

الرياضيات

الصفّ العاشر
الفصل الدراسي الثاني

كتاب الطالب

اللجنة الإشرافية لدراسة ومواءمة سلسلة كتب الرياضيات

أ. إبراهيم حسين القطان (رئيسًا)

أ. فتحة محمود أبو زور

أ. حصة يونس محمد علي

الطبعة الأولى

١٤٣٣ - ١٤٣٤ هـ

٢٠١٢ - ٢٠١٣ م

فريق عمل دراسة ومواءمة كتب الرياضيات للصف العاشر

أ. رضية ناصر القطان (رئيسًا)

أ. جوى محمد وسيم

أ. السعيد فوزي إبراهيم

أ. منيرة علي العدواني

أ. مجدي محمد الكواوي

دار التّربويّون House of Education ش.م.م.م. وبيرسون إديوكيشن ٢٠١٢

© جميع الحقوق محفوظة : لا يجوز نشر أي جزء من هذا الكتاب أو تصويره أو تخزينه أو تسجيله
بأي وسيلة دون موافقة خطية من الناشر.

الطبعة الأولى ٢٠١٢



صاحب السمو الشيخ صباح الأحمد الجابر الصباح
أمير دولة الكويت



Page 4



سَمَو الشَّيْخِ نَوَافِ بْنِ عَبْدِ اَلِإِسْمَاعِيلِ بْنِ اَلْمُبَارَكِ اَلْأَمِيرِ اَلصَّبَاغِ
وَلِيَّ عَهْدِ دَوْلَةِ الْكُوَيْتِ

Page 5

مقدمة

في ضوء ما شهدته السنوات الأخيرة من طفرة هائلة في المستحدثات التكنولوجية المرتبطة بمجال التعليم، كان على منظومة التعليم بمستوياتها وعناصرها المختلفة بدولة الكويت أن تتأثر بهذا التطور، فحرصت وزارة التربية على تطوير مناهج العلوم والرياضيات لتصبح قادرة على استيعاب المتغيرات التربوية والعلمية الحديثة.

ولما كان من الضروري أن يعايش المتعلم المعلومات المتدفقة من مصادر تعز عن الحصر، وأن يستعد لأداء دور فاعل في أي موقع من مواقع العمل الوطني، ويصنع مع أقرانه حياة الأمن والعزة والنماء، فيتحقق للوطن المكانة التي يريها بين دول العالم.

وكان على النظم التعليمية أن تعيد النظر في المناهج لإعداد الأبناء بالكفايات اللازمة والمهارات المتنوعة المستجيبة لكل تغيير في هذه الحياة.

عندئذ كفل المنهج الجديد تغيير دور المتعلم نتيجة لهذه المستحدثات، ليخرج من حيز المتلقي إلى دائرة المتفاعل الناشط، والمشارك في المواقف التعليمية، عندما يبحث ويقارن ويستنبط ويتعامل بنفسه مع المواد التعليمية، حتى يسهم في تحقيق الاكتفاء الذاتي لوطنه اقتصادياً واجتماعياً وثقافياً، وسد حاجاته من العمالة الوطنية في مختلف المجالات.

لقد أتاح المنهج الجديد للعلوم والرياضيات للمتعلم الارتباط بالبيئة من خلال طبيعة الأنشطة التعليمية، واكتساب الطلاب مهارات التعلم الذاتي وغرس حب المعرفة وخصيلها استجابة لأهداف المنهج الرئيسية.

ولقد انتظم التغيير أهداف المنهج ومحتواه وأنشطته، وطرائق عرضها وتقديمها وأساليب تقويمها، ضمن مشروع التطوير.

وكان اختيار هذه السلسلة من المناهج بصورة تتماشى مع الاتجاهات التربوية الحديثة في التعليم والتعلم، وتراعي المعايير الدولية في تعليم العلوم والرياضيات. وإذا كانت هذه السلسلة لم تغفل دور ولي الأمر في عملية التعليم، فإنها ركزت على دور المعلم، حيث يسهّل عملية التعليم، لطلابه ويصمم بيئة التعليم، ويشخص مستويات طلابه، ويبسر لهم صعوبات المادة العلمية، فتزداد معايير الجودة التعليمية. والآن نطرح بين أيديكم هذه المجموعة من كتب العلوم والرياضيات الجديدة التي تتضمن كتابًا للمتعلم وآخر للمعلم، وكراسة للأنشطة، من إعداد ذوي الكفايات العالمية والخبرات المتطورة، أملًا في الوصول إلى الغايات المرجوة من أقرب طريق إن شاء الله.

الوكيل المساعد لقطاع البحوث التربوية والمناهج

أ. مريم محمد الوتيد

المحتويات

١٠	الوحدة السادسة: هندسة الدائرة
١٢	١ - ٦ (أ) الدائرة
١٤	١ - ٦ (ب) مماس الدائرة
٢٤	٢ - ٦ الأوتار والأقواس
٣٢	٣ - ٦ الزوايا المركزية والزوايا المحيطية
٤٥	٤ - ٦ الدائرة: الأوتار المتقاطعة، المماس
٥٤	الوحدة السابعة: المصفوفات
٥٦	١ - ٧ تنظيم البيانات في مصفوفات
٦٣	٢ - ٧ جمع المصفوفات وطرحها
٦٩	٣ - ٧ ضرب المصفوفات
٧٩	٤ - ٧ مصفوفات الوحدة والنظير الضربي (المعكوسات)
٨٦	٥ - ٧ حل نظام من معادلتين خطيتين
٩٤	الوحدة الثامنة: حساب المثلثات (٢)
٩٦	١ - ٨ دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي والدوال المثلثية (الدائرية)
١٠٣	٢ - ٨ العلاقات بين الدوال المثلثية (١)
١١٥	٣ - ٨ العلاقات بين الدوال المثلثية (٢)
١٢٦	الوحدة التاسعة: الهندسة التحليلية
١٢٨	١ - ٩ المستوى الإحداثي
١٣٣	٢ - ٩ تقسيم قطعة مستقيمة
١٤٠	٣ - ٩ (أ) ميل الخط المستقيم
١٤٦	٣ - ٩ (ب) معادلة الخط المستقيم
١٥١	٤ - ٩ البعد بين نقطة ومستقيم
١٥٤	٥ - ٩ الدائرة
١٦٨	الوحدة العاشرة: الإحصاء والاحتمال
١٧٠	١ - ١٠ تحليل البيانات
١٧٢	٢ - ١٠ الأرباعيات
١٨٨	٣ - ١٠ الانحراف المعياري
١٩٥	٤ - ١٠ طرق العد
٢٠٤	٥ - ١٠ الاحتمال المشروط

هندسة الدائرة Geometry of a Circle

مشروع الوحدة: أهمية الدائرة في تصميم الزينة والزخارف الهندسية

١ مقدمة المشروع: منذ قرون عديدة، استخدم الفنانون بساطة الدائرة ورونقها في التزيين. بعضهم صنع أنماطًا في الدائرة مستفيدًا من عدم وجود بداية لها أو نهاية. وبعضهم الآخر استفاد من كثرة خطوط التناظر فيها ليتنجح خدعًا بصرية.

٢ الهدف: ابحث عن بعض التقنيات المستخدمة خلال العصور الماضية لإنتاج الفن الدائري عندما استخدم الفنانون الدائرة كأفضل طريقة لبلوغ أهدافهم في التزيين.

٣ اللوازم: أوراق رسم، شبكة مربعات، أقلام تلوين، قلم، فرجار.

٤ أسئلة حول التطبيق:

أ عيّن نقطة الأصل على شبكة مربعات (دون رسم المحاور).

ب ارسم ٤ دوائر مراكزها $(0, 0)$ ، $(0, 5)$ ، $(5, 0)$ ، $(5, 5)$ بنصف قطر يساوي $2\sqrt{5}$. مستخدمًا المراكز نفسها، ارسم ٤ دوائر بنصف قطر يساوي $2\sqrt{4}$.

صل بين المراكز الأربعة لتشكيل مربعًا ولونه بالأحمر.

صل بين نقاط تقاطع الدوائر الكبرى والدوائر الصغرى ولون الشكل بالأخضر. امح الأقواس، ولون تصميمك.

ج اتبع الخطوات التالية لتصميم نمط من الفن الإسلامي من القرن الرابع عشر.



الخطوة ٥: اجمع هذه النقاط لتحصل على مربعين محاطين بالدائرة الصغرى كما يبين الرسم، ثم لون لتحصل على التصميم المطلوب



الخطوة ٤: ارسم منصفات الزوايا المركزية، ثم عين نقاط التقاطع الثماني لهذه المنصفات مع الدائرة الداخلية.



الخطوة ٣: ارسم في كل مربع جميع الأقطار



الخطوة ٢: ارسم دائرة داخلية محاطة بالمربعين.



الخطوة ١: ارسم دائرة ومربعًا رؤوسه على الدائرة، ثم ارسم قطريه. ارسم الشكل الناتج عن دوران المربع بزاوية 45° حول مركز الدائرة

٥ التقرير: ضع تقريرًا مفصلاً حول تنفيذ المشروع مستفيدًا من دروس الوحدة، واعرض التصميم التي حصلت عليها.

