	2	-2
3	4	-4



حاول أن تحل

2 مثل بيانياً في نفس المستوى الإحداثي.

1  $y = -4(2)^x$

2  $y = 4(2)^x$

3 ماذا تلاحظ بين بياني كلٍّ من الدالتين في 1.

يمكنك تمثيل بيان العديد من الدوال الأسية وذلك باتسحاب لبيان دالة المرجع  $y = ab^x$  حيث  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $b \neq 1$ . التمثيل البياني للدالة:  $y = a(b)^{x-h} + k$  هو انسحاب لبيان الدالة  $y = ab^x$  بمقدار  $h$  وحدة أفقيًا،  $k$  وحدة عموديًا.

مثال (3)

مثل بيانياً الدالة:  $y_1 = 8\left(\frac{1}{2}\right)^x$  ومنها مثل بيانياً الدالة:  $y_2 = 8\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + 3$

الحل:

الخطوة 1:

جدول قيم الدالة  $y_1 = 8\left(\frac{1}{2}\right)^x$

$x$	0	1	2	3	4	5	6
$f_1(x)$	8	4	2	1	0.5	0.25	0.125

مثل بيانياً:  $f_1(x) = 8\left(\frac{1}{2}\right)^x$

الخطوة 2:

لرسم بيان الدالة:  $y = 8\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + 3$  حيث  $k = 3$  ,  $h = -2$

اسحب بيان دالة المرجع:  $f(x) = 8\left(\frac{1}{2}\right)^x$  وحدتين إلى جهة اليسار و3 وحدات إلى الأعلى.

حاول أن تحل

3. مثل كل دالة مما يلي وذلك بانسحاب بيان دالة المرجع:  $y = 2(3)^x$

a.  $y_1 = 2(3)^{x+1}$       b.  $y_2 = 2(3)^x - 4$       c.  $y_3 = 2(3)^{x-3} + 1$

بعض الدوال الأسية هي على الصورة:  $y = ab^{rx}$ ، حيث  $r$  ثابت،  $a \neq 0$

(4) مثال

مثل بيانًا الدالة:  $f(x) = \frac{1}{9}(3)^{2x}$

الحل:

جدول قيم الدالة:

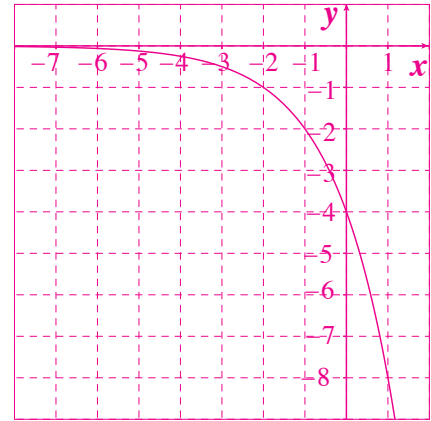
مثل بيانًا:

حاول أن تحل

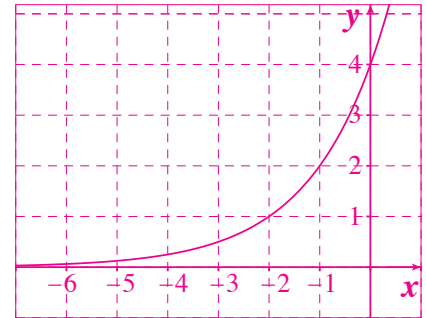
4. مثل بيانًا الدالة:  $f(x) = \frac{1}{9}(3)^{2x} - 1$

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5
f(x)	0.11	0.33	1	3	9	27

2 (a) (1)  $y = -4(2)^x$

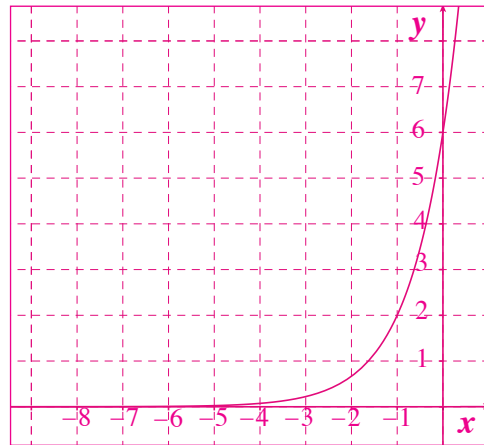


(2)  $y = 4(2)^x$

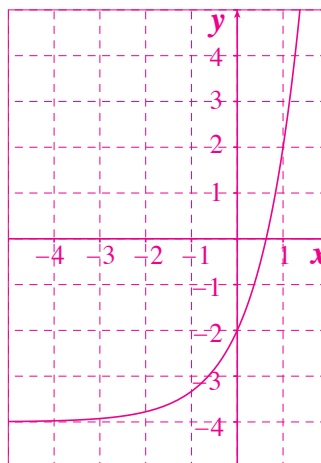


(b) بيان الأولى يمثل تضاعوًا أسياً أما بيان الثانية فيمثل نموًا أسياً.

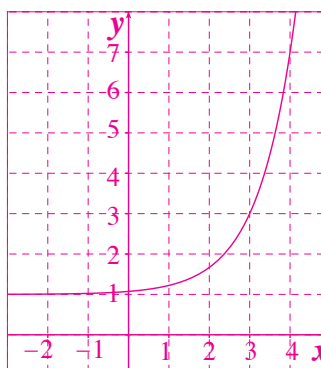
3 (a)  $y_1 = 2(3)^{x+1}$



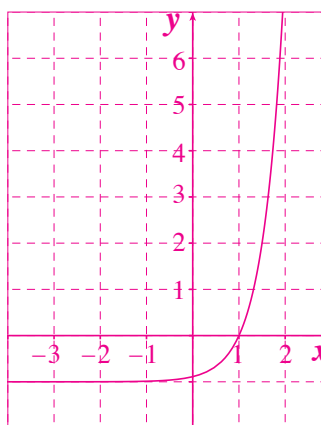
(b)  $y_2 = 2(3)^x - 4$



(c)  $y_3 = 2(3)^{x-3} + 1$



4  $y = \frac{1}{9}(3)^{2x} - 1$



5 (a)  $e^4 \approx 54.598$   
 (b)  $e^{-3} \approx 0.0498$   
 (c)  $e^{\frac{1}{2}} \approx 1.6487$

**تطبيق إثرائي (الطب)**

فترة نصف العمر لمادة مشعة هو الوقت الذي تستغرقه المادة في تنازول أو تحلل نصفها. نفرض أن إحدى المستشفيات تحضر 100 mg مزودة بتكنيشيوم (Tc - 99 m)، حيث فترة نصف عمره 6 ساعات.



- ضع جدولاً يوضح كمية التكنيشيوم (Tc - 99 m) المتبقية في نهاية كل فترة 6 ساعات لمدة 36 ساعة.
- اكتب معادلة لوصف الدالة الأسية.
- استخدم الدالة لإيجاد كمية التكنيشيوم (Tc - 99 m) المتبقية بعد 75 ساعة.

الحل:

- كمية التكنيشيوم (Tc - 99 m) تقل بمقدار النصف كل 6 ساعات.

عدد مرات نصف العمر (6 h)	عدد الساعات المستغرق	تكنيشيوم (Tc - 99 m) الكمية الحالية (mg)
0	0	100
1	6	50
2	12	25
3	18	12.5
4	24	6.25
5	30	3.125
6	36	1.5625

- الكمية الابتدائية للتكنيشيوم (Tc - 99 m) هي 100 mg عامل التنازول هو  $b = \frac{1}{2}$ ، نصف العمر 6 h

افرض أن:  $y$  تمثل كمية التكنيشيوم (Tc - 99 m) ( $x$ ) عدد الساعات المستغرق ،  $\left(\frac{1}{2}\right)^x$  عدد أنصاف العمر.

اكتب:  $y = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{6}}$

$y = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{6}}$

$y = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{75}{6}}$

$y = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{12.5}$

$\approx 0.01726$

تبلغ كمية التكنيشيوم (Tc - 99 m) المتبقية بعد 75 h حوالي 0.017 mg

**الكيمياء**  
 التكنيشيوم Technetium (Tc - 99 m) هو مادة مشعة. كثيراً ما تستخدم لتشخيص أمراض القلب، والدماغ، والكبد، والكلية.

**أشعة جاما**  
 عندما يتحلل التكنيشيوم (Tc - 99 m) تنبعث طاقة منخفضة من أشعة جاما.



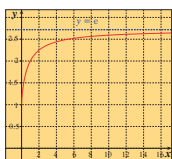
**Symbol e**

**الرمز e**

التشيل البياني أدناه هو جزء من بيان الدالة:  $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ .

عندما يأخذ  $x$  قيماً أكبر فأكثر تقترب قيم  $y$  من 2.718 هذه القيمة تسمى  $e$  وهو عدد غير نسبي ويساوي تقريباً 2.71828 تستخدم الدوال الأسية التي أساسها  $e$  لوصف النمو (التزايد) أو التنازول (التناقص) المستمر. وفي آتاك الحاسبة يوجد مفتاح  $e^x$  أو  $e^{-x}$  أو  $e^{\frac{1}{x}}$ .

x	f(x)
2	2.25
4	2.4414
6	2.5216
8	2.5658
10	2.5937
12	2.613
14	2.6272
16	2.6379



**مثال (5)**

- استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد القيم التالية (مقرناً الناتج إلى أقرب جزء من ألف):

$e^2, e^{-1}, e^{\frac{1}{2}}, e^{\frac{3}{4}}, 4e^{-1.5}$

$y = e^x$

ارسم بيان:

الحل:

$e^2 \approx 7.389$

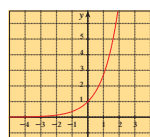
$e^{-1} \approx 0.368$

$e^{\frac{1}{2}} \approx 1.396$

$e^{\frac{3}{4}} \approx 2.117$

$4e^{-1.5} \approx 0.893$

جدول قيم  $y = e^x$



x	-2	-1	0	1	2	3
$y = e^x$	0.135	0.37	1	2.718	7.39	20

**سؤال أن تحل**

- استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قيم كل مما يلي: (قرب إجابتك إلى أقرب جزء من ألف).

(a)  $e^4$

(b)  $e^{-3}$

(c)  $e^{\frac{1}{2}}$

## 3-4: الدوال اللوغاريتمية وتمثيلها بيانياً

### 1 الأهداف

- يستخدم رموز اللوغاريتمات.
- يوجد قيم المقادير اللوغاريتمية.
- يمثل الدوال اللوغاريتمية بيانياً.

### 2 المفردات والمفاهيم الجديدة

مقادير لوغاريتمية - اللوغاريتمات المعتادة - الدوال اللوغاريتمية.

### 3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة بيانية - ورق رسم بياني - جهاز إسقاط (Data Show) - حاسوب.

### 4 التمهيدي

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) ارسم بيان الدالة:  $y = (2)^{-x}$

(b) ارسم بيان الدالة:  $y = e^x$

(c) ارسم بيان الدالة:  $10^x$

(d) أوجد حل المعادلة:  $27 = 9^{x-3}$

(e) أوجد معكوس الدالة:  $y = x^2$

### 5 التدريس

تعرفت بعض الدوال ومثلتها بيانياً، كما أنك أوجدت معكوس هذه الدوال وتمثيلها البياني. وفي هذا الدرس، سوف تتعرف معكوس الدالة الأسية وهي الدالة اللوغاريتمية.

تكمن أهمية هذه الدالة بأنها فتحت آفاقاً واسعة أمام العلماء في تبسيط العمليات على الأعداد، ووفرت لهم فرصاً كبيرة لمعالجة مواقف حياتية.

### في المثال (1)

اطلب إلى الطلاب إجراء مقارنة حول كمية الطاقة المنطلقة من زلزالين مختلفين في القوة بحسب مقياس ريختر.

### الدوال اللوغاريتمية وتمثيلها بيانياً

#### Logarithmic Functions and their Graphs

##### عمل تعارفي

- 1 باستخدام الدالة الأسية  $y = 10^x$ ، أكمل الجدول التالي،
- 2 لكل زيادة وحدة في  $x$ ، صف الزيادة المناظرة في  $y$ .
- 3 صف الزيادة في  $y$  إذا كانت  $x$  تتزايد بمقدار 1.5، بمقدار 0.5.

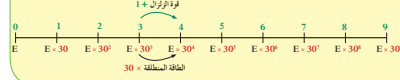
x	0	1	2	3	4	5	6	7
y								

##### كتابة المقادير اللوغاريتمية وحسابها

#### Writing and Calculating Logarithmic Expressions

قوة الزلزال هي قياس كمية الطاقة المنطلقة (E). يقاس مقياس ريختر قوة الزلزال باستخدام الصورة الأسية فمثلاً الزلزال الذي تبلغ قوته 5 درجات بمقياس ريختر طاقته المنطلقة (E) تساوي 30 × الطاقة المنطلقة من الزلزال الذي قوته 4 درجات.

##### مقياس ريختر



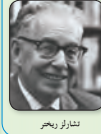
##### مثال (1)

سجل زلزال مكسيكو سنة 1995 بقوة 8.0 درجات على مقياس ريختر. وقد سجل أيضاً زلزال في واشنطن سنة 2011 بقوة 6.8 درجات. كم مرة تكون الطاقة المنطلقة من زلزال مكسيكو أكبر من كمية الطاقة المنطلقة من زلزال واشنطن؟ (إرشاد: استعن بمقياس ريختر)



##### الحل:

- ∴ قوة زلزال مكسيكو 8 درجات.
- ∴ الطاقة المنطلقة من زلزال مكسيكو =  $E \times 30^8$
- ∴ قوة زلزال واشنطن 6.8 درجات.
- ∴ الطاقة المنطلقة من زلزال واشنطن =  $E \times 30^{6.8}$



تشارلز ريختر

138

الطاقة المنطلقة من زلزال مكسيكو  $x \times x$  = الطاقة المنطلقة من زلزال واشنطن.

$$\begin{aligned} (E \times 30^{6.8}) \times x &= E \times 30^8 \\ x &= \frac{E \times 30^8}{E \times 30^{6.8}} \\ x &= \frac{30^8}{30^{6.8}} \\ &= 30^{1.2} \\ &= 59.2 \end{aligned}$$

∴ أطلق زلزال مكسيكو طاقة تساوي 59.2 مرة تقريباً من طاقة زلزال واشنطن.

##### حاول أن تحل

- 1 كم مرة تكون الطاقة المنطلقة من زلزال قوته 7 درجات أكبر من الطاقة المنطلقة من زلزال آخر قوته 4.9 درجات على مقياس ريختر؟

في الصورة الأسية  $y = b^x$ ،  $b$  هو الأساس،  $x$  هو الأس،  $y$  هو الناتج. للحصول على قيمة الأس  $x$  بمعلومية الأساس  $b$  والناتج  $y$  نستخدم ما يعرف بالصورة اللوغاريتمية حيث  $x$  تساوي لوغاريتم العدد  $y$  للأساس  $b$  ويرمز للوغاريتم بالرمز (log) ويكتب على الصورة  $y = \log_b x$ .

##### تدريب

أكمل الجدول التالي:

الصورة الأسية	الصورة اللوغاريتمية
$7^2 = 49$	$\log_7 49 = 2$
$10^3 = 1000$	$\log_{10} \dots = \dots$
$3^5 = 243$	$\log_3 \dots = \dots$
$4^{-1} = \dots$	$\log_4 2 = \frac{1}{2}$
$(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$	$\log_2 \frac{1}{25} = -2$
$\dots$	$\dots$
$12^0 = 1$	$\dots$



139



## في المثال (2)

شدّد للطلاب على فكرة العلاقة التي تربط بين الدالة الأسية ومعكوسها وهي الدالة اللوغاريتمية. اكتب على السبورة  $y = b^x$ . أخبرهم أن  $b$  هي أساس الدالة الأسية وهي قيمة ثابتة، وأن  $x$  هو المتغير. أكدّ لهم أن معكوس هذه الدالة لا يمكن إيجادها بالطرق التي استخدمناها سابقاً أي بحل المعادلة وإيجاد  $x$  بدلالة  $y$ . شجعهم على كتابة عدة مرات ما يلي:  $y = b^x$  معكوسها  $x = \log_b y$ . أعط أمثلة لترسيخ مفهوم هذه العلاقة.

## في المثال (3)

يساعد هذا المثال على فهم كيفية استخدام الدالة اللوغاريتمية في مواقف حياتية، وذلك بتحويل الدالة الأسية وإيجاد معكوسها.

## في المثال (4)

يساهم هذا المثال في إيجاد مجال التعريف بالدالة اللوغاريتمية، ويساعد الطلاب على إيجاد فترة المتغير  $x$  عندما يكون متغير الدالة اللوغاريتمية بدلالة  $x$ ، والمهم هو معرفة الطالب أنه من الواجب دائماً المحافظة على الشرط القائل بأن متغير الدالة اللوغاريتمية يجب أن يكون دائماً قيمة موجبة.

## في المثال (5)

يبين هذا المثال بشكل واضح العلاقة بين منحنى الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية، فيكون معكوس الدالة الأسية هو أيضاً دالة.

## في المثال (6)

يساعد على استخدام دالة المرجع والانسحاب الأفقي والرأسي لرسم دالة لوغاريتمية، ويوضح العلاقة بين  $\log_b x$  و  $\log_b(x-h)+k$ .

## 6 الربط

يوفر المثالان (3)، (1) الربط بين الدوال اللوغاريتمية ومواقف حياتية خاصة في مجالي قياس الزلازل وقياس درجة الحموضة، وكيفية استخدام هذه الدوال وتبسيط الحلول.

**ملاحظة:** تعلم أن:  $1 = 1^1 = 1^2 = 1^3 = 1^4 = \dots = 1^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ )  
وهذا يعني أن:  $\dots = \log_1 1^3 = 3$ ,  $\log_1 1^2 = 2$ ,  $\log_1 1^1 = 1$   
ولذلك  $\log_1$  غير معين لأنه ليس وحيداً.

**تعريف**

$$\forall y \in \mathbb{R}^+ , b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$$

$$y = b^x \iff \log_b y = x$$

يعين عدد حقيقي  $x$  بحيث يكون:

**نذكر:**  
الرمز  $\log$  بقر (نا وقط) (3)

لإيجاد قيمة اللوغاريتمات، يمكنك كتابتها في صورة أسية.

**مثال (2)**

أوجد قيمة  $\log_8 16$ .

الحل:

افرض أن

$$\log_8 16 = x$$

$$16 = 8^x$$

$$2^4 = 2^{3x}$$

$$4 = 3x$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \log_8 16 = \frac{4}{3}$$

**حاول أن تحل**

أوجد قيمة كل لوغاريتم مما يلي:

a  $\log_{10} 100$

b  $\log_9 27$

c  $\log_{64} \frac{1}{32}$

**ملاحظة:**

$\log x$  هو اللوغاريتم المعتاد ذو الأساس 10 أي:  $\log_{10} x$  تكتب  $\log x$   
فمثلاً:  $\log 4 = \log_{10} 4$

**مثال (3)**

الترابط



يستخدم العلماء اللوغاريتمات لقياس الحموضة pH. وهي تزايد مع تزايد تركيز أيون الهيدروجين  $[H^+]$  في المادة. pH لمادة يساوي  $(-\log[H^+])$ .

يلعب pH عصير الليمون 2.3، في حين يلبس pH الحليب 6.6

أوجد تركيز أيونات الهيدروجين بالصورة العلمية في كل مادة أي مادة هي الأكثر حموضة؟

140

تمرن  
4-3

الدوال اللوغاريتمية وتمثيلها بيانياً

Logarithmic Functions and their Graphs

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1-8)، اكتب كل معادلة مما يلي في الصورة اللوغاريتمية:

(1)  $4^2 = 16$

(2)  $7^3 = 343$

(3)  $(\frac{1}{2})^2 = 4$

(4)  $8^{\frac{3}{5}} = \frac{1}{4}$

(5)  $(\frac{1}{3})^3 = \frac{1}{27}$

(6)  $10^{-2} = 0.01$

(7)  $6^{\frac{3}{2}} = 6\sqrt{6}$

(8)  $5^{-3} = \frac{1}{125}$

في التمارين (9-14)، اكتب كل معادلة مما يلي في الصورة الأسية:

(9)  $\log_2 128 = 7$

(10)  $\log_4 64 = 3$

(11)  $\log 100 = 2$

(12)  $\log_3 \frac{1}{9} = -2$

(13)  $\log 0.0001 = -4$

(14)  $\log_5 \frac{1}{243} = -5$

في التمارين (15-20)، أوجد قيمة كل لوغاريتم مما يلي:

(15)  $\log_2 4$

(16)  $\log_2 8$

(17)  $\log_8 8$

(18)  $\log_2 2^5$

(19)  $\log_2 \frac{1}{2}$

(20)  $\log 0.01$

في التمارين (21-23)، أوجد مجال التعريف لكل دالة مما يلي:

(21)  $y = \log_6(x+1)$

(22)  $y = \log_8(x)-2$

(23)  $y = \log(x^2-4)$

(24) يساوي تركيز أيون الهيدروجين  $[H^+]$  في الليم (نوع من الليمون) حوالي  $1.26 \times 10^{-2}$

أوجد رقمه الهيدروجيني (pH) علماً أن  $pH = -\log[H^+]$ .

(25) يساوي الرقم الهيدروجيني لعصير خل التفاح (Cider Vinegar) حوالي 3.1

أوجد تركيز أيونه الهيدروجيني  $[H^+]$ .

(26) الزلازل: كانت قوة زلزال ألاسكا عام 1964، 9.2 بمقياس ريختر، وكانت قوته أكبر من قوة زلزال سان

فرانسيسكو عام 1906 بحوالي 150 مرة. قدر قوة زلزال عام 1906 إذا ما قيس بمقياس ريختر علماً بأن

الطاقة المنطلقة من الزلزال تساوي  $E \times (30)^x$ ،  $x$  هي درجة قوة الزلزال بمقياس ريختر.

## 7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في تحويل الدالة  $y = b^x$  إلى دالة لوغاريتمية. ساعدهم ، من خلال عدة أمثلة مشابهة للمثال (2)، على كتابة  $y = b^x$  أو  $\log_b y = x$  بعد تبديل المتغيرات.

## 8 التقييم

تابع باهتمام أعمال الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لتدرك مدى قدرة الطلاب على الربط بين الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية.

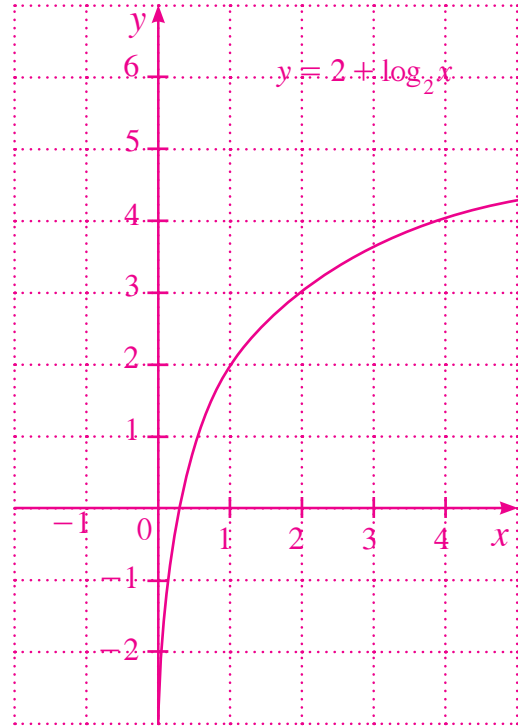
## اختبار سريع

1 اكتب:  $5^{-2} = \frac{1}{25}$  في الصورة اللوغاريتمية.

$$\log_5 \left( \frac{1}{25} \right) = -2$$

2 اكتب  $\log_3 81 = 4$  في الصورة الأسية.  $3^4 = 81$

3 مثل بيانيًا الدالة:  $y = 2 + \log_2 x$



**معلومة:**  
شراب القيقب أو الألفند (Maple Syrup) هو شراب مصنوع من نبع (عصاره) أشجار القيقب السكري التي تنبت بكثرة في كندا لذا فوظيفها موجودة على العلم الكندي. تعزق الأشجار خلال الربو الشتا في جذوعها وجذورها الذي ما يلتصق أن يتحول بعد ذلك إلى سكر يرتفع في السع في الربع قديم قصب فتحات في جذوعها لجمع السع الناضج الذي تم معالجته وتصنيعه بالتسخين لإنتاج شراب مركز ذي لون ذهبي فوالده كثير، ويستخدم أحياناً كالمشابهة الأصلون أول من قاموا بجمع هذا الشراب واستخدامه.



شجرة القيقب



شراب القيقب

**الحل:**

تركيز أيونات الهيدروجين في عصير الليمون  
 $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$   
 $2.3 = -\log[\text{H}^+]$   
 $\log[\text{H}^+] = -2.3$   
 $[\text{H}^+] = 10^{-2.3}$   
 باستخدام الآلة الحاسبة  
 $\approx 5 \times 10^{-3}$

$$5 \times 10^{-3} > 2.5 \times 10^{-7}$$

∴ تركيز أيونات الهيدروجين في العصير أكثر منه في الحليب.  
 ∴ عصير الليمون أكثر حموضة.

حاول أن تحل

3 أوجد تركيز أيونات الهيدروجين بالصورة العلمية لشراب القيقب (Maple Syrup)، حيث  $\text{pH} = 5.2$ .

**التصنيف البياني للدوال اللوغاريتمية Graphing Logarithmic Functions**  
 الدوال اللوغاريتمية هي معكوسات الدوال الأسية.

**تعريف:** الدالة اللوغاريتمية

$$\forall x > 0, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$$

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_b x$$

فإن الدالة:  
 تسمى دالة لوغاريتمية أساسها  $b$

**مثال (4)**

أوجد مجال تعريف كل من الدوال التالية:

- a  $y = \log_3(6x)$       b  $f(x) = \log(3-x)$   
 c  $g(x) = \log_2(x^2)$       d  $h(x) = 4 \log_2(5-3x)$

**الحل:**

- a ∴  $6x > 0 \Rightarrow x > 0$       ∴ مجال الدالة =  $(0, +\infty)$   
 b ∴  $3-x > 0 \Rightarrow x < 3$       ∴ مجال الدالة =  $(-\infty, 3)$

في التمرين (27-28)، مثل بيانيًا كل دالة لوغاريتمية معيّنًا المجال والمدى.

(27)  $y = \log_3(x)$

(28)  $y = \log_3(x-1) + 2$

(29) اشرح لماذا لا تستطيع أن تأخذ قيمة 1 في الدالة  $y = \log_b(x)$

### المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

- (1) إذا كانت  $y = 3^x$  فإن  $x = \log y$       a       b   
 (2) إذا كانت  $x = \log_2(-y)$  فإن  $2^x = y$       a       b   
 (3) إذا كانت  $4^x = 5$  فإن  $2x = \log_2 5$       a       b   
 (4) مجال الدالة  $f(x) = \log(x^2)$  هو  $\mathbb{R}$       a       b   
 (5) بيان الدالة  $y = \log_3 x$  هو انعكاس في المستقيم  $y - x = 0$  لبيان الدالة  $y = 3^x$       a       b

في التمارين (6-11)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

- (6) معكوس الدالة  $y = \log_2 x$  هو:      a   $y = \log_2 2$       b   $y = x^2$       c   $y = 2^x$       d   $y = \log 2^x$   
 (7) مجال الدالة  $y = \log|x-1|$  هو:      a   $\mathbb{R}$       b   $\mathbb{R}^+$       c   $(1, \infty)$       d   $\mathbb{R}/\{1\}$   
 (8) مجال الدالة  $y = \log(x^2 + 1)$  هو:      a   $\mathbb{R}$       b   $\mathbb{R}^+$       c   $[1, \infty)$       d   $(1, \infty)$   
 (9) باستخدام دالة المرجع  $y = \log_3 x$  يمكن تمثيل الدالة:      a   $y = \log(x-1) - 1$       b   $y = \log_3(5x)$       c   $y = \log_6(x-1) - 1$       d   $y = \log_3(x^2 + 1)$

(10) يمكن رسم بيان الدالة  $y = \log(x+1) - 2$  معتبرًا دالة المرجع  $y = \log x$  بانسحاب:

- a  وحدة إلى اليسار ووحدة لأسفل      b  وحدة إلى اليمين ووحدة لأسفل  
 c  وحدتين إلى اليمين ووحدة لأعلى      d  وحدتين إلى اليسار ووحدة لأعلى

(11) يعطى الرقم الهيدروجيني (pH) بالعلاقة:  $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$  إذا كان تركيز أيون الهيدروجيني  $[\text{H}^+]$  في السبائك هو  $4 \times 10^{-6}$  فإن الرقم الهيدروجيني للسبائك هو:

- a  -6.6      b  6.6      c  -5.4      d  5.4

## 9 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

1 - 3 تحقق من إجابات الطلاب.

«حاول أن تحل»

$$\frac{E \times 30^7}{E \times 30^{4.9}} = 30^{2.1} = 1265 \quad 1$$

أي أن طاقة الزلزال 7 درجات تساوي تقريباً 1265 مرة طاقة الزلزال 4.9 درجات.

2 (a)  $\log_{10} 10^2 = x$  ;

$$10^x = 10^2 ; x = 2$$

(b)  $9^x = 27 ; 3^{2x} = 3^3$  ;

$$x = \frac{3}{2}$$

(c)  $64^x = \frac{1}{32}$

$$2^{6x} = 2^{-5}$$

$$6x = -5$$

$$x = -\frac{5}{6}$$

3  $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$

$$5.2 = -\log[\text{H}^+]$$

$$\log[\text{H}^+] = -5.2$$

$$\text{H}^+ = 10^{-5.2}$$

$$\text{H}^+ \approx 6.31 \times 10^{-6}$$

4 (a)  $x - 2 > 0$  ;  $x \in (2, \infty)$

(b)  $x^2 + 1 > 0$  ;  $x \in (-\infty, \infty)$

(c)  $1 - x > 0$  ;  $x \in (-\infty, 1)$

c  $\because x^2 > 0 \Rightarrow |x| > 0$   
 $\therefore x > 0$  أو  $x < 0$

∴ مجال الدالة  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$   
 $\mathbb{R} - \{0\}$  أو

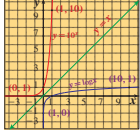
d  $\because 5 - 3x > 0 \Rightarrow -3x > -5 \Rightarrow x < \frac{5}{3}$

∴ مجال الدالة  $(-\infty, \frac{5}{3})$

حاول أن تحل

4 أوجد مجال تعريف كل من الدوال التالية:

a  $y = 2 + \log_2(x-2)$  b  $f(x) = \log_4(x^2 + 1)$  c  $g(x) = \log_5(1-x)$



الشكل المقابل يبين التمثيل البياني للدالتين:

$$y = 10^x \text{ و } y = \log x$$

لاحظ النقطتين (1, 10) و (0, 1) تنتمي إلى بيان  $y = 10^x$

بينما (10, 1) و (1, 0) تنتمي إلى بيان  $y = \log x$

كل من المنحنيين المرسومين انعكاس للآخر في الخط المستقيم

$$y = x$$

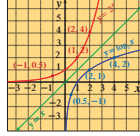
لاحظ أن كلًا من الدالتين معكوس للآخرى.

مثال (5)

استخدم خواص الانعكاس لرسم بيان الدالة:  $y = \log_2 x$  ومعكوسها.

الحل:

الدالة  $y = \log_2 x$  هي معكوس الدالة  $y = 2^x$



x	-1	0	1	2
y = 2^x	0.5	1	2	4

الخطوة 1:

كون الجدول

ارسم بيان الدالة  $y = 2^x$

الخطوة 2:

ارسم المستقيم  $y = x$

الخطوة 3:

انعكس إحداثيات النقاط المختارة في الجدول السابق

وارسم بيان الدالة  $y = \log_2 x$

x	0.5	1	2	4
y = log base 2 of x	-1	0	1	2

142

في البنود (15-12)، لديك قائمتان اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.

القائمة (2)	القائمة (1)
a $y = 4^x$	معكوس الدالة:
b $y = (\frac{1}{4})^x$	هو $y = -\log_{\frac{1}{4}} x$ (12)
c $y = (\frac{1}{4})^x$	هو $y = -\log_4 x$ (13)
d $y = (-4)^{-x}$	

القائمة (2)	القائمة (1)
a	بيان معكوس كل دالة مما يلي هو: $y = \log_3(x)$ (14)
b	$y = \log_2(4x)$ (15)
c	

61

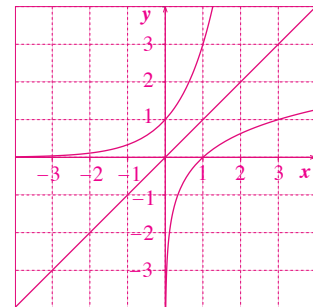
الصورة اللوغاريتمية	الصورة الأسية
$\log_7 49 = 2$	$7^2 = 49$
$\log_{10} 1000 = 3$	$10^3 = 1000$
$\log_3 243 = 5$	$3^5 = 243$
$\log_4 2 = \frac{1}{2}$	$4^{\frac{1}{2}} = 2$
$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$
$\log_{12} 1 = 0$	$12^0 = 1$

5 نرسم بيان الدالة:  $y = \log_3 x$

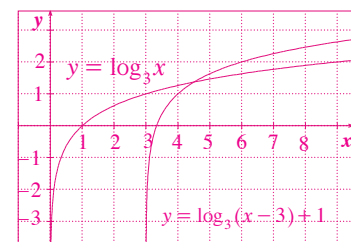
$x$	1	3	9
$y$	0	1	2

ثم نرسم بيان الدالة  $y = 3^x$  باستخدام نقاط الجدول التالي:

$x$	0	1	2
$y$	1	3	9



6  $y = \log_3(x-3) + 1$  هو إزاحة لمنحنى الدالة:  $y = \log_3 x$ ، 3 وحدات إلى اليمين ووحدة واحدة إلى الأعلى.



حارون أن تحل

5 استخدم خواص الانعكاس لرسم بيان الدالة:  $y = \log_3 x$  ومعاكسها.

**انسحاب الدوال اللوغاريتمية**  
**Translating Logarithmic Functions**  
 يمكنك تمثيل العديد من الدوال اللوغاريتمية على أنها انسحاب لدالة المرجع:  $y = \log_e x$   
 التمثيل البياني للدالة:  $k$ ;  $y = \log_e(x-h) + k$  هو انسحاب لبيان دالة المرجع:  $y = \log_e x$ ،  $h$  وحدة أفقياً،  $k$  وحدة رأسياً.

مثال (6)

$x$	$\log_e x$	$y$
6	$\log_e 6 = 1$	1
1	$\log_e 1 = 0$	0
$\frac{1}{6}$	$\log_e \frac{1}{6} = -1$	-1
$\frac{1}{36}$	$\log_e \frac{1}{36} = -2$	-2

ارسم بيان الدالة:  $y = \log_e(x+2) - 3$  مستخدماً دالة المرجع.  
 الحل:  
 الخطوة 1:  
 دالة المرجع هي:  $y = \log_e x$   
 اصنع جدول قيم دالة المرجع:  $y = \log_e x$   
 الخطوة 2:  
 للحصول على بيان الدالة:  $y = \log_e(x+2) - 3$   
 نستخدم بيان دالة المرجع  $y = \log_e x$  كالآتي:  
 ∴  $h = -2$  (سالية)  
 ∴ انسحاب أفقي جهة اليسار بمقدار وحدتين.  
 ∴  $k = -3$  (سالية)  
 ∴ انسحاب رأسي للأسفل بمقدار 3 وحدات.

حارون أن تحل

6 ارسم بيان الدالة:  $y = \log_3(x-3) + 1$  مستخدماً دالة المرجع.

## 4-4: خواص اللوغاريتمات

### 1 الأهداف

- يتعرف خواص اللوغاريتمات.
- يختصر المقادير اللوغاريتمية ويفكها.
- يطبق خواص اللوغاريتمات.

### 2 المفردات والمفاهيم الجديدة

- خاصية الضرب - خاصية القسمة - خاصية القوى - شدة الصوت - مستوى شدة الصوت.

### 3 الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية - ورق رسم بياني - جهاز إسقاط (Data Show) - حاسوب.

### 4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

- (a) أوجد قيمة:  $\frac{4^x}{4^y}$  ,  $(3x)(3y)$
- (b) ارسم على مستوى إحداثي واحد الدالتين:  $y = 10^x$  ,  $y = \log x$  ماذا تلاحظ؟
- (c) هل يمكن تبسيط المقدار  $4^x \times 5^x$ ؟ اشرح.
- (d) هل يمكن تبسيط المقدار  $\frac{7^x}{9^y}$ ؟ اشرح.

### 5 التدريس

تابع الطلاب بدقة وهم ينفذون فقرة «عمل تعاوني» باستخدام الآلة الحاسبة. أرشدهم إلى كيفية استخدام المفاتيح وبخاصة أن الآلة الحاسبة تحمل فقط مفتاحين لقيم اللوغاريتم: واحد يوجد عليه **log** فقط وهذا يعني اللوغاريتم المعتاد حيث الأساس 10 ويقابله الرمز  $\log$  فقط، والثاني يوجد عليه **ln** وهذا يعني اللوغاريتم الطبيعي وأساسه العدد  $e$  ويقابله الرمز  $\ln$  وهذا اللوغاريتم سوف نتعرف إليه لاحقاً.

وضّح للطلاب كيفية استخدام الخواص اللوغاريتمية لما لها من أهمية في التحويلات بين الأعداد. أعط أمثلة متعددة تتناول خاصية الضرب وخاصية القسمة وخاصية القوى، مشابهة للأمثلة (1), (2), (3).

### خواص اللوغاريتمات

#### Properties of Logarithms

#### عمل تعاوني

- 1 أكمل الجدول التالي باستخدام الآلة الحاسبة. قُرب إجابتك إلى أقرب جزء من الألف.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
$\log x$												

- 2 استخدم جدولك في تكملة كل زوج من الجمل التالية. ماذا تلاحظ؟
- a  $\log 3 + \log 5 = \dots$   $\log(3 \times 5) = \dots$
- b  $\log 1 + \log 6 = \dots$   $\log(1 \times 6) = \dots$
- c  $\log 10 + \log 2 = \dots$   $\log(10 \times 2) = \dots$

- 3 عمّم: أكمل الجملة التالية.
- 4 تفكير ناقد: وضع كيف يمكنك كتابة المقدار  $\log \frac{m}{n}$  باستخدام المقادير  $\log m$  ,  $\log n$

- 5 استخدم أنك الحاسبة لتحقيق ما كتبه مستخدماً قياً مختلفة لكل من  $m$  ,  $n$  مثل بياناً كل زوج من الدوال التالية في نفس المستوى الإحداثي (يفضل استخدام الآلة الحاسبة البيانية). ماذا تلاحظ؟

- a  $y = \log x^3$  ,  $y = 3 \log x$
- b  $y = \log x^{-1}$  ,  $y = (-1) \log x$

- 6 استخدم تمثيلاتك البيانية لمساعدتك في تكملة الجملة  $\log m^k = \dots$
- 7 وضع كيف يمكنك استخدام هذه النتيجة لإيجاد قيمة  $\log 1000$

#### Properties of Logarithms

#### خواص اللوغاريتمات

تم تلخيص خواص اللوغاريتمات بما يلي:

#### خواص اللوغاريتمات

$$\forall m, n, b \in \mathbb{R}^+, b \neq 1$$

$$\log_b m n = \log_b m + \log_b n$$

خاصية الضرب

$$\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$$

خاصية القسمة

$$\log_b m^k = k \log_b m, k \in \mathbb{R}$$

خاصية القوى

#### 4-4

سوف تتعلم:  
• خواص اللوغاريتمات.  
• اعتبار المقادير اللوغاريتمية ويفكها.  
• تطبق خواص اللوغاريتمات.

#### المفردات والمصطلحات:

خاصية الضرب  
Multiplication Property  
خاصية القسمة  
Division Property  
خاصية القوى  
Power Property  
شدة الصوت  
Sound Intensity  
مستوى شدة الصوت  
Level of Sound Intensity

#### الربط بالكون لوجيا:

تسمح الآلات الحاسبة البيانية برسم بيانات الدوال لعنظف العظرات المعجم من حاسبة إلى أخرى لكن معطياتها تتنظ كثيرا هذه العملية:  
a اصطح على رمز بيان الدالة GRAPH.  
b اكتب معادلة الدالة.  
c اصطح على EXE، يظهر بيان الدالة على الشاشة.



#### التنبؤ:

$\log_b (m+n) \neq \log_b m + \log_b n$   
إلا في حالات خاصة ونادرة حيث  $m+n = m \times n$

144

تمرّن  
4-4

### خواص اللوغاريتمات

#### Properties of Logarithms

#### المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1-8)، اكتب كل مقدار لوغاريتمي في صورة لوغاريتم واحد.

- (1)  $\log 7 + \log 2$
- (2)  $\frac{1}{2} \log_4 y - \log_4 x$ , ( $x > 0$ ,  $y > 0$ )
- (3)  $4 \log M - \log N$ , ( $M > 0$ ,  $N > 0$ )
- (4)  $\log x + \log y + \log z$ , ( $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $z > 0$ )
- (5)  $\log \frac{a}{4} + \log \frac{b}{3} - \log \frac{c}{2}$ , ( $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$ )
- (6)  $\log a + 3 \log b$ , ( $a > 0$ ,  $b > 0$ )
- (7)  $\frac{1}{2} (\log_2 x + \log_2 y) - 3 \log_2 a$ , ( $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $a > 0$ )
- (8)  $7 \log r - \log x + \log n$ , ( $r > 0$ ,  $x > 0$ ,  $n > 0$ )

في التمارين (9-16)، أوجد متفكوك كل لوغاريتم مما يلي:

- (9)  $\log_5 \frac{y}{x}$ , ( $x > 0$ ,  $y > 0$ )
- (10)  $\log x^3 + y^5$ , ( $x > 0$ ,  $y > 0$ )
- (11)  $\log_3 7(2x-3)^2$ , ( $x > \frac{3}{2}$ )
- (12)  $\log \frac{a^2 b^3}{c^4}$ , ( $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$ )
- (13)  $\log 3M^4 N^2$ , ( $M > 0$ ,  $N > 0$ )
- (14)  $\log_5 5\sqrt{x}$ , ( $x > 0$ )
- (15)  $\log(2(x+1))^3$ , ( $x > -1$ )
- (16)  $\log \sqrt{\frac{2x}{3y}}$ , ( $x > 0$ ,  $y > 0$ )

(17) السؤال المفتوح: استخدم خواص اللوغاريتمات لإعادة كتابة  $\log 64$  بأربع طرائق مختلفة.

(18) الكتابة: اشرح لماذا  $\log 5 \times \log 2 \neq \log(5 \times 2)$

في التمارين (19-23)، استخدم خواص اللوغاريتمات لإيجاد قيمة كل مقدار.

- (19)  $\log_2 4 - \log_2 16$
- (20)  $\log_5 5 - \log_5 125$
- (21)  $3 \log_2 2 - \log_2 4$
- (22)  $\log 1 + \log 100$
- (23)  $\log 5 + \log 8 - 2 \log 2$

62

## في المثال (4)

اعرض أمام الطلاب عددًا من الحالات تساهم في فهم أهمية اللوغاريتم عند حساب شدة الصوت أو كيفية تخفيضه إلى مستويات معينة.

اطلب إليهم دراسة شدة الصوت في مواقف حياتية مستخدمًا اللوغاريتمات.

## 6 الربط

يمكن الاستفادة من المثال (4) للربط بين شدة الصوت في أماكن معينة واللوغاريتمات.

$$\begin{aligned} \text{c} \quad \log \sqrt{\frac{25}{x}} &= \log \left( \frac{25}{x} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{25}{x} && \text{خاصية القوى} \\ &= \frac{1}{2} (\log 25 - \log x) && \text{خاصية القسمة} \\ &= \frac{1}{2} (\log 5^2 - \log x) \\ &= \frac{1}{2} (2 \log 5 - \log x) && \text{خاصية القوى} \\ &= \log 5 - \frac{1}{2} \log x \end{aligned}$$

حاول أن تحل

2 أوجد مفكوك كل لوغاريتم مما يلي حيث  $a, b, c$  أعداد حقيقية موجبة.

a  $\log_2(7b)$       b  $\log\left(\frac{c}{3}\right)^2$       c  $\log_7(a^3b^4)$

ملاحظات:

1  $\log_a 1 = 0$       2  $\log_a b = 1$       3  $\log_a b^m = m$

حيث  $b, m$  عدنان حقيقيان موجبان  $b \neq 1$

تذكر:

$$\log 3 = \log_{10} 3$$

مثال (3)

إذا كان  $\log 2 \approx 0.301$ ،  $\log 3 \approx 0.477$ ،  $\log 5 \approx 0.699$  استخدم خواص اللوغاريتمات لإيجاد قيمة كل مما يلي دون استخدام الآلة الحاسبة. (قرب إجابتك إلى أقرب جزء من ألف).

a  $\log 20$       b  $\log 0.5$   
c  $\log \frac{8}{3}$       d  $\log 600$

الحل:

a  $\log 20 = \log(4 \times 5)$   
 $= \log 4 + \log 5$       خاصية الضرب  
 $= \log 2^2 + \log 5$   
 $= 2 \log 2 + \log 5$       خاصية القوى  
 $\approx 2(0.301) + 0.699$   
 $\approx 1.301$

146

في التمارين (24–28)، لنفرض أن  $\log 4 \approx 0.6021$ ،  $\log 5 \approx 0.6990$ ،  $\log 6 \approx 0.7782$  استخدم خواص اللوغاريتمات لإيجاد قيمة كل مقدار. دون استخدام الآلة الحاسبة قرب إجابتك إلى أقرب جزء من ألف.

(24)  $\log 20$       (25)  $\log 16$       (26)  $\log 1.25$   
(27)  $\log 125$       (28)  $\log \frac{1}{36}$

(29) العلوم: يستطيع الإنسان سماع مدى واسع من شدة الصوت، وهذا ما يوضحه الجدول التالي. شدة الصوت هي قياس كمية الطاقة الناتجة عن مصدر الصوت، ويعتمد مستوى شدة الصوت على شدة الصوت، وعلى المسافة بين مصدر الصوت والشخص الذي يسمعه. ويعرف مستوى شدة الصوت المقاس بالديسيبل (dB) بالمعادلة التالية. مستوى شدة الصوت  $I_0$ ، حيث  $I_0$  شدة الصوت بالكاد مسموع.

أكمل الجدول التالي:

نوع الصوت	الشدة $W/m^2$	مستوى شدة الصوت (ديسيبل dB)
صوت عالٍ	1	120
صوت آلة نغف	$10^{-2}$	
صوت شارع مزدحم	$10^{-5}$	
صوت محادثة	$10^{-6}$	
صوت همس	$10^{-10}$	
خفيف أوراق الأشجار	$10^{-11}$	
صوت بالكاد مسموع	$10^{-12}$	0

### المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

- (1)  $\log(x-1)^2 = 2 \log|x-1|$       (a)      (b)  
(2)  $\log \frac{1}{x^2} = -2 \log x, x > 0$       (a)      (b)  
(3)  $\log\left(\frac{\sqrt{m}}{n}\right) = \frac{1}{2} \log m - \log n, m > 0, n > 0$       (a)      (b)  
(4)  $\log_2 16 - \log_2 2 = \log_2 8$       (a)      (b)  
(5)  $\log(x-y) = \frac{\log x}{\log y}, x, y \in \mathbb{R}^+ / \{1\}$       (a)      (b)  
(6)  $\log_6 4 + \log_6 9 = 2$       (a)      (b)

63

يمكنك كتابة مجموع أو فرق اللوغاريتمات (التي لها الأساسات نفسها) بشكل لوغاريتم واحد.

مثال (1)

أعد كتابة كل مقدار لوغاريتمي مما يلي بصورة لوغاريتم واحد:

a  $\log_2 8 - \log_2 4$       b  $3 \log_6 x + \log_6 y$       c  $3 \log_2 2 + \log_2 4 - \log_2 16$

الحل:

a  $\log_2 8 - \log_2 4 = \log_2 \frac{8}{4} = \log_2 2$       خاصية القسمة  
b  $3 \log_6 x + \log_6 y = \log_6 x^3 + \log_6 y$       خاصية القوى  
 $= \log_6(x^3 y)$       خاصية الضرب  
c  $3 \log_2 2 + \log_2 4 - \log_2 16 = \log_2 2^3 + \log_2 2^2 - \log_2 2^4$       خاصية القوى  
 $= \log_2(2^3 \times 2^2) - \log_2 2^4$       خاصية الضرب  
 $= \log_2 \frac{2^3 \times 2^2}{2^4}$       خاصية القسمة  
 $= \log_2 2$

حاول أن تحل

1 أعد كتابة كل مقدار لوغاريتمي مما يلي بصورة لوغاريتم واحد.

a  $\log_2 2 + \log_2 6$       b  $3 \log_2 4 - 3 \log_2 2$       c  $4 \log_2 2 - \log_2 5 + \log_2 10$

2 تفكير ناقذ: هل يمكنك كتابة  $3 \log_2 9 - \log_2 9$  بشكل لوغاريتم واحد؟

اشرح.

يمكنك أحيانًا كتابة لوغاريتم واحد كمجموع أو فرق بين لوغاريتمين أو أكثر.

مثال (2)

أوجد مفكوك كل لوغاريتم مما يلي حيث  $x, y$  عدنان حقيقيان موجبان.

a  $\log_2 \frac{x}{y}$       b  $\log(3x^4)$       c  $\log \sqrt{\frac{25}{x}}$

الحل:

a  $\log_2 \frac{x}{y} = \log_2 x - \log_2 y$       خاصية القسمة  
b  $\log(3x^4) = \log 3 + \log x^4$       خاصية الضرب  
 $= \log 3 + 4 \log x$       خاصية القوى

145

## 7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في العلاقة بين  $\log_3(xy)$ ,  $\log_3y$ ,  $\log_3x$  فيكتبون على سبيل المثال:

$$\log_3(x+y) = \log_3x \cdot \log_3y$$

$$\log_3(x \cdot y) = \log_3x \cdot \log_3y$$

أكد لهم أن اللوغاريتم له خاصية التحويل من الضرب إلى الجمع كالتالي:  $\log_3(xy) = \log_3x + \log_3y$

## 8 التقييم

تابع الطلاب وهم يحلون فقرات «حاول أن تحل» لتقف على إمكانياتهم في فهم عمليات التحويل المستخدمة في خاصيات الضرب والقسمة والقوى.

## اختبار سريع

1 أعد كتابة كل تعبير مما يلي:

(a)  $\log x + \log y$        $\log(xy)$

(b)  $2 \log_3x - \log_3x$        $\log_3x$

(c)  $\log 3 + \log 4$        $\log 12$

2 أوجد قيمة التعبير:  $2 \log_2 8 - \log_2 2$

b  $\log 0.5 = \log \frac{1}{2}$   
 $= \log(2)^{-1}$   
 $= -\log 2$   
 $\approx -0.301$       خاصية القوى

c  $\log \frac{8}{3} = \log 8 - \log 3$   
 $= \log 2^3 - \log 3$   
 $= 3 \log 2 - \log 3$   
 $\approx 3(0.301) - 0.477 \approx 0.426$       خاصية القسمة

d  $\log 600 = \log(2^3 \times 3 \times 5^2)$   
 $= \log 2^3 + \log 3 + \log 5^2$   
 $= 3 \log 2 + \log 3 + 2 \log 5$   
 $\approx 3 \times 0.301 + 0.477 + 2 \times 0.699 \approx 2.778$       خاصية الضرب

حاول أن تحل

3 باستخدام المعطيات في مثال (3) أوجد:

a  $\log 30$       b  $\log 4.5$   
c  $\log \frac{1}{25}$       d  $\log 1200$

تطبيقات على خواص اللوغاريتمات:

شدة الصوت هو قياس الطاقة المحولة بالموجة الصوتية. والصوت ذو الشدة الكبيرة هو الصوت الذي يبدو عاليًا جدًا. تستخدم اللوغاريتمات لقياس مستوى شدة الصوت Sound Intensity Level. شدة الصوت هي كثافة طاقة الصوت على مساحة معينة وتحسب بقسمة طاقة الصوت على المساحة. يعطى مستوى شدة الصوت بالعلاقة:

$$L = 10 \times \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

حيث:  $L$  تمثل مستوى شدة الصوت وتقاس بوحدة الديسيبل (dB)

$I$  تمثل شدة الصوت وتقاس بالوات/متر مربع ( $w/m^2$ )

$I_0$  أقل صوت تستطيع أذن إنسان عادية أن تميزه (عتبة السمع) وتمثل عددًا ثابتًا يساوي  $10^{-12}$

في التمارين (7-13)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(7) المقدار  $2 \log_4 8 + \log_4 125$  يساوي:

- (a) 4      (b) 5      (c) 6      (d) 15

(8) إذا كان  $\log 3 = x$ ,  $\log 5 = y$  فإن  $\log 45$  تساوي:

- (a)  $x+y$       (b)  $2x+y$       (c)  $2y+x$       (d)  $x^2y$

(9)  $\log_2 x + \log_2 2x + \log \frac{1}{x^2}$ ,  $x > 0$  يساوي:

- (a) 1      (b) 2      (c)  $x$       (d)  $2x$

(10) إذا كان  $\log 2 = m$ ,  $\log 3 = n$  فإن المقدار  $m+n-1$  يساوي:

- (a)  $\log 0.06$       (b)  $\log 0.6$       (c)  $\log 6$       (d)  $\log 60$

(11) عندما  $m=3$ ,  $n=2$  فإن المقدار الأكبر قيمة فيما يلي هو:

- (a)  $\log n^2 - \log m^3$       (b)  $\log m^2 - \log n^2$       (c)  $3 \log n - 2 \log m$       (d)  $2 \log m - 3 \log n$

(12) مفكوك المقدار  $\log\left(\frac{8}{x^3}\right)$  هو:

- (a)  $3 \log \frac{8}{x^3}$       (b)  $\frac{1}{3}(\log(8-x^3))$       (c)  $\log 2 - \log x$       (d)  $\log 2 - 3 \log x$

(13) إذا كان مستوى شدة صوت صفارة إنذار (L) تساوي 140 dB والتي تقاس بالعلاقة:  $L = 10 \log \frac{1}{10^{-12}}$  فإن شدة صوتها I تساوي:

- (a) 1      (b) 1000      (c) 10      (d) 100

في التمرينين (14-15)، لبدك فائمتان اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.

استخدم العلاقة:  $L = 10 \log \frac{1}{10^{-12}}$  والشكل المقابل.



القائمة (1)	القائمة (2)
إذا كانت شدة صوت ما (I) هي:	(a) هادئة
(14) $10^{-5}$ فإن قوته تكون:	(b) مؤلمة
(15) $1.65 \times 10^{-3}$ فإن قوته تكون:	(c) عالية
	(d) عالية جدًا

## 9 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

7 - 1 تحقق من إجابات الطلاب، وتأكد من حسن استخدامهم لمفتاح اللوغاريتم الاعتيادي على الآلة

الحاسبة  $\log$

«حاول أن تحل»

- 1 (a) (1)  $\log_5 12$   
 (2)  $\log_b 2^3 = \log_b 8$   
 (3)  $5 \log_3 2 = \log_3 32$   
 (b) لا. لأن الأساس مختلف حيث  $2 \neq 6$

- 2 (a)  $\log_2 7 + \log_2 b$   
 (b)  $2 \log_c - 2 \log 3$   
 (c)  $3 \log_7 a + 4 \log_7 b$   
 3 (a)  $\log 30 = \log 5 + \log 2 + \log 3 \approx 1.477$   
 (b)  $\log 4.5 = \log \frac{9}{2} = 2 \log 3 - \log 2 \approx 0.653$   
 (c)  $\log \frac{1}{25} = -2 \log 5 \approx -1.398$   
 (d)  $\log 1200 = 2 \log 2 + \log 3 + 2 \log 10 \approx 3.079$   
 4  $L_1 - L_2 = 10 \log \frac{I_1}{I_0} - 10 \log 0.25 \frac{I_1}{I_0} \approx 6.02$   
 سوف يكون الانخفاض حوالي 6 dB.

«تدريب»

نوع الصوت	الشدة $w/m^2$	مستوى شدة الصوت	قوة الصوت
صوت صفارة إنذار	$10^2$	140	مؤلم جداً
صوت مصنع	$10^{-2}$	100	عالٍ جداً
صوت منظف غبار	$10^{-5}$	70	عالٍ
صوت دقائق الساعة	$10^{-8}$	40	هادئ
صوت تساقط أوراق الشجر	$10^{-10}$	20	هادئ جداً

سلم تدرج الضجيج dB

تلف طبله الأذن  
160  
150  
140  
120 صوت طائرة  
100 صوت دراجة نارية  
90  
80  
70 صوت مكينة كهربائية  
50 صوت محادثة عادية  
30  
0 عتبة السمع

معلومة: هل تعلم أن عتبة الأذن عند 120 dB وتلف طبله الأذن عند 160 dB.

معلومة: تخطيط السمع هي عملية تسجيل القدرة السعوية وفق عتبة السمع لترددات صوتية مختلفة.

تدريب  
أكمل الجدول التالي، حيث:  $L = 10 \times \log \frac{I}{I_0}$

نوع الصوت	الشدة $w/m^2$	مستوى شدة الصوت	قوة الصوت
صوت صفارة إنذار	$10^2$	140	مؤلم
صوت مصنع	$10^{-2}$	...	...
صوت منظف غبار	$10^{-5}$	...	...
صوت دقائق الساعة	$10^{-8}$	...	...
صوت تساقط أوراق الشجر	$10^{-10}$	...	هادئ جداً

148

مثال (4) تطبيق حياتي

بدأت شركة شحن في نقل حمولات طائرات الشحن خارج مطار المدينة، وقد اشكى السكان المجاورون لها من صوتها المرعب جداً، إذا افترضنا أن شركة الشحن قد طلبت إليك ابتكار طريقة تعمل على تخفيض شدة الصوت إلى النصف، باستخدام العلاقة:

$L = (10) \log \frac{I}{I_0}$  حيث  $I$  شدة الصوت،  $I_0$  عتبة السمع  $(10^{-12})$  فكم ديسيبل (dB) يجب أن ينخفض هذا الصوت؟

الحل:  
 لنفرض أن:  $L_1 =$  مستوى شدة الصوت الحالي  
 $L_2 =$  مستوى شدة الصوت بعد خفضه  
 رابط: مقدار انخفاض مستوى شدة الصوت يعطى بـ:  $L_1 - L_2 =$   
 شدة الصوت المنخفض نصف شدة الصوت الحالي:

$L_1 = (10) \log \frac{I_1}{I_0}$ ,  $L_2 = (10) \log \left( \frac{0.5 \times I_1}{I_0} \right)$   
 $L_1 - L_2 = (10) \log \frac{I_1}{I_0} - (10) \log \left( \frac{0.5 \times I_1}{I_0} \right)$   
 $= (10) \log \frac{I_1}{I_0} - (10) \log \left( 0.5 \times \frac{I_1}{I_0} \right)$   
 $= (10) \log \frac{I_1}{I_0} - 10 \left( \log 0.5 + \log \frac{I_1}{I_0} \right)$   
 $= (10) \log \frac{I_1}{I_0} - (10) \log 0.5 - (10) \log \frac{I_1}{I_0}$   
 $= (-10) \log 0.5$   
 $\approx 3.01$

خاصية الضرب  
 جمع الحدود المتشابهة

يجب أن ينخفض مستوى شدة الصوت حوالي 3dB

حاول أن تحل

في مثال (4) السابق نفرض أن شركة الشحن طلبت إليك تخفيض شدة الصوت من 25% من شدة الصوت الحالية، فكم ديسيبل يجب أن ينخفض مستوى شدة الصوت الحالي؟

149



## 4-5: المعادلات الأسية واللوغاريتمية

### 1 الأهداف

- يحل معادلات أسية.
- يستخدم اللوغاريتمات لحل المعادلات الأسية.
- يستخدم الأسس لحل المعادلات اللوغاريتمية.

### 2 المفردات والمفاهيم الجديدة

معادلات أسية – معادلات لوغاريتمية – قاعدة تغيير الأساس.

### 3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة بيانية – ورق رسم بياني – جهاز إسقاط (Data Show) – حاسوب.

### 4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) اكتب  $y = 4^x$  بالصورة اللوغاريتمية.

(b) اكتب  $y = \log_7 x$  بالصورة الأسية.

(c) اكتب المقدار:  $\log_6 x + \log_6 (3x)$  بصيغة لوغاريتم واحد.

(d) اكتب المقدار  $\log 35 - \log 5$  بصيغة لوغاريتم واحد.

(e) اكتب المقدار  $4 \log_8 3 + 6 \log_8 2$  بصيغة لوغاريتم واحد.

(f) اكتب المقدار:  $\log 5 + \log_2 3$  بصيغة لوغاريتم واحد.

### 5 التدريس

تعرفنا الدالة اللوغاريتمية على أنها معكوس للدالة الأسية، وبالتالي لحل معادلة لوغاريتمية نحن نحتاج إلى استخدام الدالة الأسية.

كما أنه لحل دالة أسية، نحتاج إلى استخدام دالة لوغاريتمية وبالتالي نحن بحاجة دائماً إلى آلة حاسبة لتعطينا قيم اللوغاريتم الاعتيادي  $\log$  ولكن السؤال الأهم، هل تتضمن المعادلة دائماً لوغاريتماً اعتيادياً  $\log$ ؟ بالطبع يوجد لدينا لوغاريتمات لها أساسات غير الأساس 10، لذا كان لا بد من إيجاد علاقة تحويل بين اللوغاريتمات ذات الأساسات المختلفة.

### المعادلات الأسية واللوغاريتمية

#### Exponential and Logarithmic Equations

4-5



#### عمل تعاوني

الأحياء: تصف العلاقة  $F = kw^{\frac{2}{3}}$  كمية الطعام  $F$  بالكجم (kg) التي يجب أن يتناولها حيوان ثديي يوميًا في هذه العلاقة  $k$  هي ثابت التغير الذي يعتمد على النوع،  $w$  هي وزن الحيوان.

