أوراق عمل
رياضيـــات

الصف الثاني عشر علمي ج ١

أ. فرج مبروك فرج

Welcome

فرج مبروك فرج ـ رئيس قسم الرياضيات
ت : ٩٩٧١٦٢١٣

الإشتقـــــــــــــــــــــــاق

معدلات التغير وخطوط المماس

Rates of Change and Tangent Lines

ويمكن أن نعرف السرعة اللحظية v عند الزمن t_1 كالتالي:

$$v = \lim_{h\to 0} \overline{v} = \lim_{h\to 0} \frac{d(t_1+h)-d(t_1)}{h}$$

بشرط أن تكون النهاية موجودة.

متوسط معدل التغير للدالة y:

Y= f(x)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

نحدّد ميل المماس للمنحنى عند النقطة $P(a\,,f(a))$ بالقيمة m إن وجد:

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

مثال : باستخدام التعريف .

أوجد ميل المماس للقطع المكافئ $y=(x-2)^2+2$ عند النقطة $A(1\,,3)$

في التمارين (1–4)، أوجد ميل المماس في كلّ مما يلي عند النقاط المبينة:

(1) $f(x) = \frac{1}{x-1} \quad , \quad x = 2$

(2) $f(x) = x^2 - 4x \quad , \quad x = 1$

(3) $f(x) = \frac{x+2}{x-3} \quad , \quad x = 2$

(4) $f(x) = 4 - x^2 \quad , \quad x = 1$

فرج مبروك فرج
رئيس قسم الرياضيات
ت. ٩٩٧١٦٢١٣

تعريف المشتقّة Definition of Derivative

تعلّمت أنّ ميل منحنى الدالة f عند نقطة إحداثيها السينيّ $x = a$ هو:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

في حال وجود هذه النهاية فإنّها تسمّى **مشتقّة الدّالة f عند a**

تعريف: المشتقّة عند نقطة Derivative at a Point

مشتقّة الدالة f عند $x = a$ هي $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شرط وجود النهاية.

من التعريف السابق يمكننا القول أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x = a$ إذا كانت النهاية موجودة ويرمز لذلك بالرمز:

$$f'(a) \quad \text{أو} \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$$

أما إذا كانت النهاية غير موجودة عند $x = a$ نقول إن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x = a$ ($f'(a)$ غير موجودة)

فرج مبروك فرج
رئيس قسم الرياضيات
ت. ٩٩٧١٦٢١٣

تعريف (بديل): المشتقّة عند نقطة

مشتقّة دالّة f عند $x = a$ هي :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

شرط وجود النهاية.

ملاحظة: التعريف البديل للمشتقة هو صورة أخرى لتعريف المشتقة.

مثـال : باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة f: $f(x) = 3x^2$ عند $x = -2$

تماريـــــــــــــــــــــــــن

(1) استخدم التعريف: $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ لإيجاد مشتقّة الدالّة f: $f(x) = \frac{3}{x}$ عند $x = 3$

(2) استخدم التعريف: $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ لإيجاد مشتقّة الدالّة f: $f(x) = 2x^3$ عند $x = 1$

فرج مبروك فرج
رئيس قسـم الرياضيات
ت . ٩٩٧١٦٢١٣

مثال أوجد مشتقة الدالة f : $f(x)=\frac{1}{x}$ عند $b \neq 0$, $x=b$

المشتقّة من جهة واحدة One–Sided Derivative

فرج مبروك فرج
رئيس قسم الرياضيات
ت. ٩٩٧١٦٢١٣

مشتقة الدالة f من اليمين يرمز لها بالرمز $f'_{+}(a)$ وهي:

$$\lim_{h\to 0^{+}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{(إن وجدت)}$$

ومشتقة الدالة f من اليسار يرمز لها بالرمز $f'_{-}(a)$ وهي:

$$\lim_{h\to 0^{-}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{(إن وجدت)}$$

إن الدالة لها مشتقة عند نقطة إذا وفقط إذا كانت المشتقتان لجهة اليمين ولجهة اليسار موجودتين ومتساويتين عند تلك النقطة.

مثال لتكن f : $f(x) = |x-2|$ ، ابحث قابلية الدالة f للاشتقاق عند $x = 2$.

مثال

بيّن أن الدالة f لها مشتقة لجهة اليمين ومشتقة لجهة اليسار عند $x = 1$، لكن ليس لها مشتقة عند $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad x \le 1 \\ x & , \quad x > 1 \end{cases}$$

فرج مبروك فرج
رئيس قسم الرياضيات
ت. ٩٩٧١٦٢١٣

فرج مبروك فرج
رئيس قسم الرياضيات
ت. ٩٩٧١٦٢١٣

مثال

لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & , \quad x\le -1\\ \dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2} & , \quad x>-1\end{cases}$$

بيّن أن للدالة f مشتقّة لجهة اليمين مساوية للمشتقّة لجهّة اليسار عند $x=-1$.

مثال

لتكن الدالة f:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4} & , \quad x\le 1\\ \sqrt{x} & , \quad x>1\end{cases}$$

بيّن أن للدالة f مشتقة لجهة اليمين مساوية للمشتقة لجهة اليسار عند $x=1$.

فرج مبروك فرج
رئيس قسم الرياضيات
ت. ٩٩٧١٦٢١٣

مثال

لتكن f:
$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x & : \quad x\le 1 \\ 4x-1 & : \quad x>1 \end{cases}$$

ابحث قابلية اشتقاق الدالة f عند $x=1$.

فرج مبروك فرج
رئيس قسم الرياضيات
ت. ٩٩٧١٦٢١٣

مثال

لتكن الدالة g : $g(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & , \quad x\le 0\\ 2x+1 & , \quad x>0\end{cases}$. أوجد $g'(0)$.

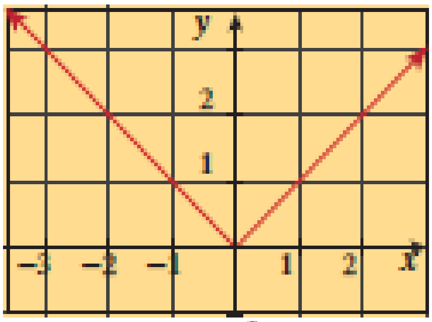
متى تكون $f'(a)$ غير موجودة؟

الدالة f لن يكون لها مشتقة عند نقطة $P(a, f(a))$ إذا كانت $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ غير موجودة.

وتوضح الأشكال التالية أربع حالات تكون فيها هذه النهاية غير موجودة.

a ركنًا (Corner): تكون المشتقّتان من جهة اليمين ومن جهة اليسار عند التقاء الشعاعين غير متساويتين.

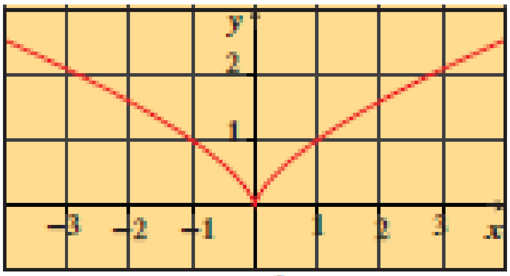
مثال: $f(x) = |x|$



شكل (3)

يوجد ركن عند $x = 0$، $f'(0)$ غير موجودة

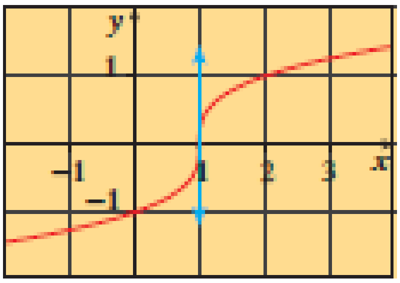
b نابًا (Cusp): يكون ميل المماس للمنحنى عند نقطة تقاطع محددة يقترب من ∞ في إحدى الجهات ويقترب من $-\infty$ في الجهة الثانية ويوجد مماس رأسي عندها. مثال: $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$



شكل (4)

يوجد ناب عند $x = 0$، $f'(0)$ غير موجودة ويوجد مماس رأسي عندها

c مماسًا رأسيًا: يكون المماس للمنحنى عند نقطة محددة رأسيًا.