دروس الوحدة

مماس الدائرة	الأوتار والأقواس	الزوايا المركزية والزوايا المحيطة	الدائرة: الأوتار المتقاطعة، المماس
١-٦	٢-٦	٣-٦	٤-٦

أضف إلى معلوماتك

تتميز الأوتار المتقاطعة عند نقطة داخل الدائرة أو خارج الدائرة بعلاقات محددة تربط بين أطوال أجزائها. يمكنك إيجاد هذه العلاقات باستخدام ما تعلمته سابقاً عن المثلثات المتطابقة والمثلثات المتشابهة. المعارف التي سوف تكتسبها من هذه الوحدة لها تطبيقات عديدة في التصوير، والهندسة المعمارية، والهندسة المدنية، والصور المتحركة.

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت إيجاد محيط دائرة ومساحتها.
- تعلمت إثبات تطابق المثلثات وخصائص العناصر المتناظرة وتشابه المثلثات وبعض القطع المميزة في المثلث.
- تعلمت خصائص المثلث قائم الزاوية، ومنها نظرية فيثاغورث.

ماذا سوف تتعلم؟

- سوف تستخدم العلاقة بين المماس ونصف قطر الدائرة المار بنقطة التماس لحل المسائل.
- سوف تستخدم العلاقة بين مماسين من نقطة واحدة في حل مسائل حياتية.
- سوف تستخدم الأوتار المتطابقة والأقواس والزوايا المركزية لحل مسائل في الدائرة.
- سوف تتعرف خصائص المستقيمتان والقطع المستقيمة التي تمر بمركز الدائرة والتي لا تمر بمركز الدائرة.
- سوف تتعرف العلاقة بين الزاوية المركزية والزاوية المحيطة المشتركة في القوس نفسه.
- سوف تتعرف العلاقة بين الزاوية المماسية والقوس المحصور بين ضلعيها.
- سوف تتعرف العلاقة ما بين الزاوية المماسية والزاوية المحيطة والقوس المشترك بينهما.
- سوف تتعرف العلاقة بين وترين متقاطعين في الدائرة والعلاقة بين طول المماس وطول القطع.
- سوف تتعرف خصائص الشكل الرباعي الدائري.

المصطلحات الأساسية

مماس الدائرة - أوتار - أقواس - زاوية مركزية - زاوية محيطة - أوتار متقاطعة - القاطع - رباعي دائري - زاويتان متقابلتان - زاويتان متكاملتان.

الدائرة The Circle

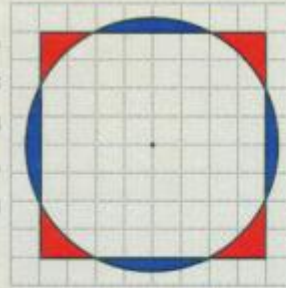
مقدمة:

سوف تتعلم

- استخدام العلاقة بين المماس ونصف قطر الدائرة المار بنقطة التماس
- استخدام العلاقة بين مماسين من نقطة واحدة خارج الدائرة

عُرفت الدائرة منذ القدم. استخدم الأقدمون الدولاب والأسطوانة لضخ المياه وطحن الحبوب ودحرجة الأشياء الثقيلة. في مصر طرح الفراعنة مسألة تربيعة الدائرة، أي إنشاء مربع مساحته تساوي مساحة رقعة تحددها دائرة معطاة، حتى أنهم اقترحوا أفكارًا حول حل هذه المسألة. شغلت هذه المسألة الباحثين في الرياضيات لمدة طويلة حتى العام ١٨٨٢ عندما أثبت العالم الرياضي الألماني فردينان فون ليندمان استحالة هذا الإنشاء.

هل يمكن أن
تساوي مساحات
الرقع الزرقاء مع
مساحات الرقع
الحمراء؟



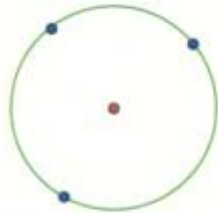
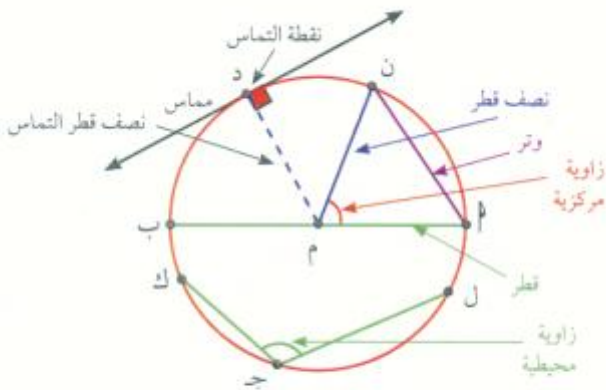
تعريف الدائرة

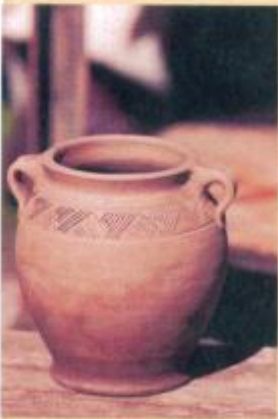
الدائرة هي مجموعة نقاط المستوى التي تبعد كل منها عن نقطة ثابتة M في المستوى بعدًا ثابتًا.

تسمى النقطة الثابتة **مركز الدائرة** ويسمى البعد الثابت طول نصف القطر ويرمز إليه عادة بالرمز r .

نظرية (١)

كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة.





مثال (١)

علم الآثار: وجد عالم آثار قطعًا صغيرة من جرة خزفية بالإضافة إلى قطعة كبيرة دائرية الشكل من فوهة الجرة. كيف تستطيع مساعدة العالم لإعادة ترميم الجرة، وذلك بإيجاد مركز وطول نصف قطر القطعة الدائرية الكبيرة؟

الحل:

المعطيات: جزء من فوهة الجرة الدائرية.

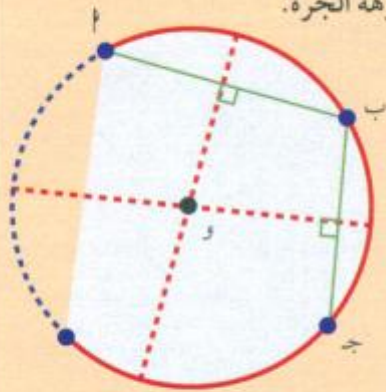
المطلوب: إيجاد مركز الدائرة وطول نصف قطرها.

البرهان: نأخذ ٣ نقاط A, B, C على قوس الدائرة المرسومة والتي تمثل جزءًا من فوهة الجرة.

نرسم محورًا لكل من AB, BC, CA ، اللذان يتقاطعان في نقطة O

هي مركز الدائرة.

طول $OA =$ طول نصف قطر الدائرة.



حاول أن تحل

١ استخدم المفهوم السابق في مثال (١) لإثبات برهان نظرية (١) وتحديد مركز الدائرة المحاطة بمثلث قائم الزاوية.

استنتاج

في الشكل المقابل، $AB \perp BC$

بفرض أن المستقيم AD يمر بالنقطة A عموديًا على BC .

يصبح مجموع قياسات زوايا $\triangle ABC$ أكبر من 180° ($\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$)

وهذا يتناقض مع النظرية: مجموع قياسات زوايا المثلث $= 180^\circ$

$\therefore AD$ ليس عموديًا على BC .

استنتاج ١: من نقطة خارج مستقيم يوجد مستقيم وحيد يمر بهذه النقطة وعمودي على المستقيم المعلوم.

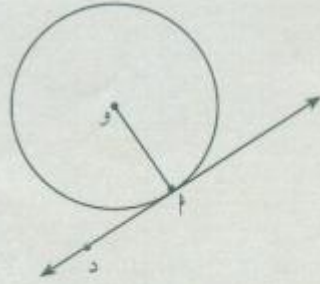
لاحظ أنه في $\triangle ABC$ ، $AD > AB$ ج مهما كان موضع النقطة D على المستقيم ($AD \neq AB$).

استنتاج ٢: أقصر بعد بين نقطة ومستقيم هو البعد العمودي.

كلما ابتعدت D عن B على المستقيم أصبح طول AD أكبر.

مماس الدائرة Tangent of the Circle

عمل تعاوني

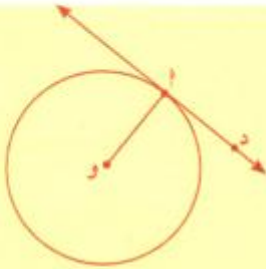


- استخدم الفرجار لرسم دائرة مركزها O.
- من نقطة د خارج الدائرة ارسم مستقيمًا يتقاطع مع الدائرة في نقطة واحدة فقط ولتكن P.
- ارسم القطعة \overline{OP} .

١ ما قياس الزاوية \hat{D} أو؟

٢ قارن نتيجتك بنتائج زملائك في الفصل.