اعمل مع زميل لك.

1. لحساب وزن قبل كبير حيث،

$F = 145 \text{ kg}$ ،  $k = 0.421$  باستخدام الآلة الحاسبة.

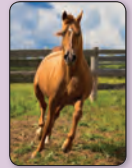
2. عرّض عن قيم  $F$ ،  $k$  في العلاقة  $F = kw^{\frac{2}{3}}$  وأوجد قيمة  $w^{\frac{2}{3}}$ .

3. أوجد قيمة  $w$ .

4. كيف يمكنك حل المعادلة  $F = kw^{\frac{2}{3}}$  لإيجاد  $w$ ؟

5. صف الناتج إذا ما تم رفع كل من طرفي المعادلة للقوة  $\frac{3}{2}$ ، ثم اكتب العلاقة الناتجة.

6. الحصان العربي من الثدييات. إذا اعتبرنا أن وزنه المثالي 400 kg ويأكل يوميًا 15 kg فما قيمة التايت %؟



مواصفات الحصان العربي هو من أقدم سلالات العوليد، صغير الحجم، له قدرة عالية على تحمل المشاق، قليل الأمراض، شجاع بالفرط، وفي لصاحبه، يتكيف مع ظلمات الصحاح وهو أيضًا محب للموسيقى.

#### سوف تتعلم

- حل معادلات أسية.
- استخدام اللوغاريتمات لحل المعادلات الأسية.
- استخدام الأسس لحل المعادلات اللوغاريتمية.

#### المفردات والمصطلحات:

- معادلات أسية
- Exponential Equations
- معادلات لوغاريتمية
- Logarithmic Equations
- قاعدة تغيير الأساس
- Change of Base Formula

#### مواصفات الحصان العربي

هو من أقدم سلالات العوليد، صغير الحجم، له قدرة عالية على تحمل المشاق، قليل الأمراض، شجاع بالفرط، وفي لصاحبه، يتكيف مع ظلمات الصحاح وهو أيضًا محب للموسيقى.



#### Solving Exponential Equations

#### حل معادلات أسية

تعلمت في ما سبق حل معادلة أسية مثل  $7^{3x} = 49$  وذلك بتوحيد الأساس ومساواة الأسس. سوف تتعلم في هذا الدرس حل معادلات أسية على الصورة:  $b^{ax} = a$  حيث يتضمن الأس المتغير  $x$  وذلك باستخدام اللوغاريتمات.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ \\ a = b \iff \log a = \log b$$

لحل معادلات أسية يمكننا أخذ لوغاريتم كل من طرفي المعادلة.

#### مثال (1)

حل المعادلة التالية، ثم تحقق:  $7^{3x} = 20$

الحل:

$$7^{3x} = 20$$

$$\log 7^{3x} = \log 20$$

خذ لوغاريتم كل من طرفي المعادلة

150

$$3x \log 7 = \log 20$$

$$x = \frac{\log 20}{3 \log 7}$$

$$\approx 0.5132$$

$$7^{3x} = 20$$

$$7^{3 \cdot 0.5132} \approx 20.00382 = 20$$

#### خاصية القوى

#### استخدم الآلة الحاسبة

تحقق:

#### الإجابة صحيحة

حاول أن تحل

1. حل كل معادلة بما يلي تقريبًا إجابتك إلى أقرب جزء من ألف:

a.  $3^x = 4$

b.  $6^x = 21$

c.  $3^{x+4} = 101$

تعلمت حل معادلات جذرية باستخدام قوانين الأسس والجذور. يمكن أيضًا حلها باستخدام اللوغاريتمات.

#### مثال (2)

حل كل من المعادلات التالية:

a.  $x^{\frac{2}{3}} = 25$ ,  $x > 0$

b.  $\sqrt{m^2} = 32$ ,  $m > 0$

الحل:

a.  $x^{\frac{2}{3}} = 25$

$$\log x^{\frac{2}{3}} = \log 25$$

$$\log x^{\frac{2}{3}} = \log 5^2$$

$$\frac{2}{3} \log x = 2 \log 5, \quad x > 0$$

$$\left(\frac{3}{2}\right) \frac{2}{3} \log x = \left(\frac{3}{2}\right) 2 \log 5$$

$$\log x = 3 \log 5$$

$$\log x = \log 5^3$$

$$x = 5^3$$

$$x = 125 \in (0, \infty)$$

#### أخذ لوغاريتم الطرفين

#### خاصية القوى

#### خاصية رفع القوى

151

## في المثالين (1), (2)

لحل معادلة أسية، نجد أننا بحاجة إلى تطبيق اللوغاريتم الاعتيادي  $\log$  على الآلة الحاسبة.

## في المثالين (3), (4)

اطلب إليهم كتابة قاعدة تغيير الأساس عدة مرات لكي يتمكنوا من استخدامها. أخبرهم أن ذلك ضروري كي يتمكنوا من استخدام الآلة الحاسبة. فعلى سبيل المثال، لإيجاد  $\log_7 32$  لا يوجد على الآلة الحاسبة  $\log_7$  (أي لوغاريتم أساسه 7) لذا نحن بحاجة إلى قاعدة التحويل فنكتب:

$$\log_7 32 = \frac{\log 32}{\log 7}$$

$$\log_7 32 \approx 1.781$$

## تطبيق إثرائي

يبين كيفية تطبيق مواقف حياتية باستخدام الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية لإيجاد الحلول المطلوبة. كما أن الرسم البياني يساعد أيضاً على إيجاد حلول تقريبية.

## في المثال (5)

لحل معادلة لوغاريتمية، يجب استخدام الصيغة الأسية مما يساعد على عزل المتغير، وبالتالي إيجاد القيمة التي تحقق المعادلة.

ركّز مع الطلاب على خواص اللوغاريتم التي سبق أن تعرفوها.

نبّه الطلاب إلى ما يلي:

$$(a) \log_b(x \pm y) \neq \log_b x \pm \log_b y$$

$$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y \quad \text{ولكن:}$$

$$(b) \log_b(xy) \neq (\log_b x)(\log_b y)$$

$$(c) \frac{\log_a x}{\log_a y} \neq \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \quad \text{ولأن:}$$

$$\begin{aligned} b \quad \sqrt{m^5} &= 32 \\ m^{\frac{5}{2}} &= 32 \\ \log m^{\frac{5}{2}} &= \log 32 \\ \log m^{\frac{5}{2}} &= \log 2^5 \\ \frac{5}{2} \log m &= 5 \log 2, \quad m > 0 \\ \log m &= 5 \times \frac{2}{5} \log 2 \\ \log m &= 2 \log 2 \\ \log m &= \log 2^2 \\ m &= 2^2 \\ m &= 4, \quad 4 \in (0, \infty) \end{aligned}$$

أخذ لوغاريتم الطرفين

خاصية القوى

بسط

حاول أن تحل

حل كل معادلة مما يلي:

$$a \quad t^2 = 128, \quad t > 0 \quad b \quad \sqrt[3]{u^4} - 5 = 11, \quad u > 0$$

لحساب اللوغاريتم لأي أساس موجب لا يساوي الواحد، يمكنك استخدام خاصية تغيير الأساس.

قاعدة تغيير الأساس

$$\forall m, b, c \in \mathbb{R}^+, \quad b \neq 1, \quad c \neq 1 \\ \log_b m = \frac{\log_c m}{\log_c b}$$

$$\log_3 7 = \frac{\log_2 7}{\log_2 3} = \frac{\log_4 7}{\log_4 3} = \frac{\log 7}{\log 3} \quad \text{فمثلاً:}$$

مثال (3)

استخدم قاعدة تغيير الأساس لإيجاد قيمة  $\log_3 15$  ثم حوّل  $\log_3 15$  إلى لوغاريتم للأساس 2  
الحل:

$$\begin{aligned} \log_b m &= \frac{\log_c m}{\log_c b} \\ \log_3 15 &= \frac{\log_2 15}{\log_2 3} \\ &\approx 2.4650 \end{aligned}$$

استخدم قاعدة تغيير الأساس  
استخدم الآلة الحاسبة

152

$$\begin{aligned} \text{للتحويل إلى لوغاريتم للأساس 2:} \\ \text{اكتب معادلة} \\ \log_2 15 = \log_2 x \\ 2.4650 \approx \log_2 x \\ 2.4650 = \frac{\log x}{\log 2} \\ 2.4650(\log 2) = \log x \\ 0.7420 \approx \log x \\ x = 10^{0.7420} \\ x \approx 5.5208 \\ \therefore \log_3 15 \approx \log_2 5.5208 \end{aligned}$$

عوض عن  $\log_2 15$  بـ 2.4650  
استخدم قاعدة تغيير الأساس  
الضرب النطاقي  
بسط  
اكتب في الصيغة الأسية  
استخدم الآلة الحاسبة

حاول أن تحل

أوجد قيمة  $\log_2 400$  ثم حوّلها إلى لوغاريتم للأساس 8  
الفكر الناقد: في المثال (3)،  $\log_2 x = 2.4650$ ، كيف يمكن حل هذه المعادلة دون استخدام قاعدة تغيير الأساس؟

يمكنك استخدام قاعدة تغيير الأساس لحل معادلات أسية وذلك بأخذ اللوغاريتم لكلا الطرفين مستخدماً أساس الأس كأساس للوغاريتم، ثم استخدام قاعدة تغيير الأساس.

مثال (4)

$$\text{حل المعادلة: } 2^{3x} = 172 \\ \text{الحل:}$$

$$\begin{aligned} 2^{3x} &= 172 \\ \log_2(2^{3x}) &= \log_2(172) \\ 3x &= \log_2 172 \\ 3x &= \frac{\log 172}{\log 2} \\ x &\approx 2.4754 \end{aligned}$$

خذ اللوغاريتم للأساس 2 لكلا الطرفين  
بسط  
استخدم قاعدة تغيير الأساس  
استخدم الآلة الحاسبة

حاول أن تحل

استخدم قاعدة تغيير الأساس لحل المعادلة:  $7^{5x} = 3000$

153

## 6 الربط

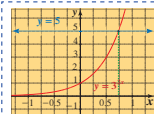
يوفر التطبيق الإثرائي فرصة أمام الطلاب لاستخدام الدالة الأسية في موقف حياتي، حيث تتناقص أعداد النمر العربية في شبه الجزيرة العربية، ويبيّن كيفية التعامل مع الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية لإيجاد الحل.

## 7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام قاعدة التحويل أو قد يستخدمون الآلة الحاسبة مع اللوغاريتم الاعتيادي من دون الانتباه إلى أساس اللوغاريتم. نبه الطلاب إلى القاعدة:  $\log_b m = \frac{\log m}{\log b}$  حيث (log) هو اللوغاريتم الاعتيادي وله مفتاح على الآلة الحاسبة.

## 8 التقييم

إن متابعة المعلم لعمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل»، توفر له فرصة للاطلاع على إمكانياتهم في استيعاب حل المعادلات الأسية واللوغاريتمية.



يمكنك أيضًا حل معادلات أسية بيانيًا. فمثلًا الشكل المقابل يمثل حل المعادلة  $3^{2x} = 5$  حيث تمّ تمثيل بيان الدالة  $y = 3^{2x}$  والدالة  $y = 5$  نقطة التقاطع للمنحنين (0.732, 5). ∴ حل المعادلة هو 0.732 تقريبًا.

### تطبيق إثرائي

كان النمر العربي من أكثر السنوريات انتشارًا في شبه الجزيرة العربية لكنه الآن موجود على الواجهة الحمراء لأنواع الحيوانات المهددة بالانقراض.



كان عدده 112 سنة 1990 في بعض مناطق شبه الجزيرة العربية وانخفض إلى 65 سنة 2006.

اكتب معادلة أسية تُمذِّج تناقص عدد النمور.

إذا بقي هذا التناقص على حاله، في أية سنة يبقى فقط 5 نمور في شبه الجزيرة العربية؟ وضح بيانيًا.

### الحل

المعادلة الأسية على الشكل  $y = ab^x$ .

لتكن سنة 1990 ممثلة بالصفر وسنة 2006 بـ 16

عوض عن  $x$  بـ 0، عن  $y$  بـ 112

$b^0 = 1$

$$112 = ab^0$$

$$a = 112$$

$$\therefore y = 112b^x$$

$$65 = 112 \times b^{16}$$

$$b^{16} = \frac{65}{112}$$

$$\log b^{16} = \log \frac{65}{112}$$

$$16 \log b = \log \frac{65}{112}$$

$$\log b = -0.01476904$$

$$b = 0.96656476$$

$$\therefore y = (112)(0.96656476)^x$$

خذ اللوغاريتم لكلا الطرفين

استخدم الآلة الحاسبة

$$y = 5$$

$$5 = (112)(0.96656476)^x$$

$$5 = (112)(0.96656476)^x$$

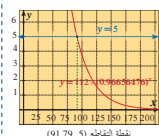
$$x = 92$$

$$1990 + 92 = 2082$$

يبقى في شبه الجزيرة العربية 5 نمور فقط سنة 2082.

الشكل المقابل يوضح الحل بيانيًا.

نقطة التقاطع (91.79, 5)



154

## اختبار سريع

حل كل معادلة مما يلي:

- 1  $3^x = 81 \quad x = 4$
- 2  $5 + 2^x = 69 \quad x = 6$
- 3  $\log x + \log 4 = 3 \quad 250$
- 4  $\log_3 22 = x \quad 2.814$

تمرّن  
4-5

### المعادلات الأسية واللوغاريتمية Exponential and Logarithmic Equations

#### المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1-8)، حل كل معادلة مما يلي. اختبر صحة كل حل:

- (1)  $9^{2y} = 66$
- (2)  $12^{y-2} = 20$
- (3)  $5 - 3^x = -40$
- (4)  $25^{2x+1} = 144$
- (5)  $3x^{\frac{3}{2}} = 27, x > 0$
- (6)  $2 + 8r^{\frac{3}{2}} = 26$
- (7)  $\sqrt[3]{n^2} - 12 = 5$
- (8)  $-3 + 2\sqrt[3]{x^3} = 33$

في التمارين (9-13)، استخدم قاعدة تغيير الأساس لإيجاد قيمة كل لوغاريتم مما يلي:

- (9)  $\log_2 7$
- (10)  $\log_3 33$
- (11)  $\log_{21} 0.085$
- (12)  $\log_5 510$
- (13)  $\log_4 1.116$

(14) باعتبار المعادلة:  $2^{\frac{x}{3}} = 80$

(a) حل المعادلة بأخذ اللوغاريتم بأساس 2 لكل طرف.

(b) حل المعادلة بأخذ اللوغاريتم بأساس 10 لكل طرف.

(c) قارن بين إجابتك في الفقرتين (a)، (b)، أي طريقة تفضلها؟ ولماذا؟

في التمارين (15-20)، حل كل معادلة لوغاريتمية مما يلي:

- (15)  $\log 6x - 3 = -4$
- (16)  $\log x - \log 3 = 8$
- (17)  $\log_2(3x - 5) = 1$
- (18)  $\log(2x) + \log(x - 3) = \log 8$
- (19)  $\log(3x) - \log(x + 20) = -\log 2$
- (20)  $\log_{(2x-1)} 49 = 2$
- (21)  $\log_{(5x-3)} 64 = \log 4$

(22) الأحياء البرية: لنفرض أن فضيلة معينة من الحيوانات البرية المعرضة لخطر الانقراض تتناقص أعدادها بمعدل 3.5% سنويًا وقد أحصيت 80 حيوانًا من هذه الفضيلة في موطنها الذي تقوم بدراسته.

(a) توقع عدد حيوانات هذه الفضيلة الذي سيبقى بعد 10 سنوات.

(b) بعد كم سنة سوف يتناقص عدد حيوانات هذه الفضيلة لأول مرة إلى أقل من 15 حيوانًا، بالمعدل نفسه؟

65

عمل تعاوني

(a) 1  $F = kw^{\frac{2}{3}} ; 145 = 0.421w^{\frac{2}{3}}$   
 $w^{\frac{2}{3}} = 344.42$

2  $(w^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = (344.42)^{\frac{3}{2}}$   
 $w = 344.42\sqrt{344.42}$   
 $w \approx 6392 \text{ kg}$

3  $\frac{F}{k} = w^{\frac{2}{3}} ; F = w^{\frac{2}{3}}$   
 $(\frac{F}{k})^{\frac{3}{2}} = w$

(b)  $15 = k(400)^{\frac{3}{2}}$   
 $k = \frac{15}{\sqrt[3]{160000}} \approx 0.276$

حاول أن تحل

1 (a)  $3^x = 4 , x = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.262$

(b)  $6^x = 21 , x = \frac{\log 21}{\log 6} \approx 1.7$

(c)  $3^{x+4} = 101 , x = \frac{\log 101 - \log 81}{\log 3} \approx 0.2$

2 (a)

$t^{\frac{7}{2}} = 128 ; t^{\frac{7}{2}} = 2^7 ; \log t^{\frac{7}{2}} = \log 2^7 ; \frac{7}{2} \log t = 7 \log 2 ; t = 4$

(b)  $u^{\frac{4}{3}} = 16 ; u^{\frac{4}{3}} = 2^4 ; \frac{4}{3} \log u = 4 \log 2$   
 $u = 8$

3 (a)  $\log_3 400 = \frac{\log 400}{\log 3} \approx 5.454$

$5.454 = \frac{\log x}{\log 8}$   
 $\log x = 4.925 ; x \approx 10^{4.925}$

$x \approx 84168.814$

(b)  $\log_2 x \approx 2^{2.4650}$

$x \approx 2^{2.4650}$   
 $x \approx 5.521$

4  $7^{5x} = 3000$

$\log_7 7^{5x} = \log_7 3000$

$5x = \frac{\log(3 \times 10^3)}{\log 7}$

$x = \frac{3 + \log 3}{5 \log 7} \approx 0.823$

Solving Logarithmic Equations

حل معادلات لوغاريتمية

كل معادلة تتضمن تعبيراً لوغاريتمياً تسمى معادلة لوغاريتمية ويمكن وضعها على الصورة:  
 $\log_b y = x \quad \forall y, b \in \mathbb{R}^+, b \neq 1$   
 ويكون حلها بما يحقق هذه الشروط لذا يتوجب إيجاد مجال التعريف (شرط الحل) أو التحقق من القيم الناتجة.

مثال (5)

حل المعادلة:  $\log(3x+1) = 5$

الحل:

نوجد المجال:

$(-\frac{1}{3}, \infty) = \text{المجال}$

$3x+1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{3}$

$\log(3x+1) = 5$

$3x+1 = 10^5$

$3x+1 = 100000$

$x = 33333$

اكتب في الصورة الأسية

$33333 \in (-\frac{1}{3}, \infty)$

∴ الحل مقبول.

حاول أن تحل

5 حل المعادلة:  $\log(7-2x) = -1$

في بعض الحالات، عليك استخدام خواص اللوغاريتمات لتبسيط التعابير قبل حل المعادلة.

مثال (6)

حل المعادلة:  $2\log x - \log 3 = 2$

الحل:

نوجد المجال:  $x > 0$

∴ المجال =  $(0, \infty)$

$2\log x - \log 3 = 2$

$\log(\frac{x^2}{3}) = 2$

$\frac{x^2}{3} = 10^2$

$x^2 = 3 \times 100$

$x = \pm 10\sqrt{3}$

اكتب لوغاريتم واحد

اكتب في الصورة الأسية

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

- (1) حل المعادلة  $9^x = 3$  هو  $x = \frac{1}{2}$  (a) (b)  
 (2) حل المعادلة  $2\log x = -1$  هو  $x = 10^{-0.5}$  (a) (b)  
 (3) إذا كان  $\log(x+6) = 0$  فإن  $x = -5$  (a) (b)  
 (4) حل المعادلة  $14^{9x} = 146$  هو  $x = \frac{\log 146}{\log 14}$  (a) (b)  
 (5) حل المعادلة  $3\log x - \log 6 + \log 2.4 = 9$  هو  $5 \times 10^4$  (a) (b)

في التمارين (6-14)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

- (6) إذا كان  $(1.5)^x = 356$  فإن: (a)  $x \approx 15$  (b)  $x \approx 14.5$  (c)  $x \approx 15.3$  (d)  $x \approx 16.3$   
 (7) حل المعادلة  $8 + 10^x = 1008$  هو: (a)  $x = 6$  (b)  $x \approx 3.5$  (c)  $x = 3$  (d)  $x = 2$   
 (8) إذا كان  $2^{x^2} = 512$  فإن: (a)  $x = 3$  (b)  $x = 9$  (c)  $x = 3, x = -3$  (d)  $x = -9$   
 (9) إذا كان  $2\log x = -2$  فإن: (a)  $x = 10^{-1}$  (b)  $x = 10^{0.5}$  (c)  $x = 10^{-2}$  (d)  $x = 10^{-0.5}$   
 (10) مجموعة حل المعادلة:  $\log(x^2 + 2) = \log(5x - 4)$  هي: (a) {2} (b) {3} (c) {2, 3} (d) {-2, -3}  
 (11) مجموعة حل المعادلة:  $\log_4(x^2 - x) = 1$  هي: (a) {-1} (b) {1, 2} (c) {-1, 2} (d) {-1, -2}  
 (12) حل المعادلة  $\log(x+21) + \log x = 2$  هو: (a) 4 (b) -25, 4 (c) 25 (d) 4, 25  
 (13) يكون  $x = 3$  حلاً للمعادلة: (a)  $\log_4(6-x^2) = 1$  (b)  $\log_9 = \frac{2}{3}$  (c)  $\log_4(x^2 + 1) = 2$  (d)  $\log_4 x^3 + \log_4 x = 4$   
 (14) حل المعادلة  $\log_8 81 - \log_9 = 2$  هو: (a) -3 (b)  $\frac{1}{3}$  (c) 3 (d) 9

$$10\sqrt{3} \in (0, \infty), -10\sqrt{3} \notin (0, \infty)$$

حل المعادلة هو:  $x = 10/\sqrt{3}$

حاول أن تحل

حل المعادلة:  $\log 6 - \log 3x = -2$

مثال (7)

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية مستخدماً خواص اللوغاريتمات:

a  $\log x(x+1) = \log 2$

b  $\log_2 x(x-1) - \log_2(x+3) = \log_2\left(\frac{1}{x}\right)$  ,  $x \in (1, \infty)$

c  $\log_{x+1} 32 = 5$  ,  $x \in (0, \infty)$

الحل:

نوجد المجال:  $x(x+1) > 0$

المعادلة المناظرة:  $x(x+1) = 0$

$$x = -1 \text{ أو } x = 0 \therefore$$

لإيجاد قيم  $x$  التي تحقق  $x(x+1) > 0$

$$x < 0 \mid x+1 < 0 \Rightarrow x < -1$$

$$x > 0 \mid x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$+\infty$
$x$	$-$	$+$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x(x+1)$	$+$	$+$	$-$	$+$

المجال:  $\mathbb{R} - [-1, 0]$

$$\log x(x+1) = \log 2$$

$$x(x+1) = 2$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x-1)(x+2) = 0$$

$$x = -2 \text{ أو } x = 1$$

$$1, -2 \in \mathbb{R} - [-1, 0]$$

خاصية اللوغاريتم

$\therefore$  مجموعة حل المعادلة =  $\{1, -2\}$

156

5  $\log(7-2x) = \log 10^{-1}$  ;  $x = 3.45$

6  $\log \frac{6}{3x} = \log 10^{-2}$  ;  $x = 200$

7 (a)  $\log\left(\frac{x^2}{x^2-x}\right) = \log 10$

$$\frac{x}{x-1} = 10, x = \frac{10}{9}$$

(b)  $\log_4\left(\frac{x+6}{12}\right) = \log_4\left(\frac{2}{x-4}\right)$

$$\frac{x+6}{12} = \frac{2}{x-4}$$

$$x^2 + 2x - 48 = 0$$

$$x = 6$$

b  $\log_2(x-1) - \log_2(x+3) = \log_2\left(\frac{1}{x}\right)$  ,  $x \in (1, \infty)$

$$\log_2\left(\frac{x-1}{x+3}\right) = \log_2\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{x-1}{x+3} = \frac{1}{x}$$

$$x(x-1) = x+3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

$$x = -1, x = +3$$

$-1 \notin (1, \infty)$  مرفوضة

$$3 \in (1, \infty)$$

$\therefore$  مجموعة حل المعادلة =  $\{3\}$

c  $\log_{x+1} 32 = 5$  ,  $x \in (0, \infty)$

$$\frac{\log 32}{\log(x+1)} = 5$$

$$\log 32 = 5 \log(x+1)$$

$$\log 32 = \log(x+1)^5$$

$$32 = (x+1)^5$$

$$2^5 = (x+1)^5$$

$$x+1 = 2$$

$$x = 1$$

$$1 \in (0, \infty)$$

$\therefore$  مجموعة حل المعادلة =  $\{1\}$

حاول أن تحل

7 أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية:

a  $\log x^2 - \log(x^2-x) = 1$  ,  $x \in (1, \infty)$

b  $\log_4(x+6) - \log_4 12 = \log_4 2 - \log_4(x-4)$  ,  $x \in (4, \infty)$

157



## في المثال (1)

يوفر هذا المثال فرصة أمام الطلاب لحل معادلة أسية حيث أساس الأس هو العدد  $e$ ، في هذه الحالة يتعلم الطالب عزل الأساس  $e$  مع قيمة الأس ليتمكن بعدها من استخدام اللوغاريتم الطبيعي علمًا بأن  $\ln e = 1$ .

ساعد الطلاب على استخدام القاعدة:  $\ln e^u = u \ln e = u$  حيث  $u$  بدلالة المتغير  $x$  وهذا يسهل أيضًا عزل المتغير  $x$ .

## في المثال (2)

يوفر هذا المثال فرصة أمام الطلاب لاستخدام اللوغاريتم الطبيعي وخاصة أن معادلة أقصى سرعة للصاروخ تتضمن اللوغاريتم الطبيعي والممثل بالرمز  $\ln$ .

كما أن جميع خاصيات اللوغاريتم التي تعرفنا عليها سابقًا هي صالحة مع اللوغاريتم الطبيعي أي خاصية الضرب وخاصية القسمة وخاصية القوى، وهذا ما تم تطبيقه في المثال (4).

## في المثال (3)

يوفر هذا المثال فرصة للطلاب كي يدرك أن الدالة اللوغاريتمية تكون معرفة إذا كان المتغير قيمة موجبة وهذا المتغير يمكن أن يكون بدلالة متغير آخر أي أن  $3x + 5 > 0$  وليس  $x > 0$  فقط.

## 6 الربط

نجد في المثال (2) كيفية تطبيق اللوغاريتم الطبيعي على مسائل حياتية بشكل بسيط جدًا لسهولة الحل باستخدام الآلة الحاسبة.

## 7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام الآلة الحاسبة بين مفتاحين  $\ln$  و  $\log$ ، ساعدهم على معرفة أن  $\log$  تستخدم في اللوغاريتم الاعتيادي والأساس هو 10. أما  $\ln$  فتستخدم في اللوغاريتم الطبيعي وأساسه العدد  $e$ .

**مثال (1)**

استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل:  
الحل:

$8e^{2x} = 20$

اقسم كل طرف على 8  
بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لكل طرف  
خاصية القوى حيث  $\ln e = 1$   
اختصر  
اقسم كل طرف على 2  
استخدم الآلة الحاسبة

جواب أن نحصل

استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل:  $e^{4(x-1)} = 32$

$8e^{2x} = 20$   
 $e^{2x} = \frac{20}{8}$   
 $\ln e^{2x} = \ln 2.5$   
 $2x \ln e = \ln 2.5$   
 $2x = \ln 2.5$   
 $x = \frac{\ln 2.5}{2}$   
 $x \approx 0.458$

اللوغاريتم الطبيعي يبسط تعبيرات العديد من العلاقات في المجالات المختلفة ومنها المجال الفيزيائي.

**مثال (2)**

الصلة بالواقع

القضاة: يمكن أن يبلغ صاروخ مدافعًا فائضًا على بعد 300 km فوق سطح الأرض إذا ما بلغت سرعته 7.7 km/s وتحسب أقصى سرعة (v) له بالعلاقة:  
 $v = -0.0098t + c \ln r$   
(حيث  $t$  هي زمن اشتعال وقود محرك الصاروخ بالثانية (s)،  $c$  هي سرعة انطلاق البخار بـ (km/s)  $r$  هي النسبة بين كتلة الصاروخ وهو محمل بالوقود إلى كتلته من دون وقود).  
تفرض أن صاروخًا قد استخدم لدفع سفينة فضائية، وله نسبة كتلة حوالي 25 وسرعة انطلاق البخار (km/s) 2.8، وزمن الاشتعال 100 s، فهل يبلغ هذا الصاروخ مدافعًا فائضًا؟  
الحل:  
في هذه الحالة:  $t = 100$  s ،  $c = 2.8$  km/s ،  $r = 25$   
إيجاد  $v$ ، استخدم العلاقة:  $v = -0.0098t + c \ln r$

$v = -0.0098(100) + 2.8 \ln 25$   
 $\approx -0.98 + 2.8(3.219)$   
 $\therefore v \approx 8$  km/s

وهذه السرعة أكبر من السرعة 7.7 km/s، والتي تزم بلوغ المدار الثابت. لذلك فإن هذا الصاروخ يمكنه أن يبلغ المدار الثابت.

159

## المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

- (1)  $\log_e(\ln e^4) = 1$  (a) (b)  
(2)  $4\ln 8 + \ln 10 = 4\ln 80$  (a) (b)  
(3)  $\ln e^2 = 2$  (a) (b)  
(4) حل المعادلة:  $\ln x = -2$  هو  $e^2$  (a) (b)  
(5) حل المعادلة:  $e^{\frac{1}{3}} + 4 = 7$  هو  $5\ln 3$  (a) (b)  
في التمارين (6-14)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.  
(6)  $3\ln 4 - 5\ln 2$  على شكل لوغاريتم واحد تكتب: (a)  $\ln(-18)$  (b)  $\ln(\frac{6}{5})$  (c)  $\ln 2$  (d)  $\ln 32$   
(7)  $e^{\ln 10}$  تساوي: (a) 10 (b)  $e^{10}$  (c) 0 (d)  $\frac{1}{10}$   
(8) حل المعادلة  $\ln(2m+3) = 8$  هو: (a)  $e^8 - 3$  (b)  $\frac{e^8}{2} - 3$  (c)  $\frac{e^8 - 3}{2}$  (d)  $e^4 - 3$   
(9) حل المعادلة  $\ln 4r^2 = 3$  هو: (a)  $\frac{e^{\frac{3}{2}}}{2}$  (b)  $\frac{e^{\frac{3}{2}}}{2} - \frac{e^{\frac{3}{2}}}{2}$  (c)  $\frac{e^{-\frac{3}{2}}}{2}$  (d)  $e^{\frac{3}{2}} - e^{-\frac{3}{2}}$   
(10) حل المعادلة  $e^{2x} = 10$  هو: (a)  $x = \frac{\ln 10}{2}$  (b)  $\ln 5$  (c)  $\frac{5}{e}$  (d)  $2 \ln 10$   
(11)  $e^2$  حل للمعادلة: (a)  $\ln x = 2$  (b)  $\ln x^2 = 2$  (c)  $\ln x^2 = 4$  (d)  $\ln x = 4$   
(12) حل المعادلة  $e^{x+1} = 13$  هو: (a)  $x = \ln 13 + 1$  (b)  $x = \ln 13 - 1$  (c)  $x = \ln 13$  (d)  $x = \ln 12$   
(13) حل المعادلة  $\ln(x-2)^2 = 6$  هو: (a)  $2 + e^3$  (b)  $2 - e^3$  (c)  $2 \pm e^3$  (d)  $2 \pm e^6$   
(14) حل المعادلة  $e^{\frac{x}{2}+1} + 3 = 8$  هو: (a)  $x = 2\ln 5 - 1$  (b)  $x = 2\ln 5 - 2$  (c)  $x = 2\ln 4$  (d)  $x = \frac{1}{2}(\ln 5 - 1)$

68

## 8 التقييم

تابع بدقة جهود الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» للتأكد من كونهم قد ميّزوا جيّداً بين اللوغاريتمات التي تعرفوها في هذه الوحدة.

### اختبار سريع

أوجد الحل لما يلي:

- 1  $e^x + 3 = 25$       3.091
- 2  $3 \ln e^{2x} = 15$       2.5
- 3  $\ln x + \ln 4 = 6$       100.857
- 4  $\ln 8 - \ln x = \ln 2$       4

## 9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

1 - 5 تحقق من إجابات الطلاب، وتأكد من أنهم يستخدمون المفتاح الصحيح على الآلة الحاسبة وهو

$\ln$

«تدريب»

- 1  $\ln(mn) = \ln(m) + \ln(n)$       خاصية الضرب
- 2  $\ln\left(\frac{m}{n}\right) = \ln(m) - \ln(n)$       خاصية القسمة
- 3  $\ln(m^k) = k \ln(m)$       خاصية القوى
- 4  $\ln e = 1$
- 5  $\ln e^k = k$
- 6  $e^{\ln k} = k$

**حاول أن تحل**

2 من مثال (2) أوجد سرعة صاروخ، نسبة كتلته حوالي 15، وسرعة انطلاق البخار قدرها 1.2 km/s، وزمن اشتعال المحرك 30s هل يمكن أن يبلغ هذا الصاروخ مداراً ثابتاً على بعد 300km فوق سطح الأرض؟

يمكنك حل معادلات لوغاريتمية طبيعية باستخدام معادلات أسية والعكس صحيح.

**مثال (3)**

حل المعادلة:  
الحل:  
توجد المجال:  
المجال =  $(-\frac{5}{3}, \infty)$

$3x + 5 > 0 \Rightarrow x > -\frac{5}{3}$

$\ln(3x + 5) = 4$   
 $3x + 5 = e^4$   
 $3x = e^4 - 5$   
 $x = \frac{(e^4 - 5)}{3}$   
 $x \approx 16.53$

أعد الكتابة في الصورة الأسية  
اطرح 5 من كل طرف  
اقسم كل طرف على 3  
استخدم الآلة الحاسبة

**حاول أن تحل**

3 حل كل من المعادلات التالية:

a  $e^{\frac{2x}{3}} + 7.2 = 9.1$       b  $5 + \ln\left(\frac{x+2}{3}\right) = 7$

**مثال (4)**

استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل  $7e^{2x} + 2.5 = 13$

الحل:

$7e^{2x} + 2.5 = 13$   
 $7e^{2x} = 10.5$   
 $e^{2x} = 1.5$

اطرح 2.5 من طرفي المعادلة  
اقسم طرفي المعادلة على 7



«حاول أن تحل»

1  $4x + 4 = \ln 32$  ,  $x \approx -0.134$

2 والمطلوب إيجاد قيمة  $v$   
 $v = -0.0098t + c \ln r$   
 $v = -0.0098(30) + 1.2 \ln 15$

$v \approx 2.956$  وهذه القيمة أصغر من 7.7، لذا لن يتمكن هذا الصاروخ من بلوغ المدار الثابت وهو 300 km فوق الأرض.

3 (a)  $e^{\frac{2x}{5}} = 1.9$  ;  $x \approx 1.605$

(b)  $\ln\left(\frac{x+2}{3}\right) = 2$   
 $x \approx 20.167$

4 (a)  $x \approx 2.4012$

(b)  $\log_2 2^{2x-3} = \log_2 3$   
 $2x - 3 = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.585$   
 $x \approx 2.3$

$\ln(e)^{2x} = \ln 1.5$   
 $2x \ln e = \ln 1.5$   
 $x = \frac{\ln 1.5}{2}$   
 $x \approx 0.2027$

خذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة  
خاصية القوى حيث  $\ln e = 1$   
اقسم طرفي المعادلة على 2  
استخدم الآلة الحاسبة

حاول أن تحل

4 استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل المعادلتين التاليتين:

a  $e^{x+1} = 30$

b  $2^{2x-3} + 4 = 7$

# المرشد لحل المسائل

## إجابات «مسألة إضافية»

- (a)  $y = 750e^{0.183x}$   
 (b) 2006  
 (c) 2014

$$y = 360 e^{0.167x}$$

$$360 e^{0.167x} > 3000$$

$$x > \frac{\ln \frac{3000}{360}}{0.167} = 12.6961888$$

وبالمثل يتخطى عدد مشتركي شبكة الإنترنت 3 مليارات في العام 2013، ويصبح العدد حوالي 3.156 مليارات مشترك.

$$y = 360 e^{0.167x}$$

$$\frac{y}{360} = e^{0.167x}$$

$$\ln\left(\frac{y}{360}\right) = \ln(e^{0.167x})$$

$$\ln\left(\frac{y}{360}\right) = 0.167x$$

$$x = \frac{\ln\left(\frac{y}{360}\right)}{0.167}$$

قسمة طرفي المعادلة على 0.167  
 تعوض عدد  $y$  في **a**، **b**، **c** للتحقق من الإجابات التي توصلنا إليها من حيث عدد السنوات المطلوبة للوصول إلى هذه الأعداد.

$$\text{b) } x \approx 6.12 \Rightarrow \frac{\ln\left(\frac{1000}{360}\right)}{0.167} \Rightarrow \text{إذا نحتاج إلى أكثر من 6 سنوات، إذًا في 2007.}$$

$$\text{c) } x \approx 12.7 \Rightarrow \frac{\ln\left(\frac{3000}{360}\right)}{0.167} \Rightarrow \text{إذا نحتاج إلى أكثر من 12 سنة، إذًا في 2013.}$$

### مسألة إضافية

في نهاية العام 2000، وصل عدد مشتركي الهاتف المحمول حوالي 750 مليونًا في العالم أمّا في نهاية العام 2011 فقد تزايد هذا العدد ليصل إلى حوالي 5.6 مليارات مشترك.

**a**  $x$  تمثل عدد السنوات منذ العام 2000.

اكتب دالة على الشكل:  $y = Pe^{mx}$ ،  $y$  تمثل القيمة المتوقعة لزيادة مستخدمي الهاتف المحمول ابتداءً من العام 2000.  $y$  عدد المستخدمين بعد مرور  $x$  سنة.

$m$  معدل التزايد السنوي.

$P$  عدد المستخدمين في العام 2000.

**b** في أي عام يتخطى عدد مستخدمي الهاتف المحمول الـ 2 مليار؟

**c** في أي عام يتخطى عدد مستخدمي الهاتف المحمول الـ 9 مليارات؟

**d** أوجد قيمة  $x$  بدلالة  $y$ .

**e** كيف يمكن استخدام المعادلة في **d** للتحقق من الإجابات في **b**، **c**؟

## اختبار الوحدة الرابعة

في المتارين (1-4)، ارسم كلًا من الدوال التالية:

(1)  $y = -3(0.25)^x$       (2)  $f(x) = \frac{1}{2}(6)^{-x}$       (3)  $y = 0.1(10)^{x-2}$       (4)  $f(x) = (2)^{x+1} + 3$

(5) الكتابة: وضح كيف يمكنك تحديد ما إذا كانت الدالة الأسية تمثل نموًا أم تضاعفًا أسياً. اعرض مثالاً لكل منها.

في المتارين (6-8)، اكتب معادلة نصف الدالة الأسية التي على الصورة:  $y = ab^x$ ، بمعلومية الأساس المعطى والتي يمر رسمها البياني بالنقطة المعطاة.

(6) الأساس 3، النقطة (2, 3)

(7) الأساس 4، النقطة (-1, 1)

(8) الأساس 2، النقطة (0, 3)

(9) علم الزلازل: كم مرة يكون زلزال قوته 5.2 بمقياس ريختر أقوى من زلزال قوته 3 علمًا بأن الطاقة المنطلقة تساوي  $30^x \times E$ ،  $x$  هي درجة قوة الزلزال بمقياس ريختر.

(10) ارسم بيان الدالة  $y = \log_8 x$ ، ثم استخدمها كدالة مرجع لرسم بيان كل من الدوال اللوغاريتمية التالية:

(a)  $y = \log_8(x+2)$       (b)  $y = \log_8 x - 1$       (c)  $y = \log_8(x+2) - 1$

في المتارين (11-14)، أوجد مفكوك كل من اللوغاريتمات التالية:

(11)  $\log_4 r^2 n$ , ( $r > 0$ ,  $n > 0$ )      (12)  $\log_2(x+1)^2$ , ( $x > -1$ )

(13)  $\log_7 \frac{a}{b}$ , ( $a > 0$ ,  $b > 0$ )      (14)  $\log_3 3x^2 y^3$ , ( $x > 0$ ,  $y > 0$ )

في المتارين (15-18)، استخدم خواص اللوغاريتمات لإيجاد ناتج كل من المقادير التالية:

(15)  $\log_3 27 - \log_3 9$       (16)  $2 \log_2 64 - \log_2 2$

(17)  $-\log_4 \frac{1}{16} - \log_4 64$       (18)  $2 \log_5 5 + \log_5 40$

(19) سؤال مفتوح: اكتب مقدارين لوغاريتميين. أي منهما له القيمة الأكبر؟ اشرح.

في المتارين (20-30)، حل كلًا من المعادلات التالية:

(20)  $x^{\frac{3}{4}} = 81$       (21)  $3k^{\frac{3}{4}} = 24$       (22)  $\log 4x = 3$

(23)  $2 \log x = -4$       (24)  $\log 2x + \log x = 1$       (25)  $\log x - \log(x-1) = 1$

## المرشد لحل المسائل

في نهاية العام 2000 وصل عدد مشتركي شبكة الإنترنت في العالم إلى 360 مليونًا وتزايد هذا العدد ليصل في نهاية العام 2011 إلى 2.260 مليون مشترك.

**a**  $x$  تمثل العدد بالسنين،  $m$  معدل الزيادة السنوية،  $P$  عدد المشتركين في عام 2000،  $y$  عدد المشتركين مع مرور الوقت.

اكتب دالة على الشكل:  $y = Pe^{mx}$ ،  $y$  تمثل القيمة المتوقعة لزيادة عدد مشتركي شبكة الإنترنت ابتداءً من العام 2000.

$y$  عدد المشتركين بعد مرور  $x$  عام.

$m$  معدل التزايد السنوي،  $P$  عدد المشتركين عام 2000.

**b** في أي عام يتخطى عدد مشتركي شبكة الإنترنت المليار؟

**c** متى يصبح هذا العدد أكثر من 3 مليارات مشترك؟

**d** أوجد قيمة  $x$  بدلالة  $y$ .

**e** كيف يمكن استخدام المعادلة في **d** للتحقق من إجابات **b**، **c**؟

الحل:

**a** الشكل العام للمعادلة هو كالتالي:  $y = Pe^{mx}$

إيجاد المعدل العام لتزايد عدد مشتركي شبكة الإنترنت في العالم بين عام 2000 و 2011.

$$2260 = 360 e^{11m} \Rightarrow \frac{2260}{360} = e^{11m}$$

$$\ln \frac{2260}{360} = \ln e^{11m}$$

$$\ln \frac{2260}{360} = 11m$$

$$m = \frac{\ln\left(\frac{2260}{360}\right)}{11}$$

$$m = 0.167$$

قسمة طرفي المعادلة على 11

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد معدل التزايد السنوي

إذًا معدل التزايد السنوي لمستخدمي شبكة الإنترنت هو 16.7%.

وبالتالي الدالة هي:  $y = 360 e^{0.167x}$

$$y = 360 e^{0.167x}$$

$$360 e^{0.167x} > 1000$$

$$e^{0.167x} > \frac{1000}{360}$$

$$0.167x > \ln \frac{1000}{360}$$

$$x > \frac{\ln \frac{1000}{360}}{0.167} \approx 6.11767$$

في العام 2007 يتخطى عدد مشتركي شبكة الإنترنت المليار، ويصبح العدد حوالي 1.159 مليار مشترك.

$$(d) x = \frac{\ln\left(\frac{y}{750}\right)}{0.183}$$

(e) بالتعويض:  $x \approx 5.4$  أي أكثر من 5 سنوات، لذا

2006

$x \approx 13.6$  أي أكثر من 13 سنة، لذا سنة 2014.

### ملخص

- صورة الدالة الأسية هي:  $y = ab^x$
- الدالة تمثل نمواً أسياً عامله  $a$   $b > 1$
- الدالة تمثل تضاعفاً أسياً عامله  $a$   $0 < b < 1$
- تغير الرسوم البيانية للدالة الأسية بتغير قيم إحدى الثوابت التالية:  $a$ ,  $b$ ,  $c$
- $y = ab^{cx} \Leftrightarrow \log_b y = x$
- اقرأ  $\log_b y$  لوغاريتم  $y$  للأساس  $b$
- الأساس  $b$  في المقدار الأس  $b^x$  هو نفسه الأساس في اللوغاريتم وفي كلتا الحالتين  $b > 0$  و  $b \neq 1$  وكذلك الأس.
- $\log_b y = x$  هو اللوغاريتم في المعادلة  $\log_b y = x$
- اللوغاريتمات المعتادة هي اللوغاريتمات للأساس 10 يمكن أن نكتب  $\log_{10} y$  أو  $\log y$
- الدوال اللوغاريتمية هي معكوسات الدوال الأسية.
- خواص اللوغاريتمات
- لأي أعداد حقيقية موجبة  $b, m, n$  حيث  $b \neq 1$
- خاصية الضرب  $\log_b m n = \log_b m + \log_b n$
- خاصية القسمة  $\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$
- خاصية القوى  $\log_b m^k = k \log_b m$
- المعادلة الأسية هي على الشكل  $a = b^{cx}$ ، حيث الأس يتغير.
- $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$ ,  $a = b \Leftrightarrow \log a = \log b$
- بحساب اللوغاريتمات بأي أساس يمكنك استخدام خاصية تغير الأساس لأي أعداد حقيقية موجبة  $b, c, m$  حيث  $b \neq 1, c \neq 1$
- $\log_b m = \frac{\log_c m}{\log_c b}$
- $e \approx 2.71828$
- $e^{mx} = x$
- $\ln e^x = x$
- $\ln e = 1$

165

$$(26) \log_x(3x+4) = 2 \quad (27) \ln(x-2) + \ln x = 1 \quad (28) \ln(x+1) + \ln(x-1) = 4$$

$$(29) \ln x + \ln(2x-1) = 7 \quad (30) 3 \ln x - \ln 2 = 4$$

(31) لنفترض أن ثمن آلة تستخدم في صناعة سلعة ما لها عامل تضاعف سنوي قيمته 0.75. إذا بلغ ثمن الآلة 10 000 دينار بعد 5 سنوات من الاستخدام، فما قيمتها الأساسية؟

(32) الدراسات الاجتماعية: عام 1991 كان عدد سكان كراتشي في باكستان حوالي 8 ملايين نسمة، وكان عامل النمو السنوي في هذا الوقت 1.039.

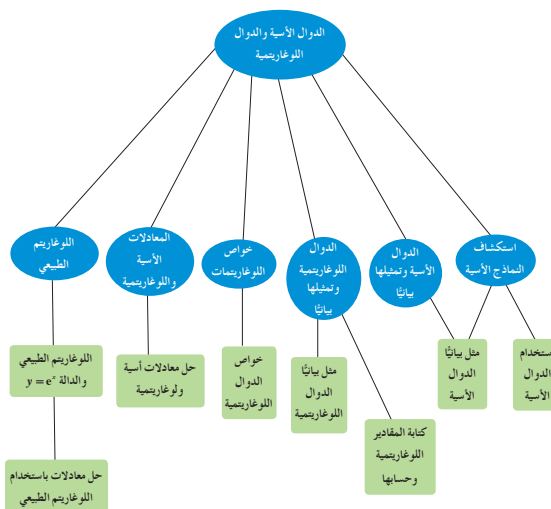
- ما عدد السكان المتوقع في عام 2010؟
- ما معدل الزيادة السنوية المتوقع؟
- متى يصل عدد السكان إلى 10 ملايين نسمة؟

(33) سكان العالم: بلغ عدد سكان العالم في عام 1994 حوالي 5.63 بلايين نسمة، ويقال إنه ينمو بمعدل 2% سنوياً.

- اكتب معادلة أسية لوصف هذا النمو.
- صف نمو عدد السكان كل 35 سنة.
- صف نمو عدد السكان في نصف المدة الزمنية المحددة في الجزء (b).

70

### مخطط تنظيمي للوحدة الرابعة



164

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

### 1 - 5: المتجه في المستوى

جزء 1: الكميات القياسية والكميات المتجهة.

جزء 2: متجه الموضع.

جزء 3: تكافؤ قطعتين موجهتين.

جزء 4: طول (معيار) متجه واتجاهه.

جزء 5: متجه الوحدة.

جزء 6: تساوي متجهين.

جزء 7: المتجه المعاكس.

جزء 8: ضرب متجه في عدد حقيقي.

### 2 - 5: جمع المتجهات وطرحها

جزء 1: جمع المتجهات هندسيًا.

جزء 2: خواص عملية جمع المتجهات في المستوى.

جزء 3: مجموع متجهين جبريًا.

جزء 4: طرح المتجهات.

جزء 5: الفرق بين متجهين جبريًا.

جزء 6: التعبير عن متجه بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين.

### 3 - 5: الضرب الداخلي

جزء 1: الضرب الداخلي لمتجهين.

جزء 2: خواص الضرب الداخلي.

جزء 3: قياس الزاوية بين متجهين.

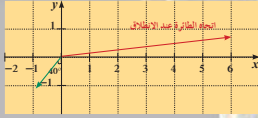
# مقدمة الوحدة

## الوحدة الخامسة

### المتجهات Vectors

#### مشروع الوحدة:

- 1 مقدمة المشروع: استخدم الفيزيائيون والمهندسون المتجهات خاصة في النصف الثاني من القرن التاسع عشر وفي بداية القرن العشرين. بالنسبة إليهم، المتجهات هي قوى وانتقالات وسرعات وحقول كهربائية وحقول مغناطيسية.
- 2 الأهداف: عند إقلاع الطائرات تتعرض لتيارات هوائية قد تغير في اتجاهها. سوف ندرس في هذا المشروع تأثير هذه التيارات على مسار الطائرة.
- 3 الواجب: أوراق رسم، آلة حاسبة، جهاز إسقاط (Data Show)، حاسوب.
- 4 أسئلة حول التطبيق:
  - تبلغ سرعة طيران إحدى الطائرات في الهواء الساكن  $850 \text{ km/h}$  عند انطلاقها باتجاه الشرق واجهت هواء بسرعة  $50 \text{ km/h}$  اتجاهه  $40^\circ$  من الجنوب إلى الغرب.



- عبر عن كل من المتجهين بزوج مرتب لكي تنطلق الطائرة باتجاه الشرق.
- أوجد مجموع المتجهين وطول المنهج الناتج.
- قم بزيارة لإحدى شركات الطيران واسأل أحد الطيارين عن كيفية حساب الاتجاه المناسب للطائرة أثناء الإقلاع وتأثير الهواء على ذلك ثم أسأله عن السرعة الأرضية للطائرة.
- التقرير: اكتب تقريراً مفصلاً يبيّن كيف استفدت من دروس هذه الوحدة ومن لقاءك مع قائد الطائرة لتنفيذ المشروع. ادمع تفريكو بعرض على الحاسوب أو بواسطة جهاز الإسقاط (Data show) كتيبن عملي بشكل أوضح.



#### دروس الوحدة

الضرب الداخلي	جمع المتجهات وطرحها	المتجه في المستوى
5-3	5-2	5-1

166

يعتبر السير "وليام هاملتون"، الرياضي الإيرلندي (1805–1865) أول من استخدم تعبير «المتجه» لحل مسائل هندسية. استخدم "ديكارت" الإحداثيات وترجم منحنيات هندسية إلى معادلات. وفي ألمانيا حوالي العام 1840، عمل "غراسمان" على الهندسة التحليلية من دون الأخذ في الاعتبار إحداثيات النقاط. كانت نقطة الانطلاق جمع قوى وسرعات، أي جمع متجهات على أنها قطع موجهة. وقد أودت به أعماله إلى ضرب المتجهات فسميت «الضرب الخطي»، وتعود تسمية «الضرب الداخلي» إلى "هاملتون" سنة 1853. تطبق حالياً المتجهات في مجالات متعددة، مثل الاقتصاد ومعالجة الصور. تطوّر علم المتجهات على خطين متقاربين: الجبر والهندسة.

فاستخدمت الإحداثيات في المستوى وفي الفضاء للتعامل مع المتجهات، ثم أضيف إليها البعد الرابع وهو الزمن في الفيزياء الحديثة. هندسياً يعبر عن المتجه بانسحاب. قام شال بتطوير نظريته التي تقول إن الشغل المبذول لا يعتمد على المسار بين نقطتين:  $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

في الفيزياء، يسمح الضرب الداخلي باحتساب الشغل عندما نعرف متجه إزاحة الشيء ومتجه القوة:

$$W = F \times d \times \cos \theta$$

## مشروع الوحدة

يوفر هذا المشروع فرصة أمام الطلاب للتفاعل مع مواقف حياتية يتعاملون من خلالها مع عنصر مهم في الرياضيات وهو القطعة الموجهة، حيث أحدث ثورة علمية في مجال الفيزياء فكانت القوى، والانتقال، والسرعة المتجهة، والحقول الكهربائية، والحقول المغناطيسية متجهات ساعدت كثيرًا على إجراء العمليات وإيجاد النتائج بطرائق سهلة ومبسطة. وفي هذا المشروع سنستخدم المتجه لتمثيل السرعة المتجهة للطائرة وأيضًا لتمثيل السرعة المتجهة للهواء.

### إجابات «أسئلة حول التطبيق»

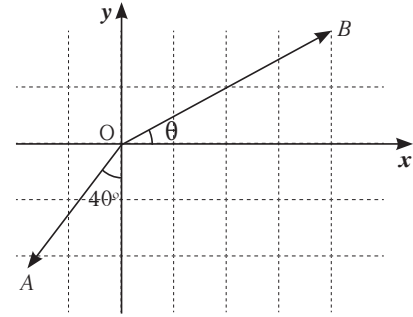
4 (a)  $\langle \overrightarrow{OA} \rangle$  السرعة المتجهة للهواء

$\langle \overrightarrow{OB} \rangle$  يمثل السرعة المتجهة للطائرة

$$\langle \overrightarrow{OA} \rangle = \langle -50 \cos 50^\circ, -50 \sin 50^\circ \rangle$$

$$\langle \overrightarrow{OA} \rangle = \langle -32.14, -38.30 \rangle$$

$$\langle \overrightarrow{OB} \rangle = \langle 850 \cos \theta, 850 \sin \theta \rangle$$



(b) لكي يكون اتجاه الطائرة ناحية الشرق، يجب أن يكون المركب الثاني لمتجه المجموع يساوي الصفر حيث إن:

$$\langle \overrightarrow{OA} \rangle + \langle \overrightarrow{OB} \rangle = \langle -50 \cos 50^\circ + 850 \cos \theta, -50 \sin 50^\circ + 850 \sin \theta \rangle$$

$$-50 \sin 50^\circ + 850 \sin \theta = 0 \text{ أي:}$$

$$\sin \theta = \frac{50 \sin 50^\circ}{850}$$

ومنه نحصل على:  $\theta \approx 2.5827^\circ$

$$\langle \overrightarrow{OA} \rangle = \langle -32.14, -38.30 \rangle, \langle \overrightarrow{OB} \rangle = \langle 849.14, 38.30 \rangle$$

$$\langle \overrightarrow{OD} \rangle = \langle \overrightarrow{OA} \rangle + \langle \overrightarrow{OB} \rangle = \langle 817, 0 \rangle$$

(c) تتنوع الإجابات.

## الوحدة الخامسة

### أضف إلى معلوماتك

ساهم الفلكي وليام هاميلتون William Hamilton في تطوير حساب المتجهات، وهو أول من استخدم سنة 1843 تعبير متجه (Vector)، وهو كلمة مشتقة من اللاتينية وتعني «الذي ينقل».

كذلك استخدم الرسام شيفري (1786 - 1899) Chevreuil، معادلة تسمح بتركيب أكثر من ألف لون انطلاقًا من الألوان: الأزرق، الأحمر، الأخضر:

$$b < \overrightarrow{mb} \rangle + r < \overrightarrow{mr} \rangle + g < \overrightarrow{mg} \rangle = \vec{0}$$

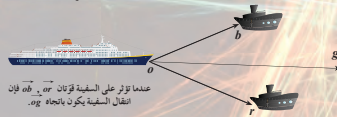
حيث  $b, r, g$  نسب الألوان الثلاث للحصول على اللون الجديد  $m$ .

### أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت الهندسة الإحداثية وفوائدها.
- تعلمت إحداثيات النقطة في المستوى.
- تعلمت الجذور التربيعية.
- تعلمت النسب المثلثية ومقلوباتها.

### ماذا سوف تعلم؟

- المتجهات.
- ضرب المتجه في عدد حقيقي.
- جمع المتجهات وطرحها.
- إيجاد مركبات (إحداثيات) المتجهات.
- الضرب الداخلي.
- استخدام الضرب الداخلي ومركبات (إحداثيات) المتجهات لحل مسائل هندسية.



عندما تؤثر على السفينة قوتان  $\vec{g}$  و  $\vec{b}$  فإن انتقال السفينة يكون باتجاه  $\vec{g}$ .

### المصطلحات الأساسية

المتجه - تساوي متجهين - متجه الوحدة - المتجه المعاكس - الزاوية المحددة بمتجهين - المتجه الصفري - مركبات المتجه - جمع متجهين - متجه الوحدة الأساسي - المتجهان المتوازيان - الضرب الداخلي - الزاوية الموجبة - القطعة الموجبة - نقطة بداية - نقطة نهاية - متجه الموضع - تكافؤ قطعتين متجهيتين.

## التقرير

قدم تقريرًا عن أعمالك إلى زملائك في غرفة الصف. ناقش معهم النتائج والحسابات التي توصلت إليها، وأعد النظر ببعضها إذا كان ذلك ضروريًا، ثم اعرض ما حصلت عليه من مقابلاتك.

## سَلِّم التقييم

4	يعرض الطالب المشروع بشكل كامل - يقوم بالحسابات ويعطي الإجابات والأشكال والتفسيرات كلها بأسلوب منظم ودقيق.
3	يعرض الطالب المشروع بشكل عام - يقوم بالحسابات ويعطي الإجابات كلها مرتكبًا أخطاء قليلة، ويعطي التفسيرات بأسلوب منظم.
2	يعرض الطالب المشروع بشكل كامل - يرتكب الكثير من الأخطاء في الحسابات ويعطي إجابات غير دقيقة، كما أن التفسيرات غير واضحة وغير منظمة.
1	معظم العناصر في المشروع غير كاملة أو ناقصة.

# 1-5: المتجه في المستوى

## 1 الأهداف

- يتعرف القطعة الموجهة.
- يتعرف المتجه.
- يتعرف تكافؤ القطع الموجهة.
- يتعرف المتجهين المتعاكسين.
- يتعرف متجه الموضع.
- يوجد قياس الزاوية المحددة بمتجهين.
- يتعرف تساوي متجهين.

## 2 المفردات والمفاهيم الجديدة

محور سيني - محور صادي - عدد قياسي - القطعة الموجهة - متجه الموضع - المتجه - قطعتان موجهتان متكافئتان - طول المتجه - طول القطعة الموجهة  $PQ$  - متجه معاكس

## 3 الأدوات والوسائل

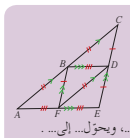
ورق رسم بياني - آلة حاسبة علمية - جهاز إسقاط (Data Show) - حاسوب.

## 4 التمهيد

- (a) أعط الطلاب 3 نقاط ليست على استقامة واحدة، واطلب إليهم إكمال متوازي الأضلاع، ثم اسألهم: هل يوجد أكثر من متوازي أضلاع يمكن تكوينه من هذه النقاط؟
- (b) ذكّر الطلاب بالمتباينة المثلثية: في المثلث طول كل ضلع أصغر من مجموع طولي الضلعين الآخرين.
- (c) اسأل الطلاب عن مفهوم الانسحاب، وضع نقطتين على السبورة، ثم اطلب إلى أحدهم شرح الانسحاب الممكن. استخدم البلاط في أرضية غرفة الصف (أو ارسم مربعات على السبورة)، واطلب إلى أحد الطلاب تنفيذ انسحاب مستخدمًا هذه المربعات.
- (d) ما النسبة التي تعطي ظل زاوية حادة في المثلث القائم؟

## المتجه في المستوى

### The Vector in the Plane



**فلنعمل معًا**  
في الشكل المقابل، القطع المستقيمة المتساوية الطول ممتدة. **1** حدّد ثلاثة متوازي أضلاع في الشكل.  
**2** أكمل:  
**a** في الانسحاب الذي يحوّل  $A$  إلى  $B$ ، يحوّل... إلى...، ويحوّل... إلى...  
**b** في الانسحاب الذي يحوّل... إلى...، يحوّل... إلى...، ويحوّل  $F$  إلى  $B$   
**c** في الانسحاب الذي يحوّل... إلى...، يحوّل  $F$  إلى  $E$  ويحوّل... إلى...  
**3** في السؤال **2** أكمل النص بعد تبديل  $A, B$ .  
**4** ما العلاقة بين الانسحاب الذي يحوّل  $E$  إلى  $B$  ثم  $B$  إلى  $F$  والانسحاب الذي يحوّل  $E$  إلى  $F$ ؟

## 1-5

**درف تعلم**  
• القطعة الموجهة.  
• متجه الموضع.  
• تكافؤ القطع الموجهة.  
• المنسحب.  
• تساوي متجهين.  
• متجهين متعاكسين.  
• الزاوية المحددة بمتجهين وقياسها.