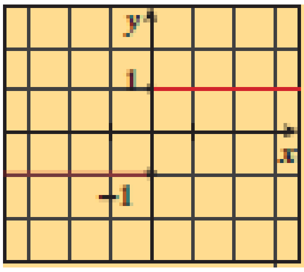


شكل (5)

يوجد مماس رأسي عند $x = 1$، $f'(1)$ غير موجودة

d عدم اتصال: تكون المشتقّة من جهة واحدة أو كلٍّ من الجهتين غير موجودة. مثال:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & ,x < 0 \\ 1 & ,x \geq 0 \end{cases}$$



شكل (6)

يوجد عدم اتصال عند $x = 0$، $f'(0)$ غير موجودة

سوف نثبت بعد ذلك نظرية تقول بأنه ينبغي أن تكون الدالة متصلة عند $x = a$ كشرط لدراسة قابلية الاشتقاق عند $x = a$.
وسوف تمدنا هذه النظرية بطريقة سريعة وسهلة للتحقق من أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x = a$

الاشتقاق والاتصال Differentiability and Continuity

نبدأ هذا الجزء بإلقاء نظرة على الطرائق العاديّة التي يمكن أن تفشل في أن تكون فيها للدالّة مشتقّة عند نقطة.

كأحد الأمثلة، قد أظهرنا بيانيًّا أنّ عدم اتصال الدالة عند نقطة يسبّب عدم وجود مشتقّة للدالة عند هذه النقطة.

وعليه **إذا كانت الدالة f ليست متصلة عند نقطة $(a\ ,\ f(a))$ فإنها غير قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.**

نظريّة الاشتقاق والاتصال

إذا كانت الدّالة f لها مشتقّة عند نقطة، فإنّها تكون متّصلة عند هذه النقطة.

البرهان:

لتكن النقطة $(a\ ,\ f(a))$ تنتمي لبيان الدالة f

علينا أن نبيّن أنّ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ أو مكافئًا لذلك أنّ: $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-f(a)] = 0$

باستخدام قاعدة حاصل ضرب النهايات (وملاحظة أنّ $x-a \neq 0$)،

نستطيع أن نكتب:

$$\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)] = \lim_{x\to a}\left[(x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]$$

$$= \lim_{x\to a}(x-a)\cdot\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$= 0\cdot f'(a)$$ حيث $f'(a)$ موجودة

$$= 0$$

معكوس النظريّة ليس صحيحًا دائمًا كما رأينا سابقًا:

فالدالّة المتصلة قد يكون لها ركن أو ناب أو مماسّ رأسي، ومن ثمّ لا تكون قابلة للاشتقاق عند نقطة معيّنة.

مثال

لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad x \le 1 \\ 3x + k & , \quad x > 1 \end{cases}$. قابلة للاشتقاق عند $x = 1$، فأوجد قيمة k.

فرج مبروك فرج
رئيس قسم الرياضيات
ت. ٩٩٧١٦٢١٣

مثال

لتكن الدالة f: $f(x)=\begin{cases}3-x & x<1\\ ax^2+bx & x\geq 1\end{cases}$ حيث a, b ثابتان.

(a) إذا كانت f متصلة لكل قيم x، فما العلاقة بين a و b؟

(b) أوجد القيم الوحيدة لكل من a, b التي تجعل f متصلة وقابلة للاشتقاق.

ملاحظات:

- إذا كانت الدالة $y=f(x)$ قابلة للاشتقاق عند كل x : $x\in(a,b)$، فإننا نقول إن الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة (a,b).
- إذا كانت الدالة $y=f(x)$ قابلة للاشتقاق عند كل نقطة في الفترة $(-\infty,\infty)$، فإننا نقول إن الدالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
- إذا وضعنا x بدلًا من a في تعريف المشتقة عند النقطة نحصل على $f'(x)$ حيث $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$
  ويمكن أن نرمز للمشتقة بأحد الرموز التالية: y', $f'(x)$, $\dfrac{d}{dx}(f(x))$, $\dfrac{dy}{dx}$
- لأيّ دالة f تكون f' دالة أخرى مجالها مكوّن من جميع قيم x التي يكون للدالة مشتقة عندها أي $(D_{f'}\subseteq D_f)$ أي أن f' دالة مستخلصة من الدالة f.

مثال لتكن f : $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & , \quad x\le 2 \\ 3x-2 & , \quad x>2 \end{cases}$ ، ابحث قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x=2$.

فرج مبروك فرج
رئيس قسم الرياضيات
ت. ٩٩٧١٦٢١٣

مثال لتكن $f(x)=x^2+2$. أوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة.

فرج مبروك فرج
رئيس قسم الرياضيات
ت. ٩٩٧١٦٢١٣

مثال

لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases}-x-1 : x>\frac{-1}{3}\\ 5x+1 : x\leqslant\frac{-1}{3}\end{cases}$$

بيّن أنّ الدالة f متصلة وغير قابلة للاشتقاق عند $x=-\frac{1}{3}$

مثال

لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases} x^2-x-2 & : \quad x\leqslant 2 \\ -x^2+7x-10 & : \quad x>2 \end{cases}$

بيّن أن الدالة f متّصلة عند $x=2$ وادرس قابلية الاشتقاق عندها.

الحل:

فرج مبروك فرج
رئيس قسم الرياضيات
ت. ٩٩٧١٦٢١٣

مثال

ادرس اتصال الدالة f عند $x = 1$ وقابلية اشتقاقها عند هذه النقطة حيث:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2+1} & : x \leqslant 1 \\ 2x - 1 & : x > 1 \end{cases}$$

فرج مبروك فرج
رئيس قسم الرياضيات
ت. ٩٩٧١٦٢١٣

مثال

لتكن الدالة f :
$$f(x)=\begin{cases} x^2+x & : \ x\leqslant -1 \\ x^2-x-2 & : \ x>-1 \end{cases}$$

أوجد إن أمكن $f'(-1)$.

قواعد الاشتقاق

Rules of Derivative

قاعدة (1): مشتقة دالة ثابتة **Derivative of a Constant Function**

إذا كانت $f(x) = k$ حيث k عدد ثابت فإن $f'(x) = 0$ لجميع قيم x الحقيقية.

يمكننا القول بأن مشتقة أيّ دالّة ثابتة تساوي صفرًا.

قاعدة (2): مشتقة الدالة $f(x) = x$

Derivative of the Function $f(x) = x$

إذا كانت $f(x) = x$ فإن $f'(x) = 1$

لجميع قيم x الحقيقية

قاعدة (3): قاعدة القوى للأسس الصحيحة الموجبة للمتغيّر x

Power Rule for Positive Integer Powers of x

إذا كان $f(x) = x^n$ حيث n عدد صحيح موجب $n \neq 1$ فإنّ:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n\,x^{n-1}$$

أي أن: $f'(x) = nx^{n-1}$

قاعدة (4): قاعدة الضرب بعدد ثابت **The Constant Multiple Rule**

إذا كانت f دالة في x قابلة للاشتقاق وكان k عددًا ثابتًا فإنّ:

$$\frac{d}{dx}(kf(x)) = k\frac{d}{dx}\,f(x)$$

أي أن: $(kf(x))' = k\,f'(x)$

مشتقة ضرب دالة قابلة للاشتقاق في ثابت هو مشتقة هذه الدالة مضروبة في الثابت.

The Sum and Difference Rule — قاعدة (5): قاعدة الجمع والطرح

إذا كانت g , f دالّتين في x قابلتين للاشتقاق، فإنّ مجموعهما والفرق بينهما يكونان قابلين للاشتقاق عند كلّ نقطة تكون عندها كلّ من g , f قابلة للاشتقاق.

$$\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) \pm \frac{d}{dx}(g(x))$$

أي أن: $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

The Product Rule — قاعدة (6): اشتقاق ضرب دالتين

ضرب دالّتين g , f في x قابلتين للاشتقاق يكون قابلًا للاشتقاق بحيث:

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f(x) \cdot \frac{d}{dx}(g(x)) + g(x) \cdot \frac{d}{dx}(f(x))$$

أي أن: $(f(x) \cdot g(x))' = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$

The Quotient Rule — قاعدة (7): قاعدة القسمة

لتكن g , f دالّتين في x قابلتين للاشتقاق حيث $g(x) \neq 0$ فإن:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x) \cdot \frac{d}{dx} f(x) - f(x) \cdot \frac{d}{dx} g(x)}{(g(x))^2}$$

أي أن: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

مشتقة قسمة دالتين = $\dfrac{\text{دالة المقام} \times \text{مشتقة دالة البسط} - \text{دالة البسط} \times \text{مشتقة دالة المقام}}{\text{مربع دالة المقام}}$

يمكننا إيجاد ميل المماس لمنحنى الدالة f عند النقطة $(a, f(a))$ عن طريق إيجاد المشتقة عند هذه النقطة. وتكون معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$

والمستقيم العمودي (الناظم) على منحنى الدالة عند النقطة $(a, f(a))$ هو المستقيم العمودي على مماس المنحنى عند تلك النقطة ومعادلته:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

أمثلة على قواعد الاشتقاق

(١) أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث $y = 5x^3 - 4x^2 + 6$ (٢) أوجد $\frac{dx}{dy}$ $y = x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 15$

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يلي :

(1) $y = 4x^{-2} - 8x + 1$

(2) $f(x) = (x^2 - 5x + 6)(x^3 + 2x^2 + 1)$

(3) $f(x) = (2x^5 + 4)(5 - x^2)$

(4) لتكن $y = \frac{x^2 + 3}{x}$، أوجد $\frac{dy}{dx}$:

(a) باستخدام قاعدة القسمة.