٣ ضع تخمينًا حول العلاقة بين المستقيم الذي يقطع الدائرة في نقطة واحدة ونصف قطر الدائرة المار في هذه النقطة.



المماس للدائرة هو مستقيم في المستوي يتقاطع مع الدائرة في نقطة واحدة.

نقطة التقاطع تسمى **نقطة التماس**.

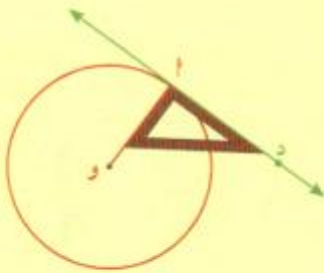
→ \overline{OP} مماس.

→ \overline{OP} شعاع مماس.

→ \overline{OP} قطعة مماسية.

→ \overline{OP} أو نصف قطر التماس.

نظرية (٢)



المماس عمودي على نصف قطر التماس

إذا كان مستقيم مماسًا لدائرة، فإنه يكون متعامدًا مع نصف القطر

المار بنقطة التماس

أي أن $\overline{OP} \perp \overline{d}$.

لإثبات النظرية (٢) سنستخدم طريقة جديدة تسمى «البرهان غير المباشر» (Indirect Proof).

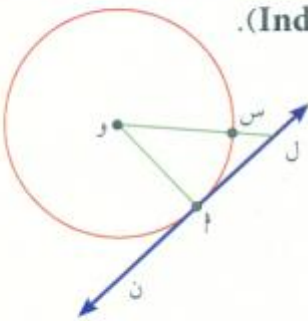
المعطى: دائرة مركزها O، المستقيم n مماس للدائرة في P، و \overline{OP} نصف قطر التماس.

المطلوب: إثبات أن المستقيم n \perp \overline{OP}

البرهان:

الخطوة ١: لنفرض العكس، أي أن المستقيم n ليس متعامدًا مع \overline{OP} .

سوف نثبت أن هذا الافتراض يوصلنا إلى تناقض.



الخطوة ٢: إذا لم تكن \overline{OA} متعامدة مع المستقيم n ، فإنه توجد قطعة مستقيمة أخرى متعامدة مع المستقيم n .
ولتكن OL ، وتقطع الدائرة في S ، أي أن $\angle(OL) = 90^\circ$

$$\therefore OL = OS + SL$$

من خواص الدائرة $OS = OL$

$$\therefore OL < OS$$

ولكن \overline{OA} وتر للمثلث OLP قائم الزاوية وهذا يناقض الفرض.

الخطوة ٣: الافتراض أن المستقيم n ليس متعامدًا مع \overline{OA} هو افتراض خطأ. وبالتالي، فإن المستقيم $n \perp \overline{OA}$ صحيح.

معلومة رياضية:

هذه الطريقة في البرهان تسمى
أيضًا "البرهان بالتناقض"
proof by absurdum

مثال (٢)

في الشكل المقابل M ل، M ن مماسان للدائرة التي مركزها O . أوجد قياس الزاوية $L\hat{M}N$.

الحل:

المعطيات: M ل، M ن مماسان للدائرة التي مركزها O .

المطلوب: إيجاد قياس الزاوية $L\hat{M}N$

البرهان:

$\therefore M\hat{L}O$ مماس

ول نصف قطر التماس

$$\therefore \angle(OL) = 90^\circ$$

$$\text{وبالمثل: } \angle(ON) = 90^\circ$$

نظرية

بما أن L م ن و رباعي فمجموع قياسات زواياه يساوي 360° .

$$\therefore \angle(L) + \angle(N) + \angle(M) + \angle(O) = 360^\circ$$

$$\text{بالتعويض} \quad 90^\circ + 90^\circ + S^\circ + 117^\circ = 360^\circ$$

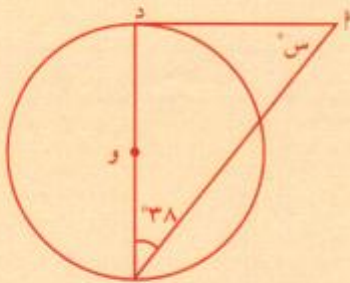
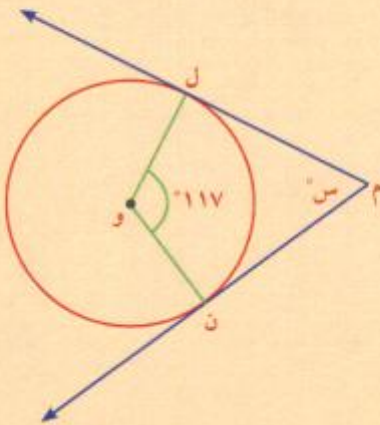
$$\text{بالتبسيط} \quad 360^\circ = S^\circ + 297^\circ$$

$$63^\circ = S^\circ$$

$$\therefore \angle(L\hat{M}N) = 63^\circ$$

حاول أن تحل

٢ في الشكل المقابل، AD مماس للدائرة التي مركزها O . أوجد قيمة S° .



مثال (٣)

تطبيق حياتي



يمثل المخطط إطاري الدراجة. أوجد دج المسافة بين محوري هذين الإطارين.

إذا كان $أد = ٣٢$ سم، $بج = ٤٠$ سم، $أب = ٩٦$ سم.

الحل:

المعطيات

دائرة مركزها ج، $ر = ٤٠$ سم

دائرة مركزها د، $ر = ٣٢$ سم

أب مماس للدائرتين، $أب = ٩٦$ سم

المطلوب: إيجاد المسافة د ج بين محوري الإطارين.

العمل: نرسم $ده \perp ج ب$.



معلومة:

محور الإطار هو المحور الذي يدور حوله الإطار.

البرهان: المثلث د ه ج قائم الزاوية في ه

بتطبيق نظرية فيثاغورث:

$$(دج)^2 = (ده)^2 + (ه ج)^2$$

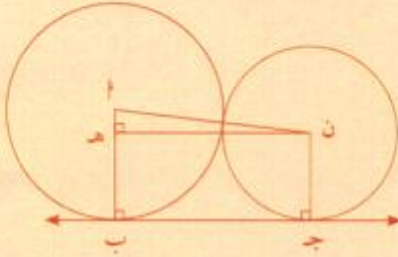
$$(دج)^2 = (٨)^2 + (٩٦)^2 = ٩٢٨٠$$

$$دج \approx ٣٣, ٩٦$$

باستخدام الآلة الحاسبة

المسافة بين محوري الإطارين تساوي ٣, ٩٦ سم تقريباً.

حاول أن تحل



٣ يمثل الشكل المقابل مقطوعاً لأسطوانتين في معمل الورق.

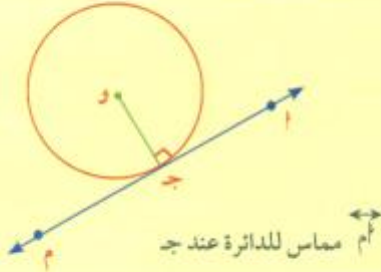
أوجد طول ب ج إذا كانت الدائرتان متماستين وطول نصف

قطريهما ٥٠ سم، ٤٠ سم على الترتيب.

نظرية (٣)

المستقيم العمودي على نصف قطر دائرة عند نهايته التي تنتمي

إلى الدائرة يكون مماساً لهذه الدائرة عند هذه النقطة.



مماس للدائرة عند ج

لإثبات النظرية (٣) سنفرض وجود نقطتي تقاطع بين المستقيم m والدائرة التي مركزها O ونبرهن أن النقطتين منطبقتان.

المعطى: المستقيم m متعامد مع \overline{OJ} ، النقطة J تنتمي إلى الدائرة.

المطلوب: إثبات أن المستقيم m مماس للدائرة.

البرهان:

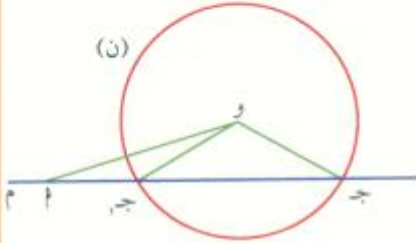
لنفرض وجود نقطتي تقاطع J_1 و J_2 بين المستقيم والدائرة (J نقطة على المستقيم).

المثلثان OJ_1J و OJ_2J قائما الزاوية في J ، J_1J_2 .

Δ و J_1J_2 فيه زاويتان قائمتان، هذا لا يمكن إلا إذا انطبقت J_1 على J_2 ومنه

المستقيم m يقطع الدائرة في نقطة واحدة.

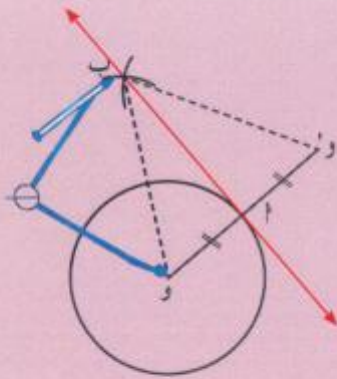
∴ المستقيم m مماس للدائرة.