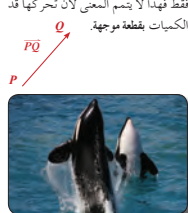
**المفردات والمصطلحات:**  
• محور سيني  
• محور صادي  
• عدد قياسي

Scalar Number  
• القطعة الموجهة  
Oriented Segment  
• متجه الموضع  
Position Vector  
• قطعتان موجهتان متكافئتان  
Two Equivalent Oriented Segments  
Vector  
• متجه  
• طول المتجه  
Length of the Vector  
• متجه معاكس  
Opposite Vector

## الكميات القياسية والكميات المتجهة

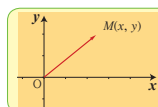
### Scalar Quantities and Oriented Quantities

تقسم الكميات إلى نوعين:  
**كميات قياسية** (عددية). هي كميات يارمز لتعريفها مقدار عددي ووحدة قياس. مثل: الحرارة - المسافة - العمر - الحجم - الزمن - الوزن. فمثلاً: طول مسطرة يساوي 30 cm  
**كميات متجهة**: هي كميات يارمز لتعريفها مقدار عددي واتجاه. مثل: السرعة - المعجلة - الإزاحة - القوة.  
فمثلاً: إذا قلنا أن سيارة تحركت بسرعة 60 km/h فقط فهذا لا يتسم المعنى لأن تحركها قد يكون شمالاً أو في أي اتجاه آخر وتمثّل مثل هذه الكميات بقطعة موجهة.  
**القطعة الموجهة  $PQ$**  لها نقطة بداية  $P$  ونقطة نهاية  $Q$ .  
يمثّل الرمز  $\|PQ\|$  طول القطعة الموجهة  $PQ$ .  
أي المسافة بين نقطة البداية  $P$  ونقطة النهاية  $Q$ .  
**اتجاه  $PQ$**  هو من  $P$  إلى  $Q$ .  
القطعة الموجهة  $QP$  لها طول  $PQ$  نفسه ولكن في الاتجاه المعاكس أي من  $Q$  إلى  $P$ .

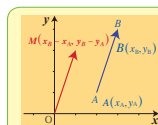


## Position Vector

## متجه الموضع



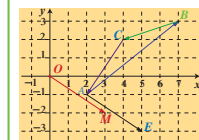
**تعريف**  
القطعة الموجهة  $OM$  التي بدايتها نقطة الأصل ونهايتها  $M(x, y)$  تسمى متجه الموضع، ويمثلها الزوج المرتب  $(x, y)$ .



**تعريف**  
 $AB$  قطعة موجهة في المستوى الإحداثي  
حيث  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$   
متجه الموضع لهذه القطعة هو القطعة الموجهة  $OM$   
حيث  $M(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

## مثال (1)

ليكن:  $A(2, -1), B(7, 3), C(4, 2), M(3, -2)$   
**a** عن الزوج المرتب الذي يمثل متجه الموضع لكل من:  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$ .  
**b** إذا كان متجه الموضع  $OM$  يمثل القطعة الموجهة  $AE$ ، فأوجد إحداثيات  $E$ .



$$\begin{aligned} (x-2, y+1) &= (3, -2) \\ x-2 &= 3 \implies x=5 \\ y+1 &= -2 \implies y=-3 \\ \therefore E &= (5, -3) \end{aligned}$$

من تساوي الأزواج المرتبة:

ارسم على السبورة عدة تمثيلات لمتجه، ثم اشرح للطلاب فكرة أن كل هذه التمثيلات هي لمتجه واحد ولا تمثل عدة متجهات. شدّد على أنه يمكن رسم «تمثيل» المتجه أينما نريد أو وفق الحاجة في المسألة شرط المحافظة على الاتجاه والطول.

**المتجه الصفري:** الطول = 0، من دون طرح موضوع الاتجاه للمتجه الصفري.

أعدهم إلى الشكل في فقرة «فلنعمل معاً». ألفت انتباههم إلى العلاقة بين متوازي الأضلاع والمتجهات المتساوية. يمكنك الاستفادة من هذا الشكل للتركيز على المتجه المعاكس.

ثم شدّد على أن عليهم الانتباه إلى متجه الموضع الذي يمثل حالة خاصة لكل قطعة موجهة.

راجع مع الطلاب العلاقة بين إشارة  $k$  وتحول اتجاه المتجه نتيجة ضربه في عدد غير صفري.

أكد على أن  $\|A\| \times |k|$ ، كمية موجبة دوماً.

أشر إلى العلاقة بين ضرب متجه في عدد حقيقي

والمتجهات المتوازية. يكون المتجهان  $\vec{A}, \vec{B}$  متوازيين إذا فقط إذا أمكن إيجاد عدد حقيقي  $k \neq 0$  بحيث يكون  $\vec{A} = k\vec{B}$ .

اطرح على الطلاب فكرة النقاط على استقامة واحدة، واسألهم عن كيفية إثبات ذلك.

– يجب أن يكون المتجهان متوازيين وأن تكون نقطة مشتركة بين المتجهين، مثال:  $\langle \vec{AB} \rangle = 3 \langle \vec{AC} \rangle$ .

– المتجهان  $\langle \vec{AB} \rangle, \langle \vec{AC} \rangle$  متوازيان والنقطة A مشتركة. ∴ النقاط A, B, C على استقامة واحدة.

في المثال (1)

اشرح بإسهاب الربط بين القطعة الموجهة و متجه الموضع.

**سأول أن تحل**

1. ليكن:  $A(1, -3), B(2, 2), C(2, 3), D(-2, -1)$

2. عن الزوج المرتب الذي يمثل متجه الموضع لكل من:  $\vec{AB}, \vec{BD}$

3. متجه الموضع  $\vec{OI}$  يمثل القطعة الموجهة  $KD$ . أوجد إحداثيات  $K$

**Two Equivalent Oriented Segments** تكافؤ قطعتين موجّهتين

يكون قطعتان موجّهتان متكافئتين إذا كان لهما الطول نفسه والاتجاه نفسه

ولكل قطعتين موجّهتين متكافئتين متجه الموضع نفسه.

فمثلاً من الشكل المرسوم  $\vec{AB}, \vec{CD}$  قطعتين موجّهتين متكافئتين و  $\vec{OM}$  متجه الموضع لهما.

**خاصية**

إذا كانت القطعتان الموجّهتان  $\vec{AB}, \vec{CD}$  متكافئتين، فإن الشكل  $ABDC$  هو متوازي أضلاع حيث النقاط  $A, B, C, D$  ليست على استقامة واحدة.

مجموعة كل القطع الموجهة المكافئة للقطعة الموجهة  $\vec{PQ}$  تكون المتجه  $\vec{PQ}$  ويرمز له بالرمز  $\langle \vec{PQ} \rangle$  حيث طوله واتجاهه هما طول القطعة الموجهة  $\vec{PQ}$  واتجاهها.

ويوجد عدد لا نهائي من القطع الموجهة لها الطول والاتجاه نفسه.

**تعريف المتجه**

المتجه هو مجموعة غير منتهية من القطع الموجهة المتكافئة والتي أحدها متجه الموضع.

إذا كان  $\vec{OM}$  متجه الموضع حيث  $M(x_M, y_M)$ ، فيرمز له بالرمز  $\vec{M}$  ويكتب على الصورة  $\vec{M} = \langle x_M, y_M \rangle$  وتسمى  $x_M, y_M$  مركبي المتجه  $\vec{M}$  المركبة الأفقية (السيّية)،  $y_M$  المركبة الرأسية (الصادية) للمتجه  $\vec{M}$

**مثال (2)**

إذا كانت  $K(-2, 3), L(2, -4), P(0, 3)$  فأوجد مركبات كل من المتجهات التالية:  $\langle \vec{KL} \rangle, \langle \vec{PK} \rangle, \langle \vec{LP} \rangle$

الحل:

$\langle \vec{KL} \rangle = \langle x_L - x_K, y_L - y_K \rangle = \langle 2 - (-2), -4 - 3 \rangle = \langle 4, -7 \rangle$

∴ المركبة السببية = 4، المركبة الصادية = -7

$\langle \vec{PK} \rangle = \langle x_K - x_P, y_K - y_P \rangle = \langle -2 - 0, 3 - 3 \rangle = \langle -2, 0 \rangle$

∴ المركبة السببية = -2، المركبة الصادية = 0

$\langle \vec{LP} \rangle = \langle x_P - x_L, y_P - y_L \rangle = \langle 0 - 2, 3 - (-4) \rangle = \langle -2, 7 \rangle$

∴ المركبة السببية = -2، المركبة الصادية = 7

**سأول أن تحل**

2. إذا كانت  $F(5, 13), E(3, 11), D(-2, -7)$  فأوجد مركبات كل من المتجهات التالية:  $\langle \vec{EF} \rangle, \langle \vec{ED} \rangle, \langle \vec{DE} \rangle$

**طول (مقياس) متجه واتجاهه** Length (Magnitude) of a Vector and its Direction

**تعريف**

لكل متجه  $\vec{U} = \langle x, y \rangle$  مقياس (طول) يرمز له بالرمز  $\|\vec{U}\|$  ويعطى بالعلاقة:  $\|\vec{U}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

يحدد اتجاه المتجه  $\vec{U}$  بالزاوية الموجهة  $\theta$  التي يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحور السينات حيث  $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

إذا كانت  $\alpha$  زاوية الإسناد فإن:

$\theta = \begin{cases} \alpha & \text{عندما } x > 0, y > 0 \\ 180^\circ - \alpha & \text{عندما } x < 0, y > 0 \\ 180^\circ + \alpha & \text{عندما } x < 0, y < 0 \\ 360^\circ - \alpha & \text{عندما } x > 0, y < 0 \end{cases}$

وتحدد زاوية الإسناد  $\alpha$  بالعلاقة:  $\tan \alpha = \left| \frac{y}{x} \right|$



## في المثال (2)

تأكد من أن الطلاب قد فهموا جيداً كيفية إيجاد مركبات المتجه، ثم اطلب إلى عدد من الطلاب كتابة القاعدة على السبورة وذلك لإيجاد مركبات  $\overline{AB}$  إذا كانت:

$$\langle \overline{AB} \rangle = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \text{ فيكون } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$$

## في المثال (3)

توسع في المناقشة حول إيجاد الزاوية بين متجه والاتجاه الموجب لمحور السينات، ثم حدّد في كل حالة من الحالات الأربع كيفية إيجاد قياس الزاوية باستخدام الظل وزاوية الإسناد.

## في المثال (4)

يساعد هذا المثال الطالب على تطبيق التعريف لمتجه الوحدة حيث يستخدم  $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$  أي أن المعيار لهذا المتجه هو 1، ومنه يحل المعادلة لإيجاد مجهول. أخبر الطلاب أن  $x^2$  أو  $y^2$  في المعادلة تعطينا قيمتين مقبولتين للمتغير  $x$  أو قيمتين مقبولتين للمتغير  $y$ .

## في المثال (5)

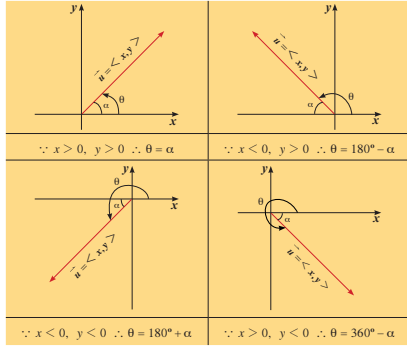
يقدم هذا المثال فرصة للطلاب كي يطبق قواعد إيجاد المركبات السينية والصادية للمتجهات، كي يثبت تكافؤ متجهين أو أكثر وذلك بالمساواة بين المركبات السينية والمساواة بين المركبات الصادية.

## في المثال (6)

يساعد هذا المثال الطلاب على استخدام المساواة بين متجهين بحيث يكتب المساواة بين المركبات السينية والمركبات الصادية ثم يحل ليجد المتغير.

## في المثال (7)

بعد حل المثال، أكد على العلاقة بين قطع مستقيمة في أشكال هندسية والمتجهات، ثم اطلب إليهم كتابة أمثلة بديلة على السبورة تؤكد العلاقة بين قطع مستقيمة في الأشكال الرباعية والمتجهات مثل المستطيل والمربع ومتوازي الأضلاع.



$\therefore x > 0, y > 0 \therefore \theta = \alpha$        $\therefore x < 0, y > 0 \therefore \theta = 180^\circ - \alpha$

$\therefore x < 0, y < 0 \therefore \theta = 180^\circ + \alpha$        $\therefore x > 0, y < 0 \therefore \theta = 360^\circ - \alpha$

**ملاحظة:**  
يمكن أن تكون قياسات الزوايا بالقدرة السني أو التقدير الدائري.  
التحويل بين القياسين السني والدائري تستخدم المعادلة  $\frac{\alpha}{180} = \frac{\beta}{\pi}$  حيث  $\alpha$  بالدرجات،  $\beta$  بالراديان.

### مثال (3)

لكل من المتجهات التالية ارمس متجه الموضع ثم أوجد طول (ميار) المتجه وقياس الزاوية  $\theta$  التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. (استخدم الآلة الحاسبة).

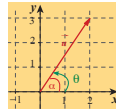
- a.  $\vec{u} = \langle 2, 3 \rangle$       b.  $\vec{v} = \langle -\sqrt{2}, 2 \rangle$   
c.  $\vec{w} = \langle 1, -3 \rangle$       d.  $\vec{t} = \langle -3, -1 \rangle$

الحل:

a.  $\vec{u} = \langle 2, 3 \rangle$   
 $\|\vec{u}\| = \|\langle 2, 3 \rangle\|$   
 $\|\vec{u}\| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2}$   
 $= \sqrt{13} \text{ units}$

نفرض أن  $\theta$  هو قياس الزاوية التي يصنعها  $\vec{u}$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وزاوية الإسناد  $\alpha$ .

$\tan \alpha = \left| \frac{y}{x} \right| = \left| \frac{3}{2} \right| = \frac{3}{2}$   
باستخدام الآلة الحاسبة  $\alpha \approx 56^\circ 18' 35.76''$   
 $\therefore x > 0, y > 0 \therefore \theta = \alpha$   
 $\therefore \theta \approx 56^\circ 18' 35.76''$



**استخدام الآلة الحاسبة:**  
مثال: لإيجاد قياس الزاوية  $\theta$  إذا كانت  $\tan \theta = \frac{3}{2}$   
اضغط على:  $\text{shift} \tan^{-1} \frac{3}{2}$   
يظهر على الشاشة  $\tan^{-1} \frac{3}{2}$   
ثم أدخل:  $\frac{3}{2}$   
يظهر على الشاشة  $56.30993247$   
اضغط على:  $\text{enter}$   
على الشاشة يظهر  $56^\circ 18' 35.76''$

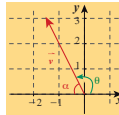
172

b.  $\vec{v} = \langle -\sqrt{2}, 2 \rangle$   
 $\|\vec{v}\| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (2)^2} = \sqrt{6} \text{ units}$

نفرض أن  $\theta$  هو قياس الزاوية التي يصنعها  $\vec{v}$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وأن زاوية الإسناد  $\alpha$ .

$\tan \alpha = \left| \frac{y}{x} \right| = \left| \frac{2}{-\sqrt{2}} \right| = \sqrt{2}$   
 $\therefore \alpha = 54^\circ 44' 8.2''$   
 $\therefore x < 0, y > 0 \therefore \theta = 180^\circ - \alpha$   
 $\therefore \theta \approx 125^\circ 15' 51.8''$

باستخدام الآلة الحاسبة



c.  $\vec{w} = \langle 1, -3 \rangle$   
 $\|\vec{w}\| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10} \text{ units}$

نفرض أن  $\theta$  هو قياس الزاوية التي يصنعها  $\vec{w}$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وأن زاوية الإسناد  $\alpha$ .

$\tan \alpha = \left| \frac{y}{x} \right| = \left| \frac{-3}{1} \right| = 3$   
 $\therefore \alpha = 71^\circ 33' 54.18''$   
 $\therefore x > 0, y < 0 \therefore \theta = 360^\circ - \alpha$   
 $\therefore \theta \approx 288^\circ 26' 5.32''$

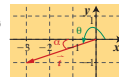
باستخدام الآلة الحاسبة



d.  $\vec{t} = \langle -3, -1 \rangle$   
 $\|\vec{t}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10} \text{ units}$

نفرض أن  $\theta$  هو قياس الزاوية التي يصنعها  $\vec{t}$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وأن زاوية الإسناد  $\alpha$ .

$\tan \alpha = \left| \frac{y}{x} \right| = \left| \frac{-1}{-3} \right| = \frac{1}{3}$   
 $\therefore \alpha = 18^\circ 26' 5.82''$   
 $\therefore x < 0, y < 0 \therefore \theta = 180^\circ + \alpha$   
 $\therefore \theta \approx 198^\circ 26' 5.82''$



حاول أن تحل

لكل من المتجهات التالية ارمس متجه الموضع ثم أوجد ميار المتجه وقياس الزاوية  $\theta$  التي يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

- a.  $\vec{m} = \langle 2, 2 \rangle$       b.  $\vec{n} = \langle -1, -2 \rangle$   
c.  $\vec{p} = \langle -2, 3 \rangle$       d.  $\vec{q} = \langle 1, -4 \rangle$

173

## في المثال (8)

يبين هذا المثال كيفية ضرب متجه بعدد حقيقي غير الصفر، وكيف أن مركبات المتجه هي التي يتم ضربها بالعدد الحقيقي، علمًا أنه إذا كان العدد الحقيقي موجبًا نحصل على متجه له الاتجاه نفسه للمتجه الأساسي، ولكن إذا كان العدد الحقيقي سالبًا نحصل على متجه له اتجاه معاكس للمتجه الأساسي.

## في المثال (9)

أكد للطلاب أن النقاط تكون على استقامة واحدة إذا أمكن إيجاد متجهين أحدهما يساوي المتجه الآخر مضروبًا بعدد حقيقي غير صفري، وبشرط وجود نقطة مشتركة.

## في المثال (10)

يساعد هذا المثال الطلاب على فهم كيفية استخدام ناتج ضرب العدد القياسي (موجب أو سالب) بالقطعة الموجهة، وذلك لرسم نقاط تقع على القطعة الموجهة نفسها.

## 6 الربط

لا يوجد.

## 7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

معظم الأخطاء التي يقع فيها الطلاب هي عدم مراعاة الاتجاه عند التعامل مع المتجهات. اطلب إليهم أن يسألوا أنفسهم دائمًا عن الاتجاه في كل تمرين أو نشاط في هذا الدرس.

## 8 التقييم

راقب الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل»، ثم تأكد من صحة عملهم ودقته.

**ملاحظة:**

1 المتجه  $\vec{a} = \langle x, 0 \rangle$  هو متجه موضع بدايته نقطة الأصل  $(0, 0)$  ونهايته  $M(x, 0)$  ومعايره  $|x|$  وحدة طول.

إذا كانت  $x > 0$ ، فإن قياس الزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هو  $\theta = 0$  أما إذا كانت  $x < 0$ ، فإن قياس الزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هو  $\theta = \pi$ .

2 المتجه  $\vec{a} = \langle 0, y \rangle$  هو متجه موضع بدايته نقطة الأصل ونهايته  $N(0, y)$  ومعايره  $|y|$  وحدة طول.

فإذا كانت  $y > 0$ ، فإن قياس الزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هو  $\theta = \frac{\pi}{2}$  أما إذا كانت  $y < 0$ ، فإن قياس الزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هو  $\theta = \frac{3\pi}{2}$ .

3 المتجه  $\langle 0, 0 \rangle$  هو متجه معايره صفر وليس له اتجاه معلوم ويرمز له بالرمز  $\vec{0}$ .

**The Unit Vector متجه الوحدة**

تعريف المتجه  $\vec{u} = \langle x, y \rangle$  هو متجه وحدة إذا كان معايره يساوي الوحدة أي أن:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$$

فمثلًا  $\langle 1, 0 \rangle$ ،  $\langle 0, 1 \rangle$ ،  $\langle -1, 0 \rangle$ ،  $\langle 0, -1 \rangle$  هي متجهات وحدة.

174

**مثال (4)**

إذا كان  $\vec{u} = \langle \frac{2}{5}, y \rangle$  فأوجد قيمة  $y$  بحيث يصبح  $\vec{u}$  متجه وحدة.

الحل:  
يكون  $\vec{u}$  متجه وحدة عندما:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$$

$$\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + y^2} = 1$$

$$\frac{4}{25} + y^2 = 1$$

$$y^2 = 1 - \frac{4}{25}$$

$$y^2 = \frac{21}{25}$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{21}}{5} \text{ أو } y = -\frac{\sqrt{21}}{5}$$

حاول أن تحل

1 إذا كان  $\vec{v} = \langle x, \frac{12}{13} \rangle$  فأوجد قيمة  $x$  بحيث يصبح  $\vec{v}$  متجه وحدة.

**Two Equal Vectors تساوي متجهين**

ليكن:  $\vec{A} = \langle x_A, y_A \rangle$ ،  $\vec{B} = \langle x_B, y_B \rangle$   
 $\vec{A} = \vec{B} \iff x_A = x_B$ ،  $y_A = y_B$

ونلاحظ أن المتجهات المتساوية لها نفس الطول ونفس الاتجاه.

**مثال (5)**

إذا كانت  $S(-1, 6)$ ،  $R(-4, 2)$ ،  $P(3, 4)$ ،  $O(0, 0)$  في المستوى الإحداثي فأثبت أن:  $\langle \vec{RS} \rangle = \langle \vec{OP} \rangle$ .

الحل:  
نوجد المركبات السينية والمركبات الصادية لكل من المتجهين:

$$\langle \vec{RS} \rangle = \langle x_S - x_R, y_S - y_R \rangle = \langle -1 - (-4), 6 - 2 \rangle = \langle 3, 4 \rangle$$

$$\langle \vec{OP} \rangle = \langle x_P - x_O, y_P - y_O \rangle = \langle 3 - 0, 4 - 0 \rangle = \langle 3, 4 \rangle$$

∴ للمتجهين المركبات نفسها  
∴ المتجهان متساويان:  $\langle \vec{RS} \rangle = \langle \vec{OP} \rangle$

حاول أن تحل

2 إذا كانت  $\vec{A}(0, 1)$ ،  $\vec{B}(1, 3)$ ،  $\vec{C}(3, 6)$ ،  $\vec{D}(4, 8)$  في المستوى الإحداثي فأثبت أن:  $\langle \vec{AB} \rangle = \langle \vec{CD} \rangle$

175

## اختبار سريع

1  $A, B$  نقطتان في المستوى.

ضع النقاط  $M, N$  حيث

$$\langle \overrightarrow{AM} \rangle = 2 \langle \overrightarrow{AB} \rangle, \langle \overrightarrow{AN} \rangle = -0.5 \langle \overrightarrow{AB} \rangle$$

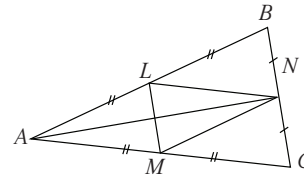


2 انظر إلى الشكل أدناه، ثم أكمل:

$$\langle \overrightarrow{AL} \rangle = \langle \overrightarrow{MN} \rangle = \langle \overrightarrow{LB} \rangle$$

معاكس  $\langle \overrightarrow{LM} \rangle$  هو:

$$\langle \overrightarrow{CN} \rangle \text{ أو } \langle \overrightarrow{NB} \rangle$$



## 9 إجابات وحلول

فلنعمل معاً

1  $BFDC, BFED, ABDF$

2 (a)  $B$  إلى  $C$ ,  $F$  إلى  $D$

(b)  $D$  إلى  $E$ ,  $D$  إلى  $C$

(c)  $A$  إلى  $F$ ,  $B$  إلى  $D$

3  $C$  إلى  $B$ ,  $D$  إلى  $F$

4 كلاهما يحوّل  $E$  إلى  $F$

«حاول أن تحل»

1 (a)  $\langle \overrightarrow{AB} \rangle = \langle 2 - 1, 2 - (-3) \rangle$

$$\langle \overrightarrow{AB} \rangle = \langle 1, 5 \rangle$$

$$\langle \overrightarrow{BD} \rangle = \langle -2 - 2, -1 - 2 \rangle$$

$$\langle \overrightarrow{BD} \rangle = \langle -4, -3 \rangle$$

(b)  $\langle \overrightarrow{OC} \rangle = \langle \overrightarrow{KD} \rangle$

$$\langle 2, 3 \rangle = \langle -2 - x, -1 - y \rangle$$

$$-2 - x = 2; x = -4$$

$$-1 - y = 3; y = -4$$

ومنه  $K(-4, -4)$

2  $\langle \overrightarrow{EF} \rangle = \langle 5 - 3, 13 - 11 \rangle = \langle 2, 2 \rangle$

$$\langle \overrightarrow{ED} \rangle = \langle -2 - 3, -7 - 11 \rangle = \langle -5, -18 \rangle$$

$$\langle \overrightarrow{DE} \rangle = \langle 3 - (-2), 11 - (-7) \rangle = \langle 5, 18 \rangle$$

(6) مثال

ليكن المتجهان  $\vec{A} = \langle 2x + 1, 3y - 1 \rangle$ ,  $\vec{B} = \langle 3, 2 \rangle$  حيث  $x, y$  عددا حقيقيان. أوجد فيما  $x, y$  اللتين تحققان  $\vec{A} = \vec{B}$ .

الحل:

$$\vec{A} = \vec{B} \Rightarrow 2x + 1 = 3, 3y - 1 = 2$$

$$2x + 1 = 3 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$3y - 1 = 2 \Rightarrow 3y = 3 \Rightarrow y = 1$$

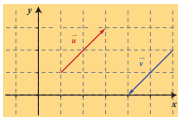
$$\therefore x = 1, y = 1$$

حاول أن تحل

(6) ليكن المتجهان  $\vec{A} = \langle -2x + 3, 4y - 1 \rangle$ ,  $\vec{B} = \langle -1, 3 \rangle$  حيث  $x, y$  عددا حقيقيان. أوجد فيما  $x, y$  اللتين تحققان  $\vec{A} = \vec{B}$ .

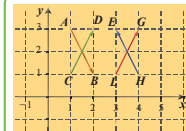
### The Opposite Vector

### المتجه المعاكس



■ إذا كان  $\vec{u} = \langle a, b \rangle$  فإن المتجه  $-\vec{u} = \langle -a, -b \rangle$  هو المتجه المعاكس لـ  $\vec{u}$ .  
 ■ مركبات المتجه المعاكس هي المعكوس الجمعي لمركبات المتجه.  
 ■ المتجه  $-\vec{u}$  هو متجه معاكس للمتجه  $\vec{u}$ .  
 ■  $\langle \vec{AB} \rangle = -\langle \vec{BA} \rangle$

(7) مثال



في الشكل المقابل أوجد:  
 a متجهين متساويين.  
 b متجهين معاكسين.

الحل:

a من الرسم المقابل يبدو أن  $\vec{CD}$ ,  $\vec{LG}$  متساويان.

للتحقق تبدأ أولاً بقراءة إحداثيات كل من النقاط  $C, L, D, G$ .

ثم نوجد مركبات كل من المتجهين  $\langle \vec{CD} \rangle$ ,  $\langle \vec{LG} \rangle$ .

$$\therefore C(1,1), D(2,3)$$

$$\therefore \langle \vec{CD} \rangle = \langle x_D - x_C, y_D - y_C \rangle = \langle 1, 2 \rangle$$

$$\therefore L(3,1), G(4,3)$$

$$\therefore \langle \vec{LG} \rangle = \langle x_G - x_L, y_G - y_L \rangle = \langle 1, 2 \rangle$$

$$\therefore \langle \vec{CD} \rangle = \langle \vec{LG} \rangle$$

176

b من الشكل يبدو أن  $\langle \vec{AB} \rangle$ ,  $\langle \vec{HE} \rangle$  متعاكسان.

تكرر الخطوات التي اتبعت في a.

$$\therefore A(1,3), B(2,1)$$

$$\therefore \langle \vec{AB} \rangle = \langle x_B - x_A, y_B - y_A \rangle = \langle 1, -2 \rangle$$

$$\therefore E(3,3), H(4,1)$$

$$\therefore \langle \vec{HE} \rangle = \langle x_E - x_H, y_E - y_H \rangle = \langle -1, 2 \rangle$$

$\therefore$  مركبات  $\langle \vec{AB} \rangle$  هي المعكوس الجمعي لمركبات  $\langle \vec{HE} \rangle$ .

$\therefore$  نستنتج أن المتجهين  $\langle \vec{AB} \rangle$ ,  $\langle \vec{HE} \rangle$  متعاكسان.

حاول أن تحل

7 ارسم متجه الموضع  $\vec{u}$  حيث مركباته  $\langle 1, 2 \rangle$ .

من النقطة  $A(2, -1)$  ارسم متجهها مساوياً للمتجه  $\vec{u}$  ومتجهها معاكساً للمتجه  $\vec{u}$  واكتب مركباتهما.

### ضرب متجه في عدد حقيقي Multiplying a Vector by a Real Number

$\vec{u}$  متجه غير صفري،  $k$  عدد حقيقي غير صفري ( $k \in \mathbb{R}$ )

إن ناتج ضرب المتجه  $\vec{u}$  بالعدد  $k$  هو متجه واتر من إليه بـ  $k\vec{u}$

$$\therefore \vec{u} = \langle x, y \rangle \therefore k\vec{u} = \langle kx, ky \rangle$$

ملاحظة:

• إذا كان  $\vec{u} = \vec{0}$  أو  $k = 0$ ، فإن  $k\vec{u} = \vec{0}$  والعكس صحيح.

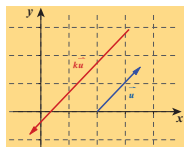
• يكون للمتجهين  $\vec{u}$ ,  $k\vec{u}$  الاتجاه نفسه إذا كان  $k > 0$

• ويكون  $k\vec{u}$  في الاتجاه المعاكس للمتجه  $\vec{u}$  إذا كان  $k < 0$

• تعطى العلاقة بين طولي المتجهين  $\vec{u}$ ,  $k\vec{u}$  كالتالي:  $\|k\vec{u}\| = |k| \|\vec{u}\|$



$k > 0$



$k < 0$

تذكر:

تدل  $|k|$  القيمة المطلقة

للعدد الحقيقي  $k$ .

ويعرف كما يلي:

$$|k| = \begin{cases} k & k > 0 \\ 0 & k = 0 \\ -k & k < 0 \end{cases}$$

177

**خواص**

1 يكون للمتجهين غير الصفريين  $\langle \vec{AB} \rangle, \langle \vec{CD} \rangle$  ، الاتجاه نفسه إذا وجد عدد حقيقي موجب  $k$  يحقق  $\langle \vec{AB} \rangle = k \langle \vec{CD} \rangle$

2 يكون للمتجهين غير الصفريين  $\langle \vec{AB} \rangle, \langle \vec{CD} \rangle$  ، اتجاهين متعاكسين إذا وجد عدد حقيقي سالب  $k$  يحقق  $\langle \vec{AB} \rangle = k \langle \vec{CD} \rangle$

3 تكون النقاط  $A, B, C$  على استقامة واحدة إذا وجد عدد حقيقي غير صفري  $k$  يحقق  $\langle \vec{AB} \rangle = k \langle \vec{AC} \rangle$

**مثال (8)**

إذا كان  $\vec{A} = \langle -1, 2 \rangle$  فأوجد:

a  $2\vec{A}$       b  $-\vec{A}$       c  $0.5\vec{A}$

الحل:

a  $2\vec{A} = \langle 2(-1), 2(2) \rangle = \langle -2, 4 \rangle$   
b  $-\vec{A} = \langle -(-1), -(2) \rangle = \langle 1, -2 \rangle$   
c  $0.5\vec{A} = \langle 0.5(-1), 0.5(2) \rangle = \langle -0.5, 1 \rangle$

**سأول أن تحل**

إذا كان  $\vec{B} = \langle 3, -2 \rangle$  فأوجد:

a  $3\vec{B}$       b  $-5\vec{B}$       c  $\frac{3}{2}\vec{B}$

**مثال (9)**

أثبت أن النقاط  $A(2,3), B(-2,5), C(10,-1)$  على استقامة واحدة.

الحل:

لكي نثبت أن النقاط  $A, B, C$  على استقامة واحدة نحدد أحد المتجهات ولكن  $\vec{AB}$  ثم نبحث عن متجه آخر يساوي  $\langle \vec{AB} \rangle$  حيث  $k$  عدد حقيقي غير صفري.

$\langle \vec{AB} \rangle = \langle x_B - x_A, y_B - y_A \rangle = \langle -2 - 2, 5 - 3 \rangle = \langle -4, 2 \rangle$   
نخبر المتجه  $\langle \vec{AC} \rangle$   
 $\langle \vec{AC} \rangle = \langle x_C - x_A, y_C - y_A \rangle = \langle 10 - 2, -1 - 3 \rangle = \langle 8, -4 \rangle$

$\therefore \langle \vec{AC} \rangle = -2 \langle \vec{AB} \rangle$   
 $\langle \vec{AC} \rangle = k \langle \vec{AB} \rangle$

أي أن  
 $\therefore$  النقاط  $A, B, C$  على استقامة واحدة.

**سأول أن تحل**

أثبت أن النقاط  $K(0, -1), L(2,3), M(-2, -5)$  على استقامة واحدة.

**مثال (10)**

مثلث  $ABC$

1 ارسم  $\langle \vec{CC}_1 \rangle = 3 \langle \vec{CA} \rangle$  بحيث  $\langle \vec{CC}_1 \rangle = 3 \langle \vec{CA} \rangle$   
2 ارسم  $\langle \vec{AB}_1 \rangle = -2 \langle \vec{AB} \rangle$  بحيث  $\langle \vec{AB}_1 \rangle = -2 \langle \vec{AB} \rangle$

الحل:

1  $\langle \vec{CC}_1 \rangle = 3 \langle \vec{CA} \rangle$   
 $\therefore k = 3$  عدد موجب  
 $\therefore \langle \vec{CC}_1 \rangle, \langle \vec{CA} \rangle$  لهما الاتجاه نفسه.  
نقطة مشتركة  $C, A, C_1 \in \vec{CA} \therefore$  نقطة مشتركة  $C, A, C_1$  على استقامة واحدة  
نرسم على  $\vec{CA}$  النقطة  $C_1$  بحيث إن  $\|\vec{CC}_1\| = 3\|\vec{CA}\|$  في نفس اتجاه  $\langle \vec{CA} \rangle$   
فيكون  $\langle \vec{CC}_1 \rangle = 3 \langle \vec{CA} \rangle$

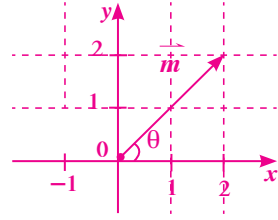
2  $\langle \vec{AB}_1 \rangle = -2 \langle \vec{AB} \rangle$   
 $\therefore k = -2$  عدد سالب  
 $\therefore \langle \vec{AB}_1 \rangle, \langle \vec{AB} \rangle$  لهما اتجاهان متعاكسان  
 $\therefore$  نقطة مشتركة  $A, B, B_1$   
 $B_1 \in \vec{BA}$   
 $\| \vec{AB}_1 \| = 2 \| \vec{AB} \|$  بحيث إن  $B, A, B_1$  على استقامة واحدة  
فيكون  $\langle \vec{AB}_1 \rangle = -2 \langle \vec{AB} \rangle$  في اتجاه معاكس للمتجه  $\langle \vec{AB} \rangle$

**سأول أن تحل**

1 مثلث  $ABC$  ارسم  $D$  بحيث  $\langle \vec{AD} \rangle = 3 \langle \vec{AB} \rangle$   
ثم  $H$  بحيث  $\langle \vec{BH} \rangle = -\frac{3}{2} \langle \vec{BC} \rangle$

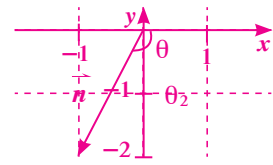
3 (a)  $\theta_1 = (\vec{ox}, \vec{m})$

$\tan \alpha = \left| \frac{y}{x} \right| = \left| \frac{2}{2} \right| = 1, \therefore x > 0, y > 0$   
 $\therefore \theta_1 = \alpha = 45^\circ$



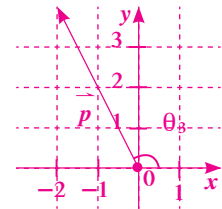
(b)  $\theta_2 = (\vec{ox}, \vec{n})$

$\tan \alpha = \left| \frac{y}{x} \right| = \left| \frac{-2}{-1} \right| = 2, \Rightarrow \alpha = 63.4349$   
 $\therefore x < 0, y < 0$   
 $\therefore \theta_2 = 180 + \alpha = 243.4349$   
 $\theta_2 = 243^\circ 26' 5.82''$



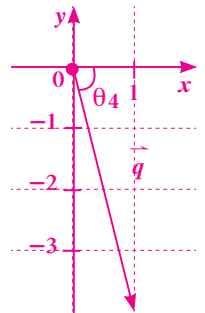
(c)  $\theta_3 = (\vec{ox}, \vec{p})$

$\tan \alpha = \left| \frac{y}{x} \right| = \left| \frac{3}{-2} \right| = 1.5$   
 $\therefore \alpha = 56.3099$   
 $\therefore x < 0, y > 0$   
 $\therefore \theta_3 = 180 - \alpha = 123.6912$   
 $\therefore \theta_3 = 123^\circ 41' 24''$



(d)  $\theta_4 = (\vec{ox}, \vec{q})$

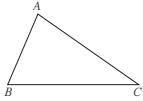
$\tan \alpha = \left| \frac{y}{x} \right| = \left| \frac{-4}{1} \right| = 4$   
 $\alpha = 75.9637$   
 $\therefore x > 0, y < 0$   
 $\therefore \theta_4 = 360 - \alpha = 284^\circ 2' 10''$



المتجه في المستوى  
The Vector in the Plane

المجموعة A تمارين مقالية

- (1) لتأخذ في المستوى الإحداثي النقاط،  $A(-3,4), B(2,-1), C(3,5)$
- (a) عيّن الزوج المرتب الذي يمثل متجه الموضع لكل من:  $\langle \overline{AB} \rangle, \langle \overline{BC} \rangle, \langle \overline{CA} \rangle$
- (b) إذا كان متجه الموضع  $\overline{OM}$  حيث  $M(4,3)$  يمثل القطعة الموجهة  $\overline{BE}$  فأوجد إحداثيات  $E$  بفرض أن  $E(x,y)$
- (2) لتأخذ في المستوى الإحداثي النقاط،  $E(-3,2), F(2,-1), G(4,-2)$
- أوجد مركبات كل من المتجهات التالية:  $\langle \overline{EF} \rangle, \langle \overline{GF} \rangle, \langle \overline{EG} \rangle$
- (3) لكل من المتجهات التالية:  $\langle \overline{u} \rangle = \langle 3, 2 \rangle, \langle \overline{v} \rangle = \langle -2, 4 \rangle, \langle \overline{w} \rangle = \langle -3, -2 \rangle, \langle \overline{r} \rangle = \langle 2, -3 \rangle$
- (a) ارسم متجه الموضع.
- (b) أوجد طول كل متجه وقياس الزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.
- (4) إذا كان  $\langle \overline{u} \rangle = \langle x, \frac{3}{5} \rangle$  فأوجد قيمة  $x$  بحيث يصبح  $\overline{u}$  متجه وحدة.
- (5) لتأخذ في المستوى الإحداثي النقاط،  $A(3,-1), B(5,-4), C(2,4), D(4,1)$
- أثبت أن:  $\langle \overline{AB} \rangle = \langle \overline{CD} \rangle$
- (6) ليكن:  $\langle \overline{A} \rangle = \langle 4, -3 \rangle, \langle \overline{B} \rangle = \langle 3x-2, 4y+1 \rangle$  أوجد قيمتي  $x, y$  بحيث يكون:  $\overline{A} = \overline{B}$
- (7) لتأخذ في المستوى الإحداثي،  $A(5,2), B(-2,6), C(-3,3), D(4,-1)$
- أثبت أن:  $\langle \overline{AB} \rangle$  معاكس لـ  $\langle \overline{CD} \rangle$
- (8) لتأخذ في المستوى الإحداثي النقاط،  $A(2,-3), B(-1,3), C(1,-1)$
- أثبت أن النقاط الثلاث على استقامة واحدة.



- (9) مثلث  $ABC$
- (a) ارسم  $\langle \overline{AE} \rangle = -\frac{1}{2} \langle \overline{AB} \rangle$ ، حيث،  $\langle \overline{AE} \rangle = -\frac{1}{2} \langle \overline{AB} \rangle$
- (b) ارسم  $\langle \overline{BD} \rangle = \frac{3}{2} \langle \overline{BC} \rangle$ ، حيث،  $\langle \overline{BD} \rangle = \frac{3}{2} \langle \overline{BC} \rangle$

4  $\|\vec{v}\|^2 = x^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1^2$

$x^2 = 1 - \frac{144}{169}$

$x^2 = \frac{25}{169}; x = \pm \frac{5}{13}$

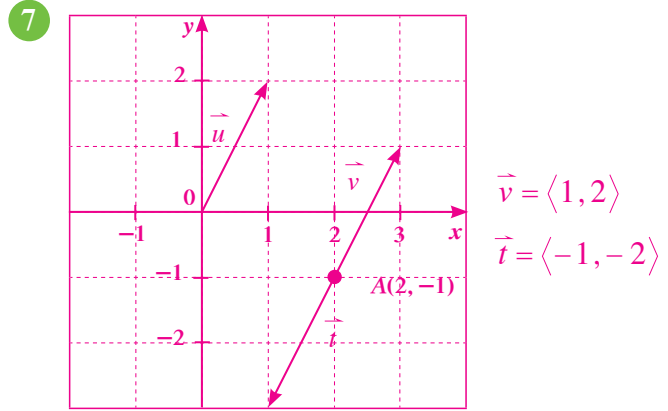
5  $\vec{U} = \langle \overline{AB} \rangle = \langle 1-0, 3-1 \rangle = \langle 1, 2 \rangle$

$\vec{V} = \langle \overline{CD} \rangle = \langle 4-3, 8-6 \rangle = \langle 1, 2 \rangle$

$\vec{U} = \vec{V} = \langle 1, 2 \rangle$

6  $\overline{A} = \overline{B}; -2x + 3 = -1 \Rightarrow x = 2$

$4y - 1 = 3 \Rightarrow y = 1$



8 (a)  $3\overline{B} = \langle 9, -6 \rangle$

(b)  $-5\overline{B} = \langle -15, 10 \rangle$

(c)  $\frac{3}{2}\overline{B} = \langle \frac{9}{2}, -3 \rangle$

9  $\langle \overline{KL} \rangle = \langle 2, 4 \rangle$

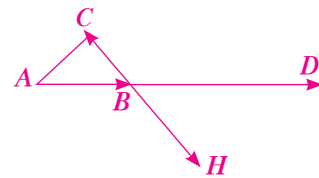
$\langle \overline{KM} \rangle = \langle -2, -4 \rangle$

$\therefore \langle \overline{KL} \rangle = -\langle \overline{KM} \rangle$

K نقطة مشتركة

K, L, M على استقامة واحد

10  $\langle \overline{AD} \rangle = 3 \langle \overline{AB} \rangle$  فيكون  $D, B, A$  على استقامة واحدة والاتجاه نفسه، ثم  $\langle \overline{BH} \rangle = -\frac{3}{2} \langle \overline{BC} \rangle$  فيكون  $H, C, B$  على استقامة واحدة.  $\langle \overline{BH} \rangle$  باتجاه معاكس مع  $\langle \overline{BC} \rangle$ .



- (10) لتأخذ في المستوى الإحداثي النقاط،  $A(3,2), B(1,5), C(7,4)$
- (a) أوجد إحداثيات النقطة  $D$  حيث،  $\langle \overline{BD} \rangle = -\frac{1}{2} \langle \overline{BA} \rangle$
- (b) أوجد إحداثيات النقطة  $E$  حيث،  $\langle \overline{AE} \rangle = \frac{3}{2} \langle \overline{AC} \rangle$
- (c) أثبت أن:  $\langle \overline{DE} \rangle, \langle \overline{BC} \rangle$  لهما الاتجاه نفسه.

المجموعة B تمارين موضوعية

- في التمارين (1-5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.
- لتأخذ في المستوى الإحداثي النقاط التالية،  $A(2,1), B(-3,0), C(3,-4), D(x,y)$
- (1) الزوج المرتب الذي يمثل متجه الموضع لـ  $\overline{BA}$ ، هو  $\langle -5, -1 \rangle$
- (2) مركبات  $\overline{BC}$  هي  $\langle 6, 4 \rangle$
- (3) المثلث  $ABC$  هو متطابق الضلعين.
- (4)  $m(\overline{AB}, \overline{AC}) = 90^\circ$
- (5) إذا كان  $\langle \overline{AB} \rangle = \langle \overline{CD} \rangle$  فإن:  $x = -2, y = -5$
- في التمارين (6-10)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.
- (6) في المستوى الإحداثي إذا كان  $\langle \overline{u} \rangle = \langle -2, 2 \rangle$  فإن قياس الزاوية التي يصنعها  $\overline{u}$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات يساوي:
- (a)  $45^\circ$  (b)  $-45^\circ$  (c)  $135^\circ$  (d)  $225^\circ$
- (7) لتأخذ في المستوى الإحداثي  $\langle \overline{u} \rangle = \langle \frac{12}{13}, y \rangle$  إذا كان  $\overline{u}$  متجه وحدة فإن  $y$  يساوي:
- (a)  $\frac{1}{13}$  (b)  $\frac{\sqrt{13}}{13}$  (c)  $\frac{5}{13}$  (d)  $\pm \frac{5}{13}$
- (8) لتكن في المستوى الإحداثي النقاط،  $A(1,3), B(3,2), C(0,-1), D(-4,1)$  فيكون:
- (a)  $\langle \overline{AB} \rangle = \langle \overline{CD} \rangle$  (b)  $\langle \overline{AB} \rangle = -\langle \overline{CD} \rangle$
- (c)  $\langle \overline{CD} \rangle = -2 \langle \overline{AB} \rangle$  (d)  $\langle \overline{AB} \rangle = -2 \langle \overline{CD} \rangle$
- (9) لتأخذ في المستوى الإحداثي النقاط،  $E(2,4), F(-1,-5), G(x,y)$  إذا كان:  $\langle \overline{EF} \rangle = \langle \overline{EG} \rangle$  فإن  $(x, y)$  يساوي:
- (a)  $(-1, -5)$  (b)  $(-5, -13)$  (c)  $(5, 13)$  (d)  $(1, 5)$
- (10) لتأخذ في المستوى الإحداثي النقطتين،  $P(-2,3), Q(x,y)$  والمتجه  $\overline{OM} = \langle 4, -2 \rangle$  إذا كان  $\langle \overline{OM} \rangle$  متجه الموضع للمتجه  $\langle \overline{PQ} \rangle$  فإن  $(x, y)$  يساوي:
- (a)  $(6, -5)$  (b)  $(2, 1)$  (c)  $(-2, -1)$  (d)  $(-6, 5)$

## 2-5: جمع المتجهات وطرحها

### 1 الأهداف

- يجمع المتجهات.
- يطرح المتجهات.
- يتعرف خصائص جمع المتجهات.
- يكتب متجه بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين.
- يوجد مركبات المتجهات.

### 2 المفردات والمفاهيم الجديدة

جمع المتجهات - علاقة "شال" - قانون متوازي الأضلاع - مركبات المتجه .

### 3 الأدوات والوسائل

ورق رسم بياني - آلة حاسبة بيانية - جهاز إسقاط (Data Show) - حاسوب.

### 4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) ما هو متجه الموضع؟

(b)  $A(2, -3), B(5, 1), C(-1, -2), D(2, 2)$

هل  $\overline{AB}$  متكافئ مع  $\overline{CD}$ ؟

(c) هل  $\overline{AB} = \langle 2, -3 \rangle$  متعاكس مع

$\langle -6, 9 \rangle$ ؟

### 5 التدريس

اطرح على الطلاب فكرة "شال": الجهد المبذول لا يعتمد على المسار بين نقطتين واكتب على السبورة:

$\langle \overline{AB} \rangle + \langle \overline{BC} \rangle = \langle \overline{AC} \rangle$ . يمكن تفسير علاقة

شال بواسطة الإزاحة: الإزاحة من  $A$  إلى  $B$  ثم من  $B$  إلى  $C$  إلى

تكافئ الإزاحة من  $A$  إلى  $C$ .

### جمع المتجهات وطرحها

#### Addition and Subtraction of Vectors

**دعنا نفكر ونتناقش**

$M$  جسم نقطي يعرض إلى قوتين  $\overline{MA}$  و  $\overline{MB}$  كما في الشكل. ما هو مسار الجسم  $M$  المتأثر بهاتين القوتين؟

- 1 أكمل رسم متوازي الأضلاع  $AMBC$ ، ثم ارسم  $\overline{MC}$ .
- 2 هل يتغير مسار الجسم  $M$  إذا تغير قياس الزاوية  $\angle AMB$ ؟ أعد رسم الشكل أعلاه مع قياس أصغر من القياس أعلاه. ارسم متوازي الأضلاع  $AMBC$ ، ثم  $\overline{MC}$ . ماذا تنتسج؟
- 3 هل يتغير مسار الجسم  $M$  إذا تغير  $|\overline{MB}|$ ؟ أعد رسم الشكل أعلاه مع أصغر مما هو معطى. ارسم متوازي الأضلاع  $AMBC$ ، ثم  $\overline{MC}$ . ماذا تنتسج؟

#### Adding of Vectors Geometrically

**جمع المتجهات هندسياً**

$\vec{A}, \vec{B}$  متجهان.  
أوجد:  $\vec{A} + \vec{B}$

• علاقة شال

إذا كانت  $L$  نقطة من المستوي، فإننا نرسم  $\langle \overline{LM} \rangle$  بحيث يكون  $\langle \overline{LM} \rangle = \vec{A}$ ، ثم نرسم  $\langle \overline{MN} \rangle$  بحيث يكون  $\langle \overline{MN} \rangle = \vec{B}$  فيكون  $\langle \overline{LN} \rangle = \langle \overline{LM} \rangle + \langle \overline{MN} \rangle = \vec{A} + \vec{B}$

أي ثلاث نقاط في المستوى تسمى العلاقة:  $\langle \overline{LM} \rangle + \langle \overline{MN} \rangle = \langle \overline{LN} \rangle$  علاقة شال.

• إكمال متوازي الأضلاع

إذا كانت  $L$  نقطة من المستوي، فإننا نرسم  $\langle \overline{LM} \rangle$  بحيث يكون  $\langle \overline{LM} \rangle = \vec{A}$ ، ونرسم  $\langle \overline{LC} \rangle$  بحيث يكون  $\langle \overline{LC} \rangle = \vec{B}$

$N$  هي النقطة من المستوي التي تكمل متوازي الأضلاع  $MLCN$ .

$\vec{A} + \vec{B} = \langle \overline{LM} \rangle + \langle \overline{LC} \rangle = \langle \overline{LM} \rangle + \langle \overline{MN} \rangle = \langle \overline{LN} \rangle$  علاقة شال

سوف تعلم

- جمع المتجهات.
- طرح المتجهات.
- خصائص جمع المتجهات.
- كتابة متجه بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين.
- مركبات المتجهات.
- إيجاديات منتصف قطعة مستقيمة.

المفردات والمصطلحات:

- جمع المتجهات
- Adding Vectors
- علاقة شال
- Chasles's Relation
- قانون متوازي الأضلاع
- Parallelogram Law
- مركبات المتجه
- Vector Components

معلومة:

ميشال شال

Michel Chasles

عالم رياضيات فرنسي الشهير بالمعادلة التي تحمل اسمه:  $\langle \overline{AB} \rangle + \langle \overline{BC} \rangle = \langle \overline{AC} \rangle$

180

#### مثال (1)

$ABC$  مثلث. عت:  $M$  حيث  $\langle \overline{AM} \rangle = \langle \overline{AB} \rangle + \langle \overline{AC} \rangle$

$L$  حيث  $\langle \overline{AL} \rangle = \langle \overline{AB} \rangle + \langle \overline{BC} \rangle$

الحل:

a  $\langle \overline{AM} \rangle = \langle \overline{AB} \rangle + \langle \overline{AC} \rangle$  للمجهولين  $\langle \overline{AB} \rangle$ ،  $\langle \overline{AC} \rangle$  نقطة بداية مشتركة  $BACM$  هي النقطة التي تكمل متوازي الأضلاع  $BACM$

b علاقة شال  $\langle \overline{AL} \rangle = \langle \overline{AB} \rangle + \langle \overline{BC} \rangle = \langle \overline{AC} \rangle$   
 $\therefore \langle \overline{AL} \rangle = \langle \overline{AC} \rangle$   
 $\therefore L = C$

حاول أن تحل

1  $ABC$  مثلث. عت:  $M$  حيث  $\langle \overline{BM} \rangle = \langle \overline{BA} \rangle + \langle \overline{BC} \rangle$

$N$  حيث  $\langle \overline{BN} \rangle = \langle \overline{BC} \rangle + \langle \overline{AB} \rangle$

#### مثال (2)

في المثلث  $ABC$  عت  $L$  بحيث  $\langle \overline{BL} \rangle = \langle \overline{AC} \rangle + \langle \overline{BC} \rangle$  مع توضيح خطوات الحل.

الحل:

رسم  $\langle \overline{BK} \rangle = \langle \overline{AC} \rangle$  بالتوازي في المعادلة  $\langle \overline{BL} \rangle = \langle \overline{AC} \rangle + \langle \overline{BC} \rangle$  تصبح  $\langle \overline{BL} \rangle = \langle \overline{BK} \rangle + \langle \overline{BC} \rangle$  للمجهولين  $\langle \overline{BK} \rangle$ ،  $\langle \overline{BC} \rangle$  نقطة بداية مشتركة

• نستخدم الحالة العامة لجمع متجهين ونكمل متوازي الأضلاع  $CBKL$  فيكون  $\langle \overline{BL} \rangle = \langle \overline{AC} \rangle + \langle \overline{BC} \rangle$  لاحظ أن  $L \in \overline{AC}$

حاول أن تحل

2 في المثلث  $ABC$  عت  $N$  بحيث  $\langle \overline{BN} \rangle = \langle \overline{BA} \rangle + \langle \overline{CA} \rangle$

181

أشر إلى أنه يمكن تعميم علاقة "شال" لأكثر من 3 نقاط.

$$\langle \overline{AB} \rangle + \langle \overline{BC} \rangle + \langle \overline{CD} \rangle = \langle \overline{AD} \rangle$$

$$\langle \overline{AB} \rangle + \langle \overline{BC} \rangle + \langle \overline{CD} \rangle$$

$$= (\langle \overline{AB} \rangle + \langle \overline{BC} \rangle) + \langle \overline{CD} \rangle$$

$$= \langle \overline{AC} \rangle + \langle \overline{CD} \rangle$$

$$= \langle \overline{AD} \rangle$$

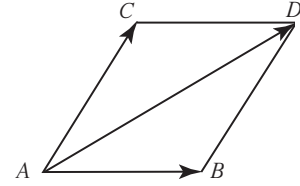
$$\langle \overline{AB} \rangle + \langle \overline{BC} \rangle + \langle \overline{CD} \rangle + \langle \overline{DA} \rangle = \vec{0}$$

وهذه العلاقة تفسر كالاتي: الإزاحة من A حتى الوصول إلى A تعني كأن الشيء بقي مكانه ولم يتحرك.

يمكن تفسير الطريقة الثانية في جمع المتجهات: طريقة متوازي الأضلاع باستخدام علاقة "شال":

$$\langle \overline{AB} \rangle + \langle \overline{AC} \rangle = \langle \overline{AB} \rangle + \langle \overline{BD} \rangle$$

$$= \langle \overline{AD} \rangle \quad (\langle \overline{AC} \rangle = \langle \overline{BD} \rangle)$$



في الحالة العامة لجمع متجهين، أعد التركيز على أن

موضع متجه الجمع يتغير مع اختيار نقطة الأساس، لكن كل المتجهات التي نحصل عليها تكون متساوية (الاتجاه نفسه، الطول نفسه). لطرح متجه نجم جمع المتجه المعاكس:

$$\langle \overline{AB} \rangle - \langle \overline{CD} \rangle = \langle \overline{AB} \rangle + (-\langle \overline{CD} \rangle)$$

$$= \langle \overline{AB} \rangle + \langle \overline{DC} \rangle$$

أشر إلى أنه أحياناً في حل التمارين، يستحسن استبدال

$$\langle \overline{BA} \rangle \text{ بـ } -\langle \overline{AB} \rangle$$

إذا كانت O نقطة الأصل، فبين للطلاب العلاقة بين

$$\langle \overline{OM} \rangle \text{ ومركبات } M$$

اطلب إلى أحد الطلاب أن يرسم على السبورة جدولاً يضمه قواعد الحساب بالإحداثيات مع أمثلة تطبيقية.

### Properties of Adding Vectors in the Plane

### خواص عملية جمع المتجهات في المستوى

لأي ثلاثة متجهات  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{C}$  في المستوى

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

خاصية الإبدال في جمع المتجهات

$$\vec{A} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{A} = \vec{A}$$

خاصية العنصر المحايد  $\vec{0}$

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$$

خاصية التجميع في جمع المتجهات

$$\vec{A} + (-\vec{A}) = (-\vec{A}) + \vec{A} = \vec{0}$$

خاصية المعكوس الجمعي

$$\vec{A} + \vec{C} = \vec{B} + \vec{C} \Rightarrow \vec{A} = \vec{B}$$

خاصية الحذف

$$K(\vec{A} + \vec{B}) = K\vec{A} + K\vec{B}$$

خاصية التوزيع مع عدد حقيقي غير الصفر

(3) مثال

مثلث ABC أوجد:

a  $L = \langle \overline{AC} \rangle + \langle \overline{BA} \rangle + \langle \overline{CB} \rangle$

b  $K = \langle \overline{AB} \rangle + \langle \overline{CA} \rangle + \langle \overline{BC} \rangle + \langle \overline{AB} \rangle$

الحل:

a  $L = \langle \overline{AC} \rangle + \langle \overline{BA} \rangle + \langle \overline{CB} \rangle$

$$= (\langle \overline{AC} \rangle + \langle \overline{BA} \rangle) + \langle \overline{CB} \rangle$$

خاصية التجميع

$$= (\langle \overline{BA} \rangle + \langle \overline{AC} \rangle) + \langle \overline{CB} \rangle$$

خاصية الإبدال

$$= \langle \overline{BC} \rangle + \langle \overline{CB} \rangle$$

علاقة شال

$$= \langle \overline{BB} \rangle$$

علاقة شال

$$= \vec{0}$$

متجه الصفري  $\vec{0}$

b  $K = \langle \overline{AB} \rangle + \langle \overline{CA} \rangle + \langle \overline{BC} \rangle + \langle \overline{AB} \rangle$

$$= (\langle \overline{AB} \rangle + \langle \overline{CA} \rangle) + (\langle \overline{BC} \rangle + \langle \overline{AB} \rangle)$$

خاصية التجميع

$$= (\langle \overline{CA} \rangle + \langle \overline{AB} \rangle) + (\langle \overline{AB} \rangle + \langle \overline{BC} \rangle)$$

خاصية الإبدال

$$= \langle \overline{CB} \rangle + \langle \overline{AC} \rangle$$

علاقة شال

$$= \langle \overline{AC} \rangle + \langle \overline{CB} \rangle$$

خاصية الإبدال

$$= \langle \overline{AB} \rangle$$

علاقة شال

سأول أن تحل

4 مثال مقلع ABCD أوجد:

a  $\langle \overline{AB} \rangle + \langle \overline{CD} \rangle + \langle \overline{BC} \rangle$

b  $\langle \overline{AD} \rangle + \langle \overline{CA} \rangle + \langle \overline{BC} \rangle + \langle \overline{DB} \rangle$

182

### Adding Two Vectors Algebraically

### مجموع متجهين جبرياً

تعريف

إذا كان  $\vec{A} = \langle x_A, y_A \rangle$ ,  $\vec{B} = \langle x_B, y_B \rangle$  متجهين في المستوى الإحداثي فإن مجموع هذين المتجهين هو المتجه  $\vec{A} + \vec{B} = \langle x_A + x_B, y_A + y_B \rangle$  ويرمز له بالرمز  $\vec{A} + \vec{B}$ . أي أن:  $\vec{A} + \vec{B} = \langle x_A + x_B, y_A + y_B \rangle$

(4) مثال

إذا كان  $\vec{A} = \langle 2, 3 \rangle$ ,  $\vec{B} = \langle -1, 5 \rangle$  فأوجد:

a  $\vec{A} + \vec{B}$

b  $2\vec{A} + 3\vec{B}$

الحل:

a  $\vec{A} + \vec{B} = \langle x_A + x_B, y_A + y_B \rangle$

$$= \langle 2 + (-1), 3 + 5 \rangle$$

$$= \langle 1, 8 \rangle$$

b  $2\vec{A} + 3\vec{B} = \langle 2x_A, 2y_A \rangle + \langle 3x_B, 3y_B \rangle$

$$= \langle 2(2), 2(3) \rangle + \langle 3(-1), 3(5) \rangle$$

$$= \langle 4, 6 \rangle + \langle -3, 15 \rangle$$

$$= \langle 4 - 3, 6 + 15 \rangle$$

$$= \langle 1, 21 \rangle$$

سأول أن تحل

4 إذا كان  $\vec{A} = \langle 4, -2 \rangle$ ,  $\vec{B} = \langle -7, 5 \rangle$  فأوجد:

a  $\vec{A} + \vec{B}$

b  $3\vec{A} + 5\vec{B}$

### Subtracting Vectors

### طرح المتجهات

نحصل على ناتج طرح المتجه  $\vec{B}$  من المتجه  $\vec{A}$  بجمع المتجه  $\vec{A}$  إلى المتجه المعاكس للمتجه  $\vec{B}$

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

183

## في المثال (1)

اشرح للطلاب أن هذا المثال هو تطبيق مباشر لجمع متجهين باستخدام التعريف وهو مقدمة للمثال (2).

## في المثال (2)

ركّز مع الطلاب على فكرة إنشاء نقطة باستخدام ناتج جمع متجهين، وذلك وفق شروط معينة على شكل هندسي، وكيفية استخدام المتجه المعاكس والمتجه المكافئ.