(b) بقسمة حدود البسط على المقام أوّلًا ثم إجراء الاشتقاق.

(5) $y = \frac{x^2}{1 - x^3}$

(6) $y = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$

(7) بفرض أنّ u , v دالّتان في x وقابلتان للاشتقاق عند $x = 0$، وأنّ

$u(0) = 5$, $u'(0) = -3$, $v(0) = -1$, $v'(0) = 2$

أوجد قيم المشتقّات التالية عند $x = 0$

(a) $(uv)'$ **(b)** $\left(\frac{u}{v}\right)'$ **(c)** $\left(\frac{v}{u}\right)'$ **(d)** $(7v - 2u)'$

(٨) أوجد الأجزاء المقطوعة من محوري السينات و الصادات بواسطة مماس منحنى الدالة $y = x^3$ عند النقطة $(-2 , -8)$.

(٩) أوجد معادلة المماس ومعادلة العمودي (الناظم) لمنحنى الدالة $y = \frac{8}{4 + x^2}$ عند النقطة $(2 , 1)$.

(١٠) لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} x - \frac{4}{x} & : \quad x \geqslant 2 \\ x^2 - 4 & : \quad x < 2 \end{cases}$. أوجد $f'(x)$ وعيّن مجالها.

(١١) أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم على منحنى الدالة f حيث $f(x) = \frac{x - 1}{x + 2}$ عند النقطة $(1 , 0)$

نتيجة

إذا كانت g دالة قابلة للاشتقاق وكانت $g(x) \neq 0$ ، k عددًا ثابتًا فإنّ:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{k}{g(x)}\right) = \frac{-k\frac{d}{dx}(g(x))}{(g(x))^2}$$

أي أن:

$$\left(\frac{k}{g(x)}\right)' = \frac{-k\cdot(g'(x))}{(g(x))^2}$$

فرج مبروك فرج
رئيس قسم الرياضيات
ت. ٩٩٧١٦٢١٣

مثال أوجد $f'(x)$ حيث $f(x) = \frac{-4}{x^2+2x+5}$

مثال أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة f : $f(x) = \frac{1}{x^3+3x}$

مثال لتكن: $y = \dfrac{3x^2+7}{8x^2}$ ، أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ عند $x=-1$

قاعدة (9)

إذا كان $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ حيث n , m عددان صحيحان، $n \neq 0$ فإن: $\dfrac{d}{dx}(x^{\frac{m}{n}}) = \dfrac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$

لجميع قيم x التي تكون المشتقة عندها موجودة.

أي أن $(x^{\frac{m}{n}})' = \dfrac{m}{n}(x)^{\frac{m}{n}-1}$

يمكن استنتاج أن: إذا كانت $f(x) = \sqrt{x}$ تكون $f'(x) = (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

مثال أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$

فرج مبروك فرج
رئيس قسم الرياضيات
ت. ٩٩٧١٦٢١٣

تطبيـــــــــــق

أوجد المشتقة إن أمكن لكل من الدوال المتصلة التالية:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & : \quad x \leqslant 2 \\ 4x - 3 & : \quad x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & : \quad x < 1 \\ 2\sqrt{x} & : \quad x \geqslant 1 \end{cases}$

مشتقات الدوال المثلثية

Derivatives of Trigonometric Functions

أولاً: مشتقات الدوال الجيبية

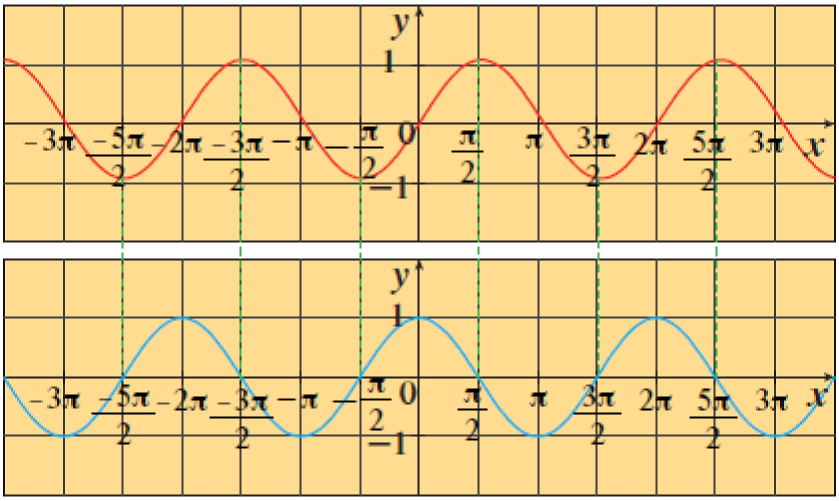
1 مشتقة دالة الجيب هي موجب دالة جيب التمام

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

2 مشتقة دالة جيب التمام هي سالب دالة الجيب

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

قواعد الاشتقاق التي تم دراستها صحيحة للدوال الجيبية.



شكل (1)

لاحظ الشكل (1):

الدالة $f(x) = \sin x$ لها مماسات أفقية عند كل من القيم ...، $\frac{3\pi}{2}$، $\frac{\pi}{2}$، $-\frac{\pi}{2}$، ... وبيان الدالة $f'(x) = \cos x$ يتقاطع مع محور السينيات عند هذه القيم أي أن المشتقة عندها تساوي الصفر.

تذكر:
إذا كان x قياس زاوية بالراديان فإن:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

أمثـلـة

أوجد المشتقات للدوال التالية:

a $h(x) = \cos^2 x$

b $g(x) = \dfrac{x}{\cos x}$

c $y = \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

في التمارين (4–1)، أوجد $\frac{dy}{dx}$

(1) $y = 2\sin x - \tan x$

(2) $y = 4 - x^2 \sin x$

(3) $y = \frac{\cot x}{1 + \cot x}$

(4) $y = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

ثانيًا: مشتقات الدوال المثلثيّة الأخرى

الدالتان $f(x) = \sin x \ , \ g(x) = \cos x$ دالّتان قابلتان للاشتقاق، لذا فإن الدوال المثلثية التالية:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad , \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

هي أيضًا دوال قابلة للاشتقاق عند كلّ قيمة للمتغيّر x تكون معرّفة عندها وتعطى مشتقاتها بالقواعد التالية:

1. $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$
2. $\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$
3. $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$
4. $\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$

مثـــال أوجد مشتقة الدالة $y = \frac{\tan x}{x}$ عند $x = \frac{\pi}{4}$.

مثــال أثبت أن منحنى كل من الدالتين $y = \frac{1}{\cos x}$, $y = \cos x$ له مماس أفقيّ عند $x = 0$

فرج مبروك فرج
رئيس قسم الرياضيات
ت. ٩٩٧١٦٢١٣

مثـــال

لتكن: $y = 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sin x} + \cot x$، أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة عند $P\left(\frac{\pi}{4}\ ,\ 4\right)$

تذكر:

$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

$\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$

مثـــال أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \sec x$ عند النقطة $F\left(\frac{\pi}{3}\ ,\ 2\right)$

فرج مبروك فرج
رئيس قسـم الرياضيات
ت. ٩٩٧١٦٢١٣

تطبيـــق

أوجد مشتقات الدوال التالية:

a) $f(x) = \dfrac{1 + \tan x}{\tan x}$

b) $g(x) = \sec + \csc x$

c) $h(x) = \dfrac{\sec x}{\csc x}$

مثـــال أوجد النقط على بيان المنحنى $f(x) = \dfrac{5-x}{6-x}$ التي يمرّ المماس عندها خلال نقطة الأصل.