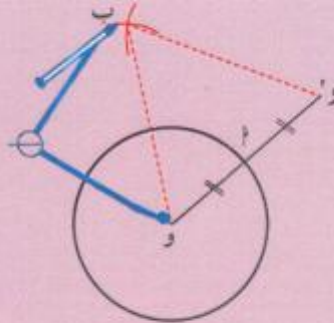
الإنشاءات

دائرة مركزها O ، M نقطة على الدائرة. مستخدمًا الفرجار والمسطرة أنشئ مماسًا للدائرة عند M .

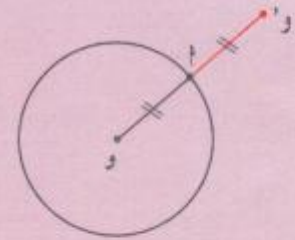
الطريقة الأولى:



نرسم المستقيم المار بالنقطتين M ، P .
فنحصل على مماس للدائرة

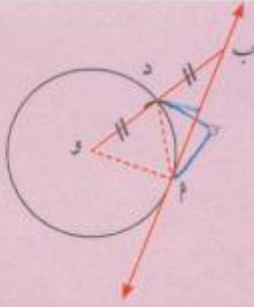


نرسم من O ، و M قوسين بفتحة أكبر من OM ، يتقاطعان القوسان في P .

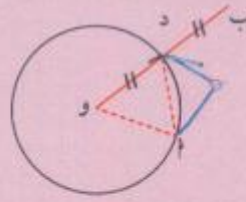


نرسم نصف قطر وليكن OM ثم نحدد P و M انعكاس للنقطة O في M .

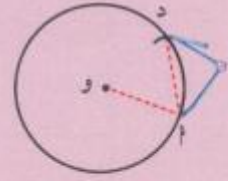
الطريقة الثانية:



نرسم المستقيم المار بالنقطتين ب، م،
فنحصل على مماس للدائرة.



نحدد النقطة ب انعكاس للنقطة و
في د



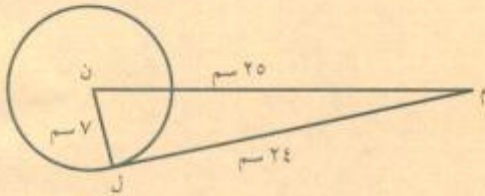
نرسم نصف قطر وليكن \overline{OP}
نركز سن الفرجار عند P
وبفتحة تساوي OP نرسم قوسًا يقطع
الدائرة في د فيكون $OP = OD$

تحقق:

في كل من الطريقتين، أثبت أن \overleftrightarrow{AB} مماس للدائرة.

مثال (٤)

في الشكل المقابل، $ن ل = ٧$ سم، $ل م = ٢٤$ سم، $ن م = ٢٥$ سم.
هل $\overleftrightarrow{م ل}$ مماس للدائرة التي مركزها ن؟ فسّر.
الحل:



المعطيات: $ن ل = ٧$ سم، $ن م = ٢٥$ سم، $ل م = ٢٤$ سم
المطلوب: معرفة ما إذا كان $\overleftrightarrow{م ل}$ مماسًا للدائرة التي مركزها ن
البرهان:

هل المثلث م ل ن قائم؟

$$(ن ل)^2 + (ل م)^2 \stackrel{?}{=} (ن م)^2$$

بالتعويض

$$7^2 + 24^2 \stackrel{?}{=} 25^2$$

بالتبسيط

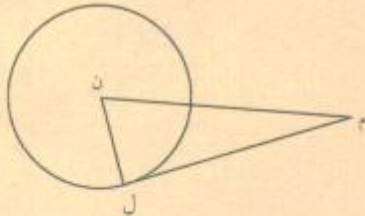
$$625 = 625$$

باستخدام عكس نظرية فيثاغورث، نستنتج أن المثلث م ل ن قائم في ل.

$$\therefore م ل \perp ن ل$$

نظرية

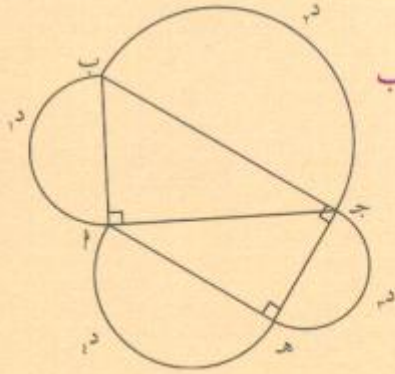
$\therefore \overleftrightarrow{م ل}$ مماس للدائرة في النقطة ل.



حاول أن تحل

٤ في الشكل المقابل، إذا كان $ن ل = ٤$ ، $ل م = ٧$ ، $ن م = ٨$ ، فهل $\overleftrightarrow{م ل}$ مماس
للدائرة؟ فسّر إجابتك

مثال (٥)



في الشكل المقابل د، د، د، د، د أنصاف دوائر أقطارها على الترتيب $\overline{أب}$ ، $\overline{بج}$ ، $\overline{جـ هـ}$ ، $\overline{هـ أ}$.

حدد المماسات لأنصاف الدوائر، وفسّر إجابتك

الحل:

المعطيات:

د، د، د، د، د أنصاف دوائر أقطارها على الترتيب $\overline{أب}$ ، $\overline{بج}$ ، $\overline{جـ هـ}$ ، $\overline{هـ أ}$.

المطلوب: تحديد المماسات لأنصاف الدوائر مع تفسير الإجابة.

البرهان:

$\overline{جـ أ} \perp \overline{أب}$ معطى ، $\overline{أب}$ قطر لنصف الدائرة د،

\therefore جـ أ مماس لنصف الدائرة د.

كذلك $\overline{جـ هـ} \perp \overline{هـ أ}$ معطى ، $\overline{هـ أ}$ قطر لنصف الدائرة د،

\therefore جـ هـ مماس لنصف الدائرة د.

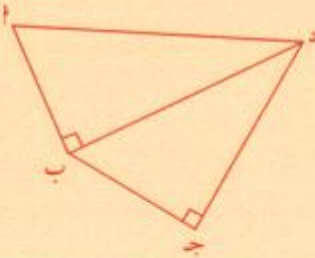
وبالمثل يمكن إثبات أن $\overline{أ هـ}$ مماس لنصف الدائرة د، كذلك يمكن إثبات أن $\overline{هـ جـ}$ مماس لنصف الدائرة د.

كذلك $\overline{ب ج}$ مماس لنصف الدائرة د.

حاول أن تحل

٥ أكمل النص التالي:

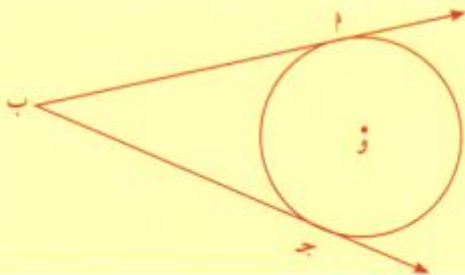
..... مماس للدائرة التي تمر برؤوس المثلث.....



نظرية (٤)

القطعتان المماستان لدائرة والمرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان.

$$\overline{أب} \cong \overline{جـ ب}$$



المعطيات:

دائرة مركزها $و$.
 $م$ ، $ج$ نقطتان على الدائرة.
 $ب$ نقطة خارج الدائرة حيث $\overrightarrow{ب م}$ ، $\overrightarrow{ب ج}$ مماسان للدائرة.
المطلوب: إثبات تطابق $\overline{ب م}$ ، $\overline{ب ج}$.
العمل: نصل $و م$ ، $و ج$.

البرهان:

\therefore $\overline{ب م}$ مماس للدائرة، \therefore $ج و$ نصف قطر التماس $ج ب \perp ج و$

نظرية

نظرية فيثاغورث

المثلث $ج ب م$ قائم الزاوية $ج$

$$ب ج = \sqrt{ب م^2 - م و^2}$$

وبالمثل المثلث $ب م و$ قائم الزاوية $م$

$$ب م = \sqrt{ب ج^2 - ج و^2}$$

$$\therefore ب ج = ب م$$

برهان آخر:

في المثلثين $ب م و$ ، $ب ج و$:

$$ب م = ب ج$$

ضلع مشترك

نظرية

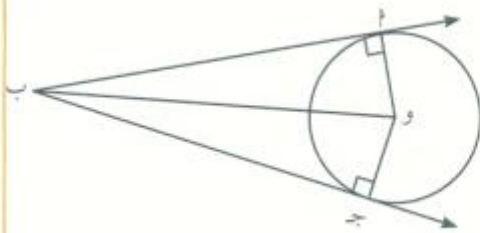
$$\angle م ب و = \angle ج ب و = 90^\circ$$

$$و م = و ج$$

لماذا؟

$$\therefore \Delta ب م و \cong \Delta ب ج و$$

\therefore الأضلاع المتناظرة متطابقة. $\therefore ب م = ب ج$



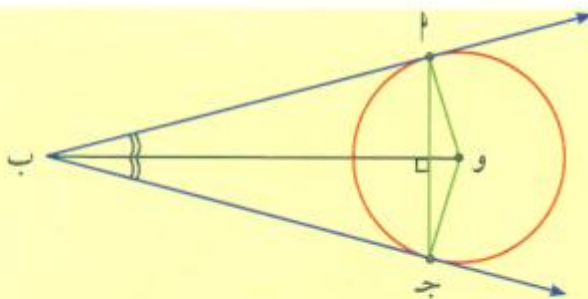
نتائج النظرية

$\Delta ب م ج$ متطابق الضلعين من النظرية السابقة.