## في المثالين (3)، (5)

أعط أمثله بديلة للطلاب، ثم اطلب إليهم استخدام خاصية الإبدال وخاصية التجميع بهدف استخدام علاقة "شال" وجمع المتجهات.

## في المثالين (6)، (4)

شدّد للطلاب على المعلومات التالية:

في المستوى الإحداثي عند جمع المتجهات نوجد ناتج جمع المركبات المناظرة على المحور السيني وعلى المحور الصادي، وعند طرح المتجهات نوجد ناتج طرح المركبات المناظرة على المحور السيني وعلى المحور الصادي.

## في المثال (8)

من المهم جداً تركيز فكرة الربط بين أي متجه مع متجهي الوحدة الأساسيين  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  لأن ذلك سوف يسهّل أمام الطلاب كتابة المتجه بدلالة متجهي الوحدة.

## 6 الربط

يقدم المثال (7) نموذجاً عن كيفية استخدام المتجهات في مواقف حياتية.

## 7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب عند جمع المتجهات باستخدام طريقة بدل الأخرى (علاقة "شال"، طريقة متوازي الأضلاع). بين لهم أن علاقة "شال" تُعتمد عندما يكون المتجهان متتابعين (أي يبدأ المتجه الثاني حيث ينتهي الأول) وتُعتمد طريقة متوازي الأضلاع عندما يكون للمتجهين نقطة

**مثال (5)**

$\vec{AB} > - < \vec{AC} > = < \vec{CB} >$  أثبت أن:

الحل:

طرح المتجهات  
 $< \vec{AB} > - < \vec{AC} > = < \vec{AB} > + < (-\vec{AC}) >$   
 $= < \vec{AB} > + < \vec{CA} >$   
 $= < \vec{CA} > + < \vec{AB} >$   
 $= < \vec{CB} >$

خاصية الإبدال  
علاقة شال

حاول أن تحل

5. مضلع في المستوى. أوجد:

a.  $< \vec{AB} > + < \vec{CD} > - < \vec{AD} > - < \vec{CB} >$       b.  $< \vec{AB} > - < \vec{AC} > + < \vec{BC} > + < \vec{AD} >$

### Difference of Two Vectors Algebraically

الفرق بين متجهين جبرياً

تعريف

إذا كان  $\vec{A} = \langle x_A, y_A \rangle$ ,  $\vec{B} = \langle x_B, y_B \rangle$  متجهين في المستوى الإحداثي فإن:

$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) = \langle x_A - x_B, y_A - y_B \rangle$

**مثال (6)**

إذا كان  $\vec{A} = \langle 5, 12 \rangle$ ,  $\vec{B} = \langle 11, 7 \rangle$  فأوجد:

a.  $\vec{A} - \vec{B}$       b.  $4\vec{A} - 6\vec{B}$

الحل:

a.  $\vec{A} - \vec{B} = \langle x_A - x_B, y_A - y_B \rangle$   
 $= \langle 5 - 11, 12 - 7 \rangle$   
 $= \langle -6, 5 \rangle$

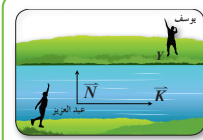
b.  $4\vec{A} - 6\vec{B} = \langle 4x_A, 4y_A \rangle - \langle 6x_B, 6y_B \rangle$   
 $= \langle 4(5), 4(12) \rangle - \langle 6(11), 6(7) \rangle$   
 $= \langle 20, 48 \rangle - \langle 66, 42 \rangle$   
 $= \langle 20 - 66, 48 - 42 \rangle$   
 $= \langle -46, 6 \rangle$

حاول أن تحل

6. إذا كان  $\vec{A} = \langle -3, 0 \rangle$ ,  $\vec{B} = \langle 5, -9 \rangle$  فأوجد:

a.  $\vec{A} - \vec{B}$       b.  $-3\vec{A} + 4\vec{B}$

184



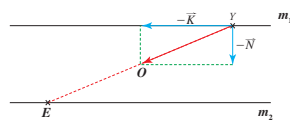
**مثال (7)** تطبيق حياتي (الفيزياء)

يريد عبد العزيز عبور النهر سباحة للوصول إلى الموقع (Y) حيث يقف يوسف على الضفة الثانية. في كل لحظة، تمثل قوة التيار بالمتجه  $\vec{K}$  ويمثل الجهد الذي يبذله عبد العزيز بالمتجه  $\vec{N}$ .

عند أي موقع على الضفة الأولى يجب أن ينطلق عبد العزيز للوصول بدقة إلى الموقع (Y) حيث يقف يوسف؟

الحل:

يمثل المستقيمان المتوازيان  $m_1$ ,  $m_2$  ضفتي النهر وتمثل النقطة O موقع يوسف.



من Y، نرسم المتجه  $-\vec{K}$  والمتجه  $-\vec{N}$  وليكن  $\vec{YO}$  ناتج جمع هذين المتجهين. يقطع  $\vec{YO}$  الضفة الأولى في E.

∴ يجب أن ينطلق عبد العزيز من الموقع الممثل بالنقطة E للوصول بدقة إلى الموقع (Y) حيث يقف يوسف.

حاول أن تحل

7. تفكر ناقد: وضح لماذا بدأ الحل من موقع يوسف.

التعبير عن متجه بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين

### Expressing a Vector in Terms of the Two Basic Unit Vectors

تعريف

- المتجه  $\vec{i} = \langle 1, 0 \rangle$  الذي إحدى قطعه الموجبة متجه الموقع الذي نهايته النقطة (1, 0) يسمى بمتجه الوحدة الأساسي في اتجاه المحور السيني (x-axis).
- المتجه  $\vec{j} = \langle 0, 1 \rangle$  الذي إحدى قطعه الموجبة متجه الموقع الذي نهايته النقطة (0, 1) يسمى بمتجه الوحدة الأساسي في اتجاه المحور الصادي (y-axis).

185



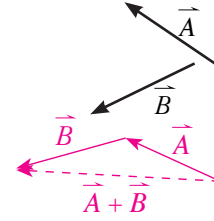
مشتركة.

## 8 التقييم

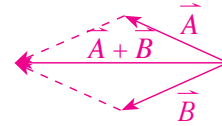
راقب الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل»، وتحقق من صحة عملهم.

### اختبار سريع

1 أوجد بطريقتين مختلفتين ناتج جمع المتجهين التاليين:



طريقة أولى:



طريقة ثانية:

2 إذا كانت:

$$A(2, 2), B(6, 4), C(-2, -4), D(-3, 3)$$

نقاط في المستوى الإحداثي.

أوجد:

(a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

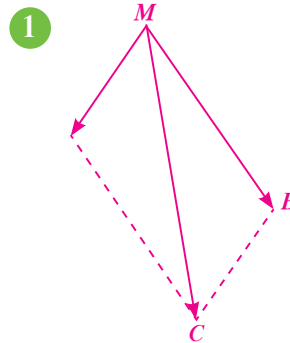
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} &= \langle 4, 2 \rangle + \langle -8, -8 \rangle \\ &= \langle -4, -6 \rangle \end{aligned}$$

(b)  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CD}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CD} &= \langle -4, -6 \rangle - \langle -1, 7 \rangle \\ &= \langle -3, -13 \rangle \end{aligned}$$

## 9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»



تحقق من عمل الطلاب.

2 نعم، يتغير المسار فكلما صغر قياس الزاوية أصبح  $\overrightarrow{MC}$  أطول وبالعكس.

يمكن التعبير عن أي متجه  $\overrightarrow{OA} = \langle x_A, y_A \rangle$  بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين  $\vec{i}, \vec{j}$  كما يلي:

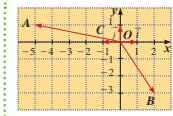
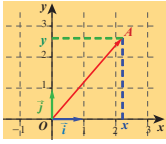
$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} &= x_A \vec{i} + y_A \vec{j} \\ x_A \vec{i} + y_A \vec{j} &= \langle x_A, 0 \rangle + \langle 0, y_A \rangle \\ &= \langle x_A, y_A \rangle \\ &= \overrightarrow{OA} \end{aligned}$$

∴  $\overrightarrow{OA} = \langle x_A, y_A \rangle$  يكتب بدلالة  $\vec{i}, \vec{j}$  على الصورة:

$$\overrightarrow{OA} = x_A \vec{i} + y_A \vec{j}$$

كذلك  $\vec{u} = \langle x, y \rangle$  يكتب بدلالة  $\vec{i}, \vec{j}$  على الصورة  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$

فمثلاً:  $\overrightarrow{OM} = \langle 5, 6 \rangle$  يكتب بدلالة  $\vec{i}, \vec{j}$  على الصورة  $\overrightarrow{OM} = 5\vec{i} + 6\vec{j}$



مثال (8)

لنكن النقاط:  $A(-5, 1)$ ,  $B(2, -3)$ ,  $C(-1, 0)$  على المستوى الإحداثي حيث مركزه النقطة  $O$ .

اكتب كلًا من المتجهات  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{OC}$  بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين  $\vec{i}, \vec{j}$ .

الحل:

∴  $A(-5, 1)$  ∴  $\langle \overrightarrow{OA} \rangle = -5\vec{i} + \vec{j}$

تعريف مركبات المتجه

∴  $B(2, -3)$  ∴  $\langle \overrightarrow{OB} \rangle = 2\vec{i} + (-3\vec{j})$

تعريف مركبات المتجه

$= 2\vec{i} - 3\vec{j}$

تعريف مركبات المتجه

∴  $C(-1, 0)$  ∴  $\langle \overrightarrow{OC} \rangle = (-1)\vec{i} + 0\vec{j}$

$= -\vec{i} + 0$

$= -\vec{i}$

$\overrightarrow{A} + \overrightarrow{C} = \overrightarrow{A}$

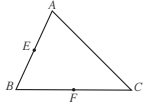
حاول أن تحل

8 لنكن النقاط:  $A(3, 4)$ ,  $B(-2, 5)$ ,  $C(-4, -1)$

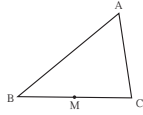
اكتب كلًا من المتجهات:  $\langle \overrightarrow{OA} \rangle$ ,  $\langle \overrightarrow{OB} \rangle$ ,  $\langle \overrightarrow{OC} \rangle$  بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين  $\vec{i}, \vec{j}$ .

جمع المتجهات وطرحها  
Addition and Subtraction of Vectors

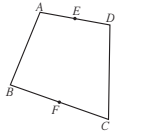
المجموعة A تمارين مقالية



- (1) في المثلث  $ABC$  المقابل  $E$  منتصف  $AB$  و  $F$  منتصف  $BC$   
 (a) عَيّن النقطة  $M$  حيث،  $\langle \overrightarrow{BM} \rangle = \langle \overrightarrow{BE} \rangle + \langle \overrightarrow{BF} \rangle$   
 (b) عَيّن النقطة  $N$  حيث،  $\langle \overrightarrow{AN} \rangle = \langle \overrightarrow{AE} \rangle + \langle \overrightarrow{AF} \rangle$   
 (c) أثبت أن،  $\langle \overrightarrow{AB} \rangle = \langle \overrightarrow{MN} \rangle$



- (2) في المثلث  $ABC$  المقابل،  $M$  منتصف  $BC$   
 (a) عَيّن النقطة  $P$  حيث،  $\langle \overrightarrow{BP} \rangle = \langle \overrightarrow{MA} \rangle + \langle \overrightarrow{MC} \rangle$   
 (b) عَيّن النقطة  $Q$  حيث،  $\langle \overrightarrow{BQ} \rangle = \langle \overrightarrow{AC} \rangle + \langle \overrightarrow{MB} \rangle$

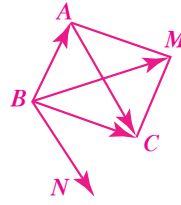


- (3) في الشكل الرباعي  $ABCD$  المقابل  $E$  منتصف  $AD$  و  $F$  منتصف  $BC$   
 (a) عَيّن النقطة  $P$  حيث،  $\langle \overrightarrow{CP} \rangle = \langle \overrightarrow{CD} \rangle + \langle \overrightarrow{BA} \rangle$   
 (b) أثبت أن،  $\langle \overrightarrow{CP} \rangle = \langle \overrightarrow{CE} \rangle + \langle \overrightarrow{BE} \rangle$   
 (c) أثبت أن،  $2 \langle \overrightarrow{EF} \rangle = \langle \overrightarrow{AB} \rangle + \langle \overrightarrow{DC} \rangle$   
 (4)  $A, B, C, D$  نقاط في المستوى، بسّط:  
 (a)  $2 \langle \overrightarrow{AB} \rangle + 4 \langle \overrightarrow{BC} \rangle + 2 \langle \overrightarrow{CD} \rangle + 2 \langle \overrightarrow{DA} \rangle$   
 (b)  $2 \langle \overrightarrow{AB} \rangle - 3 \langle \overrightarrow{AC} \rangle + \langle \overrightarrow{AD} \rangle + 2 \langle \overrightarrow{BD} \rangle$

- (5) انطلق مركب صيد من الميناء ناحية الشرق واجتاز مسافة 250 km، ثم انحرف عمودياً باتجاه الشمال ليجتاز مسافة 40 km، ثم عاد مباشرة بخط مستقيم إلى النقطة التي انطلق منها في الميناء بمتوسط سرعة يساوي 50 km/h  
 (a) استخدم المتجهات لتتبع مسار المركب في رحلته.  
 (b) ما الوقت الذي استغرقه المركب للعودة إلى الميناء؟  
 (6) يسبح خالد من الضفة النهر الجنوبية إلى الضفة الشمالية المقابلة بمتوسط سرعة يساوي 35 km/h وتحرك المياه باتجاه الشرق بمتوسط سرعة يساوي 12 km/h.  
 (a) استخدم المتجهات لتتبع معطيات المسألة.  
 (b) أوجد متوسط السرعة الناتجة التي ينتقل بها خالد من الضفة النهر الجنوبية إلى الضفة الشمالية المقابلة.

3 نعم، تتغير عناصر  $\|\overrightarrow{MC}\|$  الثلاثة مع تغير  $\|\overrightarrow{MB}\|$ .

«حاول أن تحل»



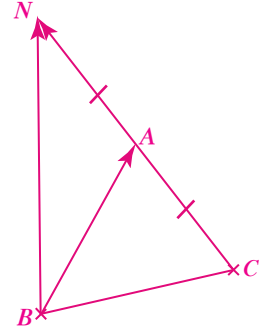
1 (a)  $CBAM$  متوازي الأضلاع.

(b) تحقق من عمل الطلاب:

$$\langle \overrightarrow{BN} \rangle = \langle \overrightarrow{AC} \rangle$$

2  $\langle \overrightarrow{BN} \rangle - \langle \overrightarrow{BA} \rangle = \langle \overrightarrow{CA} \rangle$

$$\therefore \langle \overrightarrow{AN} \rangle = \langle \overrightarrow{CA} \rangle$$



3 (a)  $(\langle \overrightarrow{AB} \rangle + \langle \overrightarrow{BC} \rangle) + \langle \overrightarrow{CD} \rangle$

$$\langle \overrightarrow{AC} \rangle + \langle \overrightarrow{CD} \rangle = \langle \overrightarrow{AD} \rangle$$

(b)  $(\langle \overrightarrow{AD} \rangle + \langle \overrightarrow{DB} \rangle) + (\langle \overrightarrow{BC} \rangle + \langle \overrightarrow{CA} \rangle)$

$$\langle \overrightarrow{AB} \rangle + \langle \overrightarrow{BA} \rangle = \langle \overrightarrow{AA} \rangle = \langle \vec{0} \rangle$$

4 (a)  $\vec{A} + \vec{B} = \langle -3, 3 \rangle$

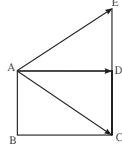
(b)  $3\vec{A} + 5\vec{B} = \langle -23, 19 \rangle$

(7) مثل النقاط التالية في المستوى الإحداثي حيث  $O$  نقطة الأصل،  $\vec{i}, \vec{j}$  متجهان أساسيان  
 $\vec{OA} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ ،  $\vec{OB} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$ ،  $\vec{OC} = -4\vec{i} - \vec{j}$

**المجموعة B تمارين موضوعية**

في التمارين (1-5)، ظلّل إذا كانت العبارة صحيحة، و (ب) إذا كانت العبارة خاطئة.

- (1) إذا كان  $\langle \vec{AB} \rangle + \langle \vec{BC} \rangle = \langle \vec{AC} \rangle$ ، فإن  $AB + BC = AC$  (a) (b)  
 (2)  $\langle \vec{AC} \rangle + \langle \vec{BA} \rangle + \langle \vec{CB} \rangle = \vec{0}$  (a) (b)  
 (3)  $ABCF$  متوازي أضلاع حيث  $\langle \vec{BF} \rangle = \langle 1, 4 \rangle$ ،  $\vec{BA} = \langle -2, 3 \rangle$ ،  $\langle \vec{BC} \rangle = \langle 3, 1 \rangle$  (a) (b)  
 (4) في المستطيل  $ABCD$ ، إذا  $\langle \vec{AE} \rangle = \langle \vec{BD} \rangle$ ،  $\langle \vec{AC} \rangle + \langle \vec{AD} \rangle = \langle \vec{AE} \rangle$  (a) (b)



- (5) في المثلث  $ABC$ ،  $\langle \vec{AB} \rangle - \langle \vec{AC} \rangle + \langle \vec{BC} \rangle = \langle \vec{BA} \rangle = \langle \vec{AB} \rangle$  (a) (b)  
 في التمارين (6-10)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.  
 (6) إذا كان  $\langle \vec{AB} \rangle + 2\langle \vec{MB} \rangle = 2\langle \vec{MC} \rangle + \langle \vec{MA} \rangle$ ، فإن  $\langle \vec{AM} \rangle$  يساوي:  
 (a)  $\langle \vec{MC} \rangle$  (b)  $\langle \vec{CM} \rangle$   
 (c)  $\vec{0}$  (d)  $\frac{2}{3}\langle \vec{CM} \rangle$   
 (7) إذا كان  $\vec{L} = \langle \vec{AC} \rangle + 2\langle \vec{AB} \rangle - \langle \vec{BC} \rangle$ ، فإن:  
 (a)  $\vec{L} = \frac{1}{2}\langle \vec{AB} \rangle$  (b)  $\vec{L} = -\frac{1}{2}\langle \vec{AB} \rangle$   
 (c)  $\vec{L} = 3\langle \vec{AB} \rangle$  (d)  $\vec{L} = -3\langle \vec{AB} \rangle$   
 (8) إذا كان  $\langle \vec{AM} \rangle = 2(3\vec{i} - \vec{j}) + 3(-2\vec{i}) - 2\vec{j}$ ، فإن  $\langle \vec{AM} \rangle =$  يساوي:  
 (a)  $2\vec{i} - 3\vec{j}$  (b)  $3\vec{i} - 2\vec{j}$   
 (c)  $-4\vec{j}$  (d)  $6\vec{i} - 6\vec{j}$

75

5 (a)  $(\langle \vec{AB} \rangle - \langle \vec{AD} \rangle) + (\langle \vec{CD} \rangle - \langle \vec{CB} \rangle)$   
 $= \langle \vec{DB} \rangle + \langle \vec{BD} \rangle$   
 $= \langle \vec{DD} \rangle = \langle \vec{0} \rangle$

(b)  $\langle \vec{CB} \rangle + \langle \vec{BC} \rangle + \langle \vec{AD} \rangle$   
 $= \langle \vec{0} \rangle + \langle \vec{AD} \rangle$   
 $= \langle \vec{AD} \rangle$

6 (a)  $\vec{A} - \vec{B} = \langle -8, 9 \rangle$

(b)  $-3\vec{A} + 4\vec{B} = \langle 29, -36 \rangle$

7 لأننا نعرف إلى أين سوف يصل عبد العزيز وهو الموقع الثابت الذي يقف عنده يوسف، لذلك اعتمدنا الحل انطلاقاً من نقطة الوصول حيث استخدمنا مفهوم جمع المتجهين ومفهوم المتجه المعاكس.

8  $\langle \vec{OA} \rangle = 3\vec{i} + 4\vec{j}$

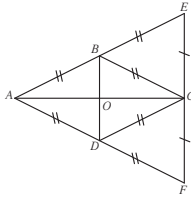
$\langle \vec{OB} \rangle = -2\vec{i} + 5\vec{j}$

$\langle \vec{OC} \rangle = -4\vec{i} - \vec{j}$

(9)  $ABCD$  متوازي أضلاع حيث  $A(-2, 1)$ ،  $B(0, -2)$ ،  $C(3, -1)$ ، إذا إحداثيات  $D$  هي:

- (a)  $(2, 2)$  (b)  $(-1, 2)$  (c)  $(1, 2)$  (d)  $(1, -2)$   
 (10)  $\vec{V} = x\vec{i} - \vec{j}$ ،  $\vec{U} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$  هما متجهان متوازيان. قيمة  $x$  هي:  
 (a) 2 (b) -2 (c) 8 (d) -8

في التمارين (11-14) لديك قائمتان، اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.



من الشكل أعلاه

القائمة (2)	القائمة (1)
(a) $\vec{BD}$	$\vec{AB} + \vec{AD} =$ (11)
(b) $\vec{AC}$	$\vec{CE} + \vec{CF} =$ (12)
(c) $\vec{0}$	
(d) $\vec{DB}$	

القائمة (2)	القائمة (1)
(a) $2\vec{BA}$	$\vec{EA} =$ (13)
(b) $2\vec{BE}$	$2\vec{OC} =$ (14)
(c) $-\vec{CA}$	
(d) $\vec{CA}$	

76

## 3-5: الضرب الداخلي

### 1 الأهداف

- يتعرف الضرب الداخلي.
- يوجد قياس الزاوية بين متجهين.
- يوجد متجه الوحدة في اتجاه متجه.
- يدرس توازي متجهين.
- يدرس تعامد متجهين.

### 2 المفردات والمفاهيم الجديدة

الضرب الداخلي - قياس الزاوية بين متجهين - متجه الوحدة.

### 3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة - جهاز إسقاط (Data Show) - حاسوب.

### 4 التمهيدي

اطلب إلى الطلاب إيجاد:

(a)  $\cos 60^\circ, \cos 45^\circ, \cos(30^\circ), \cos(120^\circ)$

(b) راجع مع الطلاب خصائص المثلث متطابق الأضلاع، والمثلث ثلاثيني - سيني، والمثلث القائم، والمتطابق الضلعين، وذكرهم بالعلاقة بين أطوال أضلاع المثلث في كل حالة.

(c) اطلب إليهم استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد:

$0^\circ < \theta < 180^\circ$  في الحالات التالية:

(a)  $\cos \theta = 0.7843$

(b)  $\cos \theta = -0.4567$

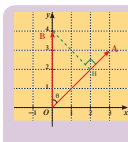
(d) راجع مع الطلاب إذا كان:

$A = \langle 1, -2 \rangle, B = \langle 3, 4 \rangle$

أوجد:  $\|\vec{A}\|, \|\vec{B}\|$

## 3-5

### الضرب الداخلي Scalar Product



#### دعنا نفكر ونتناقش

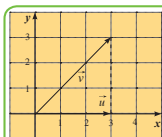
- في الشكل المقابل،  
**a** أوجد  $\|\vec{OA}\|, \|\vec{OB}\|$   
**b** باستخدام المتكافئة أوجد قياس الزاوية  $\theta$  بين المتجهين  $\langle \vec{OA} \rangle, \langle \vec{OB} \rangle$   
**c** باستخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة  $\|\vec{OA}\| \times \|\vec{OB}\| \times \cos \theta$   
**d** نسطق العمود  $\vec{BH}$  على  $\vec{OA}$  أوجد قيمة  $\|\vec{OA}\| \times \|\vec{OH}\|$  وقارنها بما حصلت عليه في **c**.

نرمز للزاوية المحددة بالمتجهين  $\vec{A}, \vec{B}$  بالرمز  $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle$  وكذلك نرمز للزاوية المحددة بالمتجهين  $\vec{AC}, \vec{BD}$  بالرمز  $\langle \vec{AC}, \vec{BD} \rangle$

#### Scalar Product

**الضرب الداخلي لمتجهين**  
 في المستوى الإحداثي لأي متجهين غير صفريين  $\vec{A}, \vec{B}$  ناتج الضرب الداخلي لهما ويرمز له بالرمز  $\vec{A} \cdot \vec{B}$  يساوي ناتج ضرب طولَي المتجهين في جيب تمام قياس الزاوية المحددة بهما

أي أن:  $\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \times \|\vec{B}\| \times \cos \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle, 0^\circ \leq \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle \leq 180^\circ$



#### مثال (1)

إذا كان  $\vec{u} = \langle 3, 0 \rangle, \vec{v} = \langle 3, 3 \rangle$  فأوجد  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .

الحل:

حيث  
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$   
 $\|\vec{u}\| = \sqrt{(3)^2 + (0)^2} = 3 \text{ units}$   
 $\|\vec{v}\| = \sqrt{(3)^2 + (3)^2} = 3\sqrt{2} \text{ units}$   
 قياس الزاوية التي يصنعها المتجهان تساوي  $45^\circ$   
 $\cos \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$   
 ومنه  
 $\therefore \vec{u} \cdot \vec{v} = 3(3\sqrt{2})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 9$

#### حاول أن تحل

إذا كان  $\vec{u} = \langle 0, 2 \rangle, \vec{v} = \langle 2, 2 \rangle$  فأوجد  $\vec{u} \cdot \vec{v}$

187

- سوف تتعلم
- الضرب الداخلي.
  - إيجاد قياس الزاوية بين متجهين.
  - متجه الوحدة.
  - المتجهات المتوازية.

- المفردات والمصطلحات:
- الضرب الداخلي
  - قياس الزاوية بين متجهين
  - Scalar Product
  - Measure of Angle Between Two Vectors
  - متجه الوحدة
  - Unit Vector

#### ملاحظة:

قياس  $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle$  يعني قياس الزاوية المحددة بالمتجهين  $\vec{A}, \vec{B}$

#### تذكر:

المجاور =  $\cos \theta$  الوتر

#### مثال (2)

ABC مثلث متطابق الأضلاع M منتصف  $\vec{BC}$  أوجد:

- a**  $\vec{AC} \cdot \vec{AB}$    **b**  $\vec{MB} \cdot \vec{MC}$    **c**  $\vec{CM} \cdot \vec{CB}$

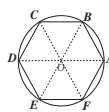
الحل:

**a**  $\vec{AC} \cdot \vec{AB} = \|\vec{AC}\| \times \|\vec{AB}\| \cos \langle \vec{AC}, \vec{AB} \rangle$   
 $= 4 \times 4 \times \cos 60^\circ$   
 $= 4 \times 4 \times \frac{1}{2}$   
 $= 8$

$\therefore M$  منتصف  $\vec{BC}$

**b**  $\vec{MB} \cdot \vec{MC} = \|\vec{MB}\| \times \|\vec{MC}\| \cos \langle \vec{MB}, \vec{MC} \rangle$   
 $= 2 \times 2 \times \cos(180^\circ)$   
 $= -4$

**c**  $\vec{CM} \cdot \vec{CB} = \|\vec{CM}\| \times \|\vec{CB}\| \cos \langle \vec{CM}, \vec{CB} \rangle$   
 $= 2 \times 4 \times \cos(0^\circ)$   
 $= 8$



2  $ABCDEF$  مضلع سداسي منتظم محيطه دائرة مركزها O، حيث طول نصف قطرها 1 cm أوجد:

- a**  $\vec{OA} \cdot \vec{OD}$    **b**  $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$    **c**  $\vec{CB} \cdot \vec{EF}$   
**d**  $\vec{AB} \cdot \vec{DE}$    **e**  $\vec{OB} \cdot \vec{OF}$

#### حاول أن تحل

#### قانون

إذا كان  $\vec{A} = \langle x_A, y_A \rangle, \vec{B} = \langle x_B, y_B \rangle$  متجهين في المستوى الإحداثي  
 فإن  $\vec{A} \cdot \vec{B} = x_A \cdot x_B + y_A \cdot y_B$   
 فإذا كان:  $\vec{A} = \langle x_A, y_A \rangle$  فإن  $\|\vec{A}\|^2 = x_A^2 + y_A^2$

#### نتيجة (1)

إذا كان  $\vec{A} \perp \vec{B}$  فإن:

$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

188

بعد مناقشة الضرب الداخلي للمتجهات، أسألهم:

هل  $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$ ؟ ولماذا؟ أشر إلى أن الفرق يكمن في قياس الزاوية بين المتجهين، ولكن بما أن

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \quad \text{فإن } \cos(-\theta) = \cos \theta$$

أسألهم: ماذا نستنتج إذا كان  $\vec{A}, \vec{B} = 0$  أو  $A, B$  متعامدين؟

أشر إلى أنه إذا استبدلنا  $\vec{A}$  بمعكوسه  $(-\vec{A})$  نعكس قيمة

$$\text{الضرب الداخلي } (-\vec{A}) \cdot \vec{B} = -(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

• يكتب أحد الطلاب خواص الضرب الداخلي على السبورة ويعطي الطلاب أمثلة عن كل خاصية.

• أشر إلى أنه لا يمكن ضرب 3 متجهات داخلياً. لا

معنى رياضياً لـ  $\vec{A} \cdot \vec{B} \cdot \vec{C}$ ، بينما يمكن احتساب

$(\vec{A} \cdot \vec{B}) \times \vec{C}$  ونحصل على متجه موازٍ لـ  $\vec{C}$ ، وبالتالي

الضرب الداخلي ليس تجميعياً.

اطلب إليهم إيجاد  $\vec{A} \cdot \vec{A}$  إذا كان  $\vec{A}$  متجه الوحدة.

$$\|\vec{A}\|^2 = 1$$

اطلب إليهم مقارنة  $\vec{AB} \cdot \vec{AB}$  بطول  $(\vec{AB})^2$

$$\|\vec{AB}\|^2 = AB^2 = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

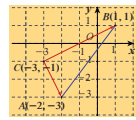
أشر إلى أنه لإيجاد قياس الزاوية بين متجهين، نستخدم الصيغتين المختلفتين للضرب الداخلي معاً.

### في المثال (1)

ناقش مع الطلاب النتائج في هذا المثال لتحقيق فكرة

الضرب الداخلي بين متجهين بخاصة أن هذه العملية على

المتجهين لا تعطي متجهاً بل تعطي عدداً حقيقياً.



مثال (3)

إذا كانت  $A(-2, -3), B(1, 1), C(-3, -1)$  هي رؤوس المثلث  $ABC$ .

اكتب كلًّا من المتجهين  $\langle \vec{CA} \rangle, \langle \vec{CB} \rangle$  بدلالة متجهي الوحدة  $\vec{i}, \vec{j}$ .

أوجد قيمة  $\langle \vec{CA} \rangle \cdot \langle \vec{CB} \rangle$ .

أثبت أن المثلث  $ABC$  قائم في  $C$ .

الحل:

a  $\langle \vec{CA} \rangle = \langle -2 - (-3), -3 - (-1) \rangle = \langle 1, -2 \rangle$

$\langle \vec{CA} \rangle = \vec{i} - 2\vec{j}$

إحداثيات المتجه

$\langle \vec{CB} \rangle = \langle 1 - (-3), 1 - (-1) \rangle = \langle 4, 2 \rangle$

$\langle \vec{CB} \rangle = 4\vec{i} + 2\vec{j}$

إحداثيات المتجه

b  $\langle \vec{CA} \rangle \cdot \langle \vec{CB} \rangle = 1 \times 4 + (-2) \times 2 = 0$

قانون الضرب الداخلي

c  $\therefore \langle \vec{CA} \rangle \cdot \langle \vec{CB} \rangle = 0$

$\therefore \langle \vec{CA} \rangle \perp \langle \vec{CB} \rangle$

ومن قياس الزاوية  $(\vec{CA}, \vec{CB})$  يساوي  $90^\circ$  وبالتالي المثلث  $ABC$  قائم في  $C$ .

حاول أن تحل

4 إذا كانت النقاط  $A(6, -1), B(3, 2), C(2, 1)$

a اكتب كلًّا من المتجهين  $\vec{BA}, \vec{BC}$  بدلالة متجهي الوحدة  $\vec{i}, \vec{j}$ .

b أوجد قيمة  $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ .

c أثبت أن المثلث  $ABC$  قائم في  $B$ .

مثال (4)

إذا كان  $\vec{A} = \langle -2, 3 \rangle, \vec{B} = \langle 1, y \rangle$  وكان  $\vec{A} \perp \vec{B}$  فأوجد قيمة  $y$ .

الحل:

$\therefore \vec{A} \perp \vec{B}$

$\therefore \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

$x_A \cdot x_B + y_A \cdot y_B = 0$

$(-2)(1) + (3)(y) = 0$

$-2 + 3y = 0$

$y = \frac{2}{3}$

حاول أن تحل

4 إذا كان  $\vec{A} = \langle 3, -1 \rangle, \vec{B} = \langle x, -2 \rangle$  وكان  $\vec{A} \perp \vec{B}$  فأوجد قيمة  $x$ .

نتيجة (2)

إذا كان  $\vec{A} \neq \vec{0}, \vec{B} \neq \vec{0}$  فإن:

$$\vec{A} \parallel \vec{B} \iff \vec{A} = k\vec{B}$$

ملاحظة: إذا كان  $\vec{A} = \langle x_A, y_A \rangle, \vec{B} = \langle x_B, y_B \rangle$

$$\vec{A} \parallel \vec{B} \iff x_A \cdot y_B - x_B \cdot y_A = 0$$

مثال (5)

a أثبت أن:  $\vec{A} \parallel \vec{B}$  حيث  $\vec{A} = \langle -7, 5 \rangle, \vec{B} = \langle 14, -10 \rangle$

b إذا كان  $\vec{A} \parallel \vec{B}$  حيث  $\vec{A} = \langle 6, -8 \rangle, \vec{B} = \langle 2, y \rangle$  فأوجد قيمة  $y$ .

الحل:

a  $\frac{x_A}{x_B} = \frac{-7}{14} = \frac{-1}{2}, \frac{y_A}{y_B} = \frac{5}{-10} = \frac{-1}{2}$

$\therefore \vec{A} = -\frac{1}{2}\vec{B} \implies \vec{A} = k\vec{B}$

$\therefore \vec{A} \parallel \vec{B}$

طريقة ثانية:  $x_A \cdot y_B - x_B \cdot y_A = (-7)(-10) - 14 \times 5 = 70 - 70 = 0$

$\therefore \vec{A} \parallel \vec{B}$

طريقة أولى:

b  $\vec{A} \parallel \vec{B}$

$\therefore \vec{A} = k\vec{B}$

$\langle 6, -8 \rangle = k \langle 2, y \rangle$

$= \langle 2k, ky \rangle$

$\therefore 6 = 2k \implies k = 3$

$-8 = ky \implies -8 = 3y \implies y = -\frac{8}{3}$

طريقة ثانية:

$x_A \cdot y_B - x_B \cdot y_A = 0$

$6y - 2(-8) = 0$

$6y - 16 = 0$

$y = \frac{-16}{6} = \frac{-8}{3}$

حاول أن تحل

5 أثبت أن:  $\vec{A} \parallel \vec{B}$  حيث  $\vec{A} = \langle 3, -2 \rangle, \vec{B} = \langle 6, -4 \rangle$

b إذا كان  $\vec{A} \parallel \vec{B}$  ،  $\vec{B} = \langle x, \frac{4}{3} \rangle, \vec{A} = \langle \frac{7}{3}, 2 \rangle$  فأوجد  $x$ .

## في المثال (2)

أعط الطلاب أمثلة بديلة عن أشكال هندسية منتظمة، واطلب إليهم إيجاد الضرب الداخلي للمتجهات، ثم ناقش معهم النتائج.

## في المثال (3)

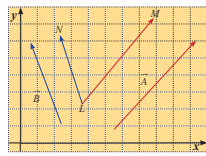
أكد للطلاب أن القاعدة:  $\vec{A} \cdot \vec{B} = x_A x_B + y_A y_B$  لا يمكن استخدامها إلا إذا كان المتجهان في مستوى إحداثي حيث  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$  (وحدة قياس).

شجعهم على استخدام الضرب الداخلي في إثبات مثلث قائم. إذا كان  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$  تكون زاوية قائمة.

## في المثال (4)

يساعد هذا المثال الطلاب على استخدام شرط التعامد بين متجهين لإيجاد قيم متغيرة في مركبات أحد المتجهين.

### Measure of Angle between Two Vectors



### قياس الزاوية بين متجهين

لإيجاد قياس الزاوية بين متجهين غير صفريين  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  حيث  $\vec{A} = \langle x_A, y_A \rangle$ ,  $\vec{B} = \langle x_B, y_B \rangle$ ، اكتب صيغتي الضرب الداخلي  $\vec{A} \cdot \vec{B} = x_A x_B + y_A y_B$  (1)  $\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos(\theta)$  (2)  $\therefore \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos(\theta) = x_A x_B + y_A y_B$   $\therefore \cos(\theta) = \frac{x_A x_B + y_A y_B}{\|\vec{A}\| \|\vec{B}\|}$

قانون

$$\cos(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \|\vec{B}\|}, \quad 0^\circ \leq m(\vec{A}, \vec{B}) \leq 180^\circ$$

إذا كان  $\vec{A}, \vec{B}$  متجهين وكان  $\vec{A} \neq \vec{0}, \vec{B} \neq \vec{0}$  فإن:

$$\cos(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{x_A x_B + y_A y_B}{\|\vec{A}\| \|\vec{B}\|} \quad \text{ملاحظة: من القانون السابق.}$$

مثال (7)

إذا كان  $\|\vec{A}\| = 5, \|\vec{B}\| = 6, \vec{A} \cdot \vec{B} = 15$

فأوجد قياس الزاوية  $(\vec{A}, \vec{B})$

الحل:

$$\cos(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \|\vec{B}\|}, \quad 0^\circ \leq m(\vec{A}, \vec{B}) \leq 180^\circ$$

$$= \frac{15}{5 \times 6} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore m(\vec{A}, \vec{B}) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$$

قانون

عوض

حاول أن تحل

إذا كان  $\|\vec{A}\| = 3, \|\vec{B}\| = 2, \vec{A} \cdot \vec{B} = -3\sqrt{3}$

فأوجد قياس الزاوية  $(\vec{A}, \vec{B})$

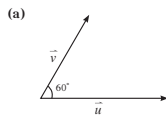
192

تمرّن  
5-3

### الضرب الداخلي Scalar Product

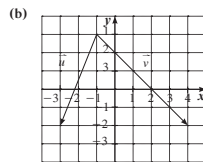
#### المجموعة A تمارين مقالية

(1) في كل شكل مما يلي أوجد:  $\vec{u} \cdot \vec{v}$



$$\|\vec{u}\| = 4 \text{ units}$$

$$\|\vec{v}\| = 3 \text{ units}$$



(2) لتأخذ:  $\vec{u} = \langle 2, -1 \rangle, \vec{v} = \langle -3, 2 \rangle, \vec{w} = \langle 1, 2 \rangle$  أوجد:

(a)  $\vec{u} \cdot \vec{v}$

(b)  $\vec{u} \cdot \vec{w}$

(c)  $\vec{v} \cdot \vec{w}$

(d)  $(3\vec{u}) \cdot (-2\vec{v})$

(e)  $(-4\vec{u}) \cdot (3\vec{v})$

(3)  $\vec{u}, \vec{v}$  متجهان في المستوى الإحداثي حيث:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6, \|\vec{u}\| = 4, \|\vec{v}\| = 5$  أوجد:

(a)  $(2\vec{u} + 3\vec{v})^2$

(b)  $(3\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (-2\vec{u} + \vec{v})$

(4) لتأخذ  $\vec{u} = \langle x, 4 \rangle, \vec{v} = \langle 2, -3 \rangle$

(a) أوجد قيمة  $x$  بحيث يكون  $\vec{u}$  متعامد مع  $\vec{v}$ .

(b) أوجد قيمة  $x$  بحيث يكون  $\|\vec{u}\| = 5$  units

(5) لتأخذ في المستوى الإحداثي النظامي المتعامد  $\vec{u} = \langle 2, -2 \rangle, \vec{v} = \langle -\sqrt{2}, 0 \rangle$  أوجد

$$m(\vec{u}, \vec{v})$$

(6) أوجد ثلاث نقاط في المستوى الإحداثي المنتظم المتعامد.

(a)  $\|\vec{AB}\|, \|\vec{AC}\|, \|\vec{BC}\|$

(b) أوجد:  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$  ثم استنتج نوع المثلث  $ABC$ .

77

### Properties of Scalar Product

### خواص الضرب الداخلي

$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  ثلاثة متجهات غير صفرية في المستوى،  $k$  عدد حقيقي.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

خاصية الإبدال

$$\vec{A} \cdot (k\vec{B}) = (k\vec{A}) \cdot \vec{B} = k(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

خاصية التجميع مع عدد حقيقي غير صفري

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \pm \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} \pm \vec{A} \cdot \vec{C}$$

خاصية توزيع الضرب الداخلي على جمع المتجهات أو طرحها

مثال (6)

$\vec{A}, \vec{B}$  متجهان في المستوى، حيث  $\|\vec{A}\| = 3, \|\vec{B}\| = 2, \vec{A} \cdot \vec{B} = -3$

أوجد قيمة  $(4\vec{A} - 3\vec{B}) \cdot (\vec{A} + 2\vec{B})$

الحل:

$$(4\vec{A} - 3\vec{B}) \cdot (\vec{A} + 2\vec{B})$$

$$= 4\vec{A} \cdot \vec{A} + 4\vec{A} \cdot 2\vec{B} - 3\vec{B} \cdot \vec{A} - 3\vec{B} \cdot 2\vec{B}$$

خاصية التوزيع

$$= 4\vec{A} \cdot \vec{A} + 8\vec{A} \cdot \vec{B} - 3\vec{B} \cdot \vec{A} - 6\vec{B} \cdot \vec{B}$$

خاصية التجميع

$$= 4\vec{A} \cdot \vec{A} + 8\vec{A} \cdot \vec{B} - 3\vec{A} \cdot \vec{B} - 6\vec{B} \cdot \vec{B}$$

خاصية الإبدال

$$= 4\|\vec{A}\|^2 + 5\vec{A} \cdot \vec{B} - 6\|\vec{B}\|^2$$

$\vec{A} \cdot \vec{A} = \|\vec{A}\|^2$

$$= 4 \times 3^2 + 5 \times (-3) - 6 \times 2^2$$

عوض

$$= 36 - 15 - 24$$

$$= -3$$

حاول أن تحل

$\vec{A}, \vec{B}$  متجهان في المستوى، حيث  $\|\vec{A}\| = 3, \|\vec{B}\| = 4, \vec{A} \cdot \vec{B} = 5$

أوجد قيمة  $(3\vec{A} - 2\vec{B}) \cdot (-\vec{A} + 3\vec{B})$

191

## في المثال (5)

يوفر هذا المثال للطلاب طرائق يستخدمونها لإثبات توازي متجهين أو لإيجاد متغير في أحد المتجهين إذا كان هذان المتجهان متوازيين.

## في المثال (6)

يساعد هذا المثال الطلاب على التعامل مع الضرب الداخلي للمتجهات، وذلك باستخدام الطرح والجمع لمتجهات مع مُعامل كأعداد حقيقية.

## في المثالين (8)، (7)

من أهم ميزات الضرب الداخلي أنه يوفر للطلاب فرصة مهمة لإيجاد قياس زاوية بين متجهين، ويكون مقدمة لإيجاد قياس زاوية بين مستقيمين في ما بعد. ساعدهم على استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد قياس زاوية إذا كان جيب التمام لهذه الزاوية عددًا معلومًا.

## 6 الربط

انظر المثال (9).

## 7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في كتابة:  $\vec{A} \cdot \vec{B} = x_A \times x_B + y_A \times y_B$  ويستبدلون إشارة الجمع بإشارة الطرح لتصبح  $x_A \times x_B - y_A \times y_B$ ، شدد على الفرق بين الصيغة التي تعطي مركبات المتجه وتستخدم فيها إشارة الطرح وصيغة الضرب الداخلي وتستخدم فيها إشارة الجمع.

**مثال (8)**  
أوجد قياس الزاوية المحددة بالمتجهين:  $\vec{A} = \langle 2, 2\sqrt{3} \rangle$ ,  $\vec{B} = \langle -4, 4\sqrt{3} \rangle$   
الحل:  
 $\cos(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|}$ ,  $0^\circ \leq m(\vec{A}, \vec{B}) \leq 180^\circ$   
$$= \frac{x_A x_B + y_A y_B}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2} \sqrt{x_B^2 + y_B^2}}$$
$$= \frac{2(-4) + 2\sqrt{3}(4\sqrt{3})}{\sqrt{(2)^2 + (2\sqrt{3})^2} \sqrt{(-4)^2 + (4\sqrt{3})^2}}$$
$$= \frac{-8 + 24}{(4)(8)} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$
$$\therefore m(\vec{A}, \vec{B}) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$$
  
**حارل أن تحل**  
أوجد قياس الزاوية المحددة بالمتجهين:  
 $\vec{A} = \langle 6, 3 \rangle$ ,  $\vec{B} = \langle 3, -1 \rangle$

**مثال (9)**  
في الشكل المقابل، المثلث  $ABC$  محاط بنصف دائرة حيث معادلة الدائرة:  $x^2 + y^2 = a^2$   
أوجد مركبات كل من المتجهين  $\vec{BA}$ ,  $\vec{BC}$   
أوجد  $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ ، ما الذي يمكنك استنتاجه حول قياس الزاوية  $\theta$ ?  
الحل:  
 $\vec{BA} = \langle x_A - x_B, y_A - y_B \rangle$   
 $= \langle -a - x, 0 - y \rangle = \langle -a - x, -y \rangle$   
 $\vec{BC} = \langle x_C - x_B, y_C - y_B \rangle$   
 $= \langle a - x, 0 - y \rangle = \langle a - x, -y \rangle$   
 $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = (-a - x)(a - x) + (-y)(-y)$   
 $= -a^2 + ax - ax + x^2 + y^2$   
 $= x^2 + y^2 - a^2$   
معادلة الدائرة  
 $\therefore x^2 + y^2 = a^2$   
 $\therefore x^2 + y^2 - a^2 = 0$   
 $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0$  أي  
 $\therefore \vec{BA} \perp \vec{BC}$   
 $\therefore$  قياس الزاوية  $\theta$  يساوي  $90^\circ$ .

193

في التمارين (7-10)، أوجد  $\vec{u} \cdot \vec{v}$   
(7)  $|\vec{u}| = 2$ ,  $|\vec{v}| = 3$ ,  $m(\vec{v}, \vec{u}) = 30^\circ$   
(8)  $|\vec{u}| = \sqrt{2}$ ,  $|\vec{v}| = 5$ ,  $m(\vec{u}, \vec{v}) = 135^\circ$   
(9)  $|\vec{u}| = 4\sqrt{2}$ ,  $|\vec{v}| = 7\sqrt{6}$ ,  $m(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$   
(10)  $|\vec{u}| = 4\sqrt{2}$ ,  $|\vec{v}| = 7\sqrt{6}$ ,  $m(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$   
في التمارين (11-14)، استخدم الشكل المقابل لإيجاد:  
(11)  $\vec{CF} \cdot \vec{DE}$   
(12)  $\vec{DE} \cdot \vec{BC}$   
(13)  $\vec{BF} \cdot \vec{CF}$   
(14)  $\vec{AD} \cdot \vec{BF}$

**المجموعة B تمارين موضوعية**  
في التمارين (1-6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.  
(1) إذا كان  $\vec{u} \perp \vec{v}$ ، فإن  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$   
(2) إذا كان  $\vec{u} \perp \vec{v}$ ،  $\vec{u} = \langle -2, x \rangle$ ،  $\vec{v} = \langle 5, 1 \rangle$ ، فإن  $x = -10$   
(3) إذا كان  $\vec{u} \cdot \vec{w} = -5$ ،  $\vec{v} \cdot \vec{w} = 3$ ، فإن  $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{w} = -8$   
(4) إذا كانت  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -6$ ، فإن  $A(-1, 2)$ ،  $B(2, 3)$ ،  $C(-4, 5)$   
(5) إذا كانت  $\|\vec{LM}\| = 10$ ، فإن  $L(-3, 4)$ ،  $M(0, 5)$   
(6)  $\vec{A} = \langle 2, -3 \rangle$ ،  $\vec{B} = \langle 1, 0 \rangle$  متجهان في المستوى حيث  $\cos(\vec{A}, \vec{B}) = 2\frac{\sqrt{13}}{13}$   
في التمارين (7-14)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:  
(7) إذا كان  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$ ،  $\vec{v} = \langle -1, m \rangle$ ،  $\vec{u} = \langle 2, -2 \rangle$ ، فإن  $m$  تساوي:  
(a)  $-\frac{5}{2}$  (b)  $\frac{5}{2}$  (c)  $\frac{1}{2}$  (d)  $-\frac{1}{2}$   
(8) في مثلث  $ABC$ ،  $H$  هو المسقط العمودي لـ  $C$  على  $\vec{AB}$ .  
 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} =$

(a) -6 (b) 12 (c) -12 (d) 6

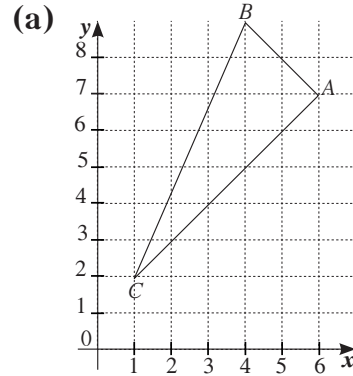
78

## 8 التقييم

راقب الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل»، ثم تحقق من صحة عملهم.

### اختبار سريع

1 أوجد  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$  في كل من الحالات التالية:



$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$$

(b)  $A(1, -3), B(0, 4), C(2, -5)$      $-15$

(c)  $\|\vec{AB}\| = 3, \|\vec{AC}\| = 2, \theta = \frac{\pi}{4}$      $3\sqrt{2}$

2 إذا كان  $\|\vec{A}\| = 5, \|\vec{B}\| = 2, \vec{A} \cdot \vec{B} = -1$

فأوجد قياس الزاوية بين  $\vec{A}, \vec{B}$ .

$$95.739^\circ$$

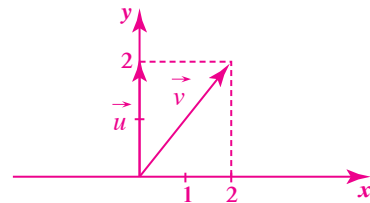
## 9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

تحقق من إجابات الطلاب.

«حاول أن تحل»

1



$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(0)^2 + (2)^2} = 2 \text{ units}$$

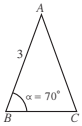
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2} = 2\sqrt{2} \text{ units}$$

$$m(\vec{u} \cdot \vec{v}) = -45^\circ$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 2\sqrt{2} \times \cos(-45^\circ)$$

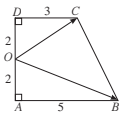
$$= 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 4$$



(9) في الشكل المقابل  $AB = AC = 3 \text{ cm}, m(\angle C, \angle B) = 70^\circ$   
 $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$  يساوي تقريباً:

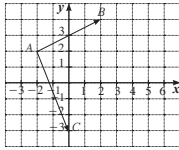
- (a) 2.3    (b) 6.89    (c) 3    (d) -2.3



(10)  $ABCD$  شبه منحرف قائم (انظر الشكل المقابل) حيث:  
 $AB = 5 \text{ cm}, AO = 2 \text{ cm}, OD = 2 \text{ cm}, CD = 3 \text{ cm}$   
 $\vec{OB} \cdot \vec{OC}$  يساوي:

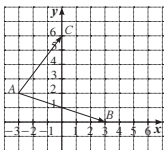
- (a) 11    (b) -11    (c) 12    (d) -12

(11)  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} =$



- (a) 2    (b) -2    (c) 18    (d) 0

(12) في الشكل المقابل  $\cos(\angle B, \angle C) =$



- (a) 0    (b)  $\frac{3}{5}$     (c)  $\frac{1}{2}$     (d)  $\frac{1}{\sqrt{10}}$

79

(13) إذا كان  $\vec{u} = \langle -5, m \rangle, \vec{v} = \langle 2, 3 \rangle, \vec{u} \perp \vec{v}$  فإن  $m$  تساوي:

- (a)  $\frac{10}{3}$     (b)  $-\frac{3}{10}$     (c)  $-\frac{10}{3}$     (d)  $\frac{15}{2}$

(14) إذا كان  $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = -2$  فإن  $m(\angle A, \angle C)$  لا يمكن أن يساوي:

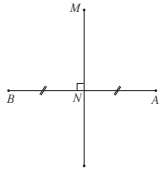
- (a)  $60^\circ$     (b)  $28^\circ$     (c)  $122^\circ$     (d)  $50^\circ$

80



اختيار الوحدة الخامسة

- (1) ليكن  $A(2,3), B(-1,5), C(3,-4)$
- (a) عيّن الزوج المرتب الذي يمثل متجه الموضع  $\overrightarrow{BA}$
- (b) إذا كان متجه الموضع  $\overrightarrow{OM}$  يمثل القطعة الموجهة  $\overrightarrow{AC}$ ، فأوجد إحداثيات  $M$ .
- (2) إذا كان  $\vec{u} = \langle 2, -2 \rangle$
- فارسم متجه الموضع، ثم أوجد المعيار، وقياس الزاوية  $\theta$  التي يصفها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.
- (3) إذا كان  $x, y = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ، فأوجد قيمة  $y$  بحيث يصبح  $\vec{u}$  متجه وحدة.
- (4) أربع نقاط في المستوى، لتكن النقطة  $N$  بحيث
- $$\langle \overrightarrow{AN} \rangle = \langle \overrightarrow{AB} \rangle + \langle \overrightarrow{AC} \rangle$$
- (a) اكتب المتجه  $\langle \overrightarrow{AN} \rangle$  بدلالة  $\langle \overrightarrow{AB} \rangle$  و  $\langle \overrightarrow{AC} \rangle$ .
- (b) استنتج أن المضلع  $ABNC$  هو متوازي أضلاع.
- (5) استخدم الرسم المقابل.
- (a) أوجد  $\langle \overrightarrow{AM} \rangle$  بدلالة  $\langle \overrightarrow{NA} \rangle$  و  $\langle \overrightarrow{NM} \rangle$
- (b) أثبت أن  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB}\|^2$
- (6)  $ABC$  مثلث بحيث،  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 18$ ،  $\|\overrightarrow{AB}\| = 6$ ،  $\|\overrightarrow{AC}\| = 2\sqrt{3}$ .
- أوجد قياس الزاوية  $m(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$
- (7) ليكن:  $\vec{a} = \langle x-5, x-5 \rangle$ ،  $\vec{b} = \langle 1, 1-x \rangle$  أوجد:
- (a) قيمة  $x$  بحيث يكون المتجه  $\vec{a}$  له اتجاه  $\vec{b}$
- (b) قيمة  $x$  بحيث يكون المتجه  $\vec{a}$  متعامداً مع المتجه  $\vec{b}$
- (8) ليكن:  $\vec{a} = \langle 2, -1 \rangle$ ،  $\vec{b} = \langle 1, 2 \rangle$  متجهين في مستوى إحداثي. أوجد:
- (a)  $\vec{a} \cdot \vec{b}$
- (b)  $\|\vec{b}\|^2$
- (c)  $\langle 3\vec{a} + \vec{b} \rangle \cdot \langle \vec{a} + \vec{b} \rangle$
- (d)  $\langle \vec{a} + 2\vec{b} \rangle \cdot \langle 2\vec{a} - \vec{b} \rangle$



- 2 (a)  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = -1$
- (b)  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (1)(1) \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$
- (c)  $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{EF} = 1$
- (d)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE} = -1$
- (e)  $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OF} = (1)(1) \cos(-120^\circ) = -\frac{1}{2}$

- 3 (a)  $\overrightarrow{BA} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$
- $\overrightarrow{BC} = -\vec{i} - \vec{j}$
- (b)  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$
- (c)  $\therefore \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$\therefore$  المثلث  $ABC$  قائم الزاوية  $B$

- 4  $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow$
- $$3x + 2 = 0 \Rightarrow$$
- $$x = -\frac{2}{3}$$

- 5 (a)  $\therefore \frac{x_A}{x_B} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- $$\frac{y_A}{y_B} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$
- $\therefore \vec{A} \parallel \vec{B}$

(b) نأخذ القاعدة:  $x_A \cdot y_B - x_B \cdot y_A = 0$

$$\therefore \frac{7}{3} \times \frac{4}{5} - \frac{2}{3} \times x = 0 ; x = \frac{14}{5}$$

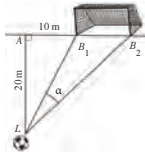
- 6  $-3\|\vec{A}\|^2 + 11\vec{A} \cdot \vec{B} - 6\|\vec{B}\|^2$
- $$= -3(9) + 11(5) - 6(16)$$
- $$= -68$$

- 7  $\cos(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ ،  $m(\vec{A}, \vec{B}) = 150^\circ$

- 8  $\vec{A} \cdot \vec{B} = 18 - 3 = 15$
- $$\|\vec{A}\| = \sqrt{36 + 9} = 3\sqrt{5}$$
- $$\|\vec{B}\| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$
- $$\cos(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{15}{3\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
- $$m(\vec{A}, \vec{B}) = 45^\circ$$

# المرشد لحل المسائل

## المرشد لحل المسائل



مستخدماً معطيات المخطط المقابل،  
أوجد قياس زاوية ركل الكرة  $\alpha$ . (طول المرمى،  $B_1B_2 = 7.32$  m).  
كيف فكر عبد العزيز  
سأستخدم الضرب الداخلي. بما أنه لا توجد خاصية واحدة تسمح بمعرفة قياس الزاوية  
لذلك سأستخدم خاصيتين معاً.  
أولاً: الضرب  
بعد مطابقة فيثاغورث

$$(LB_1)^2 = 20^2 + 10^2 = 500$$

$$LB_1 \approx 22.36 \text{ m}$$

$$(LB_2)^2 = 20^2 + (10 + 7.32)^2 = 700$$

$$LB_2 \approx 26.46 \text{ m}$$

ثانياً: الضرب الداخلي - طريقة أولى  

$$\vec{LB}_1 \cdot \vec{LB}_2 = (\vec{LA} + \vec{AB}_1) \cdot (\vec{LA} + \vec{AB}_2)$$

$$= (LA)^2 + \vec{LA} \cdot \vec{AB}_1 + \vec{LA} \cdot \vec{AB}_2$$

$$= (LA)^2 + AB_1 \times AB_2$$

$$= 400 + 10 \times 17.32$$

$$= 573.2$$

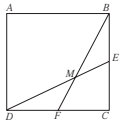
ثالثاً: الضرب الداخلي - طريقة ثانية  

$$\vec{LB}_1 \cdot \vec{LB}_2 = LB_1 \cdot LB_2 \cdot \cos(\alpha)$$

$$573.2 = 22.36 \times 26.46 \cdot \cos(\alpha)$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{573.2}{22.36 \times 26.46} = 0.9688$$

$$\alpha \approx 14^\circ 21'$$



يبلغ قياس زاوية ركل الكرة حوالي  $14^\circ 21'$   
مسألة إضافية  
في المربع  $ABCD$  منتصف  $F$  من  $BC$  منتصف  $E$  من  $CD$   
تقاطع  $DE$  في  $BF$  في  $M$   
أوجد  $m(\widehat{DMF})$

194

إجابة «مسألة إضافية»

طريقة أولى:

في المثلث  $BDC$

قطة متوسطة  $\overline{BF}$

قطة متوسطة  $\overline{DE}$

$\overline{DE} \cap \overline{BF} = \{M\}$

$$DE = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$BF = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$MD = \frac{2}{3}DE = \frac{a\sqrt{5}}{3}$$

$$MF = \frac{1}{3}BF = \frac{a\sqrt{5}}{6}$$

$$DF = \frac{a}{2}$$

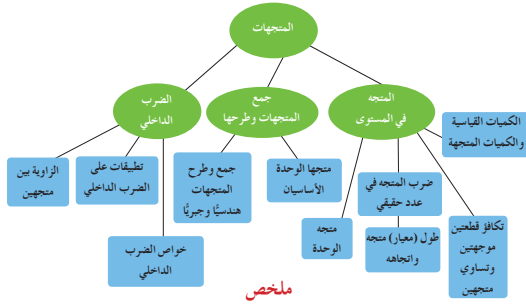
في المثلث  $DMF$  نستخدم قانون جيب التمام:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{5}}{6}\right)^2 - 2 \times \frac{a\sqrt{5}}{3} \times \frac{a\sqrt{5}}{6} \times \cos(\widehat{DMF})$$

$$\cos(\widehat{MB}, \widehat{MF}) = \frac{4}{5}$$

$$m(\widehat{MB}, \widehat{MF}) \approx 36^\circ 52' 11''$$

## مخطط تنظيمي للوحدة الخامسة



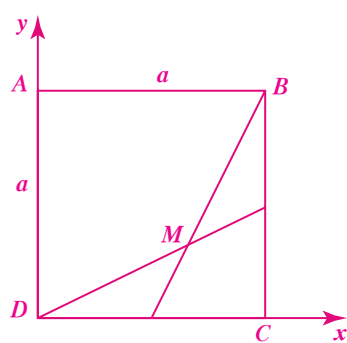
ملخص

- للقطعة الموجبة اتجاه وقياس.
- القطعة الموجبة  $\vec{OM}$  التي بدايتها نقطة الأصل ونهايتها  $M(x, y)$  تسمى متجه الموضع ويمثلها الزوج المرتب  $(x, y)$ .
- إذا كانت  $\vec{AB}$  قطعة موجبة و  $\vec{OM}$  متجه الموضع لهذه القطعة فإن  $M(x_0, y_0) = M(x_0 - x_1, y_0 - y_1)$ .
- المتجه هو مجموعة كل القطع الموجبة المتكافئة والتي أجهدها متجه الموضع.
- يكون متجهان متساويين إذا كانت القطعتان الموجبتان المناظرتان لهما متكافئتين.
- المتجهان  $\langle a, b \rangle$ ,  $\langle c, d \rangle$  متساويان إذا فقط إذا  $a = c$ ,  $b = d$ .
- $\vec{A} = k\vec{B}$  متجهان متوازيان إذا فقط إذا وجد عدد حقيقي  $k \neq 0$  يحقق  $\vec{A} = k\vec{B}$ .
- تكون النقاط  $A, B, C$  على استقامة واحدة إذا فقط إذا وجد عدد حقيقي  $k \neq 0$  يحقق  $\vec{AB} = k\vec{AC}$ .
- جمع متجهين:  $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$ ,  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ .
- حيث  $ABCD$  متوازي الأضلاع:  $\vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{0}$ ,  $\vec{A} + \vec{0} = \vec{A}$   $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$   $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$
- $\vec{A} = \langle x_1, y_1 \rangle$ ,  $\vec{B} = \langle x_2, y_2 \rangle$  عدد حقيقي  $k$ :  $\vec{A} + \vec{B} = \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2 \rangle$ ,  $k\vec{A} = \langle kx_1, ky_1 \rangle$
- $\vec{A} = \vec{B}$  إذا فقط إذا  $x_1 = x_2$ ,  $y_1 = y_2$ .
- $\vec{A}, \vec{B}$  متوازيان إذا فقط إذا  $x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 = 0$ .
- $\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cos(\vec{A}, \vec{B}) = x_1x_2 + y_1y_2$ .
- إذا  $\vec{A} = \langle x, y \rangle$ , فإن  $\|\vec{A}\|^2 = x^2 + y^2$ .
- $\cos(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\|}$ .
- إذا كان  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  فإن  $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ .

195

طريقة ثانية:

نأخذ نظاماً إحداثياً عمودياً منتظماً مركزه  $D$



$D(0,0)$        $C(a,0)$

$A(0,a)$        $B(a,a)$

$E(a, \frac{a}{2})$        $F(\frac{a}{2}, 0)$

$M(\frac{2a}{3}, \frac{a}{3})$

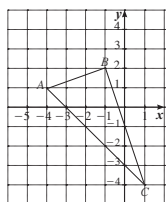
$\overrightarrow{MD} = (\frac{-2a}{3}, \frac{-a}{3})$

$\overrightarrow{MF} = (\frac{-a}{6}, \frac{-a}{3})$

$$\cos(\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MF}) = \frac{x_1 \times x_2 + y_1 \times y_2}{\|\overrightarrow{MD}\| \times \|\overrightarrow{MF}\|} = \frac{\frac{2a^2}{9}}{\frac{a\sqrt{5}}{3} \times \frac{a\sqrt{5}}{6}}$$

$\cos(\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MF}) = 0.8, m(\widehat{DMF}) = 36^\circ 52' 11''$

(13) إذا كانت رؤوس المثلث  $ABC$   $A(-4,1), B(-1,2), C(1,-4)$  فأثبت أن المثلث قائم في  $B$



(14) إذا كانت المتجهات،  $\vec{a} = -4\vec{i} - 2\vec{j}$ ,  $\vec{b} = -\vec{i} - 3\vec{j}$ ,  $\vec{c} = \langle -5, 5 \rangle$

(a) أثبت أن،  $\vec{b} \neq \vec{c}$

(b) أوجد،  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ،  $\vec{a} \cdot \vec{c}$

(c) ماذا نستنتج؟

في التمرين (15-16)، اختر الإجابة الصحيحة.

(15) ليكن،  $\vec{a} = (-4, 3)$ ، المتجه المتعامد مع  $\vec{a}$  مما يلي هو،

- (a)  $(2, -\frac{3}{2})$       (b)  $(3, -4)$       (c)  $(\frac{3}{2}, 2)$       (d)  $(4, 3)$

تمارين إثرائية

(1) لتأخذ في المستوى الإحداثي المنتظم المتعامد النقاط،

$A(2,2), B(4,5), C(4-m,0)$  حيث  $m$  عدد حقيقي.

(a) أوجد قيمة  $m$  بحيث يكون المثلث  $ABC$  قائم  $A$ .

(b) لقيمة  $m$  التي وجدتها، أثبت أن  $ABC$  مثلث متطابق الضلعين.

(2) الشكل المقابل يمثل مربعاً رسم في داخله مستطيل.

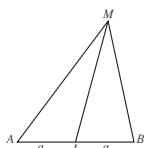
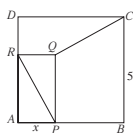
أثبت أن المستقيمين:

$\overline{CQ}$ ،  $\overline{PR}$  متعامدين.

(مساعدة: استخدم علاقة شال)

(3) في المثلث  $MAB$  الأدناه أثبت أن:

$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MI}^2 - a^2$

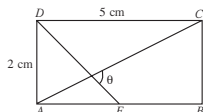


(4) إذا كان،  $\vec{u} + \vec{u} = \vec{w}$ ,  $\vec{v} + 2\vec{u} = -\vec{w}$ ، فأثبت أن،

$\vec{u}$ ،  $\vec{v}$  لهما الاتجاه نفسه.

(5) في المستطيل المقابل  $E$  منتصف  $\overline{AB}$ .

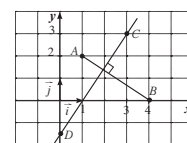
أوجد  $\theta$  (استخدم الآلة الحاسبة).



(9) لتكن النقاط،  $A(1,2), B(4,0), C(3,3)$  في مستوى إحداثي منتظم متعامد.

المستقيم المتعامد مع  $\overline{AB}$  المار بالنقطة  $C$  يقطع محور الصادات بالنقطة  $D$ .

أوجد إحداثيات النقطة  $D$ .



(10) مثلث متطابق الأضلاع، طول ضلعه 4 cm

ليكن،  $\vec{a} = \langle \overline{AB} \rangle$ ,  $\vec{b} = \langle \overline{AC} \rangle$

(a) أوجد  $\langle \overline{CB} \rangle$  بدلالة  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  واستنتج  $\|\vec{a} - \vec{b}\|$

(b) أنشئ النقطة  $D$  بحيث  $\langle \overline{AD} \rangle = \vec{a} + \vec{b}$

(c) ما نوع الرباعي  $ABDC$ ؟

(d) أوجد  $\|\vec{a} + \vec{b}\|$

(11) متوازي أضلاع، مركزه  $O$ .

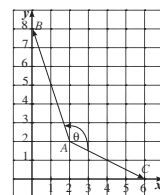
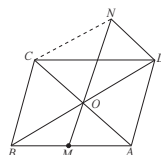
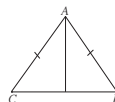
$M$  منتصف  $\langle \overline{AB} \rangle$ ،  $N$  النقطة حيث،  $\langle \overline{DN} \rangle = \langle \overline{OC} \rangle$

(a) أوجد  $\langle \overline{ON} \rangle$  بدلالة  $\langle \overline{BC} \rangle$

(b) أثبت أن،  $\langle \overline{BC} \rangle = \langle \overline{OD} \rangle + \langle \overline{OC} \rangle$

(c) أثبت أن النقاط  $M, N, O$  تقع على استقامة واحدة.

(12) أوجد قياس الزاوية  $\theta$  المحددة بالمتجهين  $\langle \overline{AB} \rangle$ ,  $\langle \overline{AC} \rangle$



## الوحدة السادسة: الجبر المتقطع (الإحصاء)

### Discrete Algebra (Statistic)

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

1 - 6: المجتمع الإحصائي والمعاينة

جزء 1: المجتمع الإحصائي.

جزء 2: أساليب جمع البيانات.

جزء 3: أنواع البيانات.

2 - 6: العينات

جزء 1: العينة العشوائية.

3 - 6: أساليب عرض البيانات

جزء 1: القطاعات الدائرية.

جزء 2: المنحنى التكراري والمدرج التكراري.

4 - 6: الانحراف المعياري

5 - 6: القاعدة التجريبية

جزء 1: التوزيع الطبيعي.

جزء 2: القاعدة التجريبية.

6 - 6: القيمة المعيارية

جزء 1: القيمة المعيارية.

# مقدمة الوحدة

**الوحدة السادسة**

**الجبر المتقطع (الإحصاء)**  
**Discrete Algebra (Statistics)**

**مشروع الوحدة: زحمة السير**

1 مقدمة المشروع: أظهرت الإحصاءات أن أكثر المشاكل التي تواجه الأشخاص في تنقلهم يومياً هي زحمة السير العائقة على الطرقات. لذلك كانت الدراسات ولا زالت حتى اليوم تركز على كيفية إيجاد وسائل نقل أسرع وأكثر أماناً وأقل تكلفة ومناخية سليمة وصحية.

2 الهدف: في هذا المشروع سوف نتحدد مشاكل النقل والسرعة، ثم نقدم تصميماً لوسيلة نقل جديدة أو عرضاً لخدمة تستطيع من خلالها حل المشكلة، ونقوم باستطلاع لفرقنا ما إذا كان تصميمك أو خدمتك قابليين للتسويق.

3 المراجع: ورق رسم بياني - آلة حاسبة علمية.

4 أسئلة حول التطبيق:

a ما أسباب زحمة السير؟

b كيف نتختار عينة الاستطلاع؟

c ما نوع الأسئلة التي نسطرحها على الأشخاص؟

d ما هي وسائل النقل المستخدمة؟

e ما نوع الخدمة التي يفضلونها؟

f نظم المعلومات التي حصلت عليها وملئها بيانياً، ثم قم بتحليلها، ما أكثر مشكلة ظهرت في الإجابات؟ الفرح منتخبا أو خدمة تتخذ أنهما يساهمان في حل المشكلة، تأكد من أن الأفكار التي عرضتها قابلة للتطبيق. نفذ نموذجاً أو اكتب وصفاً لوسيلة النقل أو الخدمة المقترحة متضمنين التكلفة التي تراها مناسبة.

استطلع آراء عدد من الأشخاص في سوق العمل حول منتجك أو خدمتك الجديدة. مثل البيانات التي حصلت عليها وقم بتحليلها. هل منتجك أو خدمتك المقترحة قابلان للتسويق؟

5 التقرير: اكتب تقريراً مفصلاً عن منتجك أو خدمتك المقترحة. اعرض ما توصلت إليه على زملائك في غرفة الصف. أعد النظر ببعض الافتراضات إذا كان ذلك ضرورياً. ناقش معهم فإراك في إمكانية التسويق للمنتج أو للخدمة مستنداً إلى نتائج استطلاعك.

**دروس الوحدة**

المجموع الإحصائي والمعاني	العينات	أساليب عرض البيانات	الانحراف المعياري	القاعدة التجريبية	القيمة المعيارية
6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6

196

أصبح علم الإحصاء في عصرنا الحاضر من أهم العلوم التطبيقية التي تعتمد عليها الدول لدراسة كل ما له علاقة بالفرد في المجتمعات، لذا كان في كل دولة إدارة مركزية للإحصاء.

وهذه الإدارة المركزية لها مهمات متعددة الجوانب تطال كل النواحي الحياتية للمواطن من إنتاج، واستهلاك، وحوادث طرقات، ووفيات، وولادات...

من إحدى المهمات التي تقوم بها «الإدارة المركزية للإحصاء» في دولة الكويت دراسة الأرقام القياسية لأسعار المستهلك وتغيرها شهرياً، ثم إصدار نشرة دورية عن نسبة هذا التغير وأسبابه.

وللدلالة على ذلك، نورد فقرة أخذت من تقرير عن شهر يونيو سنة 2012:

«إن عملية جمع بيانات الأسعار شهرياً لأصناف متنوعة من السلع من أكثر من 400 مصدر من أنحاء البلاد كافة تحتاج إلى تعاون مخلص من مدراء الجمعيات التعاونية والأسواق المركزية ومحلات التجزئة الأخرى بجميع أنشطتها الاقتصادية والتجارية».

بالنظر إلى هذا النص، يتبين لنا مدى الأهمية التي تعتمدها الإدارة المركزية للإحصاء في التعاون المخلص مع العينات الإحصائية لتكون الجداول التي تنشرها، معبرة بنسبة كبيرة عن التغيرات الحاصلة في الأسعار صعوداً أو هبوطاً.

## مشروع الوحدة

زحمة المرور، حوادث المرور القاتلة على الطرقات، مشاكل قيادة السيارات، إنها معاناة تعيشها أثناء تنقلاتك من مكان إلى آخر، وتسمع دائماً في وسائل الإعلام عن مشاريع وأفكار وتصاميم يطلقها أصحاب الاختصاص والمسؤولون لمحاولة التخفيف من هذه الأزمات.

تبنى الجسور، تفتح طرقات جديدة، تشق الأنفاق، تسن القوانين الصارمة، تحدد السرعة. ولكن، ما النتيجة؟ والأهم من كل ذلك، أين البيئة من مشاكل انبعاث ثاني أكسيد الكربون نتيجة احتراق الوقود؟

في الأسئلة عن تطبيق المشروع، شجّع الطلاب على دراسة أسباب زحمة المرور. اطلب إليهم دراسة حركة المرور على عدد من الدوارات وعلى عدد من التقاطعات الرئيسية في المدينة، ثم تسجيل ملاحظاتهم. اطلب إليهم أيضاً دراسة قوانين المرور وما إذا كان لديهم آراء معينة لتحديثها. شجعهم على زيارة إدارة المرور للاطلاع على كيفية العمل فيها.

### الوحدة السادسة

#### أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- التنبؤات البيانية.
- قيم النزعة المركبة (المتوسط الحسابي - الوسيط - المنوال).
- مقياس تشتت البيانات (المدى - الأرباعيات).
- النيان - الانحراف المعياري.
- استخدام مخطط الصندوق ذي العارضين في عرض البيانات وتحليلها.

#### أضف إلى معلوماتك

تفيد المعطيات التاريخية أن المصريين القدماء قاموا بتعداد اليد العاملة والثروات الموجودة لمعرفة إمكانية بناء الأهرامات. كما أن أفلاطون عالِم فضاء السكان في كتابه «الجمهورية»، وأرسطو في كتابه «السياسة»، وابن خلدون في كتابه «مقدمة ابن خلدون». وفي عهد الخليفة العباسي «المأمون»، جرى تعداد للسكان والثروات لتحديد الإمكانات المادية والفكرية. أما في العصور المتقدمة فقد جمع العالم «كاسينيومان» (1601 م) بيانات عن بعض الوقات وأعمارهم، وأعد «إدموند هيلس» أول جدول حياة ولكن لم يأخذ الإحصاء مجاه العلمي إلا في القرن الثامن عشر، وذلك على يد العالم الألماني «فرديريك جاوس» الفرنسي لإيلايس والإنجليزي «كارل بيرسون»، و«روالد فيشر».

#### ماذا سوف تعلم؟

- دراسة المجتمع الإحصائي والمعانيه.
- استخدام العينة البسيطة والطبقية والمنظمة.
- عرض البيانات في جداول تكرارية وكتابة التكرار النسبي والنسبي.
- تمثيل البيانات بالقطاعات الدائرية.
- تمثيل البيانات بالمدراج التكراري والمنحنى التكراري.
- إيجاد النيان والانحراف المعياري واستخدامها لاتخاذ قرارات.
- تطبيقات على مقياس التشتت (الانحراف المعياري - القاعدة التجريبية - القيمة المعيارية).

#### المصطلحات الأساسية

مجتمع إحصائي - الحصر الشامل - المعايير - المنعرج - عينة بسيطة - عينة طبقية - عينة منظمة - جدول تكراري - تكرار نسبي - تكرار موزون - قطاعات دائرية - مدرج تكراري - منحنى تكراري - النيان - الانحراف المعياري - مقياس التشتت - القاعدة التجريبية - القيمة المعيارية.

## سَلَمُ التقييم

4	نظمت البيانات بالكامل - التمثيل البياني واضح ومعبر - التحليل والنتائج دقيقة - التقرير مفصل ويعكس جهد العمل.
3	معظم البيانات منظمة - التمثيل البياني واضح - التحليل والنتائج يشوبها بعض الارتباك - معظم عناصر التقرير مفصلة.
2	بعض البيانات منظمة - أخطاء في التمثيل البياني - التحليل والنتائج غير سليمة - التقرير بحاجة إلى صياغة أفضل.
1	معظم عناصر المشروع غير مكتملة وبحاجة إلى إعادة.

## التقرير

يجب أن يكون التقرير كافيًا ومفصلاً يعكس جهد المجموعات التي قامت بالعمل، ويحدّد بشكل جلي وواضح الاقتراحات والحلول التي توصلوا إليها أو الخدمة التي يرونها مناسبة. ناقش مع زملاءك في غرفة الصف النتائج التي توصلت إليها والاقتراحات التي وضعتها. أعد النظر ببعضها إذا كان ذلك ضروريًا.

# 1-6: المجتمع الإحصائي والمعاينة

## 1 الأهداف

- يتعرف المجتمع الإحصائي.
- يتعرف المجتمعات المنتهية وغير المنتهية.
- يتعرف المتغير.
- يتعرف الحصر الشامل.
- يتعرف أنواع البيانات.

## 2 المفردات والمفاهيم الجديدة

إحصاء - مجتمع إحصائي - الحصر الشامل - المعاينة - بيانات كمية - متغير - بيانات كمية.

## 3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة - حاسوب - جهاز إسقاط (Data Show).

## 4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

- (a) تريد استطلاع الرأي حول الانتخابات النيابية في دولتك، هل ستقوم بطرح الأسئلة على السكان كافة؟
- (b) كيف يمكنك جمع معلومات حول مسحوق معين للغسيل؟
- (c) ما هو المسلسل التلفزيوني الأكثر مشاهدة؟
- (d) هل استخدمت كلمة «متغير» قبل الآن؟ وأين كان ذلك؟

## 5 التدريس

عند القيام بأي عملية استطلاع، يجب تحديد المجتمع الإحصائي، والهدف من الدراسة، والمواضيع التي يراد التطرق إليها، وتسجيل الأسئلة الواجب طرحها، وذلك لاستخلاص صورة واضحة تساعد على اتخاذ قرارات صائبة.

## 6-1

### المجتمع الإحصائي والمعاينة

#### Statistical Population and Sampling

##### عمل تعاوني

تجرى في كل سنة عملية استطلاع لتحديد أفضل لاعب كرة قدم في دولة الكويت. تريد أنت وزملائك القيام بهذه المهمة.

- 1 حدّد مع زملائك عدد الأشخاص الذين سوف تستطلعون آراءهم.
- 2 ما هي المعايير التي يجب اتباعها في هذا الاستطلاع لتحديد أفضل لاعب كرة قدم؟
- 3 ما الطرائق التي يجب اتباعها في إجراء هذا الاستطلاع؟

#### Statistical Science

#### علم الإحصاء

الإحصاء هو علم أساسي في مجال الرياضيات التطبيقية حيث إنه يهتم بجمع البيانات وفرزها وتنظيمها وتصنيفها وعرضها جدولياً أو بيانياً وتحليلها واستقراء النتائج بهدف اتخاذ قرارات مناسبة مبنية على استنتاجات.

مراحل البحث الإحصائي هي:

- 1 جمع البيانات.
- 2 عرض البيانات (جدولياً وبيانياً).
- 3 وصف البيانات وتحليلها.
- 4 تفسير النتائج واتخاذ قرارات.

#### Statistic Population

#### المجتمع الإحصائي

هو مجموعة كل المفردات (الوحدات) قيد الدراسة ولها خصائص مشتركة، ويمكن أن تكون مفردات المجتمع الإحصائي بشرية أو غير بشرية.

كما أن المجتمع الإحصائي يمكن أن يكون منتهياً (عدد وحدته محدود) أو غير منته (عدد وحدته غير محدود). ويشترط أن يعرف مجتمع الدراسة تعريفاً محدداً وواضحاً ولا يحمل أي تأويل.

##### مثال (1)

في كل من المجتمعات الإحصائية التالية حدد نوع المجتمع (منته أو غير منته) ووحدة الدراسة.

a طلاب الصف الحادي عشر في مدارس دولة الكويت.

b الطيور على سطح الأرض.

198

##### الحل:

a مجتمع طلاب الصف الحادي عشر في مدارس دولة الكويت:

نوعه: مجتمع منته.

وحدة الدراسة: طالب

b مجتمع الطيور على سطح الأرض:

نوعه: غير منته.

وحدة الدراسة: طير.

##### حاول أن تحل

1 في كل من المجتمعات الإحصائية التالية حدد نوع المجتمع (منته أو غير منته) ووحدة الدراسة.

a لاعبو فرق كرة السلة في دولة الكويت.

b مجتمع الأسماك في مياه الخليج العربي.

#### Variable

#### المتغير

هو الصفة (أو الصفات) محور الدراسة في مجتمع إحصائي معيّن. فمثلاً في دراسة عن طلاب الصف الحادي عشر في دولة الكويت، قد يخلف الطلاب من حيث الفرع، أدبي أو علمي، الجنس، أثنى أو ذكر، الجنسية، كويتي أو غير كويتي، الطول، الوزن، لون العيون، ... وهذه الصفة تتغير من وحدة إلى أخرى في مجتمع الدراسة.

#### Ways to Collect Data

#### أساليب جمع البيانات

عند القيام بدراسة إحصائية يقوم الباحث بتحديد المجتمع محل الدراسة ثم يبدأ بجمع البيانات. هناك أساليب مختلفة لجمع البيانات تعتمد على نوع الدراسة وخصائص المجتمع ومن هذه الأساليب:

#### Comprehensive Inventory

#### 1 - الحصر الشامل

هو عملية جمع بيانات جميع مفردات المجتمع الإحصائي محل الدراسة. يتميز الحصر الشامل بدقة نتائجه وخلوه من الأخطاء. (مثل: نتائج الطلاب في الصف الحادي عشر علمي نهاية العام الدراسي). ومن عيوب الحصر الشامل أنه يتطلب وقت وجهد كبيرين ورفق عمل وبقوات وتكاليف مرتفعة. كما أن الحصر الشامل لا يمكن إجراؤه في المجتمعات غير المنتهية (مثل مجتمع الطيور) وأكثر من ذلك لا يمكن استخدامه في حالة تدمير جميع وحدات الدراسة (مثل: عملية سحب الدم لمعرفة كمية السكر الموجودة فيه).

##### مثال (2)

هل يمكن استخدام الحصر الشامل في دراسة المجتمعات الإحصائية التالية أم لا؟ اذكر السبب.

a دراسة كمية الدهون الموجودة في الدم.

b دراسة نسبة عدد الطلاب الذين لون عيونهم أزرق إلى عدد طلاب صفك.

199

## في المثال (1)

ناقش مع الطلاب المفردات الجديدة: مجتمع منته، مجتمع غير منته، وحدة الدراسة في المجتمع. اطلب إليهم عرض أمثلة بديلة عن المجتمعات الإحصائية، وأسألهم ما إذا كانت منتهية أو غير منتهية، وما هي وحدة الدراسة في كل مجتمع.

## في المثال (2)

ركّز على فكرة الحصر الشامل والحالات التي يمكن والتي لا يمكن استخدامه فيها بإيجابياته وسلبياته في عملية الإحصاء.

## في المثال (3)

أعط أمثلة بديلة عن البيانات الكمية. اطلب إلى الطلاب تقديم بيانات معيّنة تمّ تعريف ما إذا كانت كمية أو كمية.

## 6 الربط

الدراسات الإحصائية واستطلاع الرأي ترتبط مباشرة بنواحٍ حياتية حيث تحول الواقع إلى أرقام تساعد على اتخاذ قرارات في المجالات كلها.

## 7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يواجه الطلاب عدة مشاكل ويقعون في العديد من الأخطاء، مثلاً في تحديد مجتمع ما إذا كان منتهياً أو غير منته أو في تعريف المتغير في مجال الدراسة. اعرض عليهم أمثلة توضح تعريف المجتمع المنتهي وكيفية تحديد المتغير المشترك في الصفات ضمن أفراد المجتمع.

## 8 التقييم

تابع الطلاب في عملهم ضمن فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من مدى استيعابهم لما ورد في هذا الدرس.



الحل:  
 1 لا يمكن استخدام الحصر الشامل، لأنه لا يمكن استخدام كافة كمية الدم الموجودة في جسم الشخص فذلك سوف يؤدي إلى نهاية حياته.  
 2 يمكن استخدام الحصر الشامل لأن عدد الطلاب في الصف محدد ويمكن إيجاد النسبة المطلوبة.

سأول أن تحل

2 اكتب مقالاً بين:

1 دراسة في مجتمع إحصائي يمكن استخدام الحصر الشامل فيها.  
 2 دراسة في مجتمع إحصائي لا يمكن استخدام الحصر الشامل فيها.

### 2 - المعاينة

هي عملية اختيار جزء من مفردات المجتمع بطريقة مبروسة تجعل هذه المفردات تمثل المجتمع وتحقق أهداف الدراسة.

### أنواع البيانات

يمكن تصنيف البيانات إلى نوعين كمية وكيفية كما يبين الجدول التالي:

أنواع البيانات	الصفات	أمثلة
بيانات كمية	اسمية	لون العيون - لون الشعر
	مرتبة	المستوى العلمي - الدرجات التقديرية
بيانات كمية	متقطعة	عدد طلاب الفصل - نقاط مباراة كرة السلة
	مستمرة	أطوال القمامات - الأوزان - درجات الحرارة

### مثال (3)

حدّد نوع البيانات لكل مما يلي:

- عدد أهداف الدوري العام لكرة القدم في أحد المواسم.
- ترتيب الدول بحسب الميداليات التي حصلت عليها في دورة من دورات الألعاب الأولمبية.
- درجات الحرارة في شهر سبتمبر في مطار الكويت.
- لون سيارات معلمي مدرسة ما.

200

تمّون  
6-1

### المجتمع الإحصائي والمعاينة Statistical Population and Sampling

#### المجموعة A تمارين مقالية

- أذكر مراحل البحث الإحصائي الأربعة مرتبة.
- ما هي أساليب جمع البيانات.
- في التمرين (3-4)، اذكر ما نوع البيانات التي تصف كل من الحالات التالية:  
عدد التذاكر المباعة لإحدى المسرحيات.
- أنواع منتجات معجون الأسنان المباعة للمستهلك.
- حدّد نوع البيانات لكل مما يلي:  
 (a) أوزان طلاب الصف الحادي عشر في مدرستك. (b) أنواع الكتب في مكتبة المدرسة.  
 (c) الدخل الشهري للأسرة في دولة ما. (d) ألوان أحذية الطلاب في صفك.
- عرف المجتمع المنتهي والمجتمع غير المنتهي.
- عرّف كل من:  
 (a) علم الإحصاء. (b) المجتمع الإحصائي. (c) الحصر الشامل.

#### المجموعة B تمارين موضوعية

- في التمارين (1-5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.
- المواليذ في العالم سنة 2010 عبارة عن مجتمع غير منته.
  - وحدة الدراسة لعدد زوار مركز علمي في يوم واحد هي أي زائر.
  - يمكن استخدام الحصر الشامل في دراسة أنواع السمك الموجودة في أحد المحيطات.
  - عدد الصفحات في كتاب ما هو بيانات كمية مستمرة.
  - عند ترتيب الأشياء نستخدم بيانات كمية مرتبة.

85



## اختبار سريع

في دراسة لوسائل النقل التي يستخدمها طلاب المرحلة الثانوية في إحدى مدارس الدولة، أجب عن الاسئلة التالية:

(a) ما هو المجتمع محل الدراسة؟

طلاب المرحلة الثانوية في إحدى مدارس الدولة.

(b) هل هذا المجتمع منتهٍ أو غير منتهٍ؟ لماذا؟

مجتمع منتهٍ، لأن عدد الطلاب محدد.

(c) ما هو المتغير محل الدراسة؟

وسيلة النقل المستخدمة في الذهاب والإياب.

(d) إذا شمل السؤال كافة طلاب المرحلة الثانوية في

الدولة، فهل يعتبر ذلك حصرًا شاملاً؟

نعم.

## 9 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

3 - 1 تحقق من إجابات الطلاب.

«حاول أن تحل»

1 (a) نوعه: مجتمع منتهٍ

وحدة الدراسة: لاعب

(b) نوعه: غير منتهٍ

وحدة الدراسة: سمكة

2 (a) تنوع الإجابات: إجابة ممكنة:

المعلمون في إحدى مدارس الدولة.

(b) تنوع الإجابات: إجابة ممكنة:

الأعشاب في ملعب كرة القدم.

3 (a) كمية، متقطعة

(b) كمية إسمية

(c) كمية مستمرة

(d) كمية مرتبة

الحل:

(a) كمية متقطعة.

(b) كمية مرتبة.

(c) كمية مستمرة.

(d) كمية إسمية.

حاول أن تحل

(a) حدد نوع البيانات في كل مما يأتي:

(b) عدد أعضاء فريق كرة القدم.

(c) الوظيفة (ضابط، محاسب، محام، تاجر، مدرس، ...)

(d) أظلال قامات طلاب الصف الحادي عشر.

(e) تقديرات الطلاب في مادة اللغة الإنجليزية في جامعة الكويت.

### Ways To Collect Data

طرق جمع البيانات  
عند جمع البيانات يمكن استخدام طرائق متنوعة وذلك بحسب ما هو متوفر وما هو أسهل وهي:

- المشاهدة والملاحظة
- البريد العادي أو البريد الإلكتروني
- المقابلة الشخصية
- الأبحاث التاريخية والأرشيف
- مواقع التواصل الاجتماعي
- الاستبانة
- الهاتف المنزلي أو الهاتف النقال
- الوثائق والسجلات
- قواعد البيانات

في التمارين (10-6)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) البيانات الكيفية تكون:

(a) إسمية أو مرتبة

(b) مرتبة فقط

(c) متقطعة

(d) إسمية فقط

(7) البيانات المستمرة هي بيانات:

(a) إسمية

(d) كمية

(b) مرتبة

(c) كمية

(8) عند إجراء تحاليل الدم نستخدم:

(a) الحصر الشامل

(b) المعاينة

(c) الحصر الشامل والمعاينة

(d) ليس أيًا مما سبق

(9) البيانات الكمية تكون:

(a) إسمية أو مرتبة

(b) مرتبة فقط

(c) متقطعة أو مستمرة

(d) مستمرة فقط

(10) عدد المشاهدين في مباراة كرة قدم هو عبارة عن بيانات:

(a) كمية إسمية

(b) كمية مرتبة

(c) كمية متقطعة

(d) كمية مستمرة

## 2-6: العينات

### 1 الأهداف

- يتعرف العينة العشوائية البسيطة ويطبقها.
- يتعرف العينة العشوائية الطبقية ويطبقها.
- يتعرف العينة العشوائية المنتظمة ويطبقها.

### 2 المفردات والمفاهيم الجديدة

- عينة عشوائية بسيطة - عينة عشوائية منتظمة - عينة عشوائية طبقية - عينة عشوائية

### 3 الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة - حاسوب - جهاز إسقاط (Data show).

### 4 التمهيدي

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

- (a) هل يمكن استخدام الحصر الشامل لمعرفة البرامج التلفزيونية المفضلة لدى سكان دولة الكويت؟
- (b) اعرض بعض المتغيرات التي يمكن دراستها في غرفة الصف.
- (c) أعط أمثلة عن بيانات كمية وبيانات كيفية.

### العينات Samples

#### دعنا نفكر ونناقش

- تتكون أسرة إحدى المستشفيات من 100 إدراة، 150 طبيباً، 250 ممرضاً.
- 1 أراد مدير المستشفى اختيار 25 ممرضاً للتحاق ببرنامج تدريبي، وضح كيفية اختيار الممرضين دون تحيز.
- 2 يساعد مدير المستشفى فريق عمل مكون من 10 أعضاء من مختلف فئات العاملين. وضح كيفية اختيارهم بشكل عادل يتناسب مع أعداد كل فئة من العاملين.

**العينة العشوائية Random Sample**  
هي جزء من المجتمع الإحصائي يتم اختيارها عشوائياً بطريقة علمية دون تحيز كي تمثل هذا المجتمع أفضل تمثيل بأقل تكلفة ممكنة. تختلف العينة بحسب طبيعة المجتمع الإحصائي محل الدراسة. في ما يلي بعض من العينات العشوائية:

**1 - العينة العشوائية البسيطة Simple Random Sample**  
إذا تضمن المجتمع الإحصائي عدداً  $n$  من المفردات المتجانسة وأردنا دراسته انطلاقاً من عينة عشوائية عدد مفرداتها  $m$  (حجمها)، يكون لدينا عينة عشوائية بسيطة والشئ الأساس في العينة العشوائية البسيطة هو أن لكل مفردة من مفردات المجتمع الإحصائي الفرصة نفسها لتكون ضمن العينة.

توجد طرق متعددة لاختيار عينة عشوائية بسيطة مثل: جدول الأعداد العشوائية، آلات حاسبة متخصصة، برامج إحصائية في الحاسوب مثل (SPSS, Microsoft Excel, IRT).

#### مثال توضيحي

في إحدى المؤسسات التعليمية يوجد 80 طالباً مرقمين من 1 إلى 80.

المطلوب سحب عينة عشوائية بسيطة حجمها 7 طلاب لدراسة بعض الأمور في المؤسسة باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الأول والعمود الثاني.

#### الحل:

بما أن حجم المجتمع 80 فإننا نأخذ أول رقمين لجهة اليسار من الصف الأول والعمود الثاني ثم نتحرك رأساً إلى الأسفل نجد الأعداد التالية: 28, 53, 31, 96, 37, 86, 41.

ولكن يوجد عددين 96, 86 لا يوجد مقابل لهما في ترقيم الطلاب لذا يبقى لدينا: 28, 53, 31, 37, 41.

فكذلك نجد العددين الآخرين علي ألا يكون تكراراً لما سبق فنجد: 02, 28, 53, 31, 37, 41, 02, 35.

#### معلومة:

يتم اختيار الصف الأول والعمود الأول من جدول الأعداد العشوائية إذا لم يتم التحديد.

6-2

#### سوف تتعلم

- العينة العشوائية البسيطة.
- العينة العشوائية الطبقية.
- العينة العشوائية المنتظمة.

#### المفردات والمصطلحات:

- Sample عينة  
عينة عشوائية  
Random Sample عينة عشوائية بسيطة  
Simple Random Sample عينة عشوائية طبقية  
Stratified Random Sample عينة عشوائية منتظمة  
Systematic Random Sample كسر المعاينة  
Sampling Fraction

202

تمرن  
6-2

### العينات Samples

#### المجموعة A تمارين مقالية

- (1) أوجد كسر المعاينة عندما يكون حجم العينة 8 وحجم المجتمع 100.
- (2) أوجد حجم المجتمع الإحصائي إذا كان طول الفترة 5 وحجم العينة 100.
- (3) ما الفرق بين العينة العشوائية البسيطة والعينة العشوائية الطبقية؟
- (4) شركة دراسات تريد استفتاء العمال وأصحاب العمل في منطقة معينة. يبلغ عدد العمال 200 عامل وأصحاب العمل 40.
- (a) أي نوع عينة عشوائية تستخدم في هذه الحالة؟
- (b) كم يساوي كسر المعاينة إذا كنا نريد عينة من 60 شخص؟
- (c) هل نستخدم جدول الأعداد العشوائية في هذه الدراسة؟
- (d) نرقم العمال من 1 إلى 200 وأصحاب العمل من 201 إلى 240.
- استخدم الصف السادس والعمود السادس وعدد أول 5 أعداد للسحب العشوائي من كل طبقة.

#### المجموعة B تمارين موضوعية

في الصائرين (1-5)، ظل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

- (1) للحصول على أفضل تمثيل للمجتمع نختار العينة بطريقة عشوائية.
- (2) لا يوجد فرق بين العينة العشوائية البسيطة والعينة العشوائية الطبقية.
- (3) حجم المجتمع = كسر المعاينة / حجم العينة
- (4) حجم المجتمع الإحصائي = طول الفترة × حجم العينة
- (5) إذا كان طول الفترة يساوي 70، والمفردة الأولى تساوي 43، فالمفردة الخامسة تساوي 322

87

إن إجراء دراسات عن مجتمعات إحصائية كبيرة العدد لا يمكن أن يتم عملياً إلا عن طريق المعاينة، وبالتالي على جزء محدود من هذا المجتمع الذي يتكون من مفردات تمثله وتحقق أهداف هذه الدراسات.

### في المثال (1)

اشرح للطلاب أن استخدام العينة العشوائية البسيطة يعود إلى أن كل فرد في هذه المؤسسة له الفرصة ليكون واحداً من 7 لهم الحظ بالذهاب لأداء فريضة الحج على نفقة المؤسسة. نستخدم جدول الأعداد العشوائية البسيطة ابتداءً من الصف الأول والعمود الأول ما لم يحدد.

### في المثالين (2), (3)

ناقش مع الطلاب الفرق بين المجتمع الإحصائي في المثال (1) والمجتمع الإحصائي في المثالين (2), (3). أكد لهم أن العينة العشوائية البسيطة لا يصح استخدامها. فالمجتمع الإحصائي في المثالين (2), (3) يتكون من فئات مختلفة، ويجب التعرف على أدائهم وكفاءتهم. لذا كان لا بد من إيجاد كسر المعاينة، ثم إيجاد حجم العينة من كل طبقة في المجتمع الإحصائي محل الدراسة، وبعد ذلك نستخدم جدول الأعداد العشوائية.

### في المثالين (4), (5)

أخبر الطلاب أنه في البدء، يجب احتساب طول الفترة في العينة العشوائية المنتظمة علماً بأن جميع أفراد هذه العينة يجب أن يكون لهم الفرصة نفسها، وبالتالي فإن العينة العشوائية المنتظمة مشابهة للعينة العشوائية البسيطة إلى حد ما ولكنها يختلفان من حيث التركيب، إذ في العينة البسيطة نختار الأعداد العشوائية بحسب الترتيب في العينة، أما في العينة المنتظمة فيضاف طول الفترة بالتتابع انطلاقاً من أول عدد على جدول الأعداد العشوائية على أن يكون أصغر من طول الفترة.

#### مثال (1)

عدد العاملين في مؤسسة هو 90 موظف موزعين من 1 إلى 90. يراد اختيار 7 موظفين لأداء فريضة الحج على نفقة المؤسسة ويتم اختيارهم بطريقة عشوائية المطلوب سحب عينة عشوائية بسيطة باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف السادس والعمود الرابع.

الحل: بما أن حجم المجتمع = 90 فإننا نأخذ أول رقمين لجهة اليسار من الصف السادس والعمود الرابع ثم نتحرك رأسياً إلى الأسفل ونختار الأرقام بحيث لا يتجاوز العدد 90 ولا يتكرر. وبذلك يصبح لدينا الموظفين الذين أرقامهم: 10 , 77 , 24 , 3 , 61 , 59

#### حلول أن تحل

1 في مثال (1) إذا كان المطلوب سحب العينة من جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف العاشر والعمود الخامس فما هي الأعداد التي سوف يحصل عليها؟

#### Stratified Random Sample

#### 2- العينة العشوائية الطبقة

يوجد مجتمعات إحصائية تتكون من مجموعات لا تتقاطع مع بعضها بعضاً لذا نأخذ عينة عشوائية بسيطة من كل مجموعة فنحصل على عينة عشوائية طبقية تمثل المجتمع الإحصائي محل الدراسة.

لنسحب عينة عشوائية طبقية حجمها  $m$  من مجتمع إحصائي حجمه  $n$ ، حيث  $m \leq n$  يكون:

$$\text{كسر المعاينة} = \frac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع الإحصائي}} = \frac{m}{n}$$

$$\text{حجم العينة من كل طبقة} = \text{كسر المعاينة} \times \text{حجم الطبقة المناظرة}$$

#### مثال (2)

لدراسة الأداء الوظيفي والكفاءة عند الموظفين في إحدى المؤسسات، تم سحب عينة عشوائية طبقية مكونة من 80 فرداً من أصل 1600 موظف موزعين كما بين الجدول التالي:

المجموع	عمال ومستخدمون	تقنيون وفنيون	إداريون
1600	1200	300	100

ما حجم كل عينة عشوائية بسيطة مسحوبة من كل طبقة؟

في التصارين (10-6)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

(6) يتوافر في العينة العشوائية البسيطة:

- (a) شرط التحيز (b) الإتاحة لكل عنصر فيها الفرصة نفسها في الظهور  
(c) شرط العشوائية والانتظام (d) كل مما سبق

(7) يتوفر في العينة المنتظمة:

- (a) شرط العشوائية والانتظام (b) شرط الانتظام فقط  
(c) شرط العشوائية فقط (d) ليس أيّاً مما سبق

(8) عند استخدام العينة الطبقة يفضل أن:

- (a) تكون عشوائية ومنتظمة (b) تكون طبقات المجتمع متجانسة بداخلها مختلفة في ما بينها  
(c) لا يتيح لكل عنصر فيها الفرصة نفسها في الظهور (d) ليس أيّاً مما سبق

(9) إذا كان حجم العينة يساوي 100 وحجم المجتمع الإحصائي يساوي 2,000، فكسر المعاينة يساوي:

- (a) 0.3 (b) 0.5 (c) 0.05 (d) 0.02

(10) إذا كان طول الفترة يساوي 40 وحجم المجتمع الإحصائي يساوي 1000، فحجم العينة يساوي:

- (a) 35 (b) 25 (c) 40 (d) 30

## 6 الربط

جميع الأمثلة الموجودة في هذا الدرس ترتبط مباشرة بحالات حياتية.

## 7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

تكمّن الأخطاء في تحديد الأعداد على جدول الأعداد العشوائية.

ساعد الطلاب على التعامل بدقة عند تحديد الصف والعمود، ومن ثم كتابة الأعداد المطلوبة بحسب الشروط.

## 8 التقسيم

تابع عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لتقف على حسن أدائهم في مفاهيم هذا الدرس ومهارته.

## اختبار سريع

في أحد الفنادق 80 نزلياً. أرادت إدارة الفندق تقديم وجبة طعام مجانية لـ 8 منهم.

المطلوب سحب عينة عشوائية منتظمة تمثل هؤلاء النزلاء علماً بأنه جرى ترقيم كافة النزلاء من 1 إلى 80 وذلك باستخدام جدول الأعداد العشوائية.

نوجد طول الفترة:  $10 = \frac{80}{8}$

بما أنه لم يتم تحديد الصف والعمود، لذا نأخذ الصف الأول والعمود الأول من جدول الأعداد العشوائية، ثم نأخذ عددًا من رقمين لجهة اليسار على أن يكون العدد أصغر من 10، فنجد النزلاء حاملِي الأرقام التالية:

1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71

الحل:  
كسر المعايية =  $\frac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع الإحصائي}} = \frac{80}{1600} = 0.05$

إيجاد حجم العينة الطبقية بأخذ القاعدة:

حجم العينة الطبقية = كسر المعايية × حجم الطبقة المناظرة.

نوجد إذاً حجم العينة لكل طبقة في المؤسسة:

$$100 \times 0.05 = 5$$

حجم عينة إداريين:

$$300 \times 0.05 = 15$$

حجم عينة الفنيين والفنيين:

$$1200 \times 0.05 = 60$$

وبالتالي تكون العينة العشوائية الطبقية مكونة من: 5 (إداريين)، 15 (فنيين وفنائه)، 60 (عمالاً ومستخدماً).

### حاول أن تحل

2. لدراسة الأداء الوظيفي والكفاءة لدى الموظفين في أحد المصارف، تم سحب عينة طبقية مكونة من 7 أفراد من 35 موظفاً موزعين كما بين الجدول التالي:

المجموع	مستخدمون	محاسبون ومدققون	مدراء أقسام
35	5	20	10

ما حجم كل عينة عشوائية بسيطة مسجوبة من كل طبقة؟

ملاحظة:  
يمكن استخدام جدول الأعداد العشوائية لسحب عينة عشوائية طبقية مكونة من عينات عشوائية بسيطة.

### مثال (3)

في إحدى المؤسسات يوجد 100 إداري مرقمين من 100 إلى 199، 200 مهندس وتقني مرقمين من 200 إلى 399، 600 عامل ومستخدم مرقمين من 400 إلى 999. المطلوب سحب عينة عشوائية طبقية مكونة من 18 فرداً لدراسة كفاءة العاملين في هذه المؤسسة باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الرابع والعمود الرابع.

الحل:

أولاً: نوجد كسر المعايية =  $\frac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع الإحصائي}} = \frac{18}{900} = 0.02$

ثانياً: نوجد حجم كل عينة بسيطة:

$$100 \times 0.02 = 2$$

حجم عينة إداريين:

$$200 \times 0.02 = 4$$

حجم عينة المهندسين والتقنيين:

$$600 \times 0.02 = 12$$

حجم عينة العمال والمستخدمين:

فتكون العينة العشوائية الطبقية مكونة من عينات عشوائية بسيطة كما يلي:  
2 (إداريين)، 4 (مهندسين وتقنيين)، 12 (عمالاً ومستخدماً).

ثالثاً: نستخدم جدول الأعداد العشوائية لإيجاد أرقام:

2 إداريين من بين الأعداد 100 إلى 199

4 مهندسين وتقنيين من بين الأعداد 200 إلى 399

12 عاملاً ومستخدماً من بين الأعداد 400 إلى 999

الإداريين: نأخذ الأرقام الثلاثة لجهة اليسار من الصف الرابع، والعمود الرابع ثم نتحرك ترولاً.

فجد الأعداد: 159, 103

المهندسين والتقنيين: نأخذ الأرقام الثلاثة لجهة اليسار من الصف الرابع والعمود الرابع ثم نتحرك ترولاً.

فجد الأعداد: 246, 383, 349, 341

العمال والمستخدمين: نأخذ الأرقام الثلاثة لجهة اليسار من الصف الرابع والعمود الرابع، ثم نتحرك ترولاً.

فجد الأعداد: 780, 595, 617, 770, 926, 709, 447, 690, 652, 803, 465, 531

فتكون العينة العشوائية الطبقية مكونة من عينات عشوائية بسيطة بحسب الترتيب التالي:

لإداريين: 159, 103

للمهندسين والتقنيين: 246, 383, 349, 341

للعامل والمستخدمين: 780, 595, 617, 770, 926, 709, 447, 690, 652, 803, 465, 531

### حاول أن تحل

3. بين الجدول توزيع الموظفين في إحدى المستشفيات:

المجموع	عمال	ممرضون	أطباء	إداريون
500	40	240	140	80

المطلوب سحب عينة عشوائية طبقية مكونة من 25 فرداً لدراسة كفاءة العاملين وذلك بتكوين عينات عشوائية بسيطة باستخدام جدول الأعداد العشوائية.

3 - العينة العشوائية المنتظمة  
واحدة من العينات الأكثر استخداماً هي العينة العشوائية المنتظمة حيث يتم سحب مفرداتها بحسب نظام ثابت ومنتظم. ترقيم هذه المفردات ترقيماً متسلسلاً ثم يقسم المجتمع الإحصائي إلى فترات متساوية الطول بعدد مفردات العينة تسمى **فترة المعايية**. نستخدم العينة العشوائية المنتظمة في المجتمع الإحصائي حيث تكون جميع المفردات متجانسة، وإيجاد طول الفترة نستخدم القاعدة التالية.

$$\text{طول الفترة} = \frac{\text{حجم المجتمع الإحصائي}}{\text{حجم العينة}}$$

## 9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

2 - 1 تحقق من إجابات الطلاب.

«حاول أن تحل»

1 17 , 64 , 46 , 01 , 49 , 12 , 58

2 كسر المعاينة =  $\frac{7}{35} = 0.2$

حجم عينة مدراء الأقسام:  $0.2 \times 10 = 2$

حجم عينة المحاسبين والمدققين:  $0.2 \times 20 = 4$

حجم عينة المستخدمين:  $0.2 \times 5 = 1$

3 كسر المعاينة =  $\frac{25}{500} = 0.05$

لم يحدد الصف والعمود لذا نأخذ الصف الأول والعمود الأول.

حجم عينة الإداريين:  $0.05 \times 80 = 4$

يحملون الأرقام: 28 , 01 , 59 , 79

حجم عينة الأطباء:  $0.05 \times 140 = 7$

يحملون الأرقام: 201 , 209 , 85 , 212 , 161 , 135 , 96

حجم عينة الممرضين:  $0.05 \times 240 = 12$

يحملون الأرقام: 281 , 412 , 315 , 227 , 360 , 359 , 414 , 234 ,

280 , 274 , 444 , 415

حجم عينة العمال:  $0.05 \times 40 = 2$

يحملون الأرقام: 468 , 462

4 طول الفترة =  $\frac{900}{10} = 90$

نوجد العدد الأول أصغر من 90، فنحصل على الأعداد التالية:

75 , 165 , 255 , 345 , 435 , 525 , 615 , 705 ,  
795 , 885

5 نوجد طول الفترة =  $\frac{140}{7} = 20$

نوجد العدد الأول أصغر من 20، فنحصل على الأعداد التالية: 15 , 35 , 55 , 75 , 95 , 115 , 135

يمكن سحب المفردة الأولى في العينة المنتظمة بطريقة عشوائية من جدول الأعداد العشوائية أو عن طريق المختبر الإحصائي ثم تسحب باقي المفردات بطريقة منتظمة تقضي بإضافة طول فترة المعاينة على المفردة الأولى للحصول على المفردة الثانية ثم إضافة طول الفترة على المفردة الثانية للحصول على المفردة الثالثة وهكذا...

مثال (4)



في أحد المصانع حيث عدد العمال 900 مرقمين من 1 إلى 900، أراد صاحب هذا المصنع مناقشة هؤلاء العمال حول كيفية تحسين الأداء وزيادة الإنتاج المطلوب سحب عينة عشوائية منتظمة حجمها 15، مستخدمًا جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الثامن والعمود العاشر.

الحل:

$$\text{نوجد: طول الفترة} = \frac{\text{حجم المجتمع الإحصائي}}{\text{حجم العينة}} = \frac{900}{15} = 60$$

نختار أول عدد عشوائي مؤلف من رقمين لجهة اليسار باستخدام جدول الأعداد العشوائية على ألا يزيد عن العدد 60 نجد العدد 31 على التقاطع بين الصف الثامن والعمود العاشر.

فتكون الأعداد كما يلي:

31  
31 + 60 = 91  
91 + 60 = 151  
151 + 60 = 211  
211 + 60 = 271  
271 + 60 = 331  
331 + 60 = 391  
391 + 60 = 451  
451 + 60 = 511  
511 + 60 = 571  
571 + 60 = 631  
631 + 60 = 691  
691 + 60 = 751  
751 + 60 = 811  
811 + 60 = 871

والعينة العشوائية المنتظمة تتكون من العمال حيث تقيمهم بالأعداد التالية:

31 , 91 , 151 , 211 , 271 , 331 , 391 , 451 , 511 , 571 , 631 , 691 , 751 , 811 , 871

حاول أن تحل

4 في مثال (4) ما العينة العشوائية المنتظمة إذا أراد صاحب المصنع تشكيلها على أن يكون حجمها 10، مستخدمًا جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الثامن عشر والعمود السابع؟

206

مثال (5)

يبلغ عدد طلاب إحدى مدارس الكويت 700 طالب مرقمين من 1 إلى 700. أراد مدير المدرسة إرسال 10 طلاب لحضور ندوة حول «حماية الحيوانات المهددة بالانقراض». المطلوب سحب عينة عشوائية منتظمة حجمها 10 باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الثاني والعشرون والعمود الثالث.

الحل:

$$\text{نوجد طول الفترة} = \frac{\text{حجم المجتمع الإحصائي}}{\text{حجم العينة}} = \frac{700}{10} = 70$$

نختار أول عدد عشوائي مؤلف من رقمين لجهة اليسار باستخدام جدول الأعداد العشوائية بحيث لا يزيد عن طول الفترة (70) ابتداءً من الصف الثاني والعشرون والعمود الثالث فنجد العدد 38.

38  
38 + 70 = 108  
108 + 70 = 178  
178 + 70 = 248  
248 + 70 = 318  
318 + 70 = 388  
388 + 70 = 458  
458 + 70 = 528  
528 + 70 = 598  
598 + 70 = 668

تتكون العينة العشوائية من الطلاب حيث تقيمهم بالأعداد التالية:

38 , 108 , 178 , 248 , 318 , 388 , 458 , 528 , 598 , 668

حاول أن تحل

5 يبلغ عدد طلبة الصف الحادي عشر علمي في إحدى المدارس 140 طالبًا مرقمين من 1 إلى 140. المطلوب سحب عينة عشوائية منتظمة حجمها 7 لزيارة إحدى دور المسنين وتقديم الهدايا لهم بمناسبة حلول عيد الفطر السعيد باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف السادس والعمود التاسع.

207

## 3-6: أساليب عرض البيانات

### 1 الأهداف

- يوجد التكرار النسبي والنسبة المئوية للتكرار.
- يمثل البيانات بالقطاعات الدائرية.
- يمثل البيانات بالمدرج التكراري والمنحني التكراري ويربط بينهما.

### 2 المفردات والمفاهيم الجديدة

- التكرار - التكرار النسبي - التكرار المئوي - تمثيل بياني بالقطاعات الدائرية - المدرج التكراري - المنحني التكراري - مركز الفئة.

### 3 الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية - ورق رسم بياني - مسطرة - منقلة - جهاز إسقاط (Data Show) - حاسوب.

### 4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

- (a) في البيانات التالية: 7, 5, 6, 8, 7, 9, 7 أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال.
- (b) أوجد النسبة المئوية للعدد 6 من 25

### 5 التدريس

يتابع الطالب بناء معارفه ومهاراته في علم الإحصاء، فيتعرف في هذا الدرس على أساليب جديدة في عرض البيانات تضاف إلى مكتسباته السابقة.

### أساليب عرض البيانات Ways to Display Data

### 3-6

#### عمل تعاوني

يمثل الجدول التالي التوزيع التكراري لأطوال قامات 50 طالباً في المرحلة الثانوية بالسنتيمتر (cm)

الفئة	150-	155-	160-	165-	170-	175-	180-
التكرار	2	8	6	8	13	7	6

1 ما هي النسبة المئوية للطلاب الذين تقل أطوال قاماتهم عن 170 cm؟

2 ما هي النسبة المئوية للطلاب الذين أطوال قاماتهم 170 cm فأكثر؟

علمت فيما سبق أن البيانات التي يمكن الحصول عليها من مصادر مختلفة تصنف إلى نوعين: كمية وكمية.

وهناك طرق متعددة لعرض البيانات مثل الجداول التكرارية والأعمدة والأعمدة المزودة والخط المنكسر والنقاط المجمعة...

#### Pie Chart

#### القطاعات الدائرية

يمكن تمثيل البيانات الكمية باستخدام القطاعات الدائرية. نستخدم التمثيل البياني بالقطاعات الدائرية لعرض التوزيع التكراري لبيانات كمية وتكون هذه البيانات مقسمة إلى فئات متعددة. عدد صنع القطاعات الدائرية تقسم الدائرة إلى قطاعات عددها يساوي عدد الفئات في البيانات ويمثل كل قطاع دائري واحدة من هذه الفئات. قياس الزاوية المركزية لكل قطاع يعطى بالقاعدة:

$$\text{قياس الزاوية المركزية للقطاع} = \frac{\text{التكرار النسبي}}{360} \times 360^\circ$$

$$\text{حيث التكرار النسبي} = \frac{\text{تكرار القيمة (أو الفئة)}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

وكل قطاع من الدائرة يأخذ لوناً أو تظليلاً مختلفاً عن الآخر.

#### مثال (1)

في أحد الاختبارات لم يقيم الأستاذ طلابه بالدرجات، بل استخدم مفردات تقديرية كما في الجدول التالي:

المجموع	ضعيف	مقبول	متوسط	جيد	جيد جداً	ممتاز
25	2	5	4	6	4	4
التكرار	4	5	4	6	4	4

208

أوجد التكرار النسبي والتكرار المئوي لكل فئة.

اعرض هذه البيانات الكمية باستخدام القطاعات الدائرية.

(إرشاد: النسبة المئوية للتكرار = (التكرار المئوي) = (التكرار النسبي × 100%)

الحل:

المجموع	ضعيف	مقبول	متوسط	جيد	جيد جداً	ممتاز
25	2	5	4	6	4	4
التكرار النسبي	$\frac{2}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$
النسبة المئوية للتكرار (التكرار المئوي)	$8\%$	$20\%$	$16\%$	$24\%$	$16\%$	$16\%$

نحسب أولاً قياس الزاوية المركزية لكل قطاع دائري:

قياس (زاوية تقدير ممتاز):

$$\frac{4}{25} \times 360^\circ = 57.6^\circ$$

قياس (زاوية تقدير جيد جداً):

$$\frac{4}{25} \times 360^\circ = 57.6^\circ$$

قياس (زاوية تقدير جيد):

$$\frac{6}{25} \times 360^\circ = 86.4^\circ$$

قياس (زاوية تقدير متوسط):

$$\frac{4}{25} \times 360^\circ = 57.6^\circ$$

قياس (زاوية تقدير مقبول):

$$\frac{5}{25} \times 360^\circ = 72^\circ$$

قياس (زاوية تقدير ضعيف):

$$\frac{2}{25} \times 360^\circ = 28.8^\circ$$

#### حاول أن تحل

1 يمثل الجدول التالي التوزيع التكراري لألوان العيون لدى 40 طالباً ثانوياً:

المجموع	زيتي	عسلي	بنّي	أزرق	أسود
40	4	6	13	4	13
التكرار	4	6	13	4	13

2 أوجد التكرار النسبي والتكرار المئوي.

3 مثل هذه البيانات بالقطاعات الدائرية.

209

## في المثال (1)

قد تكون البيانات الكيفية أكثر سهولة من البيانات الكمية عند فرزها، لذلك يمكن تنظيمها سريعاً وإيجاد التكرار النسبي والنسبة المئوية للتكرار، ومن ثم إيجاد قياس الزاوية المركزية للقطاع الدائري الذي يمثل كل متغير كيمي. تأكد من أنهم قادرون على استخدام القاعدة لإيجاد قياس الزاوية المركزية في القطاعات الدائرية. اطلب إلى أكثر من طالب الذهاب إلى السبورة وكتابة: قياس (الزاوية المركزية) = التكرار النسبي  $\times 360^\circ$ ، ثم ساعدهم على استخدام المنقلة في رسم كل قطاع.

## في المثال (2)

يساعد المدرج التكراري على المقارنة بين الفئات، وهو يشبه إلى حد كبير التمثيل البياني بالأعمدة، وأما هنا فنستخدم الفئات، لذا كانت المستطيلات متصلة ببعضها بعضاً. وعندما نرسم المنحنى التكراري نأخذ منتصف القطع المستقيمة العليا لكل مستطيل، ثم نوصلها بمنحنى قريب جداً من القطعة المستقيمة وتكون نهاية هذا المنحنى دائماً عند منتصف الفئة ما قبل الفئة الأولى حيث تكرارها الصفر، وعند منتصف الفئة التي تلي مباشرة الفئة الأخيرة حيث تكرارها الصفر.

## 6 الربط

إن الأمثلة الموجودة في هذا الدرس هي ربط بين حالات حياتية وأساليب عرض البيانات.

## 7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في رسم المنحنى التكراري باستخدام المدرج التكراري. ركز انتباه الطلاب إلى ضرورة ربط منتصفات الأضلاع العليا للمستطيلات بمنحنيات للحصول على المنحنى التكراري.

## 8 التقييم

تابع عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لتقف على إمكانياتهم في التعامل مع أساليب عرض البيانات، وتحقق من فهمهم لما عليهم إيجاده.

### المنحنى التكراري والمدرج التكراري

#### Frequency Curve and Histogram

يستخدم المدرج التكراري والمنحنى التكراري في تمثيل جدول تكراري ذي فئات بحيث إن كل مستطيل يمثل فئة من الفئات. قاعدة المستطيل على الخط الأفقي هي طول الفئة، وارتفاعه الراسي يساوي قيمة تكرار الفئة.

#### مثال (2)

يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لنتائج تحليل مادة البيرات في 40 وحدة ماء معدة للخدمات المشتركة في المنازل (غير الصالحة للشرب) وذلك خلال شهر واحد (mg/L).

الفئة	15-	20-	25-	30-	35-	40-	45-	50-	المجموع
التكرار	3	4	8	9	7	4	3	2	40

أكمل الجدول بإضافة مراكز الفئات.

ارسم المنحنى التكراري.

ارسم المدرج التكراري ومنه المنحنى التكراري.

الحل:

نوجد مراكز الفئات:

$$\frac{15+20}{2} = 17.5 \quad \text{مركز الفئة-15 هو:}$$

$$\frac{20+25}{2} = 22.5 \quad \text{مركز الفئة-20 هو:}$$

$$\frac{25+30}{2} = 27.5 \quad \text{مركز الفئة-25 هو:}$$

$$\frac{30+35}{2} = 32.5 \quad \text{مركز الفئة-30 هو:}$$

$$\frac{35+40}{2} = 37.5 \quad \text{مركز الفئة-35 هو:}$$

$$\frac{40+45}{2} = 42.5 \quad \text{مركز الفئة-40 هو:}$$

$$\frac{45+50}{2} = 47.5 \quad \text{مركز الفئة-45 هو:}$$

$$\frac{50+55}{2} = 52.5 \quad \text{مركز الفئة-50 هو:}$$

#### معلومة:

يأثر استهلاك مياه الخدمات المشتركة في دولة الكويت بالعوامل التالية:

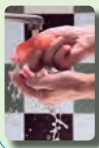
1 - كمية المطر المتساقطة على مدار السنة هي شبه ثابتة حيث إنها تتراوح سنوياً بين 70 ملم - 130 ملم. وهذا يشكل جزءاً من رصيد المياه في الدولة.

2 - مصروف المياه هو تصاعدي وذلك نتيجة العوامل الاجتماعية والاقتصادية:

(a) عدد السكان في ازدياد حيث بلغت نسبة الزيادة السكانية في السنوات الأخيرة حوالي 4%.

(b) الرغبة في الإقامة داخل المدن وذلك يتطلب استهلاكاً أكثر لكمية المياه.

(c) نمو الصناعة والزراعة وري الحدائق العامة.