فرج مبروك فرج
رئيس قسـم الرياضيات
ت. ٩٩٧١٦٢١٣

قاعدة السلسلة

Chain Rule

Chain Rule قاعدة السلسلة (التسلسل)

إذا كانت الدالّة f قابلة للاشتقاق عند $g(x)$، الدالة g قابلة للاشتقاق عند x، فإن الدالة المركبّة

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

تكون قابلة للاشتقاق عند x ، ويكون:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

أي يمكننا القول إن مشتقّة الدالة المركّبة $f(g(x))$ عند x هي مشتقّة الدّالة f عند $g(x)$ مضروبة في مشتقّة الدالّة g عند x.

مثـال

لتكن: $g(x) = x^{13}$, $f(x) = -2x^3 + 4$ أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f \circ g)'(x)$ ، $(g \circ f)'(0)$

فرج مبروك فرج
رئيس قسم الرياضيات
ت. ٩٩٧١٦٢١٣

مثال

لتكن: $g(x)=\sqrt{x}$ ، $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$

أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f\circ g)'(1)$

في التمارين $(1-3)$، أوجد $(f\circ g)'(x)$.

(1) $f(x)=2x+1$, $g(x)=3x^2$

(2) $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$, $g(x)=x^2+1$

(3) $f(x)=5x^2-1$, $g(x)=x^{15}$

في التمارين (4–6)، أوجد $(f \circ g)'$ عند القيم المعطاة لـ x..

(4) $f(x) = x^5 + 1 \quad , \quad g(x) = \sqrt{x} \quad , \quad x = 1$

(5) $f(x) = x + \dfrac{1}{\cos^2 x} \quad , \quad g(x) = \pi x \quad , \quad x = \dfrac{1}{4}$

(6) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1} \quad , \quad g(x) = 10x^2 + x + 1 \quad , \quad x = 0$

صورة أخرى لقاعدة السلسلة

إذا كانت $y = f(u)$, $u = g(x)$ فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

يتم حسابها عند $u = g(x)$

فرج مبروك فرج
رئيس قسم الرياضيات
ت. ٩٩٧١٦٢١٣

مثـــال

لتكن: $y = u^2 + 4u - 3$, $u = 2x^3 + x$

أوجد: $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل.

مثـــال

أوجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل.

(a) $y = \cos u \quad , \quad u = 6x + 2$

(b) $y = 5u^3 + 4 \quad , \quad u = 3x^2 + 1$

مثـــال

أوجد مشتقة $y = \sin(x^2 + x)$ بالنسبة إلى المتغيّر x.

قاعدة

$\frac{d}{dx}(\cos f(x)) = -\sin f(x) \cdot f'(x)$ ويمكن تعميمها على الدوال المثلثية الأخرى.

فرج مبروك فرج
رئيس قسم الرياضيات
ت. ٩٩٧١٦٢١٣

مثــال أوجد مشتقة الدالة: $f(x) = \cos^5 x$ باستخدام قاعدة السلسلة .

مثــال أوجد $\frac{ds}{dt}$ ، حيث $s = \sin\left(\frac{3\pi}{2}t\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{4}t\right)$

مثــال أوجد $\frac{dy}{dx}$ يما يلي :

(١) $y = \tan(2x - x^3)$ (2) $y = \sin(3x + 1)$ (3) $y = (\tan x + \sec x)^2$

مثـــال أوجد $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

(1) $y = \sin^2(3x-2)$ **(2)** $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$ **(3)** $y = (1-6x)^{\frac{2}{3}}$

أوجـد فيما يلي :

(a) معادلة المماس على منحنى الدالة.

(b) معادلة الخط العموديّ على المماس في النقاط المعطاة على منحنى كل دالة مما يلي.

$f(x)=\sqrt{x^2+5}$, $(2\ ,\ 3)$ عند

$g(x)=(x^3+1)^8$, $(0\ ,\ 1)$ عند

Chain Rule Powers قاعدة سلسلة القوى

قاعدة سلسلة القوى

إذا كانت $f(x)$ قابلة للاشتقاق على مجالها وكان n عددًا نسبيًا فإن:

$$\frac{d}{dx}(f(x))^n = n(f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$$

فرج مبروك فرج
رئيس قسم الرياضيات
ت. ٩٩٧١٦٢١٣

مثال لتكن: $y = \sqrt[4]{(2x^4 - 3x^2 + 4)^3}$ ، أوجد: y'

مثال بيّن أن ميل أي مماس للمنحنى $y = \frac{1}{(-2x-1)^3}$ دائمًا يكون موجبًا حيث $x \neq -\frac{1}{2}$

مثـــال لتكن $y=\sqrt{1+\cos\ x}$ فأوجد ميل المماس لهذا المنحنى

فرج مبروك فرج
رئيس قسم الرياضيات
ت. ٩٩٧١٦٢١٣

المشتقات ذات الرتب العليا والاشتقاق الضمني

Higher Order Derivatives and Implicit Differentiation

أولاً: المشتقات ذات الرتب العليا — Higher Order Derivatives

المشـــتقة الثالثة	المشـــتقة الثانية
$y''' = \frac{d(y'')}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$	$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$

وبصورة عامة إذا كان n عدداً صحيحاً حيث $n > 1$ فإن مشتقة الدالة y من الرتبة n بدلالة x هي على الشكل التالي:

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx}\left(y^{(n-1)}\right) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

مثــال

إذا كانت: $y = 4x^5 - 5x^3 + 7$

فأوجد المشتقات حتى الرتبة الثالثة.

مثــال

لتكن الدالة: $y = \cos x$.

بيّن أن $y^{(4)} + y'' = 0$.

مثـــال

أوجد: $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}$ ، $\frac{d^3y}{dx^3}$

(1) $y = 2x^4 - x^3 + x^2 - 3x$

(2) $y = -x^5 + 2x^3 - 4x + 1$

(3) $y = \frac{3}{x-2}$

(4) $y = \sin 2x$

(5) $y = \cos 4x$

(6) $y = \sin^2 x$

تطبيـــق:

أوجد: $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}$

(7) $y^2 = x^2 + 4x + 2$

(8) $y^2 - 4y = x - 3$

(9) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$

مثــال أوجد A , B في: $y = A\sin x + B\cos x$ حيث $y'' - y = \sin x$.

مثــال أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث $y = \frac{\cos x}{1 + \tan x}$ واكتب معادلة المماس على منحنى الدالة عند $A(0\ ,\ 1)$.

فرج مبروك فرج
رئيس قسم الرياضيات
ت. ٩٩٧١٦٢١٣

مثـــال

إذا كانت $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

فأثبت أن: $4x^2 f''(x) - 3f(x) = 0$

مثـــال

إذا كانت $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$

فأثبت أن: $(1-x^2)f'''(x) - 6xf''(x) - 6f'(x) = 0$

ثانيًا: الاشتقاق الضمني Implicit Derivative

تتمّ عمليّة الاشتقاق الضمنيّ وفق الخطوات التالية على الترتيب:

1. اشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة للمتغير x .
2. تجميع الحدود التي تحتوي $\frac{dy}{dx}$ أو y' في أحد أطراف المعادلة.
3. إخراج $\frac{dy}{dx}$ أو y' كعامل مشترك.
4. كتابة المعادلة على الصورة $\frac{dy}{dx}$ أو y' بدلالة x , y .

فرج مبروك فرج
رئيس قسم الرياضيات
ت. ٩٩٧١٦٢١٣

مثـــال: أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته: $x^2 - y^2 + yx - 1 = 0$ عند $(1,1)$

مثـــال:

أوجد ميل المماس $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ للمنحنى الذي معادلته: $x^2+y^2-2xy=0$ حيث $x \neq y$ عند النقطة $(2,2)$

مثـــال :

للمنحنى الذي معادلته: $y^2+\sqrt{y}+x^2=3$ أوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(1\,,1)$

مثـــال : إذا كانت $y = \sqrt{1-2x}$ فأثبت أن: $yy'' + (y')^2 = 0$

الحل:

لتكن $y = (g \circ h)(x)$ حيث $h(x) = 1 - 2x$ ، $g(x) = \sqrt{x}$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad , \quad h'(x) = -2 \quad , \quad g'(h(x)) = \frac{1}{2\sqrt{1-2x}}$$

$$y' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-2x}} \times (-2)$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-2x}}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$y'' = \frac{0 \times \sqrt{1-2x} - (-1) \times \frac{-1}{\sqrt{1-2x}}}{(\sqrt{1-2x})^2}$$

$$y'' = \frac{\frac{-1}{\sqrt{1-2x}}}{(\sqrt{1-2x})^2}$$

$$= \frac{-1}{(1-2x)\sqrt{1-2x}}$$

$$yy'' + (y')^2 = \sqrt{1-2x} \times \frac{-1}{(1-2x)\sqrt{1-2x}} + \left(\frac{-1}{\sqrt{1-2x}}\right)^2$$

$$= \frac{-1}{1-2x} + \frac{1}{1-2x} = 0$$

مثـــال : إذا كانت $y = x \sin x$

فأثبت أن $y''' + y' + 2\sin x = 0$

مثـــال: لتكن $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ فأثبت أن : $f'''(x)=\dfrac{3!}{(1-x)^4}$

مثـــال: إذا كانت $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

فأثبت أن: $4x^2f''(x)-3\,f(x)=0$

فرج مبروك فرج
رئيس قسم الرياضيات
ت. ٩٩٧١٦٢١٣

مثـــال :

إذا كانت $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

فأثبت أن: $(1-x^2)f'''(x) - 6xf''(x) - 6f'(x) = 0$

تمارين على الاشـتقاق

في التمارين (1–9)، أوجد مشتقّات الدوالّ.