١ $\overrightarrow{ب م}$ و $\overrightarrow{ب ج}$ منصف الزاوية $\angle م ب ج$

٢ $\overrightarrow{ب م}$ و $\overrightarrow{ب ج}$ منصف الزاوية $\angle م و ج$

٣ $\overline{ب م} \perp \overline{ب ج}$



مثال (٦)

يمثل الرسم المقابل دولابًا (إطارًا) دراجة.
برهن أن $ج = ح = ف$.



الحل:

المعطيات:

$ج$ مماس مشترك للدائرتين. $ف$ مماس مشترك للدائرتين

المطلوب: إثبات أن $ج = ح = ف$

العمل:

نمد $ج$ ، $ف$ حتى يتقاطعا في $هـ$.

البرهان:

$هـ ج$ ، $هـ ف$ قطعتان مماستان للدائرة التي مركزها $و$. $\therefore هـ ج = هـ ف$ نظرية

كذلك $هـ ح$ ، $هـ ف$ قطعتان مماستان للدائرة التي مركزها $ي$. $\therefore هـ ح = هـ ف$

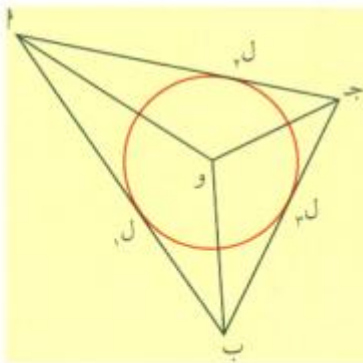
بطرح المعادلتين

$هـ ج - هـ ف = هـ ف - هـ ف$

$ج = ح = ف$

حاول أن تحل

٦ مستخدمًا الرسم أعلاه، أثبت أن $ج = ح = ف$ إذا لم يتقاطع $ج$ مع $ف$.



الدائرة المحاطة بمثلث (الداخلة) (Inscribed Circle of a Triangle)

هي دائرة مماسة لأضلاع المثلث الثلاثة من الداخل.

مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي منصفات الزوايا الداخلية للمثلث Circum Center.

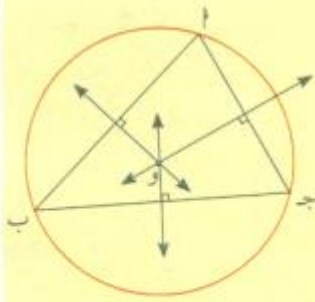
فكر:

المثلثان $ل و ل$ ، $م و م$ متطابقان. لماذا؟

$\angle(ل, و) = \angle(م, و)$

$\therefore و$ منصف الزاوية $م$.

أثبت بالطريقة نفسها أن $و$ من $ب$ ، $و$ منصف للزاوية $ب$ ، $و$ على الترتيب.



الدائرة المحيطة بمثلث (الخارجة) (Circumscribed Circle of a Triangle)

هي دائرة تمر برؤوس المثلث الثلاثة.

مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي المحاور الثلاثة لأضلاع المثلث (نقطة تلاقي المنصفات العمودية لأضلاع المثلث).

فكر:

وب = وج

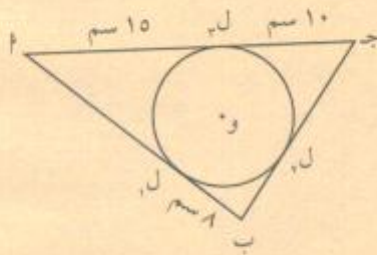
لماذا؟

وب = و

لماذا؟

ماذا تستنتج؟

مثال (٧)



في الشكل المقابل، أوجد محيط المثلث أ ب جـ.

الحل:

المعطيات:

دائرة مركزها و

ب ل مماس للدائرة في ل، حيث ب ل = ٨ سم

ب ج مماس للدائرة في ل.

أ ج مماس للدائرة في ل، حيث ج ل = ١٠ سم، أ ل = ١٥ سم.

المطلوب: إيجاد محيط المثلث أ ب جـ.

البرهان:

أ ل = ل م = ٨ سم نظرية

ج ل = ل ن = ١٠ سم نظرية

ب ل = ل م = ٨ سم نظرية

محيط المثلث = أ ب + ب ج + ج أ

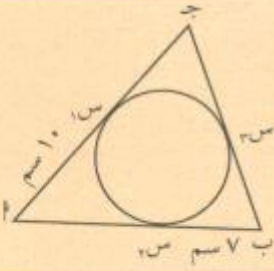
$$= أ ل + ل م + ب ل + ل ن + ج ل + ج أ$$

$$= ٨ + ٨ + ١٠ + ١٠ + ١٥ + ١٥ = ٦٦$$

محيط المثلث = ٦٦ سم.

حاول أن تحل

٧ في الشكل المقابل إذا كان محيط المثلث Δ ب ج = ٥٠ سم، فأوجد طول $\overline{ب ج}$.



تدريب (١):

Δ ب ج زاوية قياسها 60° . أنشئ دائرة مركزها و، طول نصف قطرها ٢ سم بحيث تكون مماسة لشعاعي الزاوية Δ ب، Δ ج.

الحل:

المعطيات: Δ (ب ج) = 60°

المطلوب: إنشاء دائرة مركزها و، طول نصف قطرها = ٢ سم

بحيث تكون مماسة لشعاعي الزاوية

العمل: من نقطة م تنتمي إلى Δ ب أنرسم $\overline{م ل}$ عمودية على Δ ب

طولها ٢ سم. من ل نرسم $\overline{ل ه د} \parallel \Delta$ ب

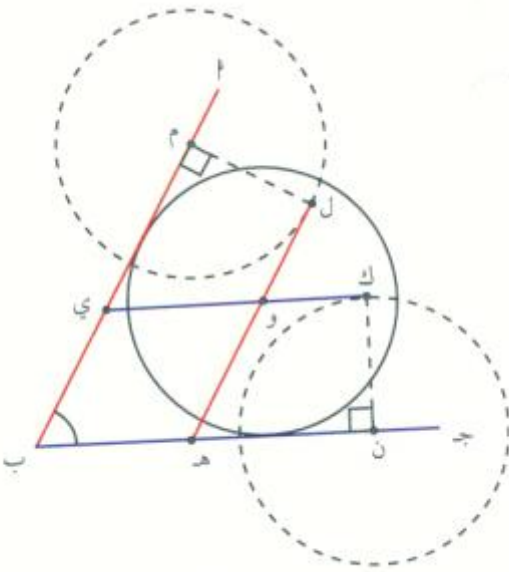
من نقطة ن تنتمي إلى Δ ج نرسم $\overline{ن ك}$ عمودية على Δ ج

طولها أيضًا ٢ سم.

من ك نرسم $\overline{ك ي} \parallel \Delta$ ج

$\overline{ل ه د} \cap \overline{ك ي} = \{و\}$. وهي مركز الدائرة.

نرسم الدائرة التي مركزها و وطول نصف قطرها ٢ سم.



تدريب (٢):

Δ ب ج زاوية قياسها 75° . أنشئ دائرة مركزها و، طول نصف

قطرها ٣ سم بحيث تكون مماسة لشعاعي الزاوية Δ ب، Δ ج.

الحل:

الأوتار والأقواس Chords and Arcs

سوف تتعلم

- استخدام الأوتار المتطابقة والأقواس والزوايا المركزية
- خصائص المخطوط المستقيمة التي تمر في مركز الدائرة



عمل تعاوني (استخدم الأدوات الهندسية)

في الشكل المقابل $\overline{OM} \cong \overline{ON}$.

١ قارن بين طولي \overline{AB} ، \overline{CD} . ماذا تلاحظ؟

٢ قارن بين قياس الزاويتين $\angle OQB$ ، $\angle OQD$. ماذا تلاحظ؟

٣ أعد رسم الشكل المقابل بحيث يكون $OM < ON$.

ب قارن بين \overline{AB} ، \overline{CD} ؛ $\angle OQB$ ، $\angle OQD$.

ج ماذا تلاحظ؟

الوتر (Chord) هو قطعة مستقيمة ينتمي طرفاها إلى دائرة.

يبين الشكل المقابل الوتر \overline{CD} والقوس (Arc) \widehat{CD} المناظر لهذا الوتر.

تتمحور النظرية التالية على العلاقة بين الزوايا المركزية في دائرة والأوتار والأقواس التي تحصرها.

نظرية (١)

في دائرة أو في دوائر متطابقة:

- ١ للزوايا المركزية المتطابقة أوتار متطابقة.
- ٢ الأوتار المتطابقة تقابل أقواسًا متطابقة.
- ٣ للأقواس المتطابقة زوايا مركزية متطابقة.