## اختبار سريع

سجلت إدارة الأرصاد الجوية في دولة الكويت لشهر يوليو من سنة 2012 أعلى درجة حرارة، إذ بلغت حوالي  $48^{\circ}$  مئوية، وكانت درجات الحرارة القصوى كما يلي:

47, 46, 45, 39, 42, 43, 40, 44, 47, 45, 48,  
43, 40, 41, 38, 42, 47, 45, 46, 47, 43, 44,  
46, 43, 45, 41, 46, 47, 42, 45, 48.

نظم هذه البيانات في جدول مبيّنًا: التكرار، التكرار النسبي، النسبة المئوية للتكرار، ثم مثلها على مدرج تكراري، ومنحنى تكراري، وبالقطاعات الدائرية.

نوجد المدى:  $48 - 38 = 10$

نأخذ 5 فئات طول كل فئة 2.

الجدول:

الفئة	38-	40-	42-	44-	46-48
التكرار	2	4	7	7	11
التكرار النسبي	$\frac{2}{31}$	$\frac{4}{31}$	$\frac{7}{31}$	$\frac{7}{31}$	$\frac{11}{31}$
النسبة المئوية للتكرار	6.45%	12.9%	22.58%	22.58%	35.49%

$$\frac{2}{31} \times 360^{\circ} \approx 23^{\circ}$$

$$\frac{4}{31} \times 360^{\circ} \approx 46^{\circ}$$

$$\frac{7}{31} \times 360^{\circ} \approx 81.5^{\circ}$$

$$\frac{7}{31} \times 360^{\circ} \approx 81.5^{\circ}$$

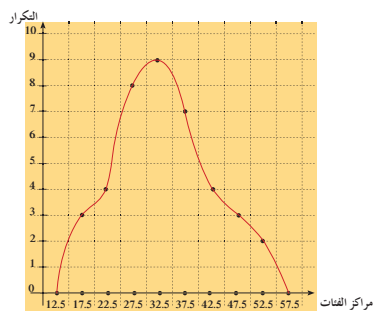
$$\frac{11}{31} \times 360^{\circ} \approx 128^{\circ}$$

الجدول:

الفئة	15-	20-	25-	30-	35-	40-	45-	50-	المجموع
التكرار	3	4	8	9	7	4	3	2	40
مركز الفئة	17.5	22.5	27.5	32.5	37.5	42.5	47.5	52.5	

لرسم المنحنى التكراري نصل النقاط الممثلة للأزواج المرتبة التي تمثل مراكز الفئات وتكراراتها ونفعل المنحنى التكراري عند البداية في مركز فئة تكرارها صفر وعند النهاية في مركز فئة تكرارها صفر:

(12.5, 0), (17.5, 3), (22.5, 4), (27.5, 8), (32.5, 9), (37.5, 7), (42.5, 4), (47.5, 3), (52.5, 2), (57.5, 0).



تمرّن  
6-3

### أساليب عرض البيانات Ways to Display Data

#### المجموعة A تمارين مقالية

(1) أثناء عمل الطلاب في مجموعات على نشاط معين في الصف سجل المعلم الملاحظات المبينة في الجدول التالي:

المجموع	غير مشارك	يتخذ قرارًا	يسمع فقط	يحاور ويناقش	الفئة
22	6	4	7	5	التكرار

- (a) أوجد التكرار النسبي والتكرار المئوي لكل فئة.  
(b) اعرض هذه البيانات باستخدام القطاعات الدائرية.

(2) بيّن الجدول التالي وقت خروج السيارات من أحد المنتجعات السياحية بعد ظهر أحد الأيام.

المجموع	9-	8-	7-	6-	5-	4-	الفئة
100	6	7	14	25	31	17	التكرار

- (a) أكمل الجدول بإضافة مراكز الفئات.  
(b) ارسم المنحنى التكراري.  
(c) ارسم المدرج التكراري ومنه المنحنى التكراري.

(3) يعرض مدير أحد مطاعم الوجبات السريعة في الجدول التالي عدد الوجبات المرسله إلى المنازل خلال أحد الأسابيع، ويُعد هذه المنازل عن المطعم.

المجموع	24-	20-	16-	12-	8-	4-	0-	البعد (km)
102	4	8	12	20	21	25	12	التكرار

- (a) أكمل الجدول بإضافة مراكز الفئات.  
(b) ارسم المنحنى التكراري.  
(c) ارسم المدرج التكراري ومنه المنحنى التكراري.



3 المدرج التكراري والمنحى التكراري.

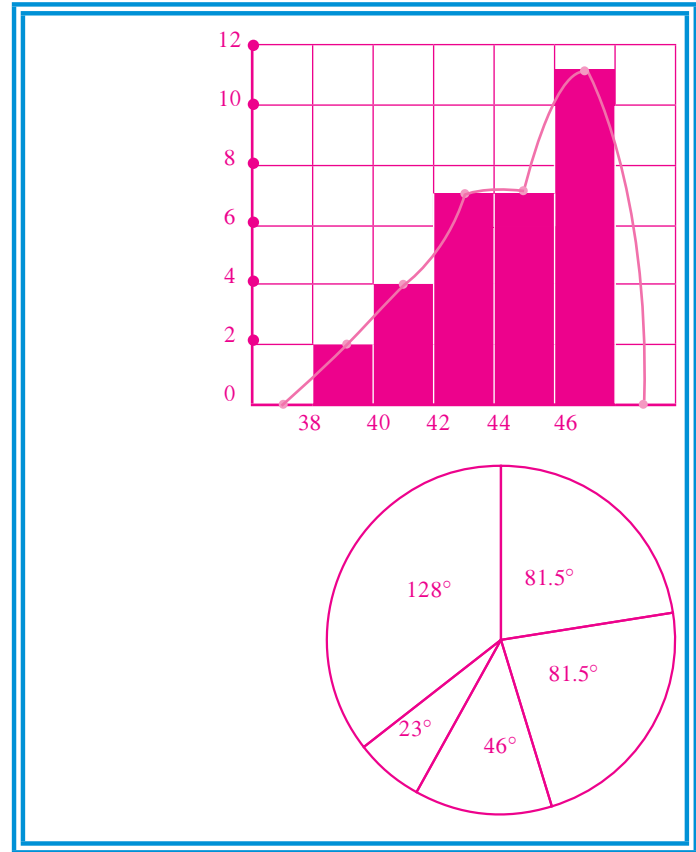
معلومة:  
تصل بين منتصفات الأضلاع العليا للمستطيلات بدوياً دون استخدام المسطرة للحصول على المنحى التكراري.

سأول أن تحل:

2 بين الجدول التالي التوزيع التكراري لأطوال 30 طالباً بالسنتيمتر (cm)

الفئة	155--	160--	165--	170--	175--	180--	المجموع
التكرار	4	6	11	5	3	1	30

a أوجد مراكز الفئات.  
b ارسم المنحى التكراري.  
c ارسم المدرج التكراري ومنه المنحى التكراري.



### 9 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

1 النسبة:  $\frac{24}{50}$ ،

النسبة المئوية:  $\frac{24}{50} \times 100\% = 48\%$

2 النسبة:  $\frac{26}{50}$ ،

النسبة المئوية:  $\frac{26}{50} \times 100\% = 52\%$

«حاول أن تحل»

1 (a)

اللون	أسود	أزرق	بنّي	عسلي	زيتي	المجموع
التكرار	13	4	13	6	4	40
التكرار النسبي	$\frac{13}{40}$	$\frac{4}{40}$	$\frac{13}{40}$	$\frac{6}{40}$	$\frac{4}{40}$	1
النسبة المئوية للتكرار	32.5%	10%	32.5%	15%	10%	100%

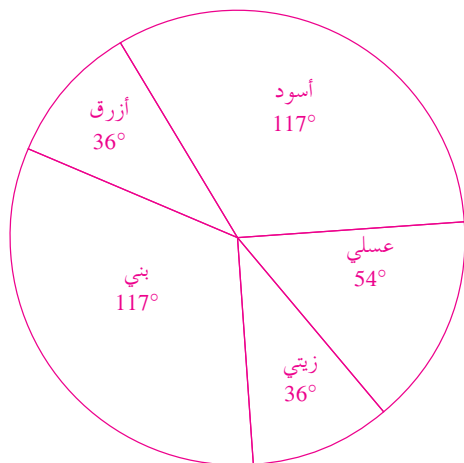
$$\frac{13}{40} \times 360^\circ = 117^\circ$$

$$\frac{4}{40} \times 360^\circ = 36^\circ$$

$$\frac{13}{40} \times 360^\circ = 117^\circ$$

$$\frac{6}{40} \times 360^\circ = 54^\circ$$

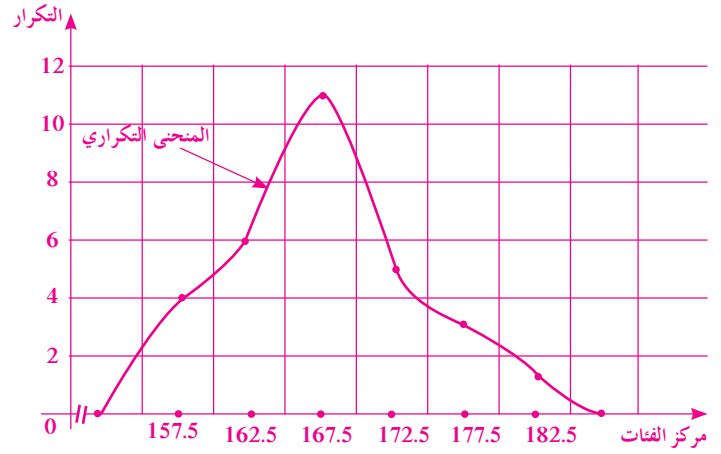
$$\frac{4}{40} \times 360^\circ = 36^\circ$$



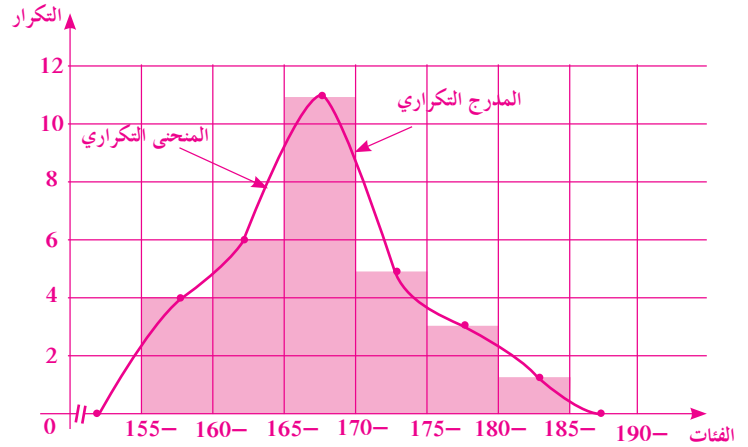
## 2 (a) الجدول مع مركز الفئات

الفئة	155-	160-	165-	170-	175-	180-	المجموع
التكرار	4	6	11	5	3	1	30
مركز الفئة	157.5	162.5	167.5	172.5	177.5	182.5	

## (b) المنحنى التكراري باستخدام مراكز الفئات



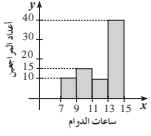
## (c) المدرج التكراري والمنحنى التكراري



### المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

- (1) التكرار النسبي يساوي، قياس الزاوية المركزية لقطاع  $\times 360^\circ$
- (2)  $\frac{\text{مجموع التكرارات}}{\text{تكرار القيمة}} = \text{التكرار النسبي}$
- (3) مركز فئة - 20 طولها 10 يساوي 30
- (4) لا يمكن رسم المنحنى التكراري قبل المدرج التكراري.
- (5) يمكن تمثيل بيانات كمية مستمرة بالقطاعات الدائرية. (a) (b)



في التمارين (6-10)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة

في التمرين (6-7) استخدم المدرج التكراري المقابل الذي يمثل أعداد المراجعين في إحدى الزيارات خلال ساعات الدوام اليومي في دولة ما.

(6) إجمالي عدد المراجعين هو:

- (7) طول الفترة يساوي:
- (8) كم يساوي قياس الزاوية المركزية لقطاع التربة البدينية؟
- (9) كم يبلغ عدد الطلاب المسجلين باللغة الإنجليزية؟
- (10) كم يبلغ عدد الطلاب المسجلين بالمواد القوية؟



- (a) 80 (b) 65 (c) 70 (d) 75
- (a) 4 (b) 3 (c) 2 (d) 1
- (a) 120° (b) 45° (c) 180° (d) 90°
- (a) 30 (b) 25 (c) 35 (d) 40
- (a) 50 (b) 40 (c) 55 (d) 60

## 4-6: الانحراف المعياري

### 1 الأهداف

- يوجد التباين والانحراف المعياري.

### 2 المفردات والمفاهيم الجديدة

- المتوسط الحسابي - مقاييس التشتت - الانحراف المعياري - التباين.

### 3 الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية - جهاز إسقاط (Data Show) - حاسوب.

### 4 التمهيد

- اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:  
تأخذ البيانات التالية:

15 , 14 , 18 , 17 , 15 , 11 , 16 , 15 , 12 , 14 , 16 ,  
12 , 13 , 11 , 10 , 13 , 14 , 12 , 15 , 17.

- (a) كوّن جدولاً لهذه البيانات باستخدام فئات متساوية الطول من 2 تبين فيه: التكرار - التكرار النسبي - النسبة المئوية للتكرار (التكرار المئوي) - مراكز الفئات.
- (b) مثل هذه البيانات بالمدرج التكراري وبالمنحنى التكراري.
- (c) استخدم مراكز الفئات لترسم المنحنى التكراري.
- (d) مثل هذه البيانات بالقطاعات الدائرية.
- (e) أوجد الجذر التربيعي لكل عدد مما يلي:  
629 , 230 , 196 , 49

### الانحراف المعياري

#### Standard Deviation

#### عمل تعارفي

في نهاية الفصل الأول من العام الدراسي، كانت درجات أحد الطلاب حيث النهاية العظمى 20 درجة كما يلي:

المادة	الدرجة					المتوسط الحسابي
أحياء	11	12	11	10	9	
رياضيات	16	8	10	7	13	
فيزياء	15	15	15	5	5	
كيمياء	11	12	11	10	11	

- a هل يمكن التعرف على المادة الأفضل في التحصيل، من دون إجراء عمليات حسابية، أو من خلال أفضل متوسط حسابي لدرجات هذا الطالب؟
- b أوجد المتوسط الحسابي لدرجات هذا الطالب في كل مادة.
- c أدخل البيانات إلى الآلة الحاسبة الموجودة لديك، ثم أوجد الانحراف المعياري لدرجات كل مادة. أكمل الجدول التالي:

الانحراف المعياري	
أحياء	
رياضيات	
فيزياء	
كيمياء	

- d ما الذي تلاحظه عند هذا الطالب بالنسبة إلى الانحراف المعياري لدرجات كل مادة؟ اشرح.

خطوات استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد الانحراف المعياري:

إدخال بيانات ذو معيار متفرّد. تأخذ  $x$  على الترتيب القيم: {1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5} باستخدام العمود FREQ لتعيين عدد التكرارات لكل بند {x; freq} {1;1, 2;2, 3;3, 4;4, 5;1}، وحساب الانحراف المعياري والمتوسط الحسابي.

SHIFT MODE (SETUP) 4 (STAT) 1 (ON)

MODE 3 (STAT) 1 (1 - VAR)

STAT	FREQ
3	3
4	2
5	1

AC SHIFT 1 (STAT) 4 (VAR) 2 (x̄) =  
1.154700538 AC SHIFT 1 (STAT) 4 (VAR) 3 (σx) =  
1.154700538

النتيجة: المتوسط الحسابي: 3 الانحراف المعياري: 1.154700538

### 6-4

#### سوف نتعلم

- إيجاد التباين والانحراف المعياري

#### المفردات والمصطلحات:

- Mean المتوسط الحسابي
- قياس التشتت
- Dispersion Measures
- الانحراف المعياري
- Standard Deviation
- Variance التباين



## 5 التدريس

تعرف الطالب في مراحل سابقة على طرائق متعددة لوصف جميع البيانات. كانت تستخدم في بيانات حيث المتغير فيها هو متقطع.

في هذا الدرس سوف يبنى المتعلم مفاهيم ومهارات متقدمة في علم الإحصاء. فهو سوف يتعامل مع مقاييس تساعد على اتخاذ قرارات سليمة، وفي بعض الأحيان يمكن أن يضع توقعات مستقبلية معقولة.

### في المثال (1)

يعتبر الانحراف المعياري من أهم مقاييس التشتت المستخدمة في علم الإحصاء، حيث يُوّشر إلى مدى تشتت البيانات مقارنة بالمتوسط الحسابي لقيم هذه البيانات. كلما كان الانحراف المعياري صغيراً، كان تشتت قيم البيانات أقرب إلى المتوسط الحسابي.

شجع الطلاب على استخدام الآلة الحاسبة، لأنها تساعد كثيراً على إيجاد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري. كما أنه من المهم جداً أن يتعرف الطالب كيفية تكوين جدول يبين العمليات الحسابية المستخدمة لإيجاد التباين  $v$  ومن ثم الانحراف المعياري:  $\sigma = \sqrt{v}$ .

### 6 الربط

يؤكد المثال (1) الربط بالواقع الحياتي.

### 7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطالب في إدخال البيانات إلى الآلة الحاسبة. تجول بين الطلاب، وتابع معهم إدخال البيانات آخذاً في الاعتبار البرنامج الإحصائي لكل آلة حاسبة.

### 8 التقييم

تابع الطلاب وهم يتعاملون مع فقرة «حاول أن تحل»، لتأكد من حسن أدائهم في الإجابة عن الأسئلة كلها.

يمكن قراءة البيانات الإحصائية بزوج مرتب مكون من مقياسين مهمين:

1 المتوسط الحسابي وهو مقياس لمركز القيم في البيانات.

2 الانحراف المعياري وهو مقياس لتشتت القيم في البيانات.

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i}$$

■ لإيجاد المتوسط الحسابي  $\bar{x}$  تستخدم القانون:

حيث إن:  $x_i$  هي قيم المتغيرات في البيانات.

$n_i$  تكرارات المتغيرات في البيانات.

$$v = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum n_i}$$

■ لإيجاد التباين  $v$  تستخدم القانون:

$$\sigma = \sqrt{v}$$

■ لإيجاد الانحراف المعياري  $\sigma$  تستخدم القانون:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum n_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum n_i}}$$

ملاحظة هامة: في حالة التوزيع التكراري ذي الفئات  $x_i$  تمثل مراكز الفئات وتستخدم نفس القوانين السابقة.

#### مثال (1)

في استطلاع أجري في عيادة أحد الأطباء عن الوقت المستغرق لمعالجة 120 مريضاً، جاءت النتائج كما يلي:

المجموع	50-	45-	40-	35-	30-	25-	20-	15-	10-	الوقت المستغرق بالدقائق (min)
120	2	3	12	18	16	14	23	21	11	عدد المرضى

4 أكمل الجدول بإيجاد مركز كل فئة أو جد المتوسط الحسابي.

1 أوجد التباين والانحراف المعياري.

2 فسر إجابتك.

3 الحل:

المجموع	50-	45-	40-	35-	30-	25-	20-	15-	10-	الوقت المستغرق بالدقائق (min)
120	2	3	12	18	16	14	23	21	11	عدد المرضى ( $n_i$ )
	52.5	47.5	42.5	37.5	32.5	27.5	22.5	17.5	12.5	مركز الفئة ( $x_i$ )

## اختبار سريع

جاءت درجات طلاب الصف الحادي عشر في اختبار للرياضيات حيث النهاية العظمى 20 درجة كما يلي:

11 , 12 , 9 , 10 , 13 , 14 , 15 , 16 , 17 , 8 ,  
10 , 11 , 12 , 14 , 15 , 14 , 13 , 16 , 7 , 9 ,  
8 , 14 , 15 , 16 , 12.

(a) كوّن جدولاً يبيّن التكرار، ومركز الفئة.

الفئة	7-	9-	11-	13-	15- 17
التكرار	3	4	5	6	7
مركز الفئة	8	10	12	14	16

(b) أوجد المتوسط الحسابي  $\bar{x}$  والانحراف المعياري  $\sigma$  بدون استخدام برنامج إحصائي.

المتوسط الحسابي:  $\bar{x} = \frac{320}{25} = 12.8$

$x_i$	$n_i(x_i - \bar{x})$	$n_i(x_i - \bar{x})^2$
8	3(8 - 12.8)	69.12
10	4(10 - 12.8)	31.36
12	5(12 - 12.8)	3.2
14	6(14 - 12.8)	8.64
16	7(16 - 12.8)	71.68
		المجموع = 184

$$v = \frac{184}{25} = 7.36$$

$$\sigma = \sqrt{v}$$

$$\sigma = \sqrt{7.36} \approx 2.7$$

التباين:

الانحراف المعياري:

المتوسط الحسابي:

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i}$$

$$\bar{x} = \frac{(11 \times 12.5) + (21 \times 17.5) + (23 \times 22.5) + (14 \times 27.5) + \dots + (3 \times 47.5) + (2 \times 52.5)}{120}$$

$$\bar{x} = \frac{3360}{120} = 28$$

إيجاد التباين والانحراف المعياري تكون الجدول التالي:

مركز الفئة $x_i$	التكرار $n_i$	$n_i(x_i - \bar{x})$	$n_i(x_i - \bar{x})^2$
12.5	11	11(12.5 - 28)	2642.75
17.5	21	21(17.5 - 28)	2315.25
22.5	23	23(22.5 - 28)	695.75
27.5	14	14(27.5 - 28)	3.5
32.5	16	16(32.5 - 28)	324
37.5	18	18(37.5 - 28)	1624.5
42.5	12	12(42.5 - 28)	2523
47.5	3	3(47.5 - 28)	1140.75
52.5	2	2(52.5 - 28)	1200.5
		المجموع =	12470

التباين:

$$v = \frac{\sum n_i(x_i - \bar{x})^2}{\sum n_i}$$

$$v = \frac{12470}{120} \approx 103.916$$

$$\sigma = \sqrt{v}$$

$$\sigma \approx 10.2$$

بما أن المتوسط الحسابي  $\bar{x} = 28$  min والانحراف المعياري  $\sigma \approx 10.2$  فهذا يدل على تشتت كبير لقيم البيانات عن المتوسط الحسابي.

حاول أن تحل

لاحظ صاحب سببلة أن سبب الأداة بحسب أسعارها بالدينار هو كما يلي:

الفئة (بالدينار)	0-	5-	10-	15-	20-	25-	المجموع
التكرار	19	30	47	28	26	10	160

أكمل الجدول بإيجاد مركز فئة أوجد المتوسط الحسابي.

أوجد التباين والانحراف المعياري لأسعار الأداة.

## 9 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

(a) تنوع الإجابات.

(b) أحياء: 10.6

رياضيات: 10.8

فيزياء: 11

كيمياء: 11

(c)

الانحراف المعياري	
أحياء	1.02
رياضيات	3.3
فيزياء	4.9
كيمياء	0.63

(d) التشتت الأكبر يطال الفيزياء. يوجد تقارب كبير جدًا

بالنسبة إلى درجات الكيمياء مع المتوسط الحسابي.

«حاول أن تحل»

(a) 1

الفئة	0-	5-	10-	15-	20-	25-
التكرار	19	30	47	28	26	10
مركز الفئة	2.5	7.5	12.5	17.5	22.5	27.5

$$\bar{x} = \frac{2210}{160} \approx 13.8 \quad \text{المتوسط الحسابي:}$$

$$v \approx 49.56 \quad \text{(b) التباين:}$$

$$\sigma = \sqrt{v} = 7.04 \quad \text{الانحراف المعياري:}$$

تمرن  
6-4

### الانحراف المعياري Standard Deviation

#### المجموعة A تمارين مقالية

(1) أوجد الانحراف المعياري للبيانات التالية: 5, 5, 5, 5. فسر إجابتك.

(2) سئّل صاحب متجر أن يبيع السلع بحسب أسعارها هو كما يلي:

المجموع	0-	10-	20-	30-	40-	50-	الفئة (بالدينار)
1 600	100	260	280	470	300	190	التكرار

(a) أوجد المتوسط الحسابي.

(b) أوجد التباين والانحراف المعياري لأسعار السلع.

(3) تصنع مؤسسة عبوات لحفظ الأجبان على أن تحتوي العبوة الواحدة على 170 g من الجبنة. ولكن عند وزن 200 عبوة، جاءت الأوزان كما يبين الجدول التكراري التالي:

المجموع	174	173	172	171	170	169	168	167	الوزن g
200	6	8	34	48	55	24	15	10	التكرار

(a) أوجد المتوسط الحسابي لهذه الأوزان.

(b) أوجد التباين والانحراف المعياري لهذه الأوزان.

#### المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا أضفنا العدد نفسه على جميع الأعداد في البيانات، نحصل على

الانحراف المعياري نفسه.

(2) إذا ضربنا الأعداد في البيانات بالعدد نفسه، لا يتغير الانحراف المعياري.

(3) الانحراف المعياري يكون دائمًا أصغر من المتوسط الحسابي.

(4) الانحراف المعياري يكون دائمًا موجبًا.

- (a) (b)  
(a) (b)  
(a) (b)  
(a) (b)

91

في التمرينين (5-6)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) إذا كان التباين يساوي 100، الانحراف المعياري يساوي:

- (a) ±10 (b) -10 (c) 10 (d) ليس أيًا مما سبق

(6) الانحراف المعياري للبيانات التالية: 1, 2, 3, 4, 5, 6 يساوي:

- (a) 0.78 (b) 1.56 (c) 2.78 (d) 3.78

(7) الانحراف المعياري يساوي صفرًا إذا كانت البيانات:

- (a) متساوية (b) نصفها هو المعكوس الضربي للنصف الآخر  
(c) نصفها هو المعكوس الجمعي للنصف الآخر (d) لا يمكن أن يساوي الانحراف المعياري صفرًا.

(8) الانحراف المعياري هو مقياس:

- (a) تمركز القيم في البيانات (b) تشتت القيم في البيانات  
(c) انحراف القيم في البيانات (d) ليس أيًا مما سبق

(9) يساوي انحراف معياري لبيانات معينة 4. بعد ضرب البيانات في العدد 3، يصبح الانحراف المعياري:

- (a) 13 (b) 12 (c) 11 (d) 10

92

## 5-6: القاعدة التجريبية

### 1 الأهداف

- استخدام القاعدة التجريبية

### 2 المفردات والمفاهيم الجديدة

قاعدة تجريبية - التوزيع الطبيعي.

### 3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية - حاسوب - جهاز إسقاط (Data Show).

### 4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

نأخذ البيانات التالية:

12 , 14 , 17 , 13 , 15 , 18 , 11 , 16

(a) أوجد المتوسط الحسابي  $\bar{x}$  لقيم هذه البيانات.

(b) كوّن جدولاً يبين  $x_i$  ،  $n_i(x_i - \bar{x})$  ،  $n_i(x_i - \bar{x})^2$ .

(c) استنتج قيم التباين  $v$  والانحراف المعياري  $\sigma$  لهذه البيانات.

(d) أوجد:  $[\bar{x} - \sigma , \bar{x} + \sigma]$

$[\bar{x} - 2\sigma , \bar{x} + 2\sigma]$

$[\bar{x} - 3\sigma , \bar{x} + 3\sigma]$

### 5 التدريس

تعتبر القاعدة التجريبية واحدة من مقاييس التشتت

المهمة حيث تساعد الإحصائي على التطبيق على إحدى

الفترات  $[\bar{x} - \sigma , \bar{x} + \sigma]$  أو  $[\bar{x} - 2\sigma , \bar{x} + 2\sigma]$  أو

$[\bar{x} - 3\sigma , \bar{x} + 3\sigma]$  وهذا يتدرج ضمن شروط محددة. ومن

الواضح أن هذه القاعدة تحتاج إلى قيمتين هما: المتوسط

الحسابي  $\bar{x}$  ، والانحراف المعياري  $\sigma$ .

### القاعدة التجريبية Empirical Rule

#### دعنا نفكر ونتناقش

تعلمنا سابقاً أن المدى يقيس تشتت قيم البيانات، إذا كانت قيمة المدى صغيرة فستطوع القول إن قيم البيانات قريبة من بعضها بعضاً ولكن إذا كانت قيمة المدى كبيرة فإن قيم البيانات بعيدة عن بعضها بعضاً أو يوجد فيها قيم متطرفة. كما أن الانحراف المعياري يقيس مدى تشتت قيم البيانات بالمقارنة مع المتوسط الحسابي، إذا كانت قيمة الانحراف المعياري صغيرة تكون قيم البيانات قريبة جداً من قيمة المتوسط الحسابي أما إذا كانت قيمة الانحراف المعياري كبيرة فتكون قيم البيانات بعيدة عن قيمة المتوسط الحسابي.

فمثلاً في البيانات: 14، 15، 16، 17، 18 نجد أن المدى = 4.

المتوسط الحسابي:  $\bar{x} = 16$

والانحراف المعياري  $\sigma_1 \approx 1.414$

وفي البيانات: 3، 9، 17، 23، 28 نجد أن المدى = 25

المتوسط الحسابي:  $\bar{x} = 16$  والانحراف المعياري:  $\sigma_2 \approx 9.077$

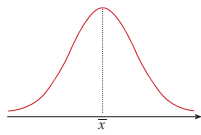
من الملاحظ أن البيانات الأولى لها متوسط حسابي  $\bar{x} = 16$  وانحراف معياري  $\sigma_1 \approx 1.414$  أي أن قيم هذه البيانات تتجمع حول المتوسط الحسابي.

في البيانات الثانية المتوسط الحسابي  $\bar{x} = 16$  والانحراف المعياري  $\sigma_2 \approx 9.077$  أي أن هذه البيانات تباعد عن المتوسط الحسابي.

أوجد الإحصائيون قواعد أخرى لدراسة تشتت قيم البيانات عندما تتوزع بطريقة معينة تعرف بالتوزيع الطبيعي وذلك من خلال استخدام القاعدة التجريبية التي سنوضحها في هذا البند.

#### التوزيع الطبيعي Normal Distribution

تعلمت سابقاً توزيع قيم البيانات بحسب قيم المتوسط الحسابي والوسيط مقارنة مع قيمة المنوال. والتوزيع الطبيعي هو توزيع البيانات بشكل متماثل حول المتوسط الحسابي والمنحنى التكراري الذي يمثل هذه البيانات يأخذ شكل الجرس كما في الشكل التالي.



من خواص منحنى التوزيع الطبيعي:

- أن يكون على شكل ناقوس (جرس) متماثل حول المتوسط الحسابي.
- أن تتساوى فيه قيم المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال.
- أن ينحدر طرفاه تدريجياً ويمتد إلى ما لا نهاية ولا يلتقيان مع المحور الأفقي أبداً.

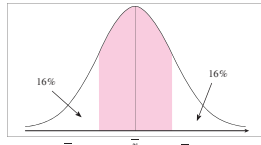
216

#### القاعدة التجريبية Empirical Rule

تستخدم القاعدة التجريبية لدراسة الجودة في مواقف إحصائية متعددة لعينات ذات قيم مفردة محددة ويمكن اتخاذ القرارات المناسبة على ضوء هذه الدراسة.

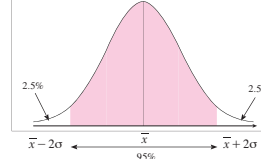
على افتراض أن لدينا مجموعة بيانات كمية ووجدنا المتوسط الحسابي  $\bar{x}$  والانحراف المعياري  $\sigma$  لقيم هذه البيانات وتبين أن المنحنى التكراري هو على شكل الجرس يمكن عندها تطبيق القاعدة التجريبية التي تنص على ما يلي:

- حوالي 68% من قيم هذه البيانات تنتمي إلى الفترة  $[\bar{x} - \sigma , \bar{x} + \sigma]$ .



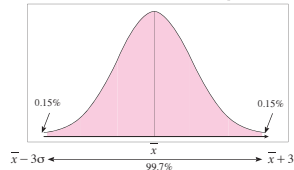
68% من البيانات تقع على الفترة  $[\bar{x} - \sigma , \bar{x} + \sigma]$

- حوالي 95% من قيم هذه البيانات تنتمي إلى الفترة  $[\bar{x} - 2\sigma , \bar{x} + 2\sigma]$



95% من البيانات تقع على الفترة  $[\bar{x} - 2\sigma , \bar{x} + 2\sigma]$

- حوالي 99.7% من قيم هذه البيانات تنتمي إلى الفترة  $[\bar{x} - 3\sigma , \bar{x} + 3\sigma]$

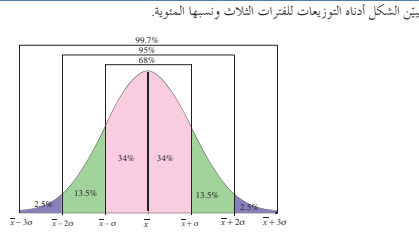


99.7% من البيانات تقع على الفترة  $[\bar{x} - 3\sigma , \bar{x} + 3\sigma]$

217

## في المثال (1)

يعالج هذا المثال أرباح شركة بتطبيق القاعدة التجريبية. ركّز على العلاقة بين كل نسبة مئوية والفترة المناظرة لها. أخبرهم أن حوالي 68% يجب أن تكون على الفترة  $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$  وأن 95% يجب أن تكون على الفترة  $[\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma]$  وأن 99.7% يجب أن تكون على الفترة  $[\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma]$ .



### مثال (1)

إذا كان المتوسط الحسابي لأرباح إحدى الشركات الصغيرة 350 ديناراً والانحراف المعياري 115 والمنحنى التكراري لأرباح هذه الشركة هو على شكل الجرس (توزيع طبيعي).

- طبق القاعدة التجريبية.
- هل وصلت أرباح الشركة إلى 690 ديناراً؟ فسر ذلك.

الحل:

a.  $\bar{x} = 350, \sigma = 110$

- باستخدام القاعدة التجريبية نحصل على ما يلي:
- حوالي 68% من الأرباح تقع على الفترة:  $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma] = [350 - 110, 350 + 110] = [240, 460]$
  - حوالي 95% من الأرباح تقع على الفترة:  $[\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma] = [350 - 220, 350 + 220] = [130, 570]$
  - حوالي 99.7% من الأرباح تقع على الفترة:  $[\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma] = [350 - 330, 350 + 330] = [20, 680]$
- b. نلاحظ أن المبلغ 690 ديناراً يقع خارج الفترة الأخيرة [20, 680] والتي تناظر 99.7% من الأرباح لذلك من غير المتوقع أن تكون أرباح هذه الشركة قد وصلت إلى المبلغ 690 ديناراً.

### سأول أن تحل

- لاحظت شركة تجارية أن المتوسط الحسابي لأرباحها 475 ديناراً وانحراف معياري 115 ديناراً.
- طبق القاعدة التجريبية.
- هل وصلت أرباح هذه الشركة إلى 750 ديناراً؟ فسر ذلك.

218

## في المثال (2)

يبين هذا المثال كيفية تطبيق القاعدة التجريبية للتأكد من مواصفات منتج ضمن شروط تعلن عنها مراكز الإنتاج. ساعد الطلاب بأمثلة بديلة على فهم أهمية تطبيق القاعدة التجريبية وشروط استخدامها عندما يقترب المنحنى الممثل للبيانات من التوزيع الطبيعي. ركّز معهم على فكرة الرسم كشكل جرس، والتوزيعات بالنسب المئوية إلى يمين المتوسط الحسابي ويساره.

## 6 الربط

تحقق الأمثلة الموجودة في هذا الدرس الربط بمواقف حياتية.

## 7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في تحديد عدد القيم على الفترة المطلوبة. ساعدهم بأمثلة على إيجاد الفترة  $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$  كحالة خاصة أولاً، ثم كيفية تحديد القيم عليها.

## 8 التقييم

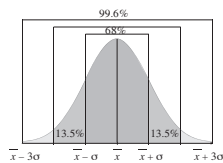
تابع مع الطلاب بالحوار والنقاش ما ينجزونه في فقرات «حاول أن تحل»، لتتأكد من حسن أدائهم وفهمهم لما ورد في هذا الدرس.

تمؤن  
6-5

### القاعدة التجريبية Empirical Rule

#### المجموعة A تمارين مقالية

- ما هو التوزيع الطبيعي؟
- ما هي خصائص التوزيع الطبيعي؟
- ما الشكل الذي يأخذه التوزيع الطبيعي؟
- أكمل الرسم أدناه.



- تبين لإحدى المؤسسات الصناعية أن المتوسط الحسابي لأرباحها الشهرية 1 250 ديناراً وانحراف معياري 225 ديناراً وأن المنحنى التكراري لهذه الأرباح هو على شكل الجرس (توزيع طبيعي).
- طبق القاعدة التجريبية.
- هل وصلت أرباح هذه المؤسسة إلى 2 000 ديناراً؟
- يعلن مصنع لإنتاج الأسلاك المعدنية أن متوسط تحمل السلك هو 1 400 kg بانحراف معياري 200 kg. على افتراض أن المنحنى الممثل لتوزيع تحمل الأسلاك المعدنية يقترب كثيراً من التوزيع الطبيعي، طبق القاعدة التجريبية.
- أوجد النسبة المئوية للأسلاك المعدنية التي يزيد متوسط تحملها عن 1 000 kg.

93



## اختبار سريع

1 أرادت مؤسسة تجارية شراء كمية معلبة من منتج حيث وزن كل عبوة 90 g، ولكن جاءت دراسة المحتويات لعينة من 500 عبوة لتبين أن المتوسط الحسابي للأوزان:  $\bar{x} = 89.5$  g والانحراف المعياري  $\sigma = 1.2$  g والمنحنى التكراري لتوزيع أوزان العبوات هو على شكل جرس (توزيع طبيعي).

(a) طبق القاعدة التجريبية.

(b) هل تشتري هذه المؤسسة كمية من هذا المنتج تحت شرط ألا يصل الحد الأدنى للمتوسط الحسابي إلى 86.5 g؟

(a) (1) حوالي 68% من العبوات على الفترة:

$$[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma] = [88.3, 90.7]$$

أوزانها على [88.3, 90.7]

(2) حوالي 95% من العبوات على الفترة:

$$[\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma] = [87.1, 91.9]$$

أوزانها على [87.1, 91.9]

(3) حوالي 99% من العبوات على الفترة

$$[\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma] = [85.9, 93.1]$$

أي حوالي 495 عبوة تقع أوزانها على الفترة

$$[85.9, 93.1]$$

(b) بما أن  $\bar{x} = 86.5$  تقع على الفترة [85.9, 93.1]، لذا

يمكن للمؤسسة شراء كمية من العبوات.

### مثال (2)

يعلن مصنع لإنتاج البطاريات المستخدمة في السيارات أن متوسط عمر البطارية من النوع (A) هو 60 شهراً بانحراف معياري 10 أشهر. على الفرض أن المنحنى الممثل لتوزيع عمر البطاريات يقرب كثيراً من التوزيع الطبيعي.

طبق القاعدة التجريبية.

a أوجد النسبة المئوية للبطاريات من النوع (A) التي يزيد عمرها عن 50 شهراً بفرض أن ما يعلنه المصنع صحيحاً.

b أوجد النسبة المئوية للبطاريات من النوع (A) والتي يقل عمرها عن 40 شهراً بفرض أن ما يعلنه المصنع صحيحاً.

الحل:

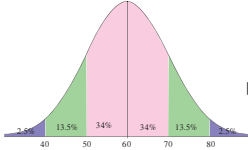
(1) حوالي 68% من البطاريات المصنعة عمرها يقع على الفترة:

$$[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma] = [60 - 10, 60 + 10] = [50, 70]$$

(2) حوالي 95% من البطاريات المصنعة عمرها يقع على الفترة:

$$[\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma] = [60 - 20, 60 + 20] = [40, 80]$$

(3) حوالي 99.7% من البطاريات المصنعة عمرها



$$[\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma] = [60 - 30, 60 + 30] = [30, 90]$$

b بما أن المنحنى الممثل لتوزيع عمر البطاريات يقرب كثيراً من التوزيع الطبيعي لذا من الرسم أعلاه نستنتج:

$$84\% = 2.5\% + 13.5\% + 34\% + 34\%$$

أي أن 84% من هذه البطاريات يزيد عمرها عن 50 شهراً بفرض أن ما تعلنه هذه الشركة صحيحاً.

c بين المنحنى الممثل لعمر البطاريات أن 2.5% من هذه البطاريات يقل عمرها عن 40 شهراً وذلك بفرض أن ما تعلنه الشركة صحيحاً.

### حاول أن تحل

2 يعلن مصنع لإنتاج المصباح الكهربائي أن متوسط عمر المصباح الكهربائي من النوع (A) هو 700h بانحراف معياري 100h على الفرض أن المنحنى الممثل لتوزيع عمر المصباح الكهربائي يقرب كثيراً من التوزيع الطبيعي.

طبق القاعدة التجريبية.

a أوجد النسبة المئوية للمصباح الكهربائي من النوع (A) التي يزيد عمرها عن 500h

b أوجد النسبة المئوية للمصباح الكهربائي من النوع (A) التي يقل عمرها عن 400h

## 9 إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

### 1 (a) تطبيق القاعدة التجريبية:

• حوالي 68% على الفترة  $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$  أي على الفترة  $[360, 590]$

• حوالي 95% على الفترة  $[\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma]$  أي 95% على الفترة  $[245, 705]$

• حوالي 99.7% على الفترة:  $[\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma]$  أي 99.7% على الفترة  $[130, 820]$

(b) نعم، لأن المبلغ 750 موجود على الفترة  $[130, 820]$  وبالتالي وصلت أرباح الشركة إلى 750 دينارًا.

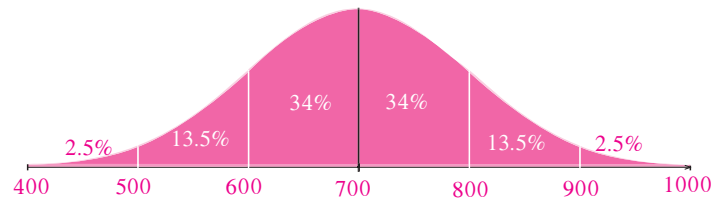
### 2 (a) تطبيق القاعدة التجريبية:

• حوالي 68% على الفترة  $[600, 800]$

• حوالي 95% على الفترة  $[500, 900]$

• حوالي 99.7% على الفترة  $[400, 1000]$

(b) باستخدام المنحنى الممثل لتوزيع عمر المصاييح الكهربائية على افتراض أنه توزيع طبيعي نجد التالي:



النسبة المئوية للمصاييح التي يزيد عمرها عن 500 ساعة:

$$13.5\% + 34\% + 34\% + 13.5\% + 2.5\% = 97.5\%$$

(c) لا يوجد.

### المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-5)، ظلّ (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

- (1) يمكن أن يكون شكل التوزيع الطبيعي جرسًا غير متماثل. (a) (b)  
 (2) في التوزيع الطبيعي المتوال والوسيط غير متساويين. (a) (b)  
 (3) الفترة  $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$  تحتوي على 95% من قيم البيانات. (a) (b)  
 (4) 99.7% من قيم البيانات توجد في الفترة  $[\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma]$ . (a) (b)  
 (5) تستخدم القاعدة التجريبية لدراسة الجودة في مواقف إحصائية متعددة لعينات ذات قيم مفردة. (a) (b)

في التمارين (6-8)، ظلّ رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) تزعم شركة أن متوسط عمر منتجها هو 50 شهرًا مع انحراف معياري 5 أشهر. النسبة المئوية للمنتجات التي يزيد عمرها عن 50 شهرًا هي:

- (a) 50% (b) 55% (c) 45% (d) 40%

(7) التمثيل الأفضل للتوزيع الطبيعي هو:



(8) الفترة  $[\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma]$  تحتوي على:

- (a) 68% من قيم البيانات (b) 99.7% من قيم البيانات  
 (c) 90% من قيم البيانات (d) 95% من قيم البيانات

## 6-6: القيمة المعيارية

### 1 الأهداف

- استخدام القيمة المعيارية.

### 2 المفردات والمفاهيم الجديدة

قيمة معيارية.

### 3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة - حاسوب - جهاز إسقاط (Data show).

### 4 التمهيدي

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

لنأخذ البيانات التالية: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 7

(a) أوجد المتوسط الحسابي  $\bar{x}$  لقيم هذه البيانات.

(b) أوجد التباين  $v$  والانحراف المعياري  $\sigma$ .

### 5 التدريس

تقارن القيمة المعيارية لقيمة محددة من البيانات بباقي هذه القيم، كما أنها تقارن بقيم أكثر في بيانات أخرى. فمثلاً، درجة معينة في مادة دراسية قد تكون قيمتها أفضل في مادة دراسية أخرى إذا ما قارنتها ببقية الدرجات في المادتين.

#### في المثال (1)

يبين كيف أن درجة 16 من 20 في مادتين مختلفتين هي أفضل في مادة من الأخرى، وهذا باستخدام قاعدة القيمة المعيارية، والتي تساعد على مقارنة هذه الدرجة مع بقية الدرجات.

#### في المثال (2)

يبين هذا المثال كيفية استخدام القيمة المعيارية لمقارنة درجتين مختلفتين في مادتين مختلفتين وذلك بدرجات كل مادة.

### القيمة المعيارية

#### Standardized Value

#### دعنا نفكر ونتناقش

قد يحصل طالب خلال السنة الدراسية على درجات مختلفة في كل مادة كما أنه من الممكن أن يحصل على الدرجة نفسها في أكثر من مادة. والسؤال: كيف يقيم الطالب هذه الدرجة في كل مادة مع بقية الدرجات؟  
للإجابة عن هذا السؤال تستخدم القيمة المعيارية.

#### سوف نتعلم

- استخدام القيمة المعيارية.

#### المفردات والمصطلحات:

- قيمة معيارية

Standardized Value

#### Standardized Value

#### القيمة المعيارية

هي مؤشر يدل على انحراف قيمة مفردة من بيانات عن المتوسط الحسابي وذلك باستخدام الانحراف المعياري لقيم هذه البيانات. إذا كان المطلوب مقارنة قيمتين لمفردتين مختلفتين تنتمي كل منهما إلى مجموعة محددة فإنه لا يكفي إحصائياً مقارنة قيم هذه المفردات ببعضها بعضاً بل يجب الأخذ بعين الاعتبار المتوسط الحسابي لكل مجموعة من البيانات وانحرافها المعياري. ويتطلب منا هذا الأمر تحويل القيم المقاسة بوحدات قياس عادية إلى قيم معيارية متماثلة بعدد من الانحرافات المعيارية، وذلك باستخدام القاعدة:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} \quad \text{القيمة المعيارية} = \frac{\text{قيمة المفردة} - \text{المتوسط الحسابي}}{\text{الانحراف المعياري}}$$

#### مثال (1)

في أحد الاختبارات نال أحد الطلاب درجة 16 من 20 في مادة الرياضيات حيث المتوسط الحسابي 13 والانحراف المعياري 5 ونال أيضاً 16 من 20 في مادة الكيمياء حيث المتوسط الحسابي 14 والانحراف المعياري 4.

ما القيمة المعيارية للدرجة 16 مقارنة مع درجات كل مادة؟ أيهما أفضل؟

الحل:

$$z_1 = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} = \frac{16 - 13}{5} = 0.6 \quad \text{القيمة المعيارية للدرجة 16 في مادة الرياضيات.}$$

$$z_2 = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} = \frac{16 - 14}{4} = 0.5 \quad \text{القيمة المعيارية للدرجة 16 في مادة الكيمياء.}$$

$0.5 < 0.6$

∴ القيمة المعيارية للدرجة 16 في مادة الرياضيات أفضل من القيمة المعيارية للدرجة 16 في مادة الكيمياء.

وبالتالي الدرجة 16 في مادة الرياضيات أفضل من الدرجة 16 في مادة الكيمياء.

220

### 6 الربط

الأمثلة في هذا الدرس هي ربط مباشر بمواقف حياتية.

### 7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام قاعدة القيمة المعيارية، فيكتبون:  $z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$ . أعطهم أمثلة متعددة تبين لهم أن:  $z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$ .

### 8 التقييم

تابع الطلاب بدقة وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل»، لتأكد من حسن استخدامهم القاعدة:  $z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$  وأنهم احتسبوا أولاً قيم  $\bar{x}$ ,  $\sigma$  من بيانات معطاة.

## اختبار سريع

بيّن الجدول التالي الرواتب الشهرية بالدينار لبعض الموظفين في مؤسستين A , B.

الموظف	مدير إداري	مدير مبيعات	محاسب	عامل تقني	عامل تنظيفات
المؤسسة A	800	700	450	300	200
المؤسسة B	850	700	500	275	225

أوجد القيمة المعيارية للراتب المشترك 700 دينار كويتي مقارنة بالرواتب في كل مؤسسة.

المتوسط الحسابي للرواتب في المؤسسة A:  $\bar{x} = 490$

المتوسط الحسابي للرواتب في المؤسسة B:  $\bar{y} = 510$

الانحراف المعياري في المؤسسة A:  $\sigma_1 = 229$

الانحراف المعياري في المؤسسة B:  $\sigma_2 = 240$

القيمة المعيارية للراتب 700 في المؤسسة A:

$$z_1 = \frac{700 - 490}{229} \approx 0.917$$

القيمة المعيارية للراتب 700 في المؤسسة B:

$$z_2 = \frac{700 - 510}{240} \approx 0.792$$

نلاحظ أن:  $0.792 < 0.917$

أي أن الراتب 700 دينار في المؤسسة A أفضل منه في المؤسسة B مقارنة برواتب الموظفين في كل مؤسسة.

### سؤال أن نحل

1 جاءت إحدى درجات طالب في مادة الفيزياء 15 حيث المتوسط الحسابي 14 والانحراف المعياري 3.8 وفي مادة الكيمياء 15 حيث المتوسط الحسابي 13 والانحراف المعياري 7.8 ما القيمة المعيارية للدرجة 15 مقارنة مع درجات كل مادة؟ أيهما أفضل؟

### مثال (2)

في نتيجة نهاية العام الدراسي حصلت الطالبة موزي على 64 درجة في مادة اللغة العربية حيث المتوسط الحسابي 69 والانحراف المعياري 8. وحصلت على 48 درجة في مادة الجغرافيا حيث المتوسط الحسابي 56 والانحراف المعياري 10 في أي المادتين كانت موزي أفضل؟

الحل:

لتحديد المادة التي كانت فيها موزي أكثر تحصيلاً نحول الدرجات الفعلية إلى قيم معيارية:

$$z_1 = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} = \frac{64 - 69}{8} = -0.625$$

القيمة المعيارية للدرجة 64 في مادة اللغة العربية:

$$z_2 = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} = \frac{48 - 56}{10} = -0.8$$

القيمة المعيارية للدرجة 48 في مادة الجغرافيا:

$$-0.625 > -0.8$$

∴ القيمة المعيارية للطالبة في مادة اللغة العربية أفضل من القيمة المعيارية في مادة الجغرافيا.

∴ أداء الطالبة موزي في مادة اللغة العربية أفضل من أدائها في مادة الجغرافيا.

### سؤال أن نحل

2 يسكن خالد في المدينة A حيث إن طول قامته 180cm والمتوسط الحسابي لأطوال قامات الرجال في هذه المدينة 174cm مع انحراف معياري 12cm. أما صالح فيسكن في المدينة B حيث إن طول قامته 172cm والمتوسط الحسابي لأطوال قامات الرجال في هذه المدينة 165cm مع انحراف معياري 15 أي منهما طول قامته أفضل من الآخر مقارنة مع أطوال الرجال في كل مدينة؟

## «حاول أن تحل»

1 نوجد القيمة المعيارية للدرجة 15 في مادة الفيزياء:

$$z_1 = \frac{15 - 14}{3.8} \approx 0.2632$$

نوجد القيمة المعيارية للدرجة 15 في مادة الكيمياء:

$$z_2 = \frac{15 - 13}{7.8} \approx 0.2564$$

بما أن  $0.2564 < 0.2632$ ، فإن الدرجة 15 في مادة

الفيزياء هي أفضل من الدرجة 15 في مادة الكيمياء مقارنة بدرجات كل مادة.

2 نوجد القيمة المعيارية لطول قامة خالد في المدينة A:

$$z_1 = \frac{180 - 174}{12} = 0.5$$

نوجد القيمة المعيارية لطول قامة صالح في المدينة B:

$$z_2 = \frac{172 - 165}{15} \approx 0.4\bar{6}$$

نلاحظ أن:  $0.4\bar{6} < 0.5$ ، وبالتالي طول قامة خالد في المدينة A مقارنة بأطوال قامات رجال هذه المدينة أفضل من طول قامة صالح في المدينة B مقارنة بأطوال قامات رجال هذه المدينة.

تمون  
6-6القيمة المعيارية  
Standardized Value

## المجموعة A تمارين مقالية

- (1) أكمل الجملة التالية:  
القيمة المعيارية هي مؤشر يدل على ..... قيمة مفردة من بيانات عن .....  
وذلك باستخدام ..... لقيم هذه البيانات.
- (2) في أحد الاختبارات حيث الدرجة العظمى 20، جانت درجة أحد الطلاب 15 مع متوسط حسابي 14 والانحراف المعياري 4. ما القيمة المعيارية للدرجة 15 مقارنة ببقية درجات هذا الاختبار؟
- (3) لتأخذ البيانات، 7، 6، 5، 5.  
(a) أوجد المتوسط الحسابي  $\bar{x}$  والانحراف المعياري  $\sigma$  لهذه البيانات.  
(b) أوجد القيمة المعيارية لهذه البيانات.
- (4) في المدينة A يزن أحد الرجال 75 kg مع متوسط حسابي للرجال 70 kg وانحراف معياري 5 kg. وفي المدينة B يزن أحد الرجال 80 kg مع متوسط حسابي للرجال 76 kg وانحراف معياري 8 kg. أوجد القيمة المعيارية  $z_1$  لوزن 75 kg في المدينة A والقيمة المعيارية  $z_2$  لوزن 80 kg في المدينة B.
- (5) في اختبارات مادة الرياضيات نال خالد الدرجات التالية من 20، 17، 16، 15، 12.  
أما في اختبارات مادة الكيمياء فقد نال الدرجات التالية من 20، 15، 9، 13، 11.  
(a) أوجد القيمة المعيارية  $z_1$  للدرجة 15 في مادة الرياضيات والقيمة المعيارية  $z_2$  للدرجة 15 في مادة الكيمياء.  
(b) في أي مادة كانت الدرجة 15 هي أفضل مقارنة ببقية الدرجات؟

## المجموعة B تمارين موضوعية

- في التمارين (1-4)، ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.
- (1) القيمة المعيارية  $\frac{\bar{x} - x}{\sigma}$
- (2) القيمة المعيارية توشر إلى تشتت قيمة عن بقية قيم البيانات.
- (3) في بيانات حيث المتوسط الحسابي  $\bar{x} = 14$  والانحراف المعياري  $\sigma = 4$  فإن القيمة المعيارية للمفردة  $x = 16$  هي،  $z = 0.5$

- (a) (b)  
(a) (b)  
(a) (b)

95

- (4) في بيانات حيث المتوسط الحسابي  $\bar{x} = 12$  والقيمة المعيارية للمفردة  $x = 15$  هي،  $z = 0.4$ ، فإن الانحراف المعياري،  $\sigma = 7.5$
- في التمارين (5-8)، ظلل رمز الماترئة الدال على الإجابة الصحيحة.
- (5) القيمة المعيارية للمفردة 14 مقارنة بقيم بيانات حيث المتوسط الحسابي 12.5 والانحراف المعياري 6 هي:
- (a) -0.25 (b) 0.25 (c) 2.5 (d) -2.5
- (6) القيمة المعيارية لمفردة من بيانات هي 0.625 والمتوسط الحسابي 12 والانحراف المعياري 8 فإن هذه المفردة تساوي:
- (a) 7 (b) -7 (c) 17 (d) -17
- (7) القيمة المعيارية للمفردة 14 من بيانات هي 0.6 والمتوسط الحسابي 11 فإن الانحراف المعياري لقيم هذه البيانات هو:
- (a) 0.2 (b) -0.2 (c) -5 (d) 5
- (8) القيمة المعيارية للمفردة 18 من بيانات هي 0.75 والانحراف المعياري 8 فإن المتوسط الحسابي هو:
- (a) 24 (b) 12 (c) -12 (d) -24

96

# المرشد لحل المسائل

إجابات «مسألة إضافية»

1 مجموعة (a):  $\bar{x} = 6.07$

مجموعة (b):  $\bar{x} = 6.07$

2 مجموعة (a):

القيمة	3	5	6	7	8	9
التكرار	4	1	2	2	3	2

$$\sigma_1 = 2.22$$

مجموعة (b):

القيمة	3	4	5	6	7	8	9
التكرار	1	1	2	5	3	1	1

$$\sigma_2 = 1.49$$

أستنتج أن تشتت القيم في البيانات (a) أكبر منه في البيانات (b)، لأن الانحراف المعياري  $2.22 > 1.49$

## المرشد لحل المسائل

في سوق العمل، ثمة شركتان تعملان في المجال نفسه. الرواتب الشهرية الممنوعة بالدینار لموظفي كل شركة مبيئة على الجدولين الآتيين:

الراتب في الشركة (a)	600	700	1 200	1 750	2 250
التكرار	13	4	1	1	1

الراتب في الشركة (b)	700	800	1 100	1 300	1 500
التكرار	13	4	1	1	1

- بالنظر إلى الجدولين، أيّ الشركتين تبدو أفضل من حيث الرواتب؟
  - احسب المتوسط الحسابي  $\bar{x}$  للرواتب في كل جدول.
  - هل تحققت من التوقعات التي وضعتها في السؤال 1؟ اشرح.
  - هل إيجاد المتوسط الحسابي يكفي وحده لمقارنة الرواتب الشهرية في الشركتين؟
  - احسب الانحراف المعياري  $\sigma_1$ ،  $\sigma_2$  لرواتب الموظفين في كل شركة. ماذا تستنتج؟
- الحل:
- نلاحظ أن الرواتب الصغيرة والتي تكرر 4، 13 على الترتيب في الشركة (b) أفضل من تلك التي في الشركة (a) ولكن الرواتب الكبيرة والتي تكرر 1، 1، 1 على الترتيب في الشركة (a) أفضل من تلك التي في الشركة (b). وبالتالي رواتب العاملين في الشركة (b) أفضل، لكن رواتب الإداريين في الشركة (a) أفضل.
  - المتوسط الحسابي لرواتب الموظفين في الشركة (a):  

$$\bar{x} = 790 \text{ KD}$$
المتوسط الحسابي لرواتب الموظفين في الشركة (b):  

$$\bar{y} = 810 \text{ KD}$$
  - يبدو من خلال النتائج الحسابية أن المتوسط الحسابي للرواتب في الشركة (b) أفضل من المتوسط الحسابي للرواتب في الشركة (a).
  - لا تكفي معرفة المتوسط الحسابي عند المقارنة بين الرواتب لوجود قيم منطرفة في الجدولين.

222

3 الانحراف المعياري للرواتب في الشركة (a):

$$\sigma_1 \approx 431.45$$

الانحراف المعياري للرواتب في الشركة (b):

$$\sigma_2 \approx 218.86$$

نستنتج أن الرواتب للموظفين في الشركة (b) تتقارب من المتوسط الحسابي أكثر مما تقارب رواتب الموظفين في الشركة (a). والملاحظ أن  $2\sigma_2 \approx \sigma_1$

مسألة إضافية

في أحد الاختبارات، أراد الأستاذ المقارنة بين درجات مجموعتين من الطلاب حيث النهاية العظمى 10 درجات. بين الجدول التالي ما يلي:

مجموعة (a)	8	3	7	3	5	7	9	6	8	3	3	8	6	9
مجموعة (b)	6	7	3	5	6	6	8	4	7	9	6	7	5	6

- أوجد لكل مجموعة المتوسط الحسابي.
- كُنْ جدولًا تكرارياً لكل مجموعة، ثم أوجد  $\sigma_1$  الانحراف المعياري للمجموعة (a)،  $\sigma_2$  الانحراف المعياري للمجموعة (b). ماذا تستنتج؟ اشرح.

223



### اختيار الوحدة السادسة

- (1) هل يمكن استخدام الحصر الشامل في دراسة المجتمعات الإحصائية التالية أم لا؟ اشرح السبب.
- (a) دراسة كمية السكر الموجودة في الدم عند أحد الأشخاص.
- (b) إيجاد المتوسط الحسابي لأوزان طلاب صفك.
- (2) في إحدى المؤسسات تم سحب عينة عشوائية طبقية مكونة من 70 فرداً وكسر المعاينة لهذه العينة 0.08.
- (a) أوجد عدد الأفراد العاملين في هذه المؤسسة (المجتمع الإحصائي).
- (b) علماً أن المؤسسة مكونة من ثلاث فئات: الفئة A حيث حجم العينة الطبقية 30، الفئة B حيث حجم العينة الطبقية 30، الفئة C حيث حجم العينة الطبقية 10، أوجد حجم العينة المناظرة لكل فئة.
- (3) في إحدى الشركات تم سحب عينة عشوائية منتظمة مكونة من 25 فرداً بحيث إن طول الفترة 50، أوجد حجم المجتمع الإحصائي (عدد أفراد العاملين في الشركة).
- (4) في استطلاع أجري على الصف الثاني عشر علمي لمعرفة آرائهم حول مهنة المستقبل جاءت الإجابات كما يبين الجدول التالي:

المجموع	رجل أعمال	محام	طبيب	مهندس	ضابط	معلم	المهنة
25	2	5	7	6	3	2	التكرار

- (a) أكمل الجدول لإيجاد التكرار النسبي والنسبة المئوية للتكرار.
- (b) مثل هذه البيانات بالقطاعات الدائرية.
- (5) في البيانات التالية، 3، 4، 9، 5، 6، 7، 8، أوجد المتوسط الحسابي  $\bar{x}$ ، التباين  $v$  والانحراف المعياري  $\sigma$  على افتراض أن المتوسط الحسابي لأرباح إحدى الشركات هو 850 ديناراً والانحراف المعياري 175 ديناراً والمنحنى التكراري لأرباح هذه الشركة هو على شكل جرس (توزيع طبيعي).
- (a) طبق القاعدة التجريبية على المتوسط الحسابي لأرباح هذه الشركة.
- (b) هل انخفضت أرباح هذه الشركة إلى 300 ديناراً؟ اشرح ذلك.
- (c) هل وصلت أرباح هذه الشركة إلى 1400 ديناراً؟ اشرح ذلك.