(1) $y = x^5 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x$

(2) $y = 3 - 7x^3 + 3x^7$

(3) $y = 2\sin x \cos x$

(4) $y = \frac{2x+1}{2x-1}$

(5) $s = \cos(1-2t)$

(6) $s = \cot\frac{2}{t}$

(7) $y = \sqrt{x} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

(8) $y = x\sqrt{2x+1}$

(9) $y = \frac{x^2}{\sin(5x)}$

في التمرينين (10–11)، أوجد عند النقطة المبيّنة معادلة:

(a) المماس لمنحنى الدالة.

(b) الخطّ العموديّ على المماس (الناظم).

(10) $y = \sqrt{x^2 - 2x}\ ,\quad x = 3$

(11) $y = 4 + \cot x - \frac{2}{\sin x}\ ,\quad x = \frac{\pi}{2}$

(12) لتكن f: $f(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & , \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$

بيّن أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 1$

في التمارين (13–16)، أوجد: $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}$ ، $\frac{d^3y}{dx^3}$

(13) $y = 3x^4 - 5x^2 + 2x$

(14) $y = \sin 3x$

(15) $y = \cos^2 2x$

(16) $y = (3x-5)(x^2-x)$

في التمرينين (17–18)، أوجد: $\frac{dy}{dx}$

(17) $x^2 - 3y^2 + y = 4$

(18) $x^2 + xy^2 + 2x - 3y = 0$

(19) أوجد معادلة المماس ومعادلة الخطّ العمودي على المماس (الناظم) على منحنى الدالة: $x^2 + 2xy = 3$ عند النقطة $A(1\ ,\ 1)$ على هذا المنحنى.

فرج مبروك فرج
رئيس قسـم الرياضيات
ت. ٩٩٧١٦٢١٣

مسألة إضافية

موقع جسم يتحرك مبيّن في الدالة: $s(t) = 9t^3 - 7t + 3$ وذلك بعد t ثانية حيث $t \geq 0$.

a أوجد المسافة التي قطعها الجسم بعد 3 s.

b أوجد الدالة التي تدل على سرعة الجسم بالنسبة إلى الزمن عند اللحظة t.

c أوجد متوسط السرعة والسرعة اللحظية المتجهة عند $t = 3$.

فرج مبروك فرج
رئيس قسم الرياضيات
ت. ٩٩٧١٦٢١٣

تمـــــارين

في التمارين من 1 إلى 14، أوجد $\frac{dy}{dx}$:

1) $y = 2x^3 - 3x^2 + 2$

2) $y = x^6 - \sqrt[3]{x}$

3) $y = (2x^2 + 1)\sqrt{x + 1}$

4) $y = (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}(x^3 - 2)^{\frac{1}{3}}$

5) $y = \dfrac{x + 1}{x - 2}$

6) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x - 2}{x + 3}}$

7) $y = \dfrac{2}{x - \sqrt{x^2 + 1}}$

8) $y = \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$

9) $y = \sqrt{x - \sqrt{1 - x}}$

10) $y = \sin^2 x^2$

11) $y = \sqrt{1 + \cos x}$

12) $y = \cos\sqrt{1 + x}$

13) $y = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

14) $y = \dfrac{(x^3 - 1)^{\frac{2}{3}}}{(x^4 + 3)^{\frac{1}{2}}}$

في التمارين من 15 إلى 20، أوجد معادلة المماس للمنحنى المعطى عند النقطة المعطاة:

15) $y = x^3 - x + 4$ عند $(1, 4)$

16) $xy^2 - yx^2 = 0$ عند $(1, 1)$

17) $y = \cos\sqrt{x}$ عند $(\pi^2/9, 1/2)$

18) $y = \tan x$ عند $(\pi/4, 1)$

19) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 9}}{x^2 - 6}$ عند $(4, 1/2)$

20) $y = \dfrac{1}{1 + x}$ عند $(1, 1/2)$

فرج مبروك فرج
رئيس قسم الرياضيات
ت. ٩٩٧١٦٢١٣

21) $y = x^2 - 4x + 2$ عند $(1, 1/2)$

22) $y = \dfrac{4}{x+1}$ عند $(2, 4/3)$

23) $y = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)\left(1 + \dfrac{3}{x^2}\right)$ عند $(1, 0)$

24) $y = \dfrac{x}{x - \sqrt{x}}$ عند $(4, 2)$

25) $y = \dfrac{1 + \dfrac{1}{x}}{1 - \dfrac{1}{x}}$ عند $(1/2, 3)$

في التمارين من 26 إلى 30، أوجد المشتقة الأولى والمشتقة الثانية للمعادلة المعطاة.

26) $y = \sin x^2$

27) $y = 8x^{\frac{3}{2}} - 9x^{\frac{4}{3}}$

28) $y = (x-1)(x+1)$

29) $y = x^2 \sin(3x)$

30) $y = (x^2 + 3)\sin(x/3)$

في التمارين من 31 إلى 35، أوجد المشتقة الأولى والمشتقة الثانية للمعادلة المعطاة.

31) $x^4 + 4x^2y^2 = 25$

32) $y \tan x^2 - xy^3 = 15$

33) $\sin y = \cos x$

34) $y + 1 = x \cos y$

35) $5x^2 + 8y^3 = 16\sqrt{x+1}$

36) أوجد النقطة على بيان منحنى الدالة $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ التي يكون عندها المماس عمودياً على المستقيم $4y + x = 1$.

37) أوجد النقطة على بيان منحنى الدالة $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ التي يكون عندها العمودي على المماس موازياً للمستقيم $y + x = 1$.

38) أوجد النقطة على بيان منحنى الدالة $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ التي يكون عندها المماس أفقياً.

39) أوجد النقطة على بيان منحنى الدالة $f(x) = \cos x$، حيث $0 \leq x \leq \pi/2$، التي يكون عندها المماس عمودياً على المستقيم $2x - y + 4 = 0$.

فرج مبروك فرج
رئيس قسم الرياضيات
ت. ٩٩٧١٦٢١٣

تطبيقات على الاشتقاق

Applications on Differentiation

القيم القصوى (العظمى/الصغرى) للدوال

Extreme Values of Functions

تعريف (1): القيم القصوى المطلقة

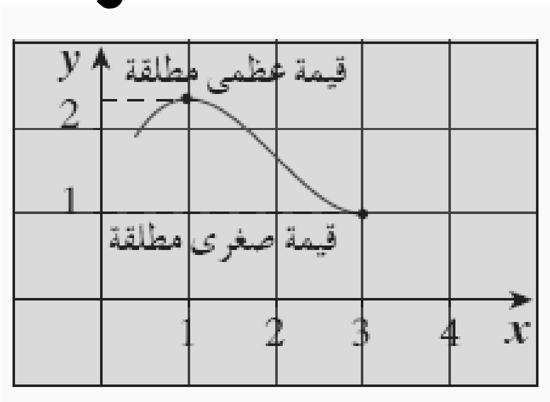
إذا كانت f دالّة مجالها D، $c \in D$، فإن $f(c)$ تسمى:

a قيمة عظمى مطلقة للدالة f على D عندما:

$$f(c) \geqslant f(x) \quad , \quad \forall x \in D_f$$

b قيمة صغرى مطلقة للدالة f على D عندما:

$$f(c) \leqslant f(x) \quad , \quad \forall x \in D_f$$



نظريّة (1): نظرية القيمة القصوى

إذا كانت f دالّة متصلة على فترة مغلقة $[a , b]$ فإن f تكون لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على هذه الفترة.