إثبات نظرية (١)

١ **المعطيات:** دائرة مركزها O ، $\angle OQB = \angle OQD$ (\widehat{CD})

المطلوب: إثبات أن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

البرهان: المثلثان $\triangle OQB$ ، $\triangle OQD$ فيهما:

$$OB = OD = r$$

$$OQ = OQ$$

$$\angle OQB = \angle OQD \text{ (\widehat{CD}) معطى}$$

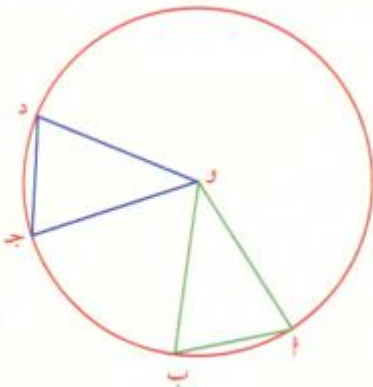
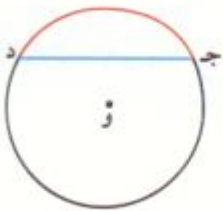
المثلثان متطابقان (ض. ز. ض.)

$$\overline{AB} \cong \overline{CD}$$

تطابق الأضلاع المتناظرة

٢ **المعطيات:** $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

المطلوب: إثبات أن $\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$



البرهان:

$\widehat{AB} \cong \widehat{CD} \therefore \Delta AOB \cong \Delta COD$ لماذا؟

$\therefore \angle AOB = \angle COD$ لماذا؟

باستخدام القانون ل = هـ نـ

طول القوس = قياس الزاوية المركزية (بالراديان) \times طول نصف القطر.

نستنتج أن $\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$.

٣ المعطيات: $\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$

المطلوب: $\angle AOB = \angle COD$

البرهان: $\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$

$\therefore \frac{\text{طول } \widehat{AB}}{r} = \frac{\text{طول } \widehat{CD}}{r}$

$\frac{\angle AOB \times r}{r} = \frac{\angle COD \times r}{r}$

$\angle AOB = \angle COD$

مثال (١)

في الشكل المقابل الدائرتان متطابقتان، $\widehat{BC} \cong \widehat{DE}$. ماذا تستنتج؟

الحل:

باستخدام النظرية السابقة

$\angle BOC = \angle DOE$

$\angle BOC \cong \angle DOE$ ، $\widehat{BC} \cong \widehat{DE}$

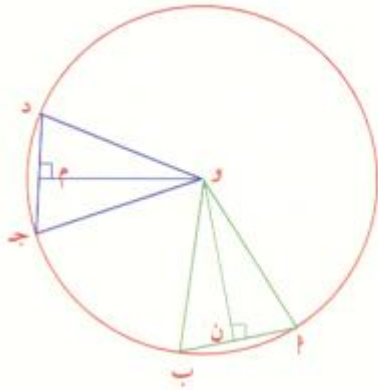
حاول أن تحل

١ في الرسم أعلاه، إذا كان $\widehat{BC} \cong \widehat{DE}$ ، فماذا تستنتج؟

تبيّن النظرية التالية العلاقة بين وترين وتُعد كل منهما عن مركز الدائرة.

نظرية (٢)

- ١ الأوتار المتطابقة في دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة.
- ٢ الأوتار التي على أبعاد متساوية من مركز دائرة تكون متطابقة.



إثبات نظرية (٢)

١ المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

المطلوب: $\overline{OM} \cong \overline{ON}$.

البرهان:

$$OM \perp AB \text{ و } ON \perp CD$$

$$\therefore \triangle OMA \cong \triangle ONC$$

$$\therefore \triangle OMA \cong \triangle ONC$$

مساحة المثلث OMA = مساحة المثلث ONC .

$$\therefore \frac{OM \times MA}{2} = \frac{ON \times NC}{2}$$

$$\therefore OM = ON$$

$$\therefore OM \cong ON$$

معطى

(ض. ض. ض.)

معلومة علمية:

إذا تطابق مثلثان فإن الأعمدة المرسومة من الرأس إلى القاعدة المناظرة تكون متطابقة.

بضلع ووتر

لماذا؟

٢ المعطيات: $\overline{OM} \cong \overline{ON}$.

المطلوب: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

البرهان:

$$\triangle OMA \cong \triangle ONC$$

$$\therefore \triangle OMA \cong \triangle ONC$$

مساحة المثلث OMA = مساحة المثلث ONC .

$$\therefore \frac{OM \times MA}{2} = \frac{ON \times NC}{2}$$

$$\therefore OM = ON$$

$$\therefore OM \cong ON$$

مثال (٢)

في الشكل المقابل ليكن م مركز الدائرة. م ب = م هـ، أوجد طول $\overline{ج د}$. فسّر.

الحل:

المعطيات:

$\overline{ج د}$ ، $\overline{ج أ}$ وتران في الدائرة.

ب منتصف $\overline{ج أ}$. $ب أ = ١٢,٥$.

$م هـ \perp ج د$ حيث م هـ $\perp ج د$ ، م هـ = م ب.

المطلوب: إيجاد طول $\overline{ج د}$.

البرهان:

معطى

$$ب أ = ب ج = ١٢,٥$$

بالتعويض

$$ب أ = ب ج + ج أ$$

نظرية

$$١٢,٥ = ٢٥$$

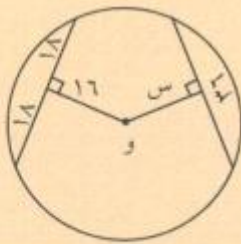
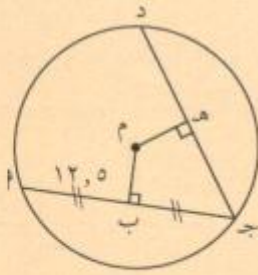
بالتعويض

$$ج د = ٢٥$$

$$ج د = ٢٥$$

حاول أن تحل

٢ دائرة مركزها و. أوجد قيمة س في الشكل المقابل، وفسّر إجابتك.



في الدائرة، للمنصف العمودي على الوتر خواص هندسية مهمة.

نظرية (٣)

- ١ القطر العمودي على وتر في دائرة ينصفه وينصف كلاً من قوسيه.
- ٢ القطر الذي ينصف وترًا (ليس قطرًا) في دائرة يكون عمودياً على الوتر.
- ٣ العمود المنصف لوتر في دائرة يمر بمركز الدائرة.

إثبات نظرية (٣)

١ **المعطيات:** دائرة مركزها $و$ ، $ل ن$ قطر، $ل ن \perp \overline{أب}$ حيث $\overline{أب}$ وتر على الدائرة.

المطلوب: إثبات أن $\overline{أ م} \cong \overline{ب م}$.

$$\widehat{أ ن} = \widehat{ب ن}$$

العمل: نصل $\overline{أ م}$ و $\overline{ب م}$

البرهان:

Δ $\overline{أ ب}$ متطابق الضلعين.

$$\overline{أ م} \perp \overline{ب م}$$

\therefore $و م$ المنصف العمودي لـ $\overline{أ ب}$

$$\overline{أ م} \cong \overline{ب م}$$

$و م$ المنصف العمودي لـ $\overline{أ ب}$

\therefore $و م$ منصف الزاوية $\widehat{أ و ب}$

$$\widehat{أ و ن} = \widehat{ب و ن}$$

$$\therefore \widehat{أ ن} \cong \widehat{ب ن}$$

نظرية

٢ **المعطيات:** $ل ن$ قطر ينصف $\overline{أ ب}$

المطلوب: إثبات $ل ن \perp \overline{أ ب}$

البرهان:

المثلث $\overline{أ و ب}$ متطابق الضلعين.

القطعة المتوسطة $و م$ هي المنصف العمودي لـ $\overline{أ ب}$ وبالتالي $ل ن \perp \overline{أ ب}$

٣ **المعطيات:** $ل ن$ منصف $\overline{أ ب}$ ، $ل ن \perp \overline{أ ب}$

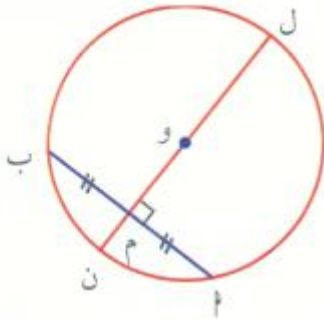
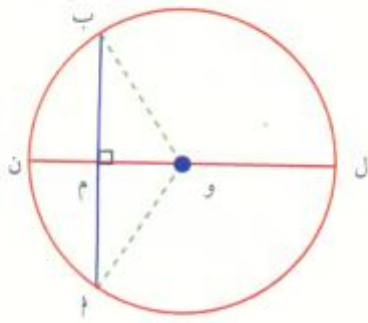
المطلوب: إثبات أن $ل ن$ تمر بمركز الدائرة.