- (7) نال الطالب سالم 15 من 20 في اختبار مادة الرياضيات حيث المتوسط الحسابي للدرجات 13 والانحراف المعياري 2.5 وقد نال أيضاً 13 من 20 في اختبار مادة الفيزياء حيث المتوسط الحسابي للدرجات 11.5 والانحراف المعياري 2.4 في أي مادة تعتبر درجة سالم هي الأفضل مقارنة بدرجات كل مادة؟ اشرح.

- (8) يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لأوزان طلاب الصف الحادي عشر بالكيلوجرام (kg).

المجموع	80-	76-	72-	68-	64-	الفئة
25	3	6	7	5	4	التكرار

- (a) أكمل الجدول لإيجاد مراكز الفئات.
- (b) مثل هذه البيانات بالمدرج التكراري والمضلع التكراري.

### تمارين إثرائية

- (1) هل يمكن استخدام الحصر الشامل في دراسة المجتمعات الإحصائية التالية، أم لا؟ مع ذكر السبب.
- (a) دراسة أنواع الحشرات في دولة الكويت.
- (b) دراسة نسبة عدد الإناث إلى عدد الذكور العاملين في أحد المصارف في دولة الكويت.
- (2) الكتابة في الرياضيات: اذكر أمثلة تتضمن ما يلي:
- (a) مجتمع إحصائي منته - وحدة الدراسة - المتغير المراد دراسته.
- (b) مجتمع إحصائي غير منته - وحدة الدراسة - المتغير المراد دراسته.
- (3) في أحد مصانع غزل النسيج، الذي يحوي 600 عامل مرقمين من 1 إلى 600. أراد صاحب المصنع مناقشة عدد من العمال في كيفية تحسين الإنتاج. المطلوب سحب عينة عشوائية بسيطة مكونة من 15 عاملاً باستخدام جدول الأعداد العشوائية.
- (4) أراد مدير عام شركة كبرى لإنتاج مواد الدهان تقييم أداء كافة الموظفين، علماً أن الشركة تضم 80 مهندساً تم ترقيمهم من 201 إلى 280، 120 اختصاصي مختبر تم ترقيمهم من 301 إلى 420، وأخيراً 220 عاملاً تم ترقيمهم من 501 إلى 720. المطلوب سحب عينة عشوائية طبقية مكونة من 21 فرداً تمثل جميع العاملين باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف السابع والعمود الأول.
- (5) أراد معلم في أصول تعليم القرآن الكريم تشكيل مجموعات في الصفوف الثانوية لإحدى المدارس التي تحوي 144 طالباً مرقمين من 1 إلى 144. المطلوب سحب عينة عشوائية منتظمة مكونة من 16 طالباً باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الثالث والعمود الثالث.
- (6) يتألف فريق العمل في إحدى الشركات من 360 موظفاً وهم من الجنسين أي ذكور وإناث ويعملون إما بدوام كامل أو بدوام جزئي كما هو مبين في الجدول التالي:

180 مرقمين من 1 إلى 180	ذكور/دوام كامل
36 مرقمين من 181 إلى 217	ذكور/دوام جزئي
18 مرقمين من 218 إلى 236	إناث/دوام كامل
126 مرقمين من 237 إلى 363	إناث/دوام جزئي

المطلوب أخذ عينة طبقية حجمها 40 موظفاً، وفقاً للفئات أعلاه باستخدام برنامج إحصائي.



المجموعة A تمارين مقالية

- (1) (a) 20 (b) 40 (c)  $10^2$  (d) 0.1 (e) 0.5  
 (f) 0.08 (g) لا يوجد (h)  $\frac{1}{5}$  (i)  $\frac{2}{7}$  (j) 30  
 (k) لا يوجد (l) 150
- (2) (a) 3 (b) 10 (c) -4 (d) 0.5 (e)  $\frac{2}{5}$   
 (f) 42 (g)  $\frac{-5}{2}$  (h) 0 (i) حوالي 17.54
- (3) (a)  $4|x| = \begin{cases} 4x : x \geq 0 \\ -4x : x < 0 \end{cases}$  (b)  $0.5|x^3| = \begin{cases} 0.5x^3 : x \geq 0 \\ -0.5x^3 : x < 0 \end{cases}$  (c)  $x^4|y^9| = \begin{cases} x^4y^9 : y \geq 0 \\ -x^4y^9 : y < 0 \end{cases}$   
 (d)  $2x\sqrt{2x}$   
 (e)  $\frac{1}{5}xy^2\sqrt{y}$  (f)  $100x$  (g)  $-5y^2$  (h)  $3^3\sqrt{3x^2}$   
 (i)  $-5x^2y\sqrt{2y^2}$  (j)  $14xy$  (k)  $\frac{4u}{v^3}$
- (4) (a)  $10\sqrt{2}$  (b)  $4^3\sqrt{5}$  (c)  $\frac{4}{3}$  (d)  $5+5\sqrt{3}$   
 (e)  $5-2\sqrt{6}$  (f)  $10+7\sqrt{2}$  (g)  $69+20\sqrt{11}$  (h) 300  
 (i)  $-2^3\sqrt{2}$  (j)  $5\sqrt{3}-4\sqrt{2}$  (k)  $12^3\sqrt{3}-9^3\sqrt{2}$  (l) 6  
 (m)  $27+4\sqrt{7}$
- (5) (a)  $4\sqrt{7}+10\sqrt{21}$  m (b)  $70\sqrt{3}$  m<sup>2</sup>
- (6) (a)  $\frac{7}{6}$  (b)  $\frac{3^3\sqrt{4}}{2}$  (c)  $\frac{12\sqrt{3}+8}{23}$  (d)  $\frac{-11-8\sqrt{2}}{14}$   
 (e)  $\frac{-35-19\sqrt{5}}{29}$  (f) 0 (g) 4 (h)  $\frac{11\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{10}$   
 (i)  $\frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1}$  (j)  $\sqrt{x}+\sqrt{y}$
- (7)  $2\sqrt{5}$  (8) 2
- (9)  $E = 41 + 24\sqrt{2}$  ;  $F = 114 - 56\sqrt{2}$  (10) 2

## المجموعة B تمارين موضوعية

- (1) (a)      (2) (a)      (3) (a)      (4) (b)      (5) (a)  
 (6) (c)      (7) (b)      (8) (b)      (9) (b)      (10) (a)  
 (11) (b)      (12) (d)

تمرن 1-2

الأسس النسبية

## المجموعة A تمارين مقالية

- (1) (a)  $-3$       (b) لا يوجد      (c)  $6^4\sqrt{3}$       (d)  $2$       (e)  $2y^2$   
 (f)  $-x^4$       (g)  $0.4$       (h)  $3(\sqrt{3}+1)$       (i)  $\frac{2x^6}{y^3}4\sqrt{x}$   
 (2) (a)  $\sqrt[6]{x}$       (b)  $\sqrt[7]{x^2}$       (c)  $\frac{1}{\sqrt[8]{y^9}} = \frac{1}{y^8\sqrt[8]{y}}$   
 (d)  $\sqrt{x^3} = (\sqrt{x})^3$       (e)  $\sqrt[4]{x^3}$       (f)  $\sqrt[3]{7^2} = \sqrt[3]{49}$   
 (g)  $y^3\sqrt[5]{y}$       (h)  $\sqrt[3]{x^{-2}}$   
 (3) (a)  $16$       (b)  $\frac{1}{16}$       (c)  $8$   
 (4) (a)  $7^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$       (b)  $7^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}$       (c)  $7^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}$   
 (d)  $25x^2y^2$       (e)  $3x^4$       (f)  $0.07t^{26}$       (g)  $64$   
 (5) (a)  $16$       (b)  $\frac{1}{81}$       (c)  $-3$   
 (d)  $x^{\frac{1}{2}}$       (e)  $x^{\frac{1}{2}}$       (f)  $x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{4}}$   
 (g)  $x^{\frac{5}{4}}y^{\frac{1}{6}}$       (h)  $3x^{-\frac{1}{3}}$       (i)  $t^2$   
 (6) (a)  $2|x|$       (b)  $1$       (c)  $1$   
 (d)  $-2$       (e)  $2^{\frac{1}{6}}$       (f)  $0$

(8) 768

(7) تختلف الإجابات:  $4 - \sqrt{5}$

(10) حوالي 636

(9)  $5 \times 5^{\frac{1}{2}}$  تساوي  $5^{\frac{3}{2}}$  وليس  $25^{\frac{1}{2}}$

المجموعة B تمارين موضوعية

- (1) (a)      (2) (b)      (3) (a)      (4) (b)      (5) (b)  
 (6) (b)      (7) (c)      (8) (b)      (9) (a)      (10) (a)  
 (11) (c)      (12) (c)

تمرن 1-3

حل المعادلات

المجموعة A تمارين مقالية

- (1) (a) 16      (b) 22      (c) 3; -13      (d) 8  
 (e)  $-\frac{1}{4}$       (f) 6      (g) لا يوجد  
 (2) (a)  $d \approx 9.33 \text{ m}$       (b) 0.10 m  
 (3) (a) 3      (b)  $\{-3; -4\}$       (c) -2      (d) 1  
 (e) -3      (f)  $x = 10$       (g) 5      (h)  $x = 25$   
 (i)  $\frac{13}{2}$       (j) 9, -7      (k) 2      (l) -1  
 (m)  $\frac{5}{4}$       (n) -2  
 (4) (a)  $x = \frac{\sqrt{2S\sqrt{3}}}{3}$       (b)  $\approx 8.77 \text{ cm}$       (c)  $\approx 15.2 \text{ cm}$   
 (5)  $\approx 5.3 \text{ m}$   
 (6) (a)  $x^3 - y^3$       (b)  $3^{\frac{2}{3}} + 6^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}$   
 (7) (a) 3      (b) -1      (c)  $\{-2, 2\}$       (d)  $\{1, 4\}$       (e) 0  
 (f) 2      (g)  $\frac{7}{2}$       (h)  $\{0, 3\}$       (i)  $\{0, 3\}$       (j)  $+\frac{1}{4}$

المجموعة B تمارين موضوعية

- (1) (a)                      (2) (b)                      (3) (b)                      (4) (b)                      (5) (b)  
 (6) (d)                      (7) (d)                      (8) (a)                      (9) (a)                      (10) (c)

اختبار الوحدة الأولى

- (1) (a)  $11|x^{45}| = \begin{cases} 11x^{45} : x \geq 0 \\ -11x^{45} : x < 0 \end{cases}$                       (b)  $-4y^{27}$                       (c)  $2y^5$                       (d)  $0.09x^{30}$   
 (e)  $4x^{18}y^{48}$                       (f)  $8\sqrt{3} + 24$                       (g)  $12x^3|y|\sqrt{35} \begin{cases} 12x^3y\sqrt{35} : y \geq 0 \\ -12x^3y\sqrt{35} : y < 0 \end{cases}$   
 (h) 4                      (i)  $2x$

- (2) (a)  $\frac{-1}{7}$                       (b)  $\frac{20\sqrt{7} - 25}{87}$   
 (c)  $-\frac{4 + 6\sqrt{5} + 2\sqrt{10} + 15\sqrt{2}}{41}$                       (d)  $\frac{10 - 8\sqrt{2}}{7}$

- (3) (a) 16                      (b) 125                      (c)  $6\sqrt{2}$   
 (d)  $\frac{1}{3}$                       (e) 4                      (f)  $\frac{4}{7}$

- (4) (a) 4  
 (b)  $x^2 = 4$  إذا  $x = 2$  أو  $x = -2$ . بما أن  $x$  هو عدد سالب فيكون  $x = -2$

- (5) (a)  $\sqrt[7]{x^5}$                       (b)  $\frac{1}{9\sqrt{y^2}}$                       (c)  $\sqrt[5]{x^2}$   
 (d)  $\sqrt{2}$                       (e)  $10^4\sqrt[4]{3^3}$                       (f)  $6^6\sqrt{x^5}$   
 (g)  $2^{12}\sqrt[3]{3}$                       (h)  $100^{12}\sqrt[10]{10}$                       (i)  $\frac{1}{3}$

- (6) (a)  $64y^4$                       (b)  $\frac{4|x^7|}{9|y^9|}$                       (c)  $x^{\frac{1}{3}}$                       (d)  $x^{-\frac{1}{6}} \times y^{\frac{5}{4}}$

(7) في المرحلة الثانية، توزعت الأسس بشكل خطأ أي:  $(x - y)^{-2} \neq x^{-2} - y^{-2}$

- (8) (a)  $\frac{1}{25}$                       (b) 2                      (c) 12                      (d)  $\frac{5}{4}$   
 (e)  $\frac{81}{16}$                       (f) 13  
 (9)  $m = \frac{V^2}{64}$                       (10) 2                      (11) (a) 3, -3                      (b) -1, 2

## تمارين إثرائية

- (1) (a)  $-7$  (b)  $30$  (c)  $3$  (d)  $-9$   
 (e)  $-0.1$  (f)  $8 - 5\sqrt{3}$  (g)  $\frac{2^{10}}{3^{10} \times 5^7}$  (h)  $2^6 \times 3^6$

- (2) (a)  $-2 + 3\sqrt[3]{4} + 4\sqrt[3]{2}$  (b)  $7$  (c)  $13$

- (3) (a)  $\frac{4x^4\sqrt[3]{x^2}}{9y^6}$  (b)  $y^4 \times x^{-6}$  (c)  $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{xy}$  (d)  $x$

- (4) (a)  $\frac{8 + 5\sqrt{3}}{11}$  (b)  $2\sqrt{5}$

- (5) (a)  $\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5}$  (b)  $\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}$  (c)  $\frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{x - 1}$

0 (6)

(7) ليس كل من  $\sqrt{-2}, \sqrt{-8}$  عددًا حقيقيًا

$32^{-0.8}$  (8)

- (9) (a)  $x^{a+b}$  (b)  $2$  (c)  $\frac{\sqrt{x} \times \sqrt[3]{y^2}}{y}$

- (10) (a)  $3$  (b)  $2$  (c)  $\{1, 4\}$

- (d)  $\{0, 2\}$  (e)  $\{1, 4\}$

المجموعة A تمارين مقالية

- |                    |   |                               |  |                   |                     |
|--------------------|---|-------------------------------|--|-------------------|---------------------|
| (6) لا             | (5) لا  | (4) لا                        | (3) نعم  | (2) لا            | (1) نعم             |
| (7) $\mathbb{R}$   | (8) $[\frac{7}{3}, \infty)$                     | (9) $(-\infty, 0]$            | (10) $(-\infty, \frac{5}{2}) \cup (\frac{5}{2}, \infty)$ | (11) $\mathbb{R}$ | (12) $(-3, \infty)$ |
| (13) $[2, \infty)$ | (14) $[-\frac{3}{4}, \infty) - \{\frac{5}{3}\}$ | (15) $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ | (16) $[\frac{3}{2}, \infty)$                             |                   |                     |

المجموعة B تمارين موضوعية

- |         |          |          |         |
|---------|----------|----------|---------|
| (1) (a) | (2) (b)  | (3) (a)  | (4) (b) |
| (5) (a) | (6) (b)  | (7) (d)  | (8) (a) |
| (9) (d) | (10) (d) | (11) (b) |         |

المجموعة A تمارين مقالية

- |                       |                          |                     |                       |
|-----------------------|--------------------------|---------------------|-----------------------|
| (1) $3x^2 - 19x + 35$ | (2) $6x^2 - 34x + 40$    | (3) $3x^2 + x + 12$ | (4) $-3x^2 - 2x - 3$  |
| (5) خطية              | (6) تربيعية              | (7) تربيعية         | (8) خطية              |
| (9) خطية              | (10) تربيعية             | (11) خطية           | (12) خطية             |
| (13) 3 أزواج          | (14) $y = 2x^2 - 5x - 3$ | (15) $y = x^2 + 2x$ | (16) $y = -3x^2 + 20$ |

المجموعة B تمارين موضوعية

- |         |         |         |         |          |
|---------|---------|---------|---------|----------|
| (1) (a) | (2) (b) | (3) (b) | (4) (a) | (5) (b)  |
| (6) (a) | (7) (d) | (8) (c) | (9) (b) | (10) (d) |

## المجموعة A تمارين مقالية

(1)  $y = \frac{2}{9}x^2$  ، إلى أعلى

(2)  $y = \frac{-3}{16}x^2$  ، إلى أسفل

(3)  $y = \frac{-1}{18}x^2$  ، إلى أسفل

(4)  $y = \frac{5}{4}x^2$  ، إلى أعلى

(5)  $y = -x^2 + 4$

(6)  $y = \frac{1}{4}x^2$

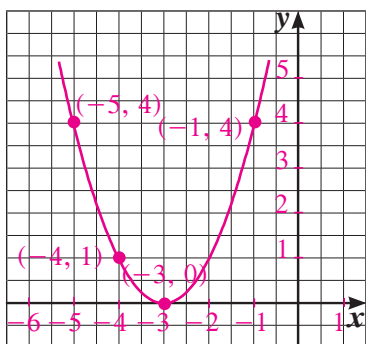
(7)  $y = -(x-2)^2$

(8)  $y = -(x+2)^2$

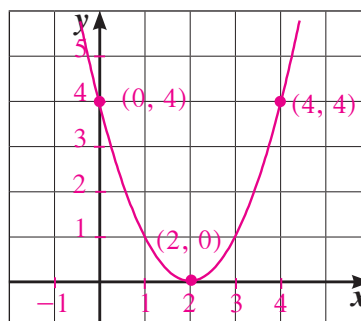
(9)  $y = -(x-1)^2 + 2$

(10)  $y = 6(x+3)^2 - 2$

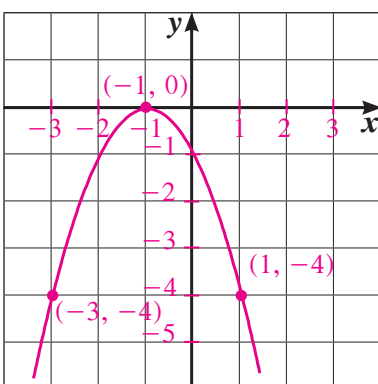
(11)



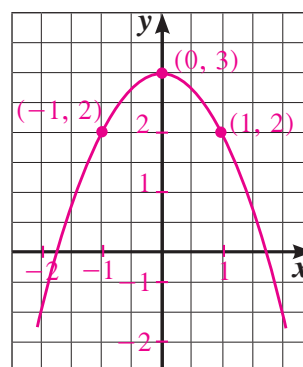
(12)



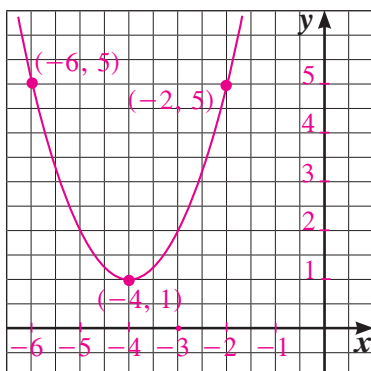
(13)



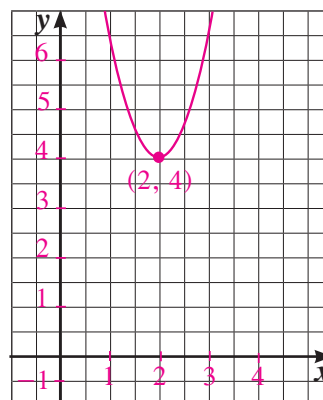
(14)



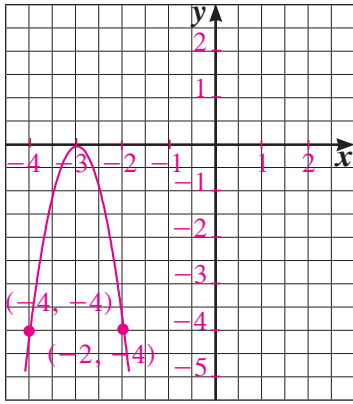
(15)



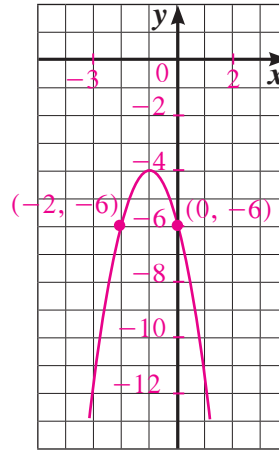
(16)



(17)



(18)

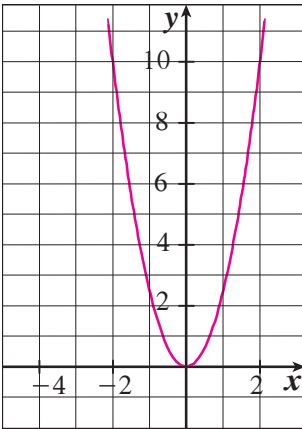


(19) قد تختلف الإجابات. مثلاً: ارسم نقطة الرأس (3, 4). ارسم محور التماثل:  $x = 3$ .

ارسم النقطة (2, 4)، ثم ارسم النقطة المناظرة (12, 2).

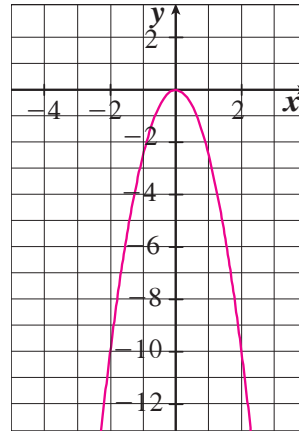
(20) تنوع الإجابات مثل:  $y = -2(x+2)^2$

(21)



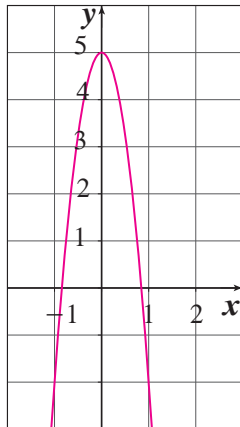
$$y = \frac{5}{2}x^2$$

(22)



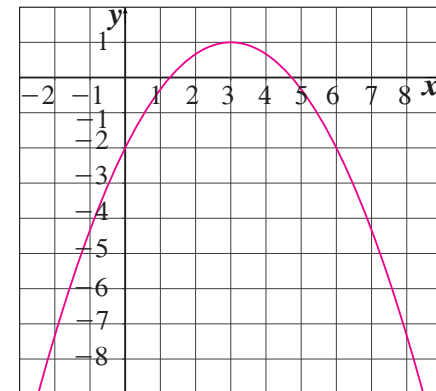
$$y = -\frac{5}{2}x^2$$

(23)



$$y = -2x^2 + 5$$

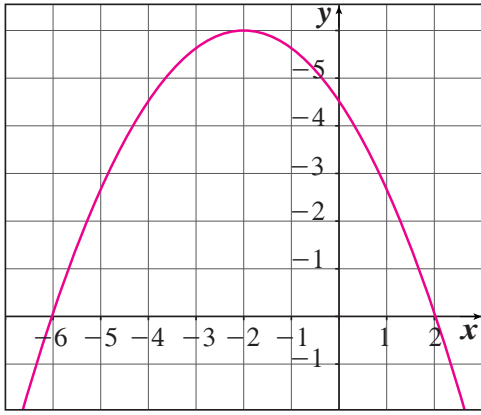
(24)



$$y = \frac{-(x-3)^2}{3} + 1$$



(25)



$$y = \frac{-3(x+2)^2}{8} + 6$$

### المجموعة B تمارين موضوعية

- (1) (b)      (2) (b)      (3) (b)      (4) (a)      (5) (a)  
 (6) (d)      (7) (c)      (8) (d)      (9) (c)      (10) (a)  
 (11) (b)

تمرن 2-4

مقارنة بين صورة المعادلة التربيعية بدلالة إحداثيات رأس المنحنى والصورة العامة

### المجموعة A تمارين مقالية

- (1)  $y = (x-2)^2 + 2$       (2)  $y = (x+1)^2 + 4$       (3)  $y = 4\left(x + \frac{7}{8}\right)^2 - \frac{49}{16}$   
 (4)  $y = -2(x-0)^2 + 35$       (5)  $y = -8(x-0)^2 + 0$       (6)  $y = 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$   
 (7)  $y = -3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}$       (8)  $y = x^2 + 6x + 5$       (9)  $y = 2x^2 - 8x + 13$   
 (10)  $y = -x^2 + 14x - 39$       (11)  $y = 25x^2 + 60x + 27$       (12)  $y = -9x^2 + 24x - 10$   
 (13)  $y = -2x^2 - 6x$       (14)  $y = -x^2 + 8x - 14$       (15)  $c = 23$   
 (16)  $a = 3, b = -12$       (17)  $1250 \text{ m}^2$

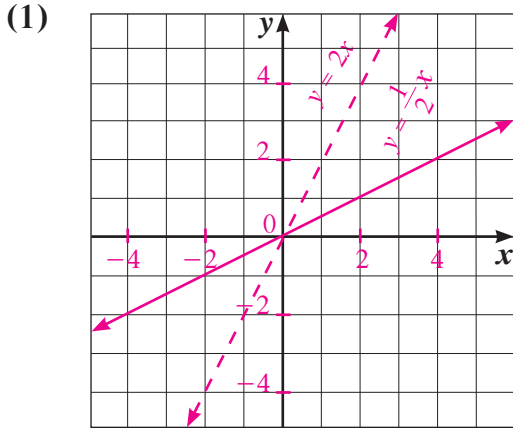
## المجموعة B تمارين موضوعية

- |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| (1) (a)  | (2) (b)  | (3) (a)  | (4) (b)  | (5) (b)  |
| (6) (c)  | (7) (b)  | (8) (b)  | (9) (c)  | (10) (b) |
| (11) (b) | (12) (b) | (13) (b) | (14) (d) | (15) (a) |

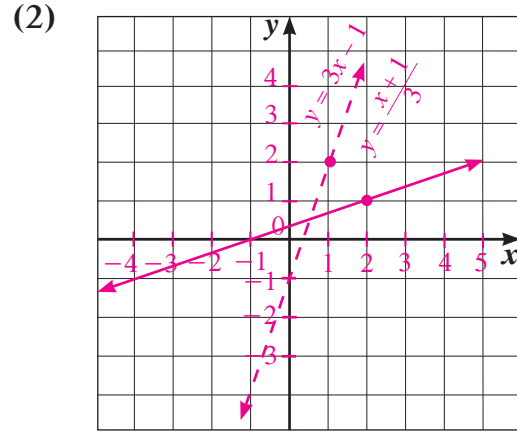
تمرن 5-2

المعكوسات ودوال الجذر التربيعي

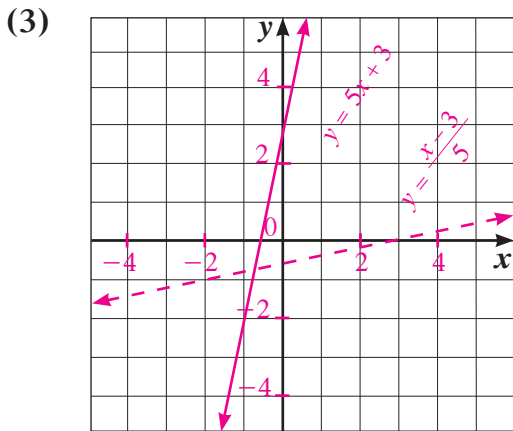
## المجموعة A تمارين مقالية



$$y = 2x$$



$$y = 3x - 1$$



$$y = \frac{x-3}{5}$$

(4)  $y = \pm\sqrt{2x}$

(5)  $y = \pm\sqrt{x+1}$

(6)  $y = \pm\sqrt{y-1} + 2$

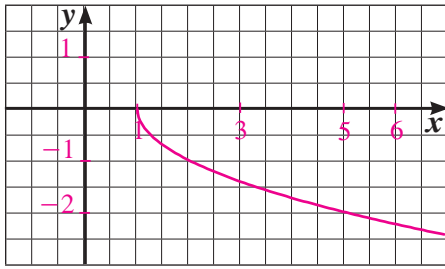
(7)  $y = 3x - 5$

(8)  $y = \frac{x-2}{6}$

(9)  $y = \pm\sqrt{x+3}$

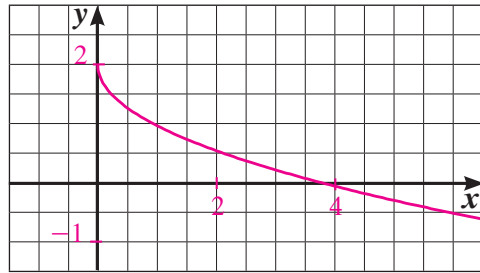
(10)  $y = \pm\sqrt{y-2} - 5$

(11)



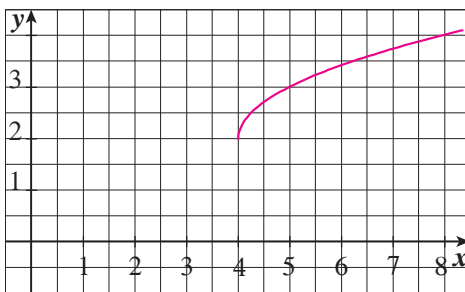
$x \geq 1; y \leq 0$

(12)



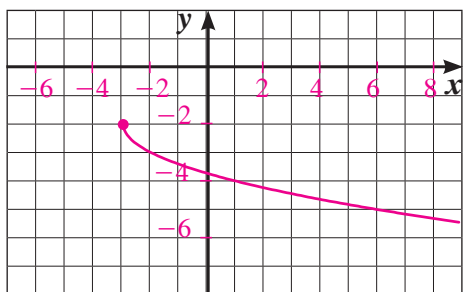
$x \geq 0; y \leq 2$

(13)



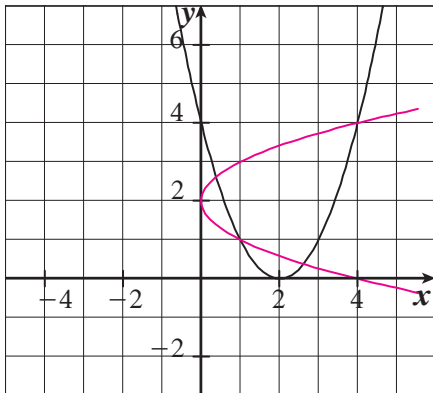
$x \geq 4; y \geq 2$

(14)



$x \geq -3; y \leq -2$

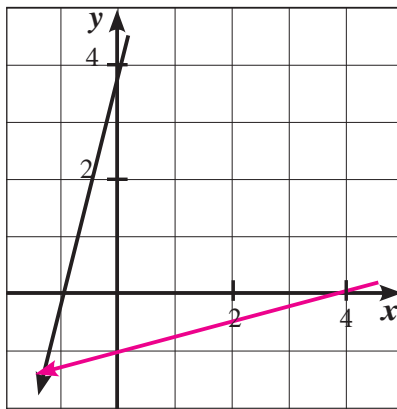
(15)



$y = (x - 2)^2$

$y = \pm\sqrt{x} + 2$

(16)



$y = 4x + 4$

$y = \frac{1}{4}x - 1$

(17) (a)  $y = 0.8x$

(b)  $y = 1.25x$

(c) إيجاد السعر الأصلي إذا ما أعطي ثمن البيع.

المجموعة B تمارين موضوعية

- (1) (a)                      (2) (a)                      (3) (a)                      (4) (a)                      (5) (b)  
 (6) (d)                      (7) (b)                      (8) (d)                      (9) (b)                      (10) (d)

تمرن 2-6

حل المتباينات

المجموعة A تمارين مقالية

- (1) (a)  $x \in \left(-\frac{5}{2}, 3\right)$                       (b)  $x \in (-\infty, -1] \cup \left[\frac{5}{2}, \infty\right)$                       (c)  $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (1, \infty)$   
 (d)  $x \in (-\infty, \infty)$                       (e)  $x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$                       (f)  $x \in (-3, 7)$

(2) (a) عرض المستطيل  $0 < x - 2 > 0$ ،  $x > 2$ .

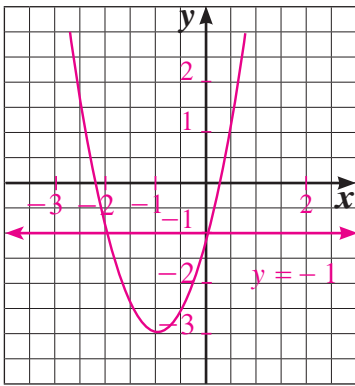
(b)  $y = 2x^2 - 4x$

(c)  $x = 8$ ، الطول = 16 cm، والعرض 8 cm.

- (3)  $(-\infty, -2) \cup (1, 2)$                       (4)  $[-1, 1]$                       (5)  $(-\infty, -4) \cup (3, \infty)$   
 (6)  $(-\infty, -1) \cup [1, 3)$                       (7)  $(-\infty, -5) \cup (-2, 1)$                       (8)  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$   
 (9)  $[-1, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$

(10) عمر أحمد 10 سنوات وعمر جده 80 سنة.

(11) (a)

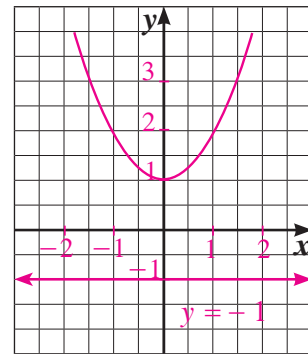


$x = 0, x = -2$

$f(x) > y \therefore x \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$

$f(x) < y \therefore x \in (-2, 0)$

(b)

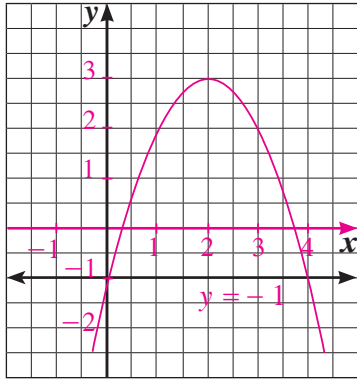


لا حل لها  $f(x) = y$

$f(x) > y \therefore x \in (-\infty, \infty)$

لا حل لها  $f(x) < y$

(c)

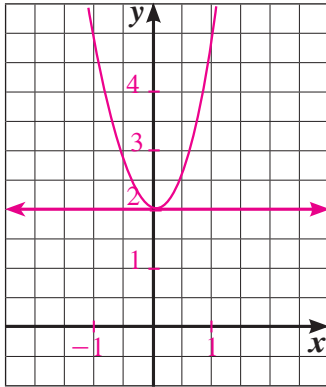


$$f(x) = y \therefore x = 4, x = 0$$

$$f(x) > y \therefore x \in (0, 4)$$

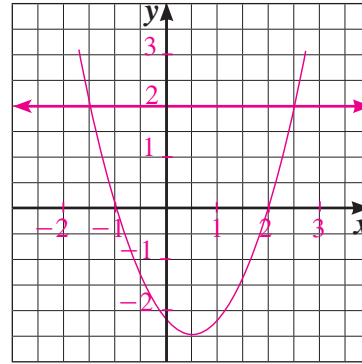
$$f(x) < y \therefore x \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$$

(12) (a)



$$f(x) \geq y \therefore x \in (-\infty, \infty)$$

لا حل لها



$$f(x) > y$$

$$\therefore x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \infty\right)$$

$$f(x) < y \therefore x \in \left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}, \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$$

### المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)

(2) (b)

(3) (a)

(4) (a)

(5) (b)

(6) (b)

(7) (b)

(8) (c)

(9) (b)

(10) (c)

(11) (b)

(12) (c)

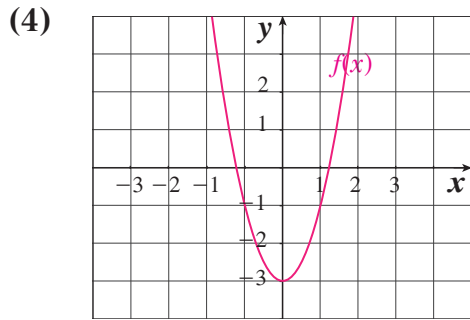
(13) (d)

## اختبار الوحدة الثانية

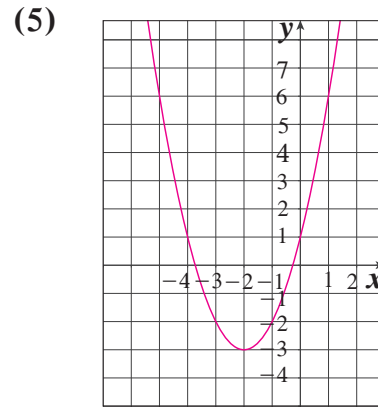
(1)  $(-\infty, -\frac{2}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$

(2)  $(-\infty, -2)$

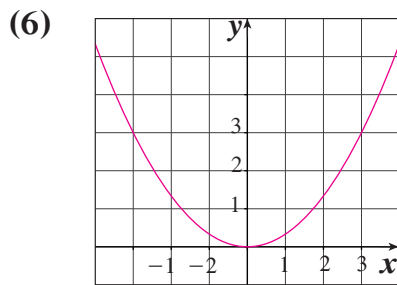
(3)  $x^2 - 4x + 3$



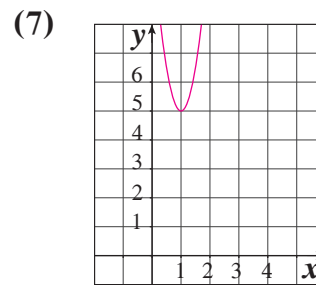
$y = 2x^2 - 3$  ، تربيعية



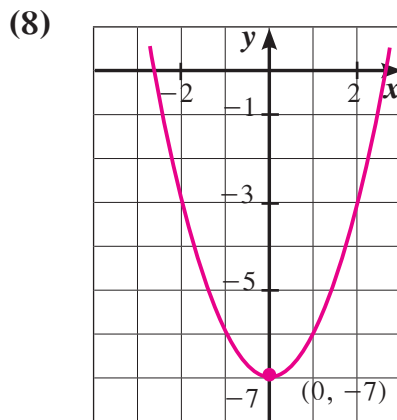
$y = x^2 + 4x + 1$  ، تربيعية



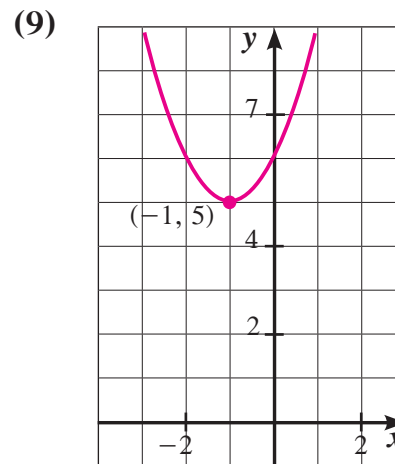
$y = \frac{1}{3}x^2$



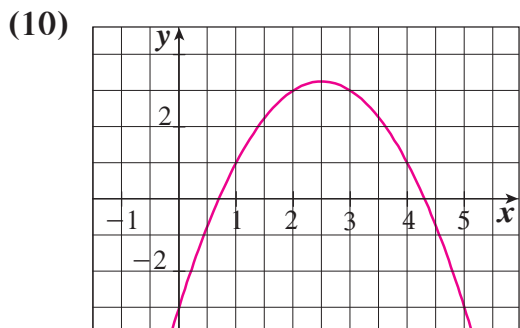
$y = 6(x - 1)^2 + 5$



الرأس  $(0, -7)$



$(-1, 5)$



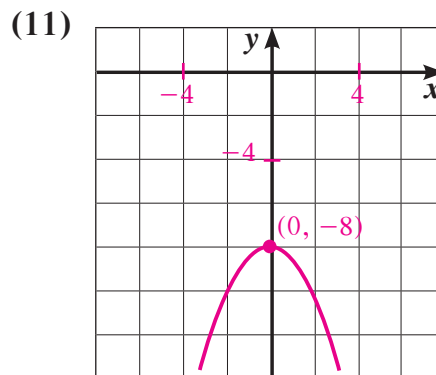
$$\left(\frac{5}{2}, \frac{13}{4}\right)$$

(12)  $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$

(13)  $y = \frac{3}{2}x + 9$

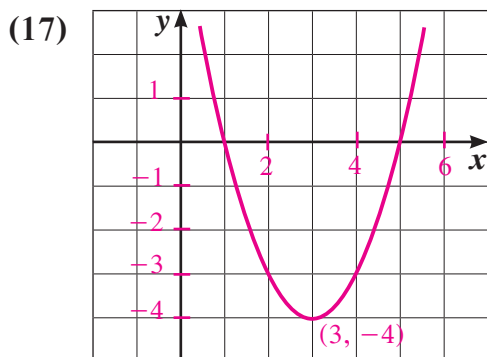
(14)  $y = \pm\sqrt{x+10}$

(15)  $y = \pm\sqrt{x+3} - 2$

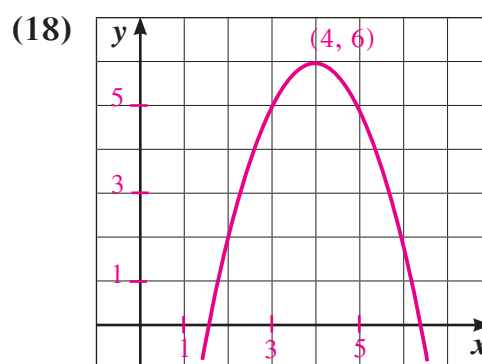


$$(0, -8)$$

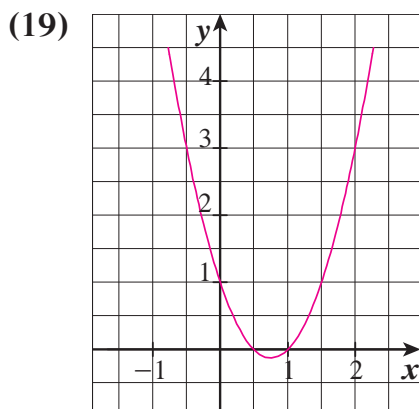
(16) تنوع الإجابات: إجابة ممكنة:  $y = \sqrt{x}$



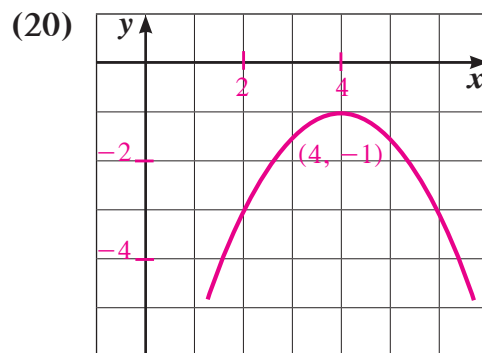
$$y = (x - 3)^2 - 4, (3, -4)$$



$$y = (x - 4)^2 + 6, (4, 6)$$



$$y = \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}, \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{8}\right)$$



$$y = -\frac{1}{2}(x - 4)^2 - 1, (4, -1)$$

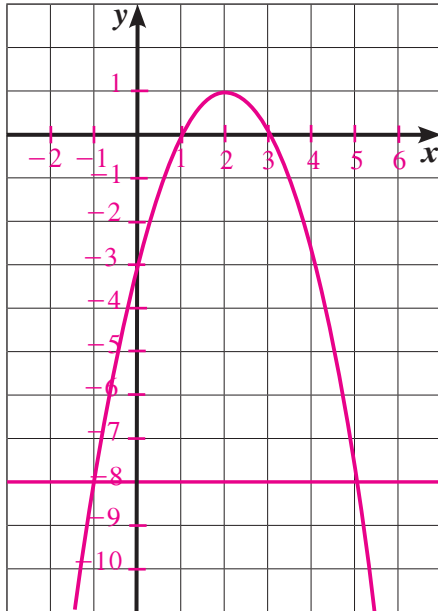
(21) المساحة:  $\frac{1}{2}x(120 - 3x)$  لها قيمة عظمى عند  $x = 20$ ، وقيمتها  $600 \text{ m}^2$ .

(22) (a)  $x \in [3, 5]$

(b)  $\mathbb{R}$

(c)  $x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup (2, \infty)$

(23) (a)



(b)  $f(x) = -8$  تعطي  $x = -1$  أو  $x = 5$ ،  $f(x) > -8$  تعطي  $x \in (-1, 5)$ ،

$f(x) < -8$  تعطي  $x \in (-\infty, -1) \cup (5, \infty)$ .

(c)  $-x^2 + 4x - 3 = -8$ ;  $-x^2 + 4x + 5 = 0$

$$h(x) = -x^2 + 4x + 5 = (x+1)(-x+5)$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$5$	$\infty$	
$x+1$	-	•	+	+	
$-x+5$	+	+	•	-	
$h(x)$	-	•	+	•	-

نحصل على النتيجة السابقة نفسها.

### تمارين إثرائية

(1)  $[0, 3)$

(2)  $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$

$$0 = a(0 - 10)^2 + 3, a = -0.03 \quad \text{(a) (3)}$$

(b) يقف الحارس على بعد 7 m،  $y = -0.03(7 - 10)^2 + 3$  ومنه  $y = 2.73 > 2.53$

لذا تتخطى الكرة حارس المرمى.

من ناحية ثانية المرمى على بعد 16 m.  $y = -0.03(16 - 10)^2 + 3 = 1.92$ .

أي  $1.92 < 2.44$ ، لذا سوف تدخل الكرة في المرمى وسيسجل اللاعب هدفاً.



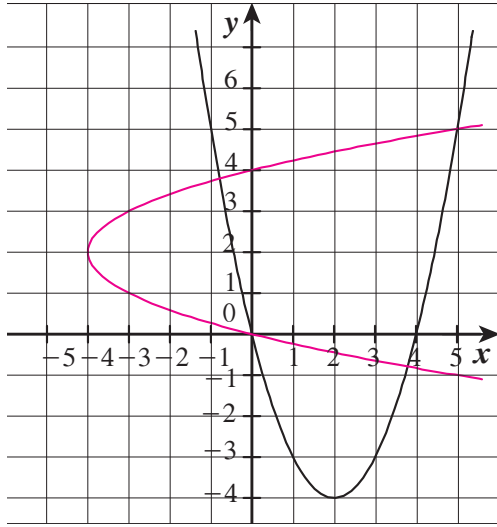
(4) (a) إحداثيات نقطة الانطلاق (0, 1)، وبالتعويض نجد:  $k = 7.48$ .

(b) إحداثيات رأس القطع المكافئ (9, 7.48)، فيكون الارتفاع الأقصى 7.48 m.

(c) يقف اللاعب المنافس على بعد 3 m من الشبكة أي 14.9 عن اللاعب الثاني إذا  $x = 14.9$  ومنه  $y \simeq 4.7$  m، وحيث إن  $4.7 < 3.3$  لذا ستتخطى الكرة اللاعب المنافس.

(d) عند سقوط الكرة على أرض الملعب يكون  $y = 0$  أي  $-0.08(x-9)^2 + 7.48 = 0$ ، ومنه نحصل على  $x = 18.67$ ، وحيث إن  $18.67 < 23.8$ ، لذا ستسقط الكرة داخل ملعب اللاعب المنافس.

(5) (a)



(b)  $y_2 = 2 - \sqrt{x+4}$ ،  $y_1 = 2 + \sqrt{x+4}$ ،  $y^2 - 4y - x = 0$ ،  $x - y^2 - 4y$ ،  $y - x^2 - 4x$

(6) لا حل لها

(7)  $[-\frac{4}{3}, \frac{3}{2}]$

(8)  $(3, \infty)$

(9)  $(5, 6) \cup (6, \infty)$

(10)  $[\frac{1}{3}, \frac{7}{2}) \cup (\frac{7}{2}, \infty)$

(11) (a)

جدول (1)

5	4	3	2	1	0	$x$
10	8	6	4	2	0	$y = 2x$
	2	2	2	2	2	الفرق

جدول (2)

5	4	3	2	1	0	$x$
50	32	18	8	2	0	$y = 2x^2$
	18	14	10	6	2	الفرق

(b)  $y = 2x^2$

(c) كل الفروق في الجدول الأول تساوي 2، وفي الثاني يزيد الفرق 4 من منزلة إلى أخرى.

(d)

5	4	3	2	1	0	$x$
-21	-12	-5	0	3	4	$y = -x^2 + 4$
-9	-7	-5	-3	-1		الفرق

يتناقص الفرق 2- من منزلة إلى أخرى نمطياً

5	4	3	2	1	0	$x$
-1	0	1	2	3	4	$y = -x + 4$
-1	-1	-1	-1	-1		الفرق هو نفسه

الفرق هو نفسه

(e) قد تختلف الإجابات. مثلاً: إذا كان الفرق بين قيم  $y$  المناظرة لقيم  $x$  ثابتاً، فعندئذ، النموذج الخطي سيكون أفضل أما إذا كان الفرق تزايدياً أو تناقصياً في نمط منتظم، فإن النموذج التربيعي ربما يكون هو الأفضل.

(12)  $y = 0.1x^2$

## المجموعة A تمارين مقالية

- (1) المحور الصادي هو محور تماثل .∴ الدالة زوجية.  
 (2) نقطة الأصل هي نقطة تماثل .∴ الدالة فردية.  
 (3) ليس لها نقطة تماثل ولا محور تماثل .∴ الدالة ليست فردية وليست زوجية.  
 (4) الدالة ليست زوجية وليست فردية.  
 (5) فردية.  
 (6) ليست فردية وليست زوجية.  
 (7) زوجية. (8) زوجية. (9) ليست فردية وليست زوجية.  
 (10)  $y = \sqrt[3]{3x}$  (11)  $y = \left(\frac{x}{2}\right)^4; x \geq 0$  (12)  $y = \pm \sqrt[4]{3x}$   
 (13)  $y = (3x)^3$  (14)  $y = x^3 + 1$  (15)  $y = \pm \sqrt[4]{x+3} - 2$   
 (16) (a)  $4096 \text{ g} \approx 4.1 \text{ kg}$  (b)  $p = 5\sqrt[3]{M}$   
 (c) 74.1 cm تقريبًا.  
 (17) تنوّع الإجابات: مثال:  $y = -x^3$   
 (18) (a)  $V = 2\pi^2(3R_2)(R_2^2) = 6\pi^2 R_2^3$  (b)  $121.3 \text{ cm}^3$   
 (19) الجذر التربيعي لعدد سالب ليس عددًا حقيقيًا، في حين أن الجذر التكعيبي لعدد سالب هو عدد حقيقي.  
 (20) (a) الرسم البياني مفتوح إلى أعلى، المحور الصادي محور التماثل، زوجية.  
 (b) الرسم البياني مفتوح إلى أسفل، المحور الصادي محور التماثل، زوجية.  
 (c) الرسم البياني ممتد إلى الربعين الأول والثالث، فردية.  
 (d) الرسم البياني ممتد إلى الربعين الثاني والرابع، فردية.

## المجموعة B تمارين موضوعية

- (1) (a) (2) (a) (3) (b) (4) (b) (5) (a)  
 (6) (b) (7) (a) (8) (c) (9) (d) (10) (b)  
 (11) (a) (12) (d)

## المجموعة A تمارين مقالية

(1)  $-x^2 + 16$  (تربيعية، ثنائية الحد)

(2)  $16x^2 - x - 5$  (تربيعية، ثلاثية الحدود)

(3)  $2x^3 + 9x^2 + 21x + 27$  (تكعيبة، رباعية الحدود)

(4)  $80x^3 - 109x^2 - 68x$  (تكعيبة، ثلاثية الحدود)

(5)  $\frac{1}{2}x^5 + \frac{2}{3}x$  (من الدرجة الخامسة، ثنائية الحد)

(6)  $30x^3 - 10x^2$  (تكعيبة، ثنائية الحد)

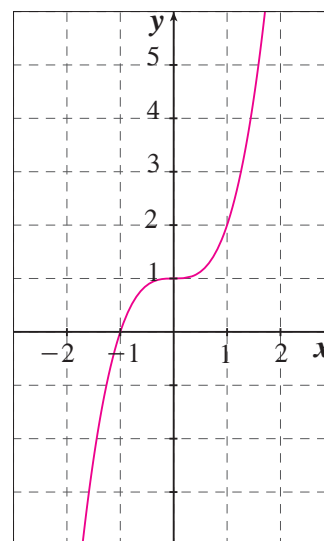
(7)  $x^4 + 2x^2 + 1$  (من الدرجة الرابعة، ثلاثية الحدود)

(8)  $8c^3 - 26c + 12$  (تكعيبة، ثلاثية الحدود)

(9)  $w^4 - 4w^3 + 6w^2 - 4w + 1$  (من الدرجة الرابعة، خماسية الحدود)

(10)  $y = x^3 + 1$  ; (تنوع الإجابات)

$x$	0	1	-1
$y$	1	2	0

الأجزاء المقطوعة من محور السينات:  $x = -1$ الأجزاء المقطوعة من محور الصادات:  $y = 1$

(11) (a)  $v = 10\pi R^2$

(b)  $\frac{2}{3}\pi R^3$

(c)  $\frac{2}{3}\pi R^3 + 10\pi R^2$

(12) ( $\swarrow, \nearrow$ )

(13) ( $\swarrow, \searrow$ )

(14) ( $\searrow, \nearrow$ )

(15) ( $\swarrow, \nearrow$ )

(16) ( $\searrow, \searrow$ )

### المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)

(2) (b)

(3) (a)

(4) (b)

(5) (c)

(6) (c)

(7) (b)

(8) (d)

(9) (c)

(10) (b)

(11) (a)

تمرن 3-3

العوامل الخطية لكثيرات الحدود

### المجموعة A تمارين مقالية

(1)  $y = x^3 + 12x^2 + 47x + 60$  (تكعيبة)

(2)  $y = x^3 - 7x^2 + 15x - 9$  (تكعيبة)

(3)  $y = x^3 - x$  (تكعيبة)

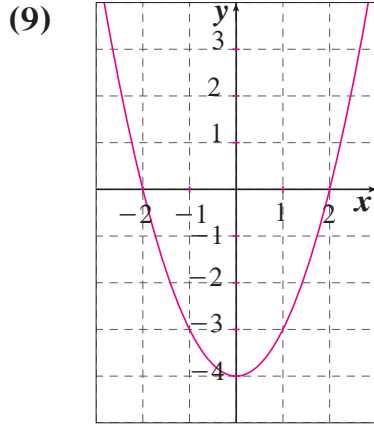
(4) 2 كتلة  $x^3$  ، 15 كتلة  $x^2$  ، 31 كتلة  $x$  ، 12 كتلة الوحدة.

(5)  $12x^3 - 27x$

(6) 1, -2

(7) -3 (مكرر ثلاث مرات)

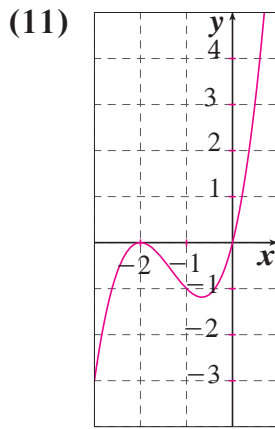
(8) +2 (مكرر مرتين)، -9، صفر



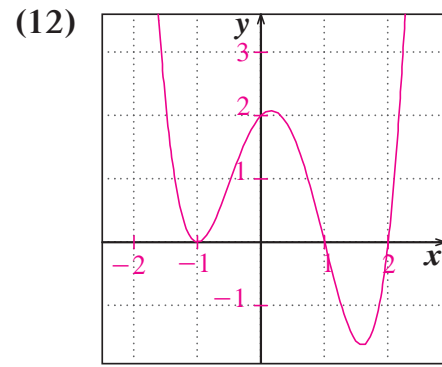
2, -2



-1, 2, 3



0, -2 (مكرر مرتين)



-1 (مكرر مرتين), 1, 2

(13) قد تختلف الإجابات. مثلاً: اكتب كثيرة الحدود في الصورة العامة، عندئذ يكون الحد الثابت هو قيمة الجزء المقطوع من محور الصادات.

(14) (a)  $A = -x^3 + 2x^2 + 4x$

(b)  $6\frac{7}{8}$

(15) قد تختلف الإجابات. مثلاً:  $y = x(x-1)(x+2)^2$

(16) (a)  $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$  ،  $2x^3 + 15x^2 + 31x + 12$

(b)  $8x^2 + 24x + 10$

(17) قد تختلف الإجابات. مثلاً:  $y = x^2 - 1$

(18) قد تختلف الإجابات. مثلاً:  $y = x^3 - 3x^2 + 2x$

(19) قد تختلف الإجابات. مثلاً:  $y = x^3 + 2x^2 - 11x - 12$

(20) قد تختلف الإجابات. مثلاً:  $y = 4x^4 - 16x^3 + 15x^2 + 4x - 4$

## المجموعة B تمارين موضوعية

- |          |          |          |         |          |
|----------|----------|----------|---------|----------|
| (1) (b)  | (2) (a)  | (3) (a)  | (4) (a) | (5) (a)  |
| (6) (d)  | (7) (b)  | (8) (a)  | (9) (d) | (10) (c) |
| (11) (d) | (12) (b) | (13) (c) |         |          |

تمرن 3-4

قسمة كثيرات الحدود

## المجموعة A تمارين مقالية

- |                                  |                                   |                                  |
|----------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|
| (1) $x - 8$                      | (2) الباقي 5, $x^2 + 4x + 3$      | (3) $x^2 + 4x + 3$               |
| (4) $3x^2 - 7x + 2$              | (5) كلا                           | (6) نعم                          |
| (7) $x^2 + 4x + 3$               | (8) الباقي 40, $-2x^2 + 9x - 19$  | (9) $2x^3 + 5x - 15$             |
| (10) $x^2 + 2x + 5$              | (11) الباقي 51, $2x^2 + 10x + 20$ | (12) $y = (x + 1)(x + 3)(x - 2)$ |
| (13) $y = (x + 3)(x - 4)(x - 3)$ |                                   |                                  |

(14) إجابة ممكنة. الطول:  $x + 3$ ، العمق:  $x - 2$ ، الارتفاع:  $x$

- |         |        |         |        |
|---------|--------|---------|--------|
| (15) 18 | (16) 0 | (17) 10 | (18) 0 |
|---------|--------|---------|--------|

(19) (a)  $f(a) = 0$ , عامل من عوامل  $f(x)$

(b) من نظرية العامل، بما أن  $y = x^2 + 1$  ليست لها أصفار حقيقية فلذلك  $x^2 + 1$  ليست لها عوامل خطية باستخدام الأعداد الحقيقية.