ملاحظة: لتكن الدالة f معرفة على $[a , b]$ ، $c \in (a , b)$ فإننا نسمي:

1. $(a , f(a))$ ، $(b , f(b))$ نقاط طرفية.
2. $(c , f(c))$ نقطة داخلية.

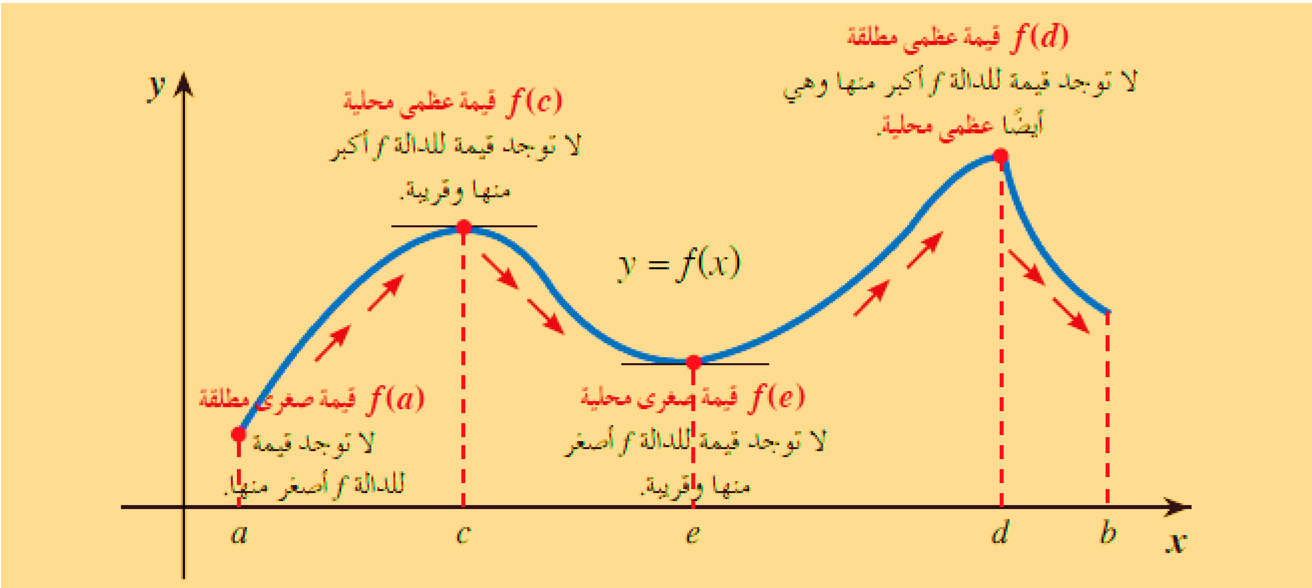
القيم القصوى المحلية — Local Extreme Values

تعريف (2): القيم القصوى المحليّة

لتكن $(c, f(c))$ نقطة داخلية للدالة f، D فترة مفتوحة تحوي c، تكون $f(c)$:

a قيمة عظمى محليّة عند c عندما: $\forall x \in D \quad , \quad f(c) \geqslant f(x)$

b قيمة صغرى محليّة عند c عندما: $\forall x \in D \quad , \quad f(c) \leqslant f(x)$



معلومة:
الدالة الثابتة على الفترة $[a , b]$ لها قيمة قصوى مطلقة واحدة فقط.
أي أن القيمة العظمى تساوي القيمة الصغرى.

تذكر:
تكون $f'(c)$ غير موجودة إذا كان للدالة f عند c ركن أو ناب أو مماس رأسي.

تعريف (3): النقطة الحرجة — Critical Point

النقطة الداخليّة للدالّة f $(c , f(c))$ تسمى نقطة حرجة عندما $f'(c) = 0$ أو $f'(c)$ غير موجودة.

ملاحظة: يسمى العدد c العدد الحرج.

مثـــال : أوجد النقاط الحرجة لكل من الدوال المتصلة التالية:

a $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 10$

b $f(x) = |x - 5|$

مثـــال : أوجد النقط الحرجة للدالة التالية :

$$y = \begin{cases} 3 - x \ , & x < 0 \\ 3 + 2x - x^2 \ , & x \geq 0 \end{cases}$$

مثــــال : أوجد النقط الحرجة للدالة التالية $y = x\sqrt{3-x}$

مثــــال : أوجد النقط الحرجة للدالة التالية $y = x^2(x+2)$

نظريّة (2): القيم القصوى المحليّة (Fermat's Theorem)

إذا كانت للدالّة f قيمة قصوى (عظمى أو صغرى) محليّة عند $x = c$ فإنّ $(c\ ,\ f(c))$ نقطة حرجة.

إذا كانت $(c\ ,\ f(c))$ نقطة حرجة للدالة f فليس بالضرورة أن تكون $f(c)$ قيمة قصوى محلية

خطوات إيجاد القيم القصوى المطلقة للدالة f في الفترة $[a\ ,b]$

تعلمت كيفية إيجاد النقاط القصوى المطلقة للدالة f من خلال التمثيل البياني لها وتطبيق تعريف (1) عليها.

والآن سنعرض خطوات إيجادها جبريًّا على $[a\ ,b]$:

1. إيجاد قيم الدالة عند النقاط الطرفية: $x = b \quad , \quad x = a$
2. إيجاد النقاط الحرجة للدالة f في الفترة $(a\ ,\ b)$ إن وجدت.
3. أكبر قيمة للدالة في الخطوتين 2 , 1 هي قيمة عظمى مطلقة في $[a\ ,\ b]$ وأصغر قيمة للدالة هي قيمة صغرى مطلقة في $[a\ ,\ b]$.

مثـــال : أوجد القيم القصوى المطلقة للدالّة f : $f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[-2\ ,1]$.

مثـــال : أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة: $f(x) = \frac{1}{x^2}$ في الفترة $[1 , 3]$

مثـــال : لتكن f : $a , b \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 1$

وكان للدالة قيمة قصوى محلية عند كل من: $x = 2$, $x = -1$

أوجد قيمة كل من الثابتين b , a

مثـــال : أوجد القيم القصوى المطلقة لكلّ دالّة من الدوال التالية في الفترة المبينة.

(1) $f(x) = x^{\frac{3}{5}}$, $[-2,3]$

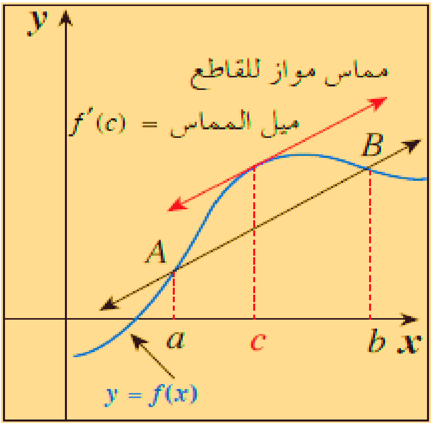
(2) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$, $[-3,0]$

(3) $y = \sqrt{3+2x-x^2}$, $[-1,1]$

(4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

تزايد وتناقص الدوال

Increasing and Decreasing Functions



شكل (1)

نظرية (3): نظرية القيمة المتوسطة

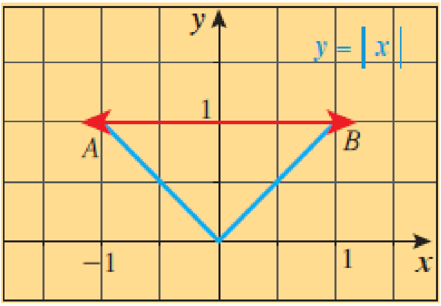
إذا كانت f دالة:

1 متّصلة على الفترة $[a , b]$

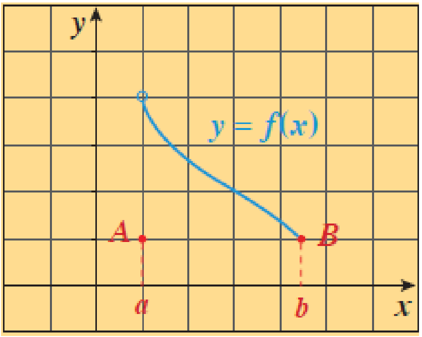
2 قابلة للاشتقاق على الفترة (a , b)

فإنّه يوجد على الأقل $c \in (a , b)$ بحيث $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

شروط نظرية القيمة المتوسطة كافية وليست لازمة، أي أنه إذا توفرت الشروط فبالتأكيد يوجد c الذي تنبئ به النظرية وعدم تحقق أحد الشرطين لا يعني بالضرورة عدم وجود c والملاحظات التالية توضح ذلك.