البرهان: $ل ن \perp \overline{أ ب}$ ، $ل ن$ منصف $\overline{أ ب}$

$ل ن$ المنصف العمودي لـ $\overline{أ ب}$

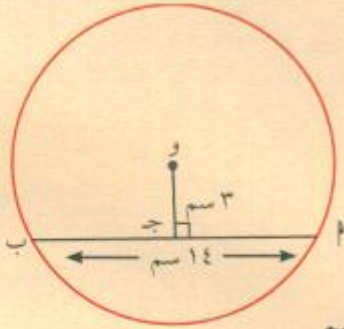
$$\therefore و م = ب م = ن م$$

\therefore وتنتمي إلى المنصف العمودي للقطعة $\overline{أ ب}$. ومنه $ل ن$ تمر بالمركز $و$.



بني القدماء الجسور فوق الأنهار على شكل قوس دائرة مع دعائم جانبية. وهذه الدعائم مهمة لأنها تتحمل كل ثقل الجسر.

مثال (٣)



أ في الشكل المقابل، أوجد طول نصف قطر الدائرة التي مركزها O.

الحل:

المعطيات:

AB وتر في دائرة مركزها O. AB = 14 سم. وجد المنصف العمودي لـ AB. و OC = 3 سم
المطلوب: إيجاد طول نصف قطر الدائرة

العمل: نرسم OB

البرهان:

القطر العمودي على وتر ينصفه
نظرية فيثاغورث
الجذر التربيعي لكلا الطرفين

$$OB = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} (14) = 7 \text{ سم}$$

$$OB^2 = OC^2 + CB^2 = 3^2 + 7^2 = 58$$

$$OB = \sqrt{58} \approx 7,6 \text{ سم}$$

طول نصف قطر الدائرة يساوي حوالي 7,6 سم.

ب في الشكل المقابل أوجد البعد بين مركز الدائرة والوتر.

الحل:

المعطيات: ومركز الدائرة.

و A نصف قطر الدائرة، و OA = 15 سم. A وتر في الدائرة. B ∈ A، و B = 11 سم.

المطلوب: إيجاد البعد بين مركز الدائرة والوتر A.

البرهان:

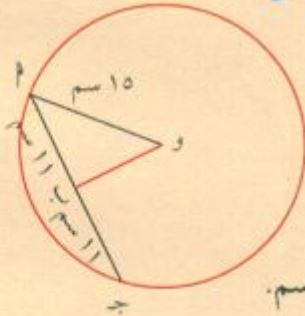
OB ⊥ AB
القطر الذي ينصف الوتر (ليس القطر) هو عمودي على الوتر

$$OB^2 = OA^2 - AB^2 = 15^2 - 11^2$$

$$OB^2 = 104$$

$$OB \approx 10,2 \text{ سم}$$

البعد بين مركز الدائرة والوتر ≈ 10,2 سم.

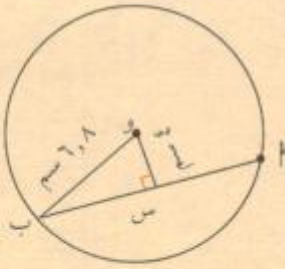


حاول أن تحل

٣ استخدم الشكل المقابل لإيجاد:

أ طول الوتر \overline{AB} .

ب المسافة من منتصف الوتر إلى منتصف القوس الأصغر \widehat{AB} .



مثال (٤)

يمثل الشكل المقابل دائرتين متطابقتين. $\overline{جد}$ وتر مشترك. إذا كان $\overline{AB} = ٢٤$ سم، $\overline{حز} = ١٣$ سم. فما طول $\overline{جد}$ ؟

الحل:

المعطيات: دائرتان متطابقتان مركزاهما $\overline{م}$ ، $\overline{ب}$.

$\overline{جد}$ وتر مشترك.

$\overline{AB} = ٢٤$ ، طول نصف قطر كل من الدائرتين = ١٣ سم.

المطلوب: إيجاد طول $\overline{جد}$

العمل: نرسم $\overline{مأ}$ ، $\overline{دأ}$ ، $\overline{بج}$ ، $\overline{بأ}$.

البرهان:

في الشكل $\overline{مأ}$ $\overline{دب} = \overline{دأ} = \overline{بج} = \overline{بأ} = \overline{حز} = ١٣$ سم

والقطران \overline{AB} ، $\overline{جد}$ متعامدان وينصف كل منهما الآخر.

\therefore $\overline{مأ}$ $\overline{بج}$ معين.

في Δ $\overline{مأ}$ و $\overline{بج}$ ، $\angle(\overline{مأ} \text{ و } \overline{بج}) = ٩٠^\circ$. $\therefore \Delta$ $\overline{مأ}$ و $\overline{بج}$ قائم الزاوية و.

نظرية فيثاغورث $(\overline{وج})^2 = (\overline{مأ})^2 - (\overline{وأ})^2$

$$(\overline{وج})^2 = (\overline{مأ})^2 - (\overline{وأ})^2 = ٢٥ = (\overline{وأ})^2 - (\overline{وأ})^2$$

$$\overline{وج} = ٥$$

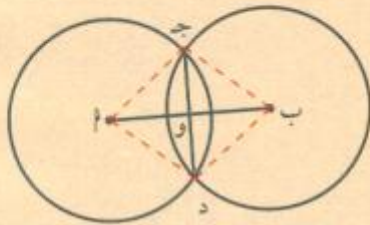
$$\overline{جد} = ٢ \times \overline{وج} = ١٠$$

$$\overline{جد} = ١٠ \text{ سم}$$

طول $\overline{جد}$ يساوي ١٠ سم.

حاول أن تحل

٤ في مثال (٤)، إذا كان $\overline{جد} = ١٤$ سم، $\overline{حز} = ١٣$ سم، فأوجد طول \overline{AB} .



معلومة مفيدة:

خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عمودياً على الوتر المشترك بينهما وينصفه

مثال (٥)

يريد راشد وضع إطار خشبي مربع الشكل داخل نافذة دائرية الشكل بحيث تلامس رؤوس المربع النافذة. إذا كان طول قطر دائرة النافذة = ١,٦ متر، فما طول ضلع المربع الخشبي؟

الحل:

المعطيات: لدينا دائرة طول قطرها ١,٦ م.

مربع تقع رؤوسه على الدائرة

المطلوب: إيجاد طول ضلع المربع.

البرهان:

ليكن المربع أ ب ج د.

طول قطر الدائرة يساوي طول قطر المربع.

$$\therefore أ ب ج د = ١,٦ م.$$

ولكن $أ ب ج د = ٢\sqrt{٢}$ (العلاقة بين طول ضلع مربع وطول قطره)

$$\therefore أ ب ج د = \frac{١,٦}{\sqrt{٢}} = \frac{١,٦}{\sqrt{٢}} = ١,١٣$$

طول ضلع المربع يساوي ١,١٣ متر تقريباً.

حاول أن تحل

٥ في مثال (٥) أعلاه، أوجد طول نصف قطر الدائرة إذا كان طول ضلع المربع يساوي ١,٥ متر.

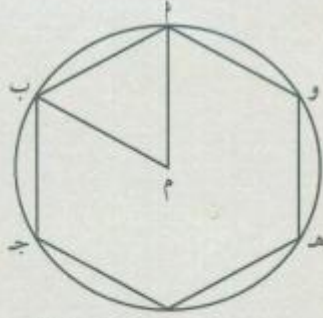
الزوايا المركزية والزوايا المحيطية Central and Inscribed Angles

سوف تتعلم

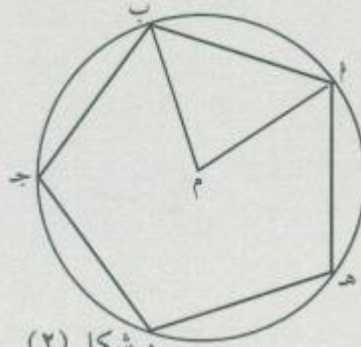
- الزاوية المركزية
- الزاوية المحيطية
- الزاوية المماسية على الدائرة
- العلاقة بين قياس الزاوية المركزية وقياس الزاوية المحيطية المشتركة في القوس نفسه
- العلاقة بين قياس الزاوية المماسية وقياس القوس المحصور بين ضلعيها

الأدوات المستخدمة:

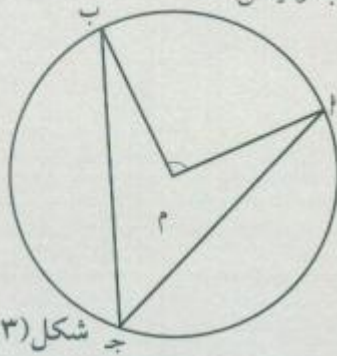
مسطرة، منقلة، فرجار



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

دعنا نفكر ونتناقش

١ في السداسي المنتظم المقابل (شكل ١)،

أثبت أن قياس القوس $\widehat{بب}$ يساوي 60° .

٢ ما قياس الزاوية المركزية $\widehat{مب}$ ؟

(يمكنك استخدام المنقلة).

٣ ما قياس كل من الزوايا المحيطية: $\widehat{وب}$ ؟

$\widehat{مب}$ ؟ $\widehat{دب}$ ؟ $\widehat{جب}$ ؟ ماذا تلاحظ؟

٤ في الشكل الخماسي المنتظم (شكل ٢)،

أثبت أن قياس القوس $\widehat{بب}$ يساوي 72° .