(c)  $f(-1) = 0$  ∴  $(x + 1)$  هو عامل وليس  $x - 1$  حيث  $f(1) = -2 \neq 0$  ∴ يوجد باقي وهو  $-2$  ∴  $(x - 1)$  ليس عاملاً

- |  |  |                                |
|--|--|--------------------------------|
| (20) $x^2 + 4x + 5$                        | (21) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$                         | (22) $x^3 - x^2 + 1$           |
| (23) $x + 1$                               | (24) $x^2 + x + 1$                                     | (25) $x^3 + x^2 + x + 1$       |
| (26) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$             | (27) $x^2 - x + 1$                                     | (28) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ |
| (29) $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ | (30) $x^8 - x^7 + x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ |                                |

### المجموعة B تمارين موضوعية

- |         |          |          |          |
|---------|----------|----------|----------|
| (1) (b) | (2) (a)  | (3) (a)  | (4) (a)  |
| (5) (b) | (6) (b)  | (7) (c)  | (8) (d)  |
| (9) (a) | (10) (b) | (11) (c) | (12) (d) |

تمرن 3-5

حل معادلات كثيرات الحدود

### المجموعة A تمارين مقالية

- |   |   |
|---|---|
| (1) 0, 8                                | (2) 0, 3, -1                              |
| (3) 0, $2\frac{1}{2}$ (مكرر)            | (4) 0, $\frac{3}{2}$ , $-\frac{1}{2}$     |
| (5) 0 (مكرر مرتين), 3, $-\frac{1}{2}$   | (6) -9 (مكرر ثلاث مرات) 0                 |
| (7) $3 - \sqrt{3}$ , $3 + \sqrt{3}$ , 0 | (8) $5 + 2\sqrt{3}$ , $5 - 2\sqrt{3}$ , 0 |
| (9) 0, 4, $-\frac{3}{2}$                | (10) 1, -1, 2                             |
| (11) -2, 2, -3                          | (12) 1, $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$       |
| (13) -1 (مكرر مرتين), -2, 2             | (14) -2, 1 (مكرر مرتين)                   |
| (15) 3, -2 (مكرر مرتين)                 | (16) 1, 2, -3                             |
| (17) 2, 1, -2 (مكرر مرتين)              | (18) -3, $\frac{7}{2}$ , 1 (مكرر مرتين)   |
| (19) تحقق من عمل الطلاب                 |   |

### المجموعة B تمارين موضوعية

- |         |          |          |         |
|---------|----------|----------|---------|
| (1) (b) | (2) (a)  | (3) (a)  | (4) (b) |
| (5) (b) | (6) (a)  | (7) (d)  | (8) (c) |
| (9) (b) | (10) (c) | (11) (d) |         |



## اختبار الوحدة الثالثة

(1)  $y = \pm \sqrt[4]{2x}, x \geq 0$

(2)  $y = \sqrt[3]{x} - 1$

(3)  $y = \pm \sqrt{x+3} - 1, x \geq -3$

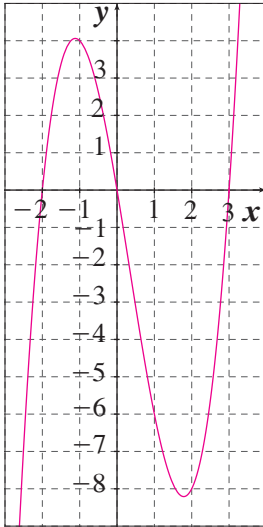
(4)  $y = x^2 - 5, x \geq -5$

(5)  $f(x) = -8x^4 + 3x^2 + 9$ , ثلاثية، من الدرجة الرابعة

(6)  $f(x) = 8x^2 + 8x$ , ثنائية، تربيعية

(7)  $f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 12x$ , ثلاثية، تكعيبية

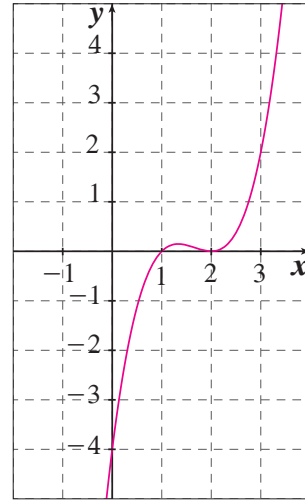
(8)



-2, 0, 3

(↙, ↗)

(9)



1, 2

(↙, ↗)

(10) 3, 1, -4

(11)  $-2, \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$

(12) 2, -1, 1

(13) 1,  $\approx 1.2$

(14)  $x^3 - 2x^2 - 8x$

(15)  $x^3 - 3x - 2$

(16)  $x^2 + 4x - 12$

(17)  $x^2 + 5x - 15, 24$  الباقي

(18)  $x^2 + 4x + 13, 25$  الباقي

(19)  $x^3 - x^2 - 4x + 8, 4$  الباقي

(20)  $\frac{-64}{81}$

(21) 0

## تمارين إثرائية

(1)  $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ ,  $(m+1)\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 11\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right) - 4 = 0$ ,  $m = -7$

(2) (a)  $(x-1)^2(x+3)(2x-1) = 0$ ,  $\{1 \text{ (مكرر مرتين)}, -3, \frac{1}{2}\}$

(b)  $(x-1)(2x+3)(2x^2-x+3)$ ,  $\left\{1, \frac{-3}{2}\right\}$

(3) باستخدام القسمة التركيية وقسمة  $f(x)$  على  $(x+1)$  مرتين متتاليتين نحصل على الباقي  $-a+6=0$ ,  $a=6(-a+6)$

$$\frac{(x-1)(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+3)(x^2+1)} = \frac{x-1}{x^2+1} \quad (x \neq 2, x \neq -3) \quad (4)$$

$$g(x) = (x-1)(x-2)(4x^2+x-7) \quad (a) \quad (5)$$

$$\{1, 2, 1.2, -1.45\} \quad (b)$$

$$\begin{cases} 2a+b=1 \\ 5a+3b=4 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-1 \\ b=3 \end{cases} \quad (a) \quad (6)$$

$$f(x) = x(x-1)(x-2) \quad (b)$$

$$f(x) = g(x+5)(2x-1), \quad g=1, \quad f(x) = (x+5)(2x-1) \quad (7)$$

$$x = -2 \quad (a) \quad (8)$$

$$(x+2)(x^2-2x+4) \quad (b)$$

$$x^4 + 2ax^3 + (a^2 + 2b)x^2 + 2abx + b^2 \quad (a) \quad (9)$$

$$a = 3, \quad b = -1, \quad f(x) = (x^2 + 3x - 1)^2 \quad (b)$$

$$V \approx 2.5 \times 10^8 \text{ cm}^3 \quad (11)$$

$$y = x^3 - 2x^2 \quad (10)$$

$$y(17) = 4335$$

$$V = x(x-1)(x-2), \quad x = 5 \text{ m}, \quad x = \text{الطول} \quad (12)$$

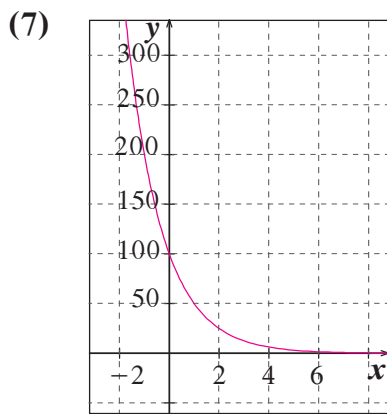
$$26.5 \text{ cm} \text{ حوالى}, \quad V = (120+x)(100+x)(90+x) \quad (13)$$

$$5, 6, 7, \text{ الأعداد هي: } (n-1)(n)(n+1) = 210 \quad (14)$$

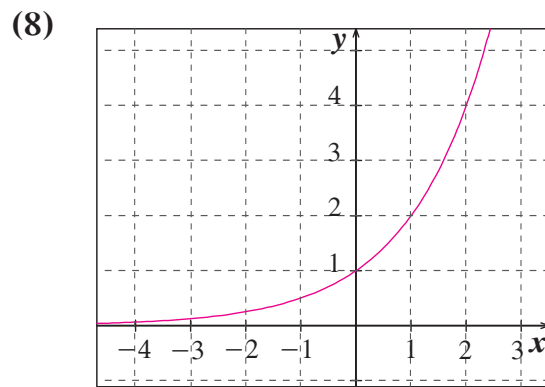
$$2, 5, 7, \text{ الأبعاد هي: } x(x+3)(x+5) = 70 \quad (15)$$

## المجموعة A تمارين مقالية

- (1) نموًا أسياً، 63% (2) نموًا أسياً، 30% (3) تضارؤلاً أسياً، 35%
- (4) تضارؤلاً أسياً، 87.5% (5) نموًا أسياً، 500%
- (6) (a)  $y = 26\,518\,000(1.014)^x$ ,  $y = 16\,271\,000(1.003)^x$   
 $y = 16\,110\,000(1.02)^x$ ,  $y = 15\,525\,000(1.007)^x$   
 (b) نعم. 30 473 000, 16 766 000, 19 638 000, 16 647 000.



تضارؤلاً، العامل 0.5



نموًا، العامل 2

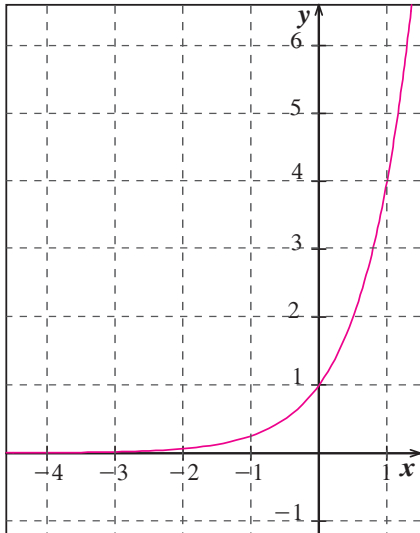
- (9) تحقق من عمل الطلاب. (10) حوالي 1843 دينارًا.
- (11)  $676, y = 250(1.22)^x$  (12)  $50, y = 35(1.075)^x$
- (13)  $977.2, y = 1750(0.89)^x$  (14)  $108, y = 115(0.9875)^x$
- (15) السيارة رقم (1).

## المجموعة B تمارين موضوعية

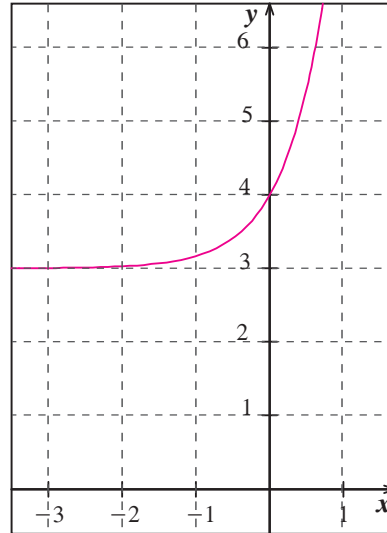
- (1) (b) (2) (a) (3) (b) (4) (a) (5) (d)
- (6) (c) (7) (c) (8) (b) (9) (d) (10) (a)
- (11) (b)

## المجموعة A تمارين مقالية

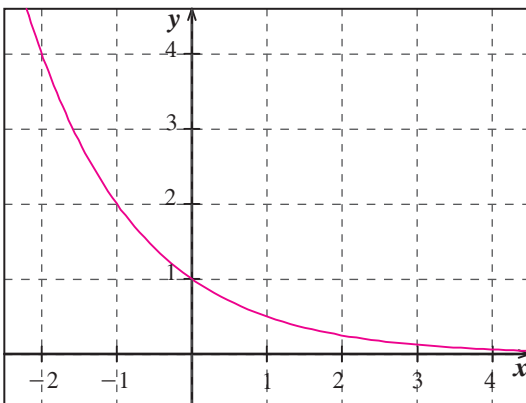
(1)



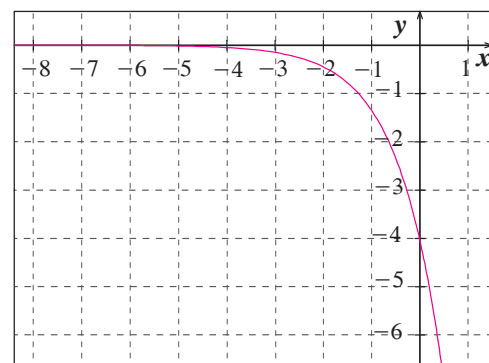
(2)



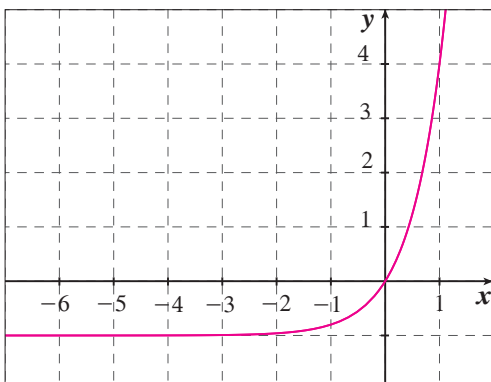
(3)



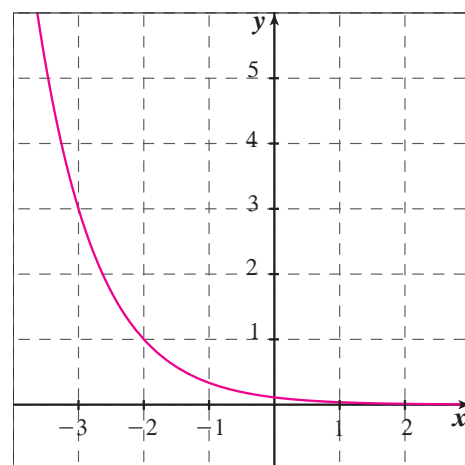
(4)



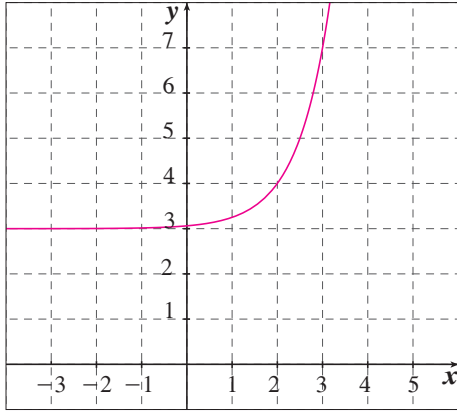
(5)



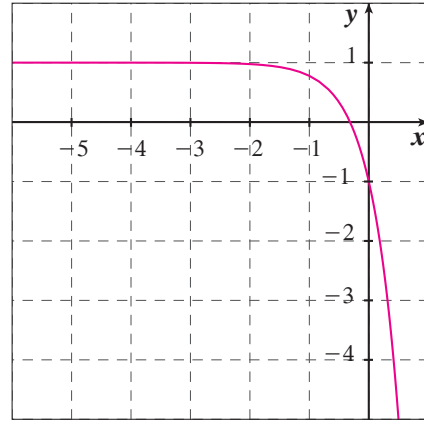
(6)



(7)



(8)



(9) 20.0855

(10) 2 017.1440

(11) 2.0609

(12) 0.0099

(13) 15.1543

(14)  $a = 0$ 

الكمية المتبقية من المادة (A)	السنوات (t)	الكمية الأولية من المادة (P)
9 995	5	10 000
7 496.25	5	7 500
5 997	5	6 000
4 997.5	5	5 000
2 498.75	5	2 500
1 999	5	2 000

(a) (15)

(b) تقترب قيم A من قيم P.

0.00267% (b)

5.73% (a) (16)

### المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)

(2) (a)

(3) (a)

(4) (a)

(5) (a)

(6) (b)

(7) (c)

(8) (d)

(9) (b)

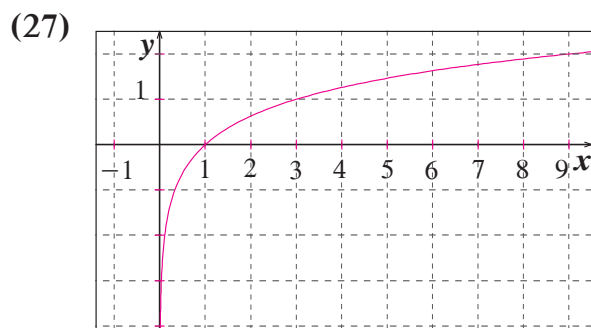
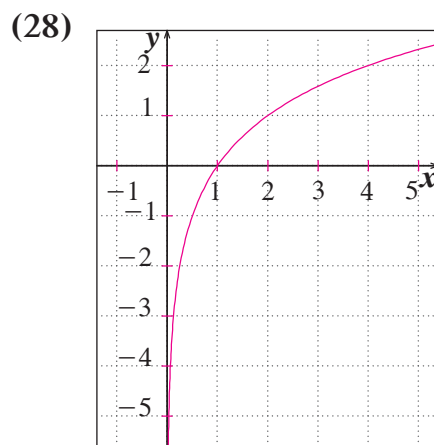
(10) (a)

(11) (d)

(12) (b)

## المجموعة A تمارين مقالية

- (1)  $\log_4 16 = 2$       (2)  $\log_7 343 = 3$       (3)  $\log_{\frac{1}{2}}(4) = -2$       (4)  $\log_8\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{2}{3}$   
 (5)  $\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{27}\right) = 3$       (6)  $\log 0.01 = -2$       (7)  $\log_6(6\sqrt{6}) = \frac{3}{2}$       (8)  $\log_5\left(\frac{1}{125}\right) = -3$   
 (9)  $2^7 = 128$       (10)  $4^3 = 64$       (11)  $10^2 = 100$       (12)  $3^{-2} = \frac{1}{9}$   
 (13)  $10^{-4} = 0.0001$       (14)  $3^{-5} = \frac{1}{243}$       (15) 2      (16) 3  
 (17) 1      (18) 5      (19) 1      (20) -2  
 (21)  $(-1, \infty)$       (22)  $(0, \infty)$       (23)  $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$   
 (24) 1.9      (25)  $7.94 \times 10^{-4}$       (26) 7.7

المجال:  $x > 0$ المدى:  $\mathbb{R}$ المجال:  $x > 1$ المدى:  $\mathbb{R}$ (29) إذا كان  $y = \log_1(x)$ ، إذاً  $1^y = x$ ،  $x = 1$  مهما كانت  $y$ .

## المجموعة B تمارين موضوعية

- (1) (a)      (2) (b)      (3) (a)      (4) (b)      (5) (a)  
 (6) (c)      (7) (d)      (8) (a)      (9) (c)      (10) (a)  
 (11) (d)      (12) (a)      (13) (c)      (14) (c)      (15) (b)

المجموعة A تمارين مقالية

- (1)  $\log 14$       (2)  $\log_4 \frac{\sqrt{y}}{x}$       (3)  $\log \frac{M^4}{N}$       (4)  $\log(x y z)$   
 (5)  $\log\left(\frac{ab}{6c}\right)$       (6)  $\log(ab^3)$       (7)  $\log_7 \frac{\sqrt{xy}}{a^3}$       (8)  $\log \frac{r^7 n}{x}$   
 (9)  $\log_5 y - \log_5 x$       (10)  $3\log x + y^5$       (11)  $\log_3 7 + 2\log_3(2x - 3)$   
 (12)  $2\log a + 3\log b - 4\log c$       (13)  $\log 3 + 4\log M - 2\log N$   
 (14)  $\log_4 5 + \frac{1}{2}\log_4 x$       (15)  $3\log 2 + 3\log(x + 1)$   
 (16)  $\frac{1}{2}(\log 2 + \log x - \log y)$       (17)  $\begin{cases} 6 \log 2 \\ \log 4 + \log 16 \\ 2 \log 8 \\ 3 \log 4 \end{cases}$

(18) قد تختلف الإجابات. مثلاً:  $\log(5 \times 2) = \log 5 + \log 2$ ، خاصية الضرب.

- (19) -2      (20) -2      (21) 1      (22) 2      (23) 1      (24) 1.301  
 (25) 1.204      (26) 0.097      (27) 2.097      (28) -1.556

(29)

مستوى شدة الصوت (ديسيبل dB)	الشدة $W/m^2$	نوع الصوت
120	1	صوت عالٍ
100	$10^{-2}$	صوت آلة ثقب
70	$10^{-5}$	صوت شارع مزدحم
60	$10^{-6}$	صوت محادثة
20	$10^{-10}$	صوت همس
10	$10^{-11}$	حفيف أوراق الأشجار
0	$10^{-12}$	صوت بالكاد مسموع

المجموعة B تمارين موضوعية

- (1) (a)      (2) (a)      (3) (a)      (4) (a)      (5) (b)  
 (6) (a)      (7) (c)      (8) (b)      (9) (a)      (10) (b)  
 (11) (b)      (12) (c)      (13) (d)      (14) (c)      (15) (d)

## المجموعة A تمارين مقالية

- (1)  $0.953; 9^{2 \times 0.953} = 9^{1.906} \approx 66$   
 (2)  $3.206; 12^{3.206-2} = 12^{1.206} \approx 20$   
 (3)  $3.465; 5 - 3^{3.465} = 5 - 45 = -40$   
 (4)  $0.272; 25^{1.544} = 144$   
 (5)  $3\sqrt[3]{3}; 3 \times (3\sqrt[3]{3})^2 = 3 \times (3\frac{4}{3})^2 = 27$   
 (6)  $\sqrt[5]{3^3}; 2 + 8(3\frac{3}{5})^{\frac{5}{3}} = 2 + 8 \times 3 = 26$   
 (7)  $17^3\sqrt[3]{17}; (17^3\sqrt[3]{17})^{\frac{2}{7}} - 12 = (17^{\frac{7}{2}})^{\frac{2}{7}} - 12 = 17 - 12 = 5$   
 (8)  $18^3\sqrt[3]{18}; -3 + 2(18^3\sqrt[3]{18})^{\frac{3}{4}} = -3 + 2(18^{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{4}} = -3 + 36 = 33$   
 (9) 2.807 (10) 3.183 (11) -0.8097  
 (12) 3.874 (13) 0.0792

18.966 (a) (14)

18.966 (b)

(c) قد تختلف الإجابات. مثلاً: الأساس 10، حيث إنك لا تحتاج إلى استخدام قاعدة تغيير الأساس.

- (15)  $\frac{1}{60}$  (16)  $3 \times 10^8$  (17)  $\frac{7}{3}$   
 (18) 4 (19) 4 (20) 4

56(a) (21)

47 سنة (b)

## المجموعة B تمارين موضوعية

- (1) (a) (2) (a) (3) (a) (4) (b) (5) (b)  
 (6) (b) (7) (c) (8) (c) (9) (a) (10) (c)  
 (11) (c) (12) (a) (13) (d) (14) (c)



## المجموعة A تمارين مقالية

- |                            |                     |   |                                    |
|----------------------------|---------------------|---|------------------------------------|
| (1) $\ln 125$              | (2) $\ln 4$         | (3) $\ln \frac{1}{81}$                        | (4) $\ln(m^5 \cdot n^3)$           |
| (5) $\ln 1 = 0$            | (6) $\ln e^7$       | (7) $\ln \frac{a\sqrt{c}}{b^2}$               | (8) $\ln \frac{\sqrt[3]{xy}}{c^4}$ |
| (9) 20.92                  | (10) 24.13          | (11) 7.79 km/s                                | (12) $\approx 10.44$               |
| (13) $\ln 2$               | (14) $\ln 30 - 1$   | (15) $9 \times \ln 14$                        | (16) $3 \ln 2 - 2$                 |
| (17) $\frac{2 + \ln 6}{3}$ | (18) -0.677         | (19) $\frac{e^6}{3}$                          | (20) $\frac{1 + e^{36}}{4}$        |
| (21) $1 \pm \sqrt{e^3}$    | (22) $1 + 2e^4$     | (23) $= \pm \sqrt{\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}}$ | (24) $3^3 \times e^3$              |
| (25) $\frac{9e^6}{4}$      | (26) $\pm e^{2.45}$ | (27) 1  | (28) $\frac{3 + e^6}{5}$           |

(29) كلاً، لأن  $\log_2 10$  تكتب  $\frac{\ln 10}{\ln 2}$  ولا يمكن التحويل إلى لوغاريتم واحد.

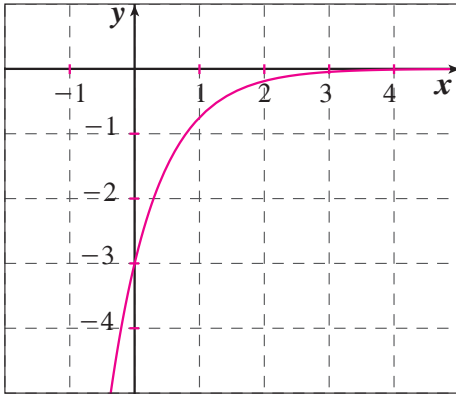
(30) 294 يوماً.

## المجموعة B تمارين موضوعية

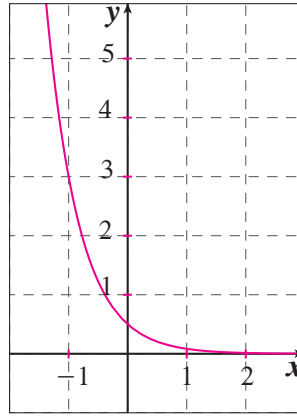
- |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| (1) (a)  | (2) (b)  | (3) (a)  | (4) (b)  | (5) (a)  |
| (6) (c)  | (7) (a)  | (8) (c)  | (9) (b)  | (10) (a) |
| (11) (a) | (12) (b) | (13) (c) | (14) (b) |          |

## اختبار الوحدة الرابعة

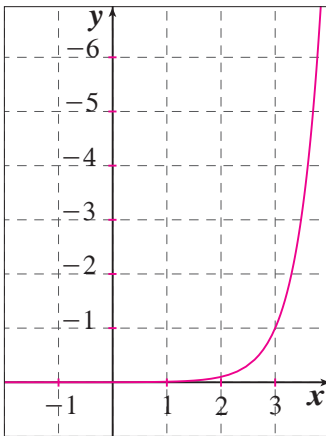
(1)



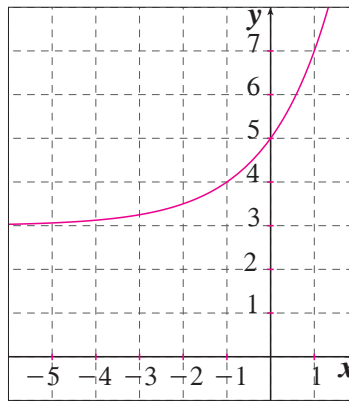
(2)



(3)



(4)



(5) راجع عمل الطلاب.

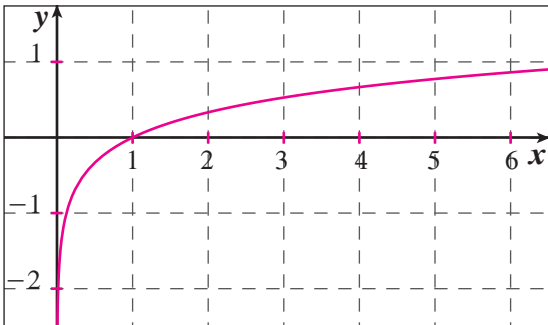
(6)  $y = \frac{1}{3}(3)^x$

(7)  $y = 4(4)^x$

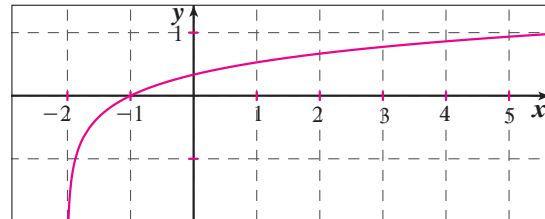
(8)  $y = 3(2)^x$

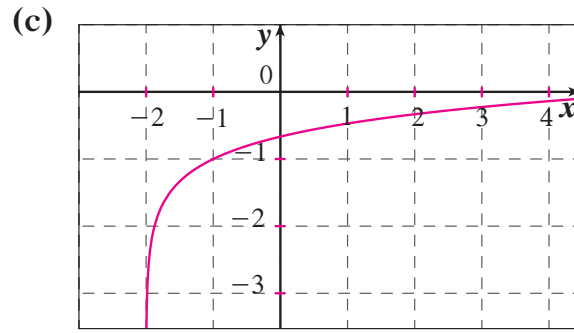
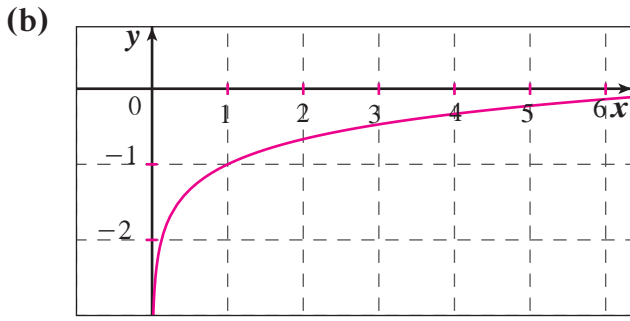
(9) حوالي 1 800 مرة.

(10)



(a)





(11)  $2 \log_4 r + \log_4 n$

(12)  $2 \log_2 (x + 1)$

(13)  $\log_7 a - \log_7 b$

(14)  $\log 3 + 3 \log x + 2 \log y$

(15) 1

(16) 11

(17) -1

(18) 3

(19) تنوع الإجابات.

(20) 350.467

(21) 4

(22) 250

(23) 0.01

(24)  $\sqrt{5}$

(25)  $\frac{10}{9}$

(26) 4

(27)  $1 + \sqrt{1 + e}$

(28)  $\sqrt{1 + e^4}$

(29)  $\frac{1 + \sqrt{8e^7 + 1}}{4}$

(30)  $e^3 \sqrt{2e}$

(31) 42 140 ديناراً.

(32) (a) حوالي 16.5 مليوناً.

(b) 3.9%

(c) حوالي عام 1997

(33) (a)  $y = (5.63)(1.02)^x$  (بالبيون)

(b) يتضاعف.

(c) يتزايد بأقل من النصف.

## تمارين إثرائية

(1)  $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$

$(e^x - 1)(e^x - 3) = 0$  مجموعة الحل:  $\{0, \ln 3\}$

(2)  $x = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$ ,  $\left\{\ln\left(\frac{4}{3}\right)\right\} =$  مجموعة الحل

(3) شرط:  $x > 2$

$$\ln(3x - 1)(x - 1) = \ln(x - 2)$$

$$(3x - 1)(x - 1) = (x - 2)$$

$\Delta < 0$  .∴ لا يوجد حل للمعادلة.

(4)  $\ln(a^{ln b}) = \ln b \times \ln a$ ,  $\ln(b^{ln a}) = \ln a \times \ln b$  إذا فهي صحيحة.

$$\frac{4}{1 + 3e^{-2x}} = \frac{4}{1 + 3\frac{1}{e^{2x}}} = \frac{4}{\frac{e^{2x} + 3}{e^{2x}}} = \frac{4e^{2x}}{e^{2x} + 3} \quad (5)$$

$$e^{2x} + 2 = 3e^x, e^x + \frac{2}{e^x} = 3, e^x + 2e^{-x} = 3 \quad (6)$$

(معادلة من الدرجة الثانية في  $e^x$ )  $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

$e^x = 2$  أو  $e^x = 1$

$x = \ln 2$  أو  $x = 0$ ، إذا مجموعة الحل:  $\{0, \ln 2\}$

(7) نحل المعادلة:  $2(\ln x)^2 - 5\ln x - 3 = 0$

$\ln x = -\frac{1}{2}$  أو  $e^x = 3$

$x = e^{-\frac{1}{2}}$  أو  $x = e^3$ ، إذا مجموعة الحل:  $\{e^{-\frac{1}{2}}, e^3\}$

15% (8)

$$\log_b \frac{M}{N} = \log_b \left( \frac{b^{\log_b M}}{b^{\log_b N}} \right) = \log_b b^{\log_b M - \log_b N} = \log_b M - \log_b N \quad (9)$$

$$\log_b M^x = \log_b (b^{\log_b M})^x = \log_b b^{x \log_b M} = x \log_b M$$

(10) (a)  $x = \frac{\log_b}{\log_a}$

(b)  $x = \log_a b$

(c)  $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$

(11) 1.207 mm

1995 (a) (12)

1.3 سنة (b)

$x = 1.825 \ln f - 0.4928$  (c)

(d) إجابة ممكنة: في (a) عوض عن  $f$  بـ 13، وأوجد قيمة  $x$ ،  $x = 4.2$

في (b) عوض عن  $f$  بـ 2.62، وأوجد قيمة  $x$ ،  $x = 1.3$

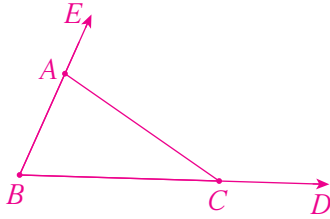
المجموعة A تمارين مقالية

(1) (a)  $\langle \overrightarrow{AB} \rangle = \langle 5, -5 \rangle$   
 $\langle \overrightarrow{BC} \rangle = \langle 1, 6 \rangle$   
 $\langle \overrightarrow{CA} \rangle = \langle -6, -1 \rangle$

(b)  $E(6, 2)$

(2)  $\langle \overrightarrow{EF} \rangle = \langle 5, -3 \rangle$   
 $\langle \overrightarrow{GF} \rangle = \langle -2, 1 \rangle$   
 $\langle \overrightarrow{EG} \rangle = \langle 7, -4 \rangle$

(3) (a)



(b)  $\|\vec{u}\| = \sqrt{13}$ ,  $\theta = 33^\circ 41' 24.2''$   
 $\|\vec{v}\| = 2\sqrt{5}$ ,  $\theta = 116^\circ 33' 54.18''$   
 $\|\vec{w}\| = \sqrt{13}$ ,  $\theta = 213^\circ 41' 24.42''$   
 $\|\vec{t}\| = \sqrt{13}$ ,  $\theta = 303^\circ 41' 24.24''$

(4)  $x = \pm \frac{4}{5}$

(5)  $\langle \overrightarrow{AB} \rangle = \langle 2, -3 \rangle$ ,  $\langle \overrightarrow{CD} \rangle = \langle 2, -3 \rangle \therefore \langle \overrightarrow{AB} \rangle = \langle \overrightarrow{CD} \rangle$

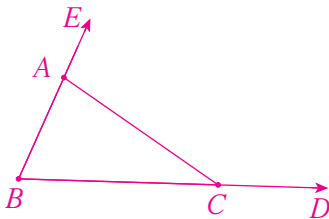
(6)  $x = 2$ ,  $y = -1$

(7)  $\langle \overrightarrow{AB} \rangle = \langle -7, 4 \rangle$ ,  $\langle \overrightarrow{CD} \rangle = \langle 7, -4 \rangle \therefore \langle \overrightarrow{CD} \rangle = -\langle \overrightarrow{AB} \rangle$

(8)  $\langle \overrightarrow{AB} \rangle = 3\langle \overrightarrow{AC} \rangle$

$\therefore$  على استقامة واحدة  $A, B, C$

(9)



(10) (a)  $D(0, \frac{13}{2})$

(b)  $E(9, 5)$

(c)  $\langle \overrightarrow{DE} \rangle = -\frac{3}{2}\langle \overrightarrow{BC} \rangle$

المجموعة B تمارين موضوعية

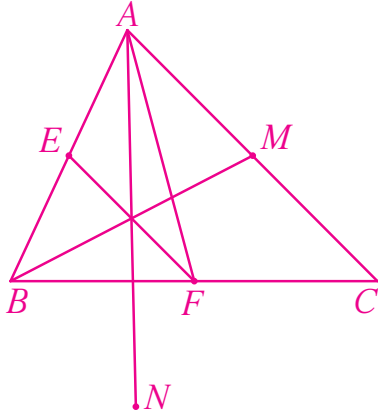
- (1) (b)      (2) (b)      (3) (a)      (4) (a)      (5) (a)  
 (6) (c)      (7) (d)      (8) (c)      (9) (a)      (10) (b)

تمرن 2-5

جمع المتجهات وطرحها

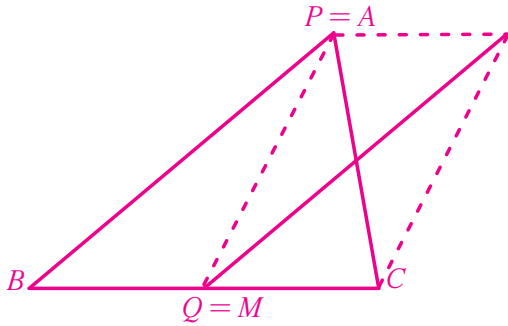
المجموعة A تمارين مقالية

(1) (a) – (b)

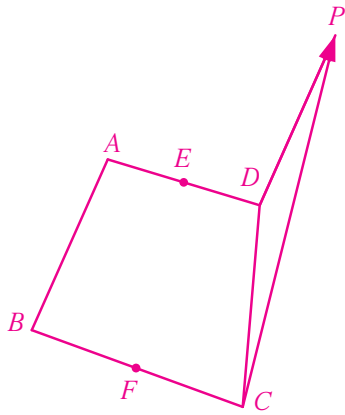


(c)  $\langle \overrightarrow{MN} \rangle = \langle \overrightarrow{MA} \rangle + \langle \overrightarrow{AN} \rangle = \langle \overrightarrow{MA} \rangle + \langle \overrightarrow{AE} \rangle + \langle \overrightarrow{AF} \rangle$   
 $= \langle \overrightarrow{MF} \rangle + \langle \overrightarrow{AE} \rangle = 2 \langle \overrightarrow{AE} \rangle = \langle \overrightarrow{AB} \rangle$

(2)



(3) (a)



$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \langle \overrightarrow{CP} \rangle &= \langle \overrightarrow{CD} \rangle + \langle \overrightarrow{BA} \rangle = \langle \overrightarrow{CE} \rangle + \langle \overrightarrow{ED} \rangle + \langle \overrightarrow{BE} \rangle + \langle \overrightarrow{EA} \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{CE} \rangle + \langle \overrightarrow{BE} \rangle + \vec{0} = \langle \overrightarrow{CE} \rangle + \langle \overrightarrow{BE} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad \langle \overrightarrow{AB} \rangle + \langle \overrightarrow{DC} \rangle &= \langle \overrightarrow{AE} \rangle + \langle \overrightarrow{EF} \rangle + \langle \overrightarrow{FB} \rangle + \langle \overrightarrow{DE} \rangle + \langle \overrightarrow{EF} \rangle + \langle \overrightarrow{FC} \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{EF} \rangle + \langle \overrightarrow{EF} \rangle = 2 \langle \overrightarrow{EF} \rangle \end{aligned}$$

(4) (a)  $2 \langle \overrightarrow{BC} \rangle$

(b)  $3 \langle \overrightarrow{CD} \rangle$

(5) (a)

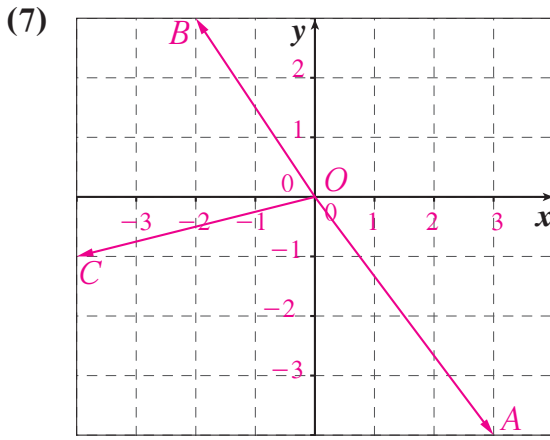


(b) حوالي 5 ساعات.

(6) (a)



(b) متوسط السرعة:  $\sqrt{35^2 + 12^2} = 37 \text{ km/h}$



المجموعة B تمارين موضوعية

- |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| (1) (b)  | (2) (a)  | (3) (a)  | (4) (b)  | (5) (a)  |
| (6) (d)  | (7) (c)  | (8) (c)  | (9) (c)  | (10) (a) |
| (11) (b) | (12) (c) | (13) (a) | (14) (c) |          |

تمرن 3-5

الضرب الداخلي

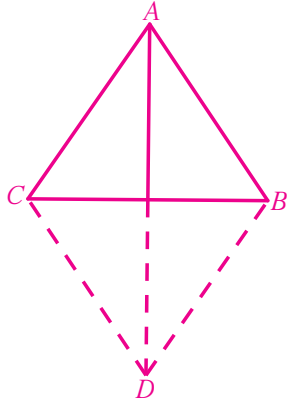
المجموعة A تمارين مقالية

- |   |                 |                  |         |        |
|---|-----------------|------------------|---------|--------|
| (1) (a) 6   | (b) 15          |                  |         |        |
| (2) (a) -8  | (b) 0           | (c) 1            | (d) 48  | (e) 96 |
| (3) (a) 217   | (b) -188        |                  |         |        |
| (4) (a) $x = 6$   | (b) $x = \pm 3$ |                  |         |        |
| (5) $120^\circ$   |                 |                  |         |        |
| (6) (a) $\ \vec{AB}\  = 2\sqrt{2}$ , $\ \vec{AC}\  = 4\sqrt{2}$ , $\ \vec{BC}\  = 2\sqrt{10}$ |                 |                  |         |        |
| (b) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$ , $\therefore$ المثلث قائم الزاوية A .                      |                 |                  |         |        |
| (7) $3\sqrt{3}$   | (8) -5          | (9) $-4\sqrt{3}$ | (10) 0  |        |
| (11) $-4\sqrt{3}$   | (12) 4          | (13) 16          | (14) 16 |        |





(b)



(c) معين.

(d)  $\|\vec{a} + \vec{b}\| = 2\|\vec{AM}\|$

$$= 2\|\vec{a} + \vec{b}\| = 4\sqrt{3}$$

(11) (a)  $\langle \vec{ON} \rangle = \langle \vec{OD} \rangle + \langle \vec{DN} \rangle = \langle \vec{BO} \rangle + \langle \vec{OC} \rangle = \langle \vec{BC} \rangle$

(b)  $\langle \vec{ON} \rangle = \langle \vec{OC} \rangle + \langle \vec{OD} \rangle = \langle \vec{BC} \rangle$

(c)  $\langle \vec{OM} \rangle = -\frac{1}{2} \langle \vec{BC} \rangle = -\frac{1}{2} \langle \vec{ON} \rangle$

$\therefore OMN$  على استقامة واحدة.

(12)  $\cos \theta = \frac{4 \times (-2) + 6(-2)}{\sqrt{40} \times \sqrt{20}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\theta = 135^\circ$$

(13)  $\langle \vec{AB} \rangle = \langle 3, 1 \rangle, \langle \vec{BC} \rangle = \langle 2, -6 \rangle$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 3 \times 2 + 1 \times (-6) = 0$$

$\therefore \langle \vec{AB} \rangle$  و  $\langle \vec{BC} \rangle$  متعامدان.

$\therefore$  المثلث  $ABC$  قائم الزاوية في  $B$ .

(14) (a)  $\vec{b} = \langle -1, -3 \rangle, \vec{c} = \langle -5, 5 \rangle \therefore \vec{b} \neq \vec{c}$

(b)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = (-4)(-1) + (-2)(-3) = 4 + 6 = 10$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = (-4)(-5) + (-2)(5) = 20 - 10 = 10$$

(c)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$

(15) (c)

## تمارين إثرائية

$$(1) (a) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2(2 - m) + 3 - (2) = 0$$

$$-2 - 2m = 0$$

$$m = -1$$

$$(b) \langle \overrightarrow{AB} \rangle = \langle 2, 3 \rangle, \langle \overrightarrow{AC} \rangle = \langle 3, -2 \rangle$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{13}$$

∴  $ABC$  مثلث متطابق الضلعين في  $A$ .

$$(2) \overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{PR} = (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DR} + \overrightarrow{RQ}) \cdot (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR})$$

$$= \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{DR} \cdot \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{DR} \cdot \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RQ} \cdot \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RQ} \cdot \overrightarrow{QR}$$

$$= \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{DR} + \overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{RQ}$$

$$= (5 - x)(-x) + 5x - x^2$$

$$= 0$$

∴  $\langle \overrightarrow{PR} \rangle, \langle \overrightarrow{CQ} \rangle$  متعامدان.

$$(3) \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})$$

$$= MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$$

$$= MI^2 + \overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}) - a^2$$

$$= MI^2 - a^2$$

$$(4) 2\vec{u} = \vec{w}$$

$$\vec{v} + 2\vec{u} = -2\vec{u}$$

$$\vec{v} = -4\vec{u}$$

∴  $\vec{u}, \vec{v}$  الاتجاه نفسه.

(5) فليكن  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$  فنحصل على:

$$\langle \overrightarrow{AC} \rangle = \langle 5, 2 \rangle, \langle \overrightarrow{DE} \rangle = \langle 2.5, -2 \rangle$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DE} = 12.5 - 4 = 8.5$$

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{29}, \|\overrightarrow{DE}\| = \sqrt{10.25}$$

$$\cos\theta = \frac{8.5}{\sqrt{29}\sqrt{10.25}}$$

$$\theta \approx 60^\circ 27' 40.38''$$

المجموعة A تمارين مقالية

- (1) جمع البيانات - عرض البيانات - وصف البيانات وتحليلها - تفسير النتائج واتخاذ قرارات.
- (2) المشاهدة والملاحظة - البريد العادي والإلكتروني - المقابلة الشخصية - الأبحاث التاريخية والأرشيف - مواقع التواصل الاجتماعي - الاستبانة - الهاتف المنزلي أو الجوال - الوثائق والسجلات - قواعد البيانات.
- (3) كمية متقطعة (4) كيفية إسمية
- (5) (a) كمية مستمرة (b) كيفية إسمية
- (c) كمية مستمرة (d) كيفية إسمية
- (6) المجتمع المنتهي هو المجتمع الذي عدد وحداته محدود.
- المجتمع غير المنتهي هو المجتمع الذي عدد وحداته غير محدود.
- (7) (a) علم الإحصاء هو علم أساسي في مجال الرياضيات التطبيقية يهتم بتفسير كمية من البيانات.
- (b) المجتمع الإحصائي هو مجموعة كل المفردات قيد الدراسة.
- (c) الحصر الشامل هو عملية جمع بيانات جميع مفردات المجتمع الإحصائي محل الدراسة.

المجموعة B تمارين موضوعية

- |         |         |         |         |          |
|---------|---------|---------|---------|----------|
| (1) (b) | (2) (a) | (3) (b) | (4) (b) | (5) (b)  |
| (6) (a) | (7) (c) | (8) (b) | (9) (c) | (10) (c) |

المجموعة A تمارين مقالية

- (1) 0.08
- (2) 500
- (3) في العينة العشوائية الطبقيّة مجموعات لا تتقاطع مع بعضها أما في العينة العشوائية البسيطة المفردات متجانسة.

- (4) (a) عينة عشوائية طبقية (b)  $\frac{60}{240} = 0.25$  (c) نعم  
 (d) العمال: 80 ، 4 ، 187 ، 191 ، 8  
 أصحاب العمل: 201 ، 202 ، 217 ، 209 ، 225

### المجموعة B تمارين موضوعية

- (1) (a) (2) (b) (3) (b) (4) (a) (5) (b)  
 (6) (b) (7) (a) (8) (b) (9) (c) (10) (b)

### تمرن 3-6

### أساليب عرض البيانات

### المجموعة A تمارين مقالية

الفئة	يحاوّر ويناقش	يستمتع فقط	يتخذ قرارًا	غير مشارك	المجموع
التكرار	5	7	4	6	22
التكرار النسبي	$\frac{5}{22}$	$\frac{7}{22}$	$\frac{4}{22}$	$\frac{6}{22}$	$\frac{22}{22}$
النسبة المئوية للتكرار	$\frac{5}{22} \times 100\% = 22.72\%$	$\frac{7}{22} \times 100\% = 31.8\%$	$\frac{4}{22} \times 100\% = 18.18\%$	$\frac{6}{22} \times 100\% = 27.27\%$	100%

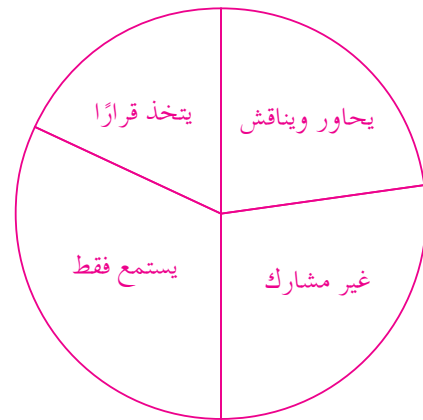
(a) (1)

يحاوّر ويناقش:  $\frac{5}{22} \times 360^\circ \simeq 81.82^\circ$

يستمتع فقط:  $\frac{7}{22} \times 360^\circ \simeq 114.55^\circ$

يتخذ قرارًا:  $\frac{4}{22} \times 360^\circ \simeq 65.45^\circ$

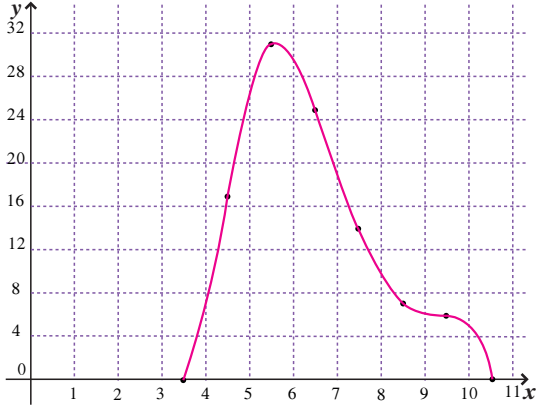
غير مشارك:  $\frac{6}{22} \times 360^\circ \simeq 98.18^\circ$



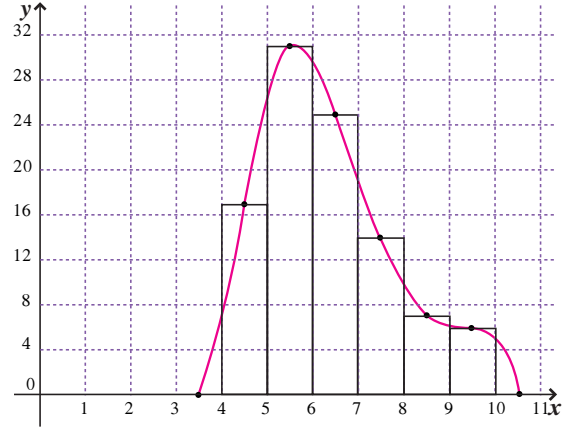
الفئة	4-	5-	6-	7-	8-	9-	المجموع
التكرار	17	31	25	14	7	6	100
مركز الفئة	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5	

(a) (2)

(b)



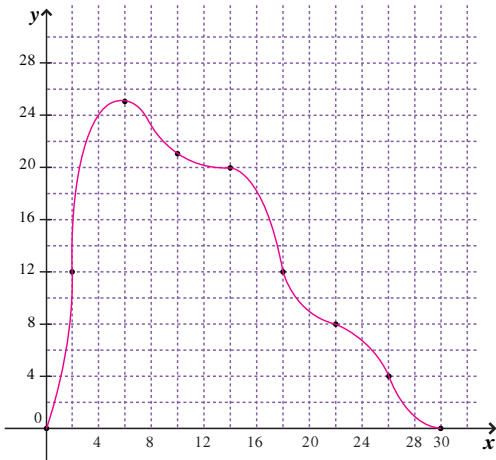
(c)



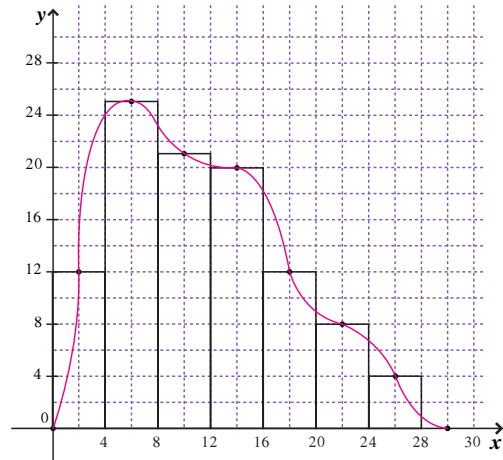
البعد	0-	4-	8-	12-	16-	20-	24-	المجموع
التكرار	12	25	21	20	12	8	4	102
مركز الفئة	2	6	10	14	18	22	26	

(a) (3)

(b)



(c)



### المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)

(2) (b)

(3) (b)

(4) (b)

(5) (b)

(6) (d)

(7) (c)

(8) (c)

(9) (b)

(10) (a)

## المجموعة A تمارين مقالية

(1)  $\sigma = 0$ ، لأن البيانات متساوية والمتوسط الحسابي يساوي كل من البيانات. إذا لا يوجد تشتت للبيانات عن المتوسط الحسابي.

(2) (a)  $\bar{x} = 27.625$

(b) التباين:  $v = 198.11$

$\sigma = 14.075$

(3) (a)  $\bar{x} = \frac{34080}{200} = 170.4$

(b)  $v = \frac{494}{200} = 2.47$

$\sigma = 1.57$

## المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)

(2) (b)

(3) (b)

(4) (a)

(5) (c)

(6) (b)

(7) (a)

(8) (b)

(9) (b)

## المجموعة A تمارين مقالية

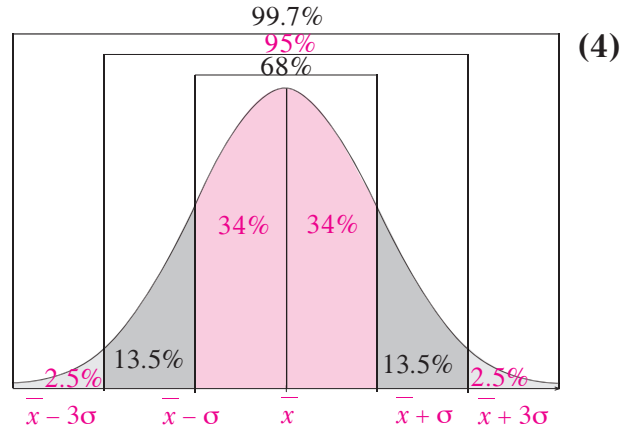
(1) هو توزيع البيانات بشكل متمائل حول المتوسط الحسابي والمنحنى التكراري الذي يمثل هذه البيانات.

(2) \* يكون على شكل ناقوس (جرس) متمائل حول المتوسط الحسابي.

\* تتساوى فيه قيم المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال.

\* ينحدر طرفاه تدريجياً ويمتدان إلى ما لا نهاية ولا يلتقيان مع المحور الأفقي أبداً.

(3) شكل الناقوس أو الجرس.



$$\bar{x} = 1250, \sigma = 225 \quad (5)$$

(a) حوالي 68% من الأرباح تقع على الفترة  $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$

$$[1025, 1475] = [1250 - 225, 1250 + 225]$$

حوالي 95% من الأرباح تقع على الفترة  $[\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma]$

$$[800, 1700] = [1250 - 450, 1250 + 450]$$

حوالي 99.7% من الأرباح تقع على الفترة  $[\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma]$

$$[575, 1925] = [1250 - 675, 1250 + 675]$$

(b) نلاحظ أن المبلغ 2000 يقع خارج الفترة الأخيرة  $[575, 1925]$  التي تناظر 99.7% من الأرباح. لذلك من غير المتوقع أن تصل أرباح الشركة إلى 2 000 دينار.

$$\bar{x} = 1400, \sigma = 200 \quad (a) \quad (6)$$

حوالي 68% من الأسلاك المعدنية المصنعة تقع على الفترة  $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$

$$[1400 - 200, 1400 + 200] = [1200, 1600]$$

حوالي 95% من الأسلاك المعدنية المصنعة تقع على الفترة  $[\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma]$

$$[1400 - 400, 1400 + 400] = [1000, 1800]$$

حوالي 99.7% من الأسلاك المعدنية المصنعة تقع على الفترة  $[\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma]$

$$[1400 - 600, 1400 + 600] = [800, 2000]$$

(b) نستنتج أن النسبة المئوية هي:  $13.5\% + 34\% + 34\% + 13.5\% + 2.5\% = 97.5\%$

### المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)

(2) (b)

(3) (b)

(4) (a)

(5) (a)

(6) (a)

(7) (a)

(8) (d)



## المجموعة A تمارين مقالية

(1) انحراف، المتوسط الحسابي، الانحراف المعياري.

(2) القيمة المعيارية  $\frac{15-14}{4}$

القيمة المعيارية  $0.25 =$

(3) (a) المتوسط الحسابي:  $\bar{x} = 6$ الانحراف المعياري:  $\sigma \approx 0.9$ 

(b)  $\frac{-1}{0.9} \approx -1.11$  ,  $0$  ,  $\frac{+1}{0.9} \approx 1.11$

(4)  $z_1 = \frac{75-70}{5} = 1$

$z_2 = \frac{80-76}{8} = 0.5$

(5) (a)  $\bar{x}_1 = 15$ ، القيمة المعيارية:  $z_1 = 0$ 

$z_2 = \frac{15-12}{2.23} \approx 1.345$  ،  $\sigma_2 \approx 2.23$  ،  $\bar{x}_2 = 12$

(b) في مادة الكيمياء.

## المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)

(2) (b)

(3) (a)

(4) (a)

(5) (b)

(6) (c)

(7) (d)

(8) (b)

## اختبار الوحدة السادسة

- (1) (a) كلا، لأننا لا نستطيع سحب كمية الموجودة في جسم هذا الشخص.  
 (b) نعم، نستطيع إيجاد أوزان كل طلاب الصف وحساب المتوسط الحسابي.

875 (a) (2)

الفئة A : 375 (b)

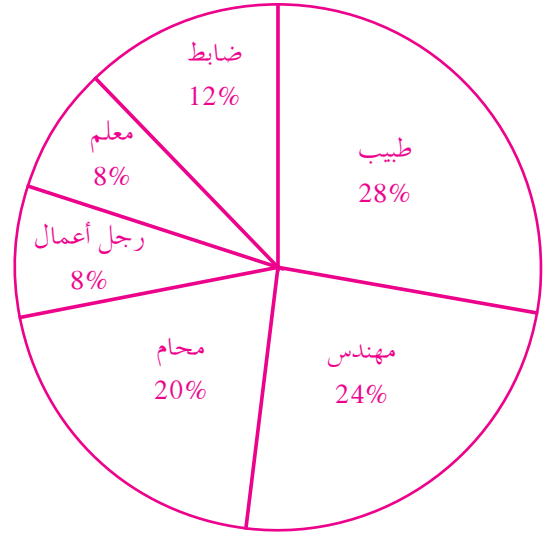
الفئة B : 375

الفئة C : 125

1250 (3)

(a) (4)

المهنة	معلم	ضابط	مهندس	طبيب	محام	رجل أعمال	المجموع
التكرار	2	3	6	7	5	2	25
التكرار النسبي	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{25}{25}$
النسبة المئوية للتكرار (المئوي)	$\frac{2}{25} \times 100\% = 8\%$	$\frac{3}{25} \times 100\% = 12\%$	$\frac{6}{25} \times 100\% = 24\%$	$\frac{7}{25} \times 100\% = 28\%$	$\frac{5}{25} \times 100\% = 20\%$	$\frac{2}{25} \times 100\% = 8\%$	100%



(5)  $\bar{x} = 6$

$v = 4$

$\sigma = 2$

$\sigma = 175$  ،  $\bar{x} = 850$  (a) (6)

حوالي 68% من الأرباح تقع على الفترة  $[\bar{x} - \sigma , \bar{x} + \sigma]$

$[850 - 175 , 850 + 175] = [675 , 1025]$

حوالي 95% من الأرباح تقع على الفترة  $[\bar{x} - 2\sigma , \bar{x} + 2\sigma]$

$[850 - 350 , 850 + 350] = [500 , 1200]$

حوالي 99.7% من الأرباح تقع على الفترة  $[\bar{x} - 3\sigma , \bar{x} + 3\sigma]$

$[850 - 525 , 850 + 525] = [325 , 1375]$

(b) نلاحظ أن المبلغ 300 دينار لا يقع ضمن الفترة  $[325 , 1375]$  التي تناظر 99.7% لذلك لن تنخفض الأرباح إلى 300.

(c) نلاحظ أن المبلغ 1 400 يقع خارج الفترة  $[325 , 1375]$  التي تناظر 99.7% لذلك من غير المتوقع الوصول إلى ربح 1 400 دينار.

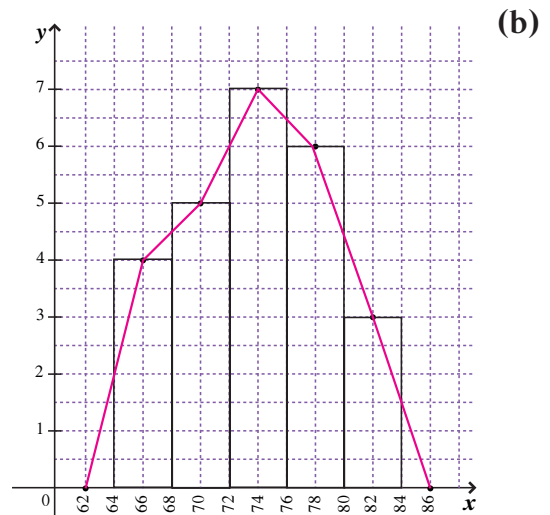
(7) القيمة المعيارية في الرياضيات:  $z_M = \frac{15 - 13}{2.5} = 0.8$

القيمة المعيارية في الفيزياء:  $z_p = \frac{13 - 11.5}{2.4} = 0.625$

لذلك الدرجة 15 في الرياضيات أفضل من 13 في الفيزياء.

(a) (8)

الفئة	64-	68-	72-	76-	80-	المجموع
التكرار	4	5	7	6	3	25
مركز الفئة	66	70	74	78	82	



## تمارين إثرائية

- (1) (a) لا، لأن عدد الحشرات في الكويت لا يمكن تعداده.  
 (b) نعم، لأن عدد العاملين في أحد المصارف يمكن معرفته.  
 (2) (a) موظفين في إحدى الشركات - الموظف - وزن الفرد.  
 (b) الأبنية في دولة الكويت - المبنى - ارتفاع المبنى.  
 (3) يبدأ الطالب من جدول الأعداد العشوائية انطلاقاً من الصف الأول والعمود الأول فيجد الأعداد التالية:

281، 010، 592، 201، 062، 462، 468، 590، 543، 412، 209، 085، 315، 027، 227.

وبذلك يصبح لدينا الموظفين الذين أرقامهم واردة أعلاه.

$$(4) \text{ كسر المعاينة: } \frac{21}{420} = 0.05$$

حجم عينة المهندسين:  $80 \times 0.05 = 4$

حجم عينة اختصاصي المختبر:  $120 \times 0.05 = 6$

حجم عينة العمال:  $220 \times 0.05 = 11$

باستخدام جدول الأعداد العشوائية نجد:

المهندسون حاملو الأرقام: 201، 209، 227، 212

اختصاصيو المختبر حاملو الأرقام: 412، 315، 360، 359، 414، 415

العمال حاملو الأرقام: 672، 660، 590، 630، 543، 665، 712، 620، 651، 531، 645

- (5) العدد في الصف الثالث والعمود الثالث أصغر من 9 هو 7 والعينة المنتظمة مكونة من الطلاب :

7، 16، 25، 34، 43، 52، 61، 70، 79، 88، 97، 106، 115، 124، 133، 142

$$(6) \text{ نجد كسر المعاينة: } \frac{40}{360} = \frac{1}{9}$$

نوجد حجم كل عينة بسيطة:

$$\text{حجم ذكور/دوام كامل: } \frac{1}{9} \times 180 = 20$$

$$\text{حجم ذكور/دوام جزئي: } \frac{1}{9} \times 36 = 4$$

$$\text{حجم إناث/دوام كامل: } \frac{1}{9} \times 18 = 2$$

$$\text{حجم إناث/دوام جزئي: } \frac{1}{9} \times 126 = 14$$

من ثمّ نستخدم جدول الأعداد العشوائية لسحب عينة من كل فئة.

نأخذ الصف الأول والعمود الأول

ذكور/ دوام كامل حاملو الأرقام: 010، 062، 085، 027، 068، 056، 135، 096، 085، 154، 121، 132، ...

ذكور/ دوام جزئي حاملو الأرقام: 201، 209، 212، 181

إناث/ دوام كامل حاملو الأرقام: 227، 234

إناث/ دوام جزئي حاملو الأرقام: 281، 315، 360، 359، 280، 274، 303، 276، 340، ...



تطرح سلسلة الرّياضيّات مواقف حياتيّة يومية، وتؤمّن فرص تعلّم كثيرة. فهي تعزّز المهارات الأساسيّة، والحسّ العدديّ، وحلّ المسائل، والجهوزيّة لدراسة الجبر، والهندسة، وتنمّي مهارتيّ التعبير الشّفهيّ والكتابيّ ومهارات التفكير في الرّياضيّات. وهي تتكامل مع الموادّ الدراسيّة الأخرى فتكون جزءاً من ثقافة شاملة متماسكة تحفّز الطّلاب على اختلاف قدراتهم وتشجّعهم على حبّ المعرفة.

تتكوّن السلسلة من:

- كتاب الطالب
- كتاب المعلم
- كراسة التمارين
- كراسة التمارين مع الإجابات

ISBN 978-614-406-478-8



9

7 8 6 1 4 4 0 6 4 7 8 8