شكل (2)



شكل (3)

ملاحظات:

1 إذا لم يتحقق أحد شرطي النظرية (3) فإنه قد لا يكون لبيان الدالة مماسّ موازٍ للقاطع $\overleftrightarrow{AB}$.

فمثلًا، $f(x) = |x|$ دالة متصلة على الفترة $[-1 , 1]$

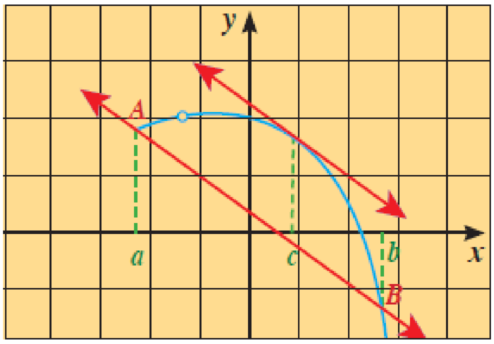
وقابلة للاشتقاق عند كل x تنتمي إلى $(-1,1)$ باستثناء عند $x = 0$.

بيان الدالة ليس له مماسّ يوازي $\overleftrightarrow{AB}$ (شكل 2).

2 يبيّن شكل (3) بيان دالّة f قابلة للاشتقاق عند كلّ x تنتمي إلى الفترة (a , b) ومتّصلة على الفترة $[a , b]$.

ولكن لا يوجد مماس يوازي $\overleftrightarrow{AB}$.

3 بيان الدالة في الشكل (4) يبيّن نقطة انفصال وبالرغم من عدم توفر شرط من شروط نظرية القيمة المتوسطة إلّا أنه يوجد مماس للمنحنى عند c يوازي $\overleftrightarrow{AB}$.



شكل (4)

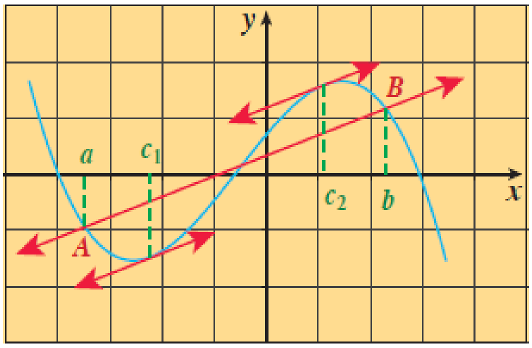
4 يمكن إيجاد أكثر من نقطة واحدة بحيث

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad , \quad c \in (a,b)$$

أي أن المماس عند كل من النقاط

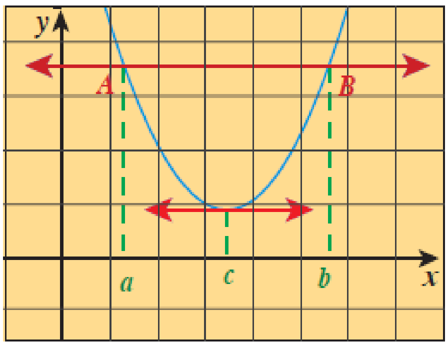
$$(c_1 \, , \, f(c_1)) \; , \; (c_2 \, , \, f(c_2))$$

يوازي $\overleftrightarrow{AB}$ كما في الشكل (5).



شكل (5)

5 في نظرية القيمة المتوسطة إذا كان $f(a) = f(b)$ فإن $f'(c) = 0$ أي أن المماس للمنحنى عند c يوازي القاطع ويوازي محور السينات أي أن المماس أفقي كما في الشكل (6).



شكل (6)

مثــال : بيّن أن الدالّة $f(x) = x^2 + 2x$ تحقّق شروط نظريّة القيمة المتوسّطة على الفترة $[-3\,,1]$، ثم أوجد قيمة c الذي تنبئ به النظرية وفسّر إجابتك.

مثـــال

بيّن أن الدالّة f: $f(x) = x^3 - 3x + 2$ تحقّق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0, 4]$، ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسّر إجابتك.

مثـــال:

بيّن أن الدالة f: $f(x) = x^2 + 2x - 1$ تحقّق شروط نظريّة القيمة المتوسطة على $[0, 1]$. ثمّ أوجد قيمة c التي تنبئ بها النظرية. فسّر إجابتك.

مثـــال :

بيّن أن الدالة f: $f(x) = x + \frac{1}{x}$ تحقّق شروط نظريّة القيمة المتوسطة على $\left[\frac{1}{2} \,,\, 2\right]$. ثمّ أوجد قيمة c التي تنبئ بها النظرية. فسّر إجابتك.

تزايد وتناقص الدوال Increasing and Decreasing Functions

تعريف (4): تزايد وتناقص الدوال

لتكن f دالّة معرّفة على الفترة I. نقول إن:

1. f دالّة متزايدة على I إذا كان: $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad , \quad \forall x_1 \,,\, x_2 \in I$
2. f دالّة متناقصة على I إذا كان: $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad , \quad \forall x_1 \,,\, x_2 \in I$

ملاحظة: تكون الدالة f ثابتة على الفترة I عندما: $\forall x_1 \,,\, x_2 \in I \,,\, f(x_1) = f(x_2)$

الدالّة المطّردة Monotonic Function

الدالّة التي تكون دائمًا متزايدة على فترة أو دائمًا متناقصة على فترة، يقال عنها إنّها دالّة مطّردة على هذه الفترة.

نظرية (4): الدوالّ المتزايدة والدوالّ المتناقصة والدوال الثابتة

لتكن f دالّة قابلة للاشتقاق على (a , b).

1. إذا كانت $f'(x) > 0$ عند كلّ x تنتمي إلى الفترة (a , b)، فإنّ f تتزايد على (a , b).
2. إذا كانت $f'(x) < 0$ عند كلّ x تنتمي إلى الفترة (a , b)، فإنّ f تتناقص على (a , b).
3. إذا كانت $f'(x) = 0$ عند كلّ نقطة تنتمي إلى الفترة (a , b)، فإنّ الدالة f ثابتة على (a , b).

مثـــال : أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f : $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

مثـــال : إذا كانت f : $f(x) = x^3 - 6x$. حدّد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f.

مثـــال : حدّد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f : $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$

ربط المشتقة الأولى f' والمشتقة الثانية f'' بمنحنى الدالة f

Connecting f' and f'' with the Graph of f

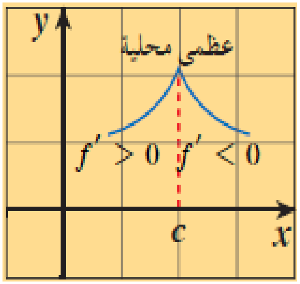
نظريّة (5): اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى المحلية

لتكن f دالّة متصلة على مجالها و كانت $(c, f(c))$ نقطة حرجة.

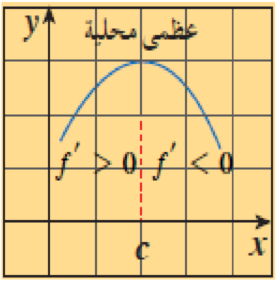
1. إذا كانت إشارة المشتقّة f' تتغيّر من الموجب إلى السالب عند $x = c$ ، فإن f يكون لها قيمة عظمى محلية عند c.
2. إذا تغيرت إشارة f' من السالب إلى الموجب عند $x = c$ ، فإن f يكون لها قيمة صغرى محلّية عند c.
3. إذا لم تتغيّر إشارة f' عند $x = c$ ، فإن f لا يكون لها قيمة قصوى محلّية عند c.

الأشكال التالية توضح بيان دالة f وتوضح نظرية (5) من خلالها.

1

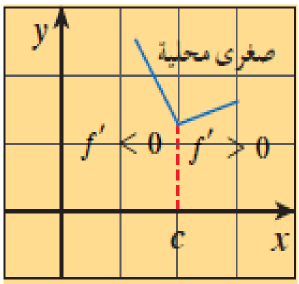


b $f'(c)$ غير موجودة

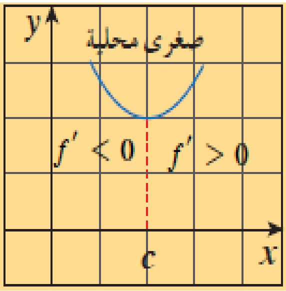


a $f'(c) = 0$

2

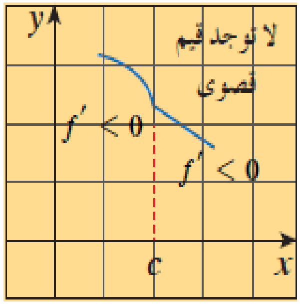


b $f'(c)$ غير موجودة

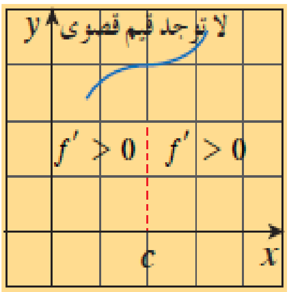


a $f'(c) = 0$

3



b $f'(c)$ غير موجودة



a $f'(c) = 0$

مثـــال :

لتكن الدالّة f : $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$. أوجد كلًّا مما يلي:

a النقاط الحرجة للدالة.

b الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها.

c القيم القصوى المحلية.

مثـــال :

مثـــال

لتكن الدالّة g: $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$

أوجد كلًّا مما يلي:

a النقاط الحرجة.

b الفترات التي تكون الدالّة g متزايدة أو متناقصة عليها.

c القيم القصوى المحليّة.

تعريف (5): التقعّر

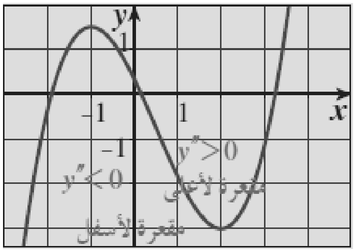
إذا وقع منحنى الدالة أعلى جميع مماساته على فترة I فإنه يكون مقعرًا لأعلى على I.

وإذا وقع منحنى الدالة أسفل جميع مماساته على فترة I فإنه يكون مقعرًا لأسفل على I.

اختبار التقعّر

a إذا كانت $\forall x \in I$ ، $f''(x) > 0$ فإن منحنى الدالة f مقعّرًا لأعلى على I.

b إذا كانت $\forall x \in I$ ، $f''(x) < 0$ فإن منحنى الدالة f مقعّرًا لأسفل على I.

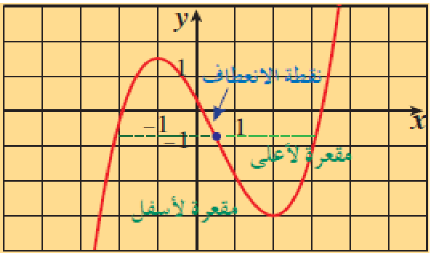


نقطة الانعطاف

Point of Inflection

تعريف (6): نقطة الانعطاف

تسمّى النقطة $(c\,, f(c))$ نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f إذا كانت f دالّة متّصلة عند c، ومنحنى الدالة f يغيّر تقعّره عند هذه النقطة من أعلى إلى أسفل أو من أسفل إلى أعلى.



إذا كانت $(c\,, f(c))$ نقطة انعطاف لبيان الدالة f فإن $f''(c) = 0$ أو $f''(c)$ غير موجودة.

مثـــال أوجد فترات التقعّر ونقطة الانعطاف لمنحنى الدالة f: $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

مثـــال أوجد فترات التقعر ونقاط الانعطاف لكل من الدوال التالية:

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 5$$

$$f(x) = 3x^2 - 2x^3$$

مثـــال

أوجد قيمة كل من الثوابت a, b, c لمنحنى الدالة f: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ الذي يمر بنقطة الأصل وله نقطة حرجة $(4 , 16)$.

مثـــال

أوجد قيمة كل من الثوابت a, b بحيث يكون للدالة f: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ نقطة حرجة عند $x = 2$ ونقطة انعطاف عند $x = \frac{1}{2}$.

نظرية (6): اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية Second Derivative Test for Local Extrema

1 إذا كانت $f'(c) = 0$ ، $f''(c) < 0$ ، فإن f تكون لها قيمة عظمى محليّة عند $x = c$

2 إذا كانت $f'(c) = 0$ ، $f''(c) > 0$ ، فإن f تكون لها قيمة صغرى محليّة عند $x = c$

مثــال

استخدم اختبار المشتقة الثانية لتجد القيم القصوى المحلية للدالة f: $f(x) = 4x^3 - 12x^2$

مثــال

استخدم اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية للدالة: $f(x) = x^4 - 18x^2$

رسم بيان دوال كثيرات الحدود

Graph of Polynomial Functions

فرج مبروك فرج
رئيس قسم الرياضيات
ت. ٩٩٧١٦٢١٣

مثـــال ادرس تغير الدالة $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ وارسم بيانها.

فرج مبروك فرج
رئيس قسـم الرياضيات
ت. ٩٩٧١٦٢١٣

مثـــال ادرس تغير الدالة f : $f(x) = x - 2x^3$ وارسم بيانها.

مثـــال ادرس تغير الدالة f : $f(x) = x^4 - 2x^2$ وارسم بيانها.

فرج مبروك فرج
رئيس قسم الرياضيات
ت. ٩٩٧١٦٢١٣

مثـــال ادرس تغير الدالة: $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$ وارسم بيانها.

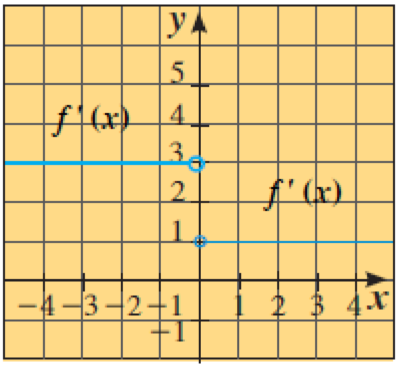
فرج مبروك فرج
رئيس قسـم الرياضيات
ت ٩٩٧١٦٢١٣

مثـــال ارسم صورة تقريبيّة للرسم البيانيّ للدالّة f التي لها الخواصّ التالية:

a $f(0)=1$

b الرسم البيانيّ للدالّة f' موضّح في الشكل المقابل.

c f دالّة متّصلة لكلّ x.



تطبيقات على القيم القصوى

Applications on Extreme Value

مثـــال أوجد عددين مجموعهما 14 وناتج ضربهما أكبر ما يمكن.

فرج مبروك فرج
رئيس قسم الرياضيات
ت. ٩٩٧١٦٢١٣

مثـــال مجموع عددين غير سالبين هو 20، أوجد العددين إذا كان:

(a) مجموع مربعيهما أصغر ما يمكن.

(b) أحد العددين مضافًا إليه الجذر التربيعي للآخر أكبر ما يمكن.

مثـــال أوجد عددين موجبين حاصل جمعهما 18 وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن .

فرج مبروك فرج
رئيس قسـم الرياضيات
ت. ٩٩٧١٦٢١٣

مثـــال تعطي الدالة $V(h) = 2\pi(-h^3 + 36h)$ حجم أسطوانة بدلالة ارتفاعها h.

a أوجد الارتفاع h(cm) للحصول على أكبر حجم للأسطوانة.

b ما قيمة هذا الحجم؟

مثــال أوجد أقصر مسافة بين النقطة $A(x\,,\,y)$ على المنحنى الذي معادلته $y=\sqrt{x}$ والنقطة $B(3\,,0)$

فرج مبروك فرج
رئيس قسـم الرياضيات
ت. ٩٩٧١٦٢١٣

ومثـــا ما أكبر مساحة ممكنة لمثلّث قائم الزاوية وطول وتره يساوي 6 cm؟ وما أبعاده؟

مثال علبة من الصفيح على شكل أسطوانة قائمة مفتوحة من أعلى حجمها $1000\ \text{cm}^3$

أوجد أبعاد العلبة بحيث يكون وزنها أقل ما يمكن.

فرج مبروك فرج
رئيس قسم الرياضيات
ت. ٩٩٧١٦٢١٣

مثـــال علبة من الصفيح على شكل أسطوانة قائمة مفتوحة من أعلى حجمها $1000\ cm^3$

أوجد أبعاد العلبة بحيث يكون وزنها أقل ما يمكن.

فرج مبروك فرج
رئيس قسم الرياضيات
ت. ٩٩٧١٦٢١٣

مثـــال أوجد أكبر حجم لمخروط دائري قائم داخل كرة طول نصف قطرها 3 m.

فرج مبروك فرج
رئيس قسم الرياضيات
ت. ٩٩٧١٦٢١٣

فرج مبروك فرج
رئيس قسم الرياضيات
ت. ٩٩٧١٦٢١٣

مثـــال

ضلعان في مثلّث طولاهما a و b والزاوية بينهما θ.

ما قيمة θ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن؟

(**إرشاد:** مساحة مثلث = $\frac{1}{2}ab\sin\theta$).