٥ ما قياس الزاوية المركزية $\widehat{مب}$ ؟

٦ ما قياس كل من الزوايا: $\widehat{مب}$ ؟ $\widehat{دب}$ ؟ $\widehat{جب}$ ؟

ماذا تلاحظ؟

٧ في الشكل (٣) هل توجد علاقة بين قياس الزاوية $\widehat{مب}$ وقياس

الزاوية $\widehat{جب}$ وقياس القوس $\widehat{بب}$ ؟

Central Angle and Inscribed Angle

١ - الزاوية المركزية والزاوية المحيطية

تعريف:

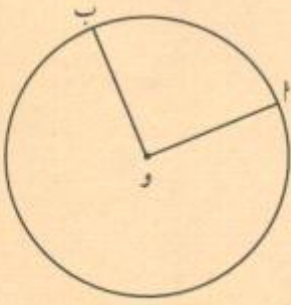
١ الزاوية التي رأسها مركز الدائرة تسمى بالزاوية المركزية.

٢ الزاوية التي رأسها إحدى نقاط الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمى بالزاوية المحيطية.

نظرية (١)

قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المحصور بين ضلعيها على الدائرة.

مثال (١)



في الشكل المقابل دائرة مركزها O. إذا كان $\angle AOB = 90^\circ$.
فأوجد $\angle AOB$.

الحل:

المعطيات: دائرة مركزها O

$$\angle AOB = 90^\circ$$

المطلوب: إيجاد $\angle AOB$.

البرهان:

O مركز الدائرة

$\angle AOB$ زاوية مركزية تقابل \widehat{AB}

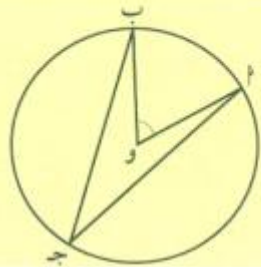
$$\angle AOB = \widehat{AB}$$

$$\therefore \angle AOB = 90^\circ$$

حاول أن تحل

١ إذا كان قياس زاوية مركزية 35° ، فأوجد قياس القوس على الدائرة المحصور بين ضلعيها.

نظرية (٢)



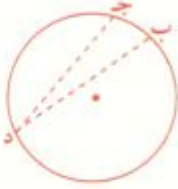
في الدائرة قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها.

$$\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \widehat{AB}$$

قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس نفسه.

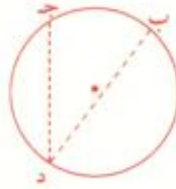
هناك ٣ حالات يجب أخذها في الاعتبار.

الحالة ٣



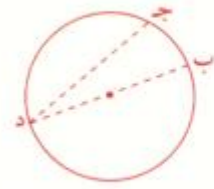
مركز الدائرة خارج الزاوية المحيطية

الحالة ٢



مركز الدائرة داخل الزاوية المحيطية

الحالة ١



ينتمي مركز الدائرة إلى أحد ضلعي الزاوية المحيطية

إثبات نظرية (٢)

الحالة ١:

المعطيات:

(ب د ج) زاوية محيطية. «و» مركز الدائرة، ينتمي إلى ب د.

المطلوب:

$$\angle(\widehat{ب د ج}) = \frac{1}{2} \angle(\widehat{ب ج د})$$

البرهان:

$$\angle(\widehat{ب و ج}) = \angle(\widehat{ب ج د})$$

نظرية

$$\angle(\widehat{ب و ج}) = \angle(\widehat{ب ج د}) + \angle(\widehat{و ج د}) \quad \Delta \text{ يوجد متطابق الضلعين}$$

$$\therefore \angle(\widehat{ب و ج د}) = \angle(\widehat{ب ج د})$$

$$\therefore \angle(\widehat{ب و ج}) = 2 \angle(\widehat{ب ج د})$$

$$\text{أي } \angle(\widehat{ب د ج}) = \frac{1}{2} \angle(\widehat{ب ج د})$$

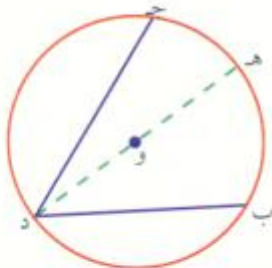
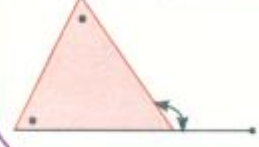
الحالة ٢:

المعطيات:

(ب د ج) زاوية محيطية. «و» مركز الدائرة داخل الزاوية.

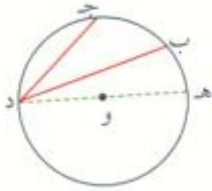
تذكر

قياس الزاوية الخارجة عن مثلث يساوي مجموع قياسي الزاويتين الداخليتين المجاورتين لها.





الربط بالحياة
 يتم تخزين البيانات
 على أقراص مدمجة
 CD يتسع كل منها
 حوالي ٧٠٠ ميغابايت
 وعلى دي في دي
 DVD يتسع كل منها
 لحوالي ٥, ٤ جيجابايت.



المطلوب:

$$\angle(\widehat{AB}) = \frac{1}{2} \angle(\widehat{ACB})$$

البرهان:

القطر الذي يمر بالنقطتين د، و يقطع الدائرة في هـ.

$$\angle(\widehat{ACB}) = \angle(\widehat{BCE}) + \angle(\widehat{ACE})$$

$$\angle(\widehat{ACB}) = \frac{1}{2} \angle(\widehat{BCE}) + \frac{1}{2} \angle(\widehat{ACE}) = \frac{1}{2} \angle(\widehat{BCE} + \widehat{ACE})$$

الحالة ٣:

المعطيات:

$\angle(\widehat{ACB})$ زاوية محيطية. «و» مركز الدائرة خارج الزاوية.

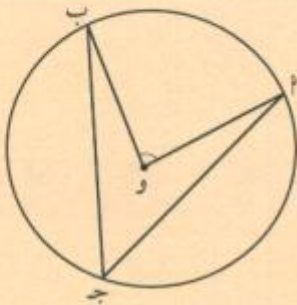
المطلوب:

$$\angle(\widehat{ACB}) = \frac{1}{2} \angle(\widehat{AOB})$$

البرهان:

$$\angle(\widehat{ACB}) = \angle(\widehat{AOB}) - \angle(\widehat{AOC}) = \frac{1}{2} \angle(\widehat{AOB}) - \frac{1}{2} \angle(\widehat{AOC}) = \frac{1}{2} \angle(\widehat{BOC})$$

مثال (٢)



$$\angle(\widehat{AOB}) = 80^\circ$$

في الشكل المقابل: إذا كان $\angle(\widehat{AOB}) = 80^\circ$ فأوجد $\angle(\widehat{ACB})$

الحل:

المعطيات: دائرة مركزها و. أ، ب، ج نقاط تنتمي إلى الدائرة.

المطلوب: إيجاد $\angle(\widehat{ACB})$.

البرهان:

$$\angle(\widehat{ACB}) = \frac{1}{2} \angle(\widehat{AOB}) \text{ : زاوية محيطية في الدائرة.}$$

$$= \frac{1}{2} (80^\circ) = 40^\circ$$

وبالتالي $\angle(\widehat{ACB}) = 40^\circ$

حاول أن تحل

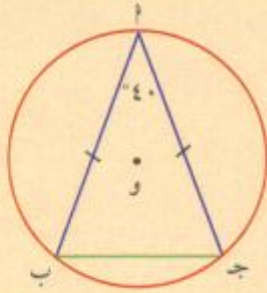
٢ إذا كان قياس زاوية محيطية في دائرة يساوي 54° ، فأوجد قياس القوس المحصور بين ضلعيها.

مثال (٣)

أوجد مثلث متطابق الضلعين حيث \hat{A} ، \hat{B} ، \hat{C} نقاط على الدائرة التي مركزها O ، $\hat{C}(\hat{A}\hat{B}) = 40^\circ$.
أوجد قياس كل من الأقواس \widehat{AB} ، $\widehat{B\hat{C}}$ ، $\widehat{A\hat{C}}$.

الحل:

المعطيات: دائرة مركزها O ، \hat{A} ، \hat{B} ، \hat{C} نقاط تنتمي إلى الدائرة. $\Delta \hat{A}\hat{B}\hat{C}$ متطابق الضلعين، $\hat{A} = \hat{B}$.
 $\hat{C}(\hat{A}\hat{B}) = 40^\circ$



المطلوب: إيجاد قياس كل من الأقواس \widehat{AB} ، $\widehat{B\hat{C}}$ ، $\widehat{A\hat{C}}$.

البرهان:

زوايا المثلث هي زوايا محيطية في الدائرة. $\therefore \hat{C}(\hat{A}\hat{B}) = \frac{1}{2} \widehat{AB}$

ومنه: $40^\circ = \frac{1}{2} \widehat{AB}$. $\therefore \widehat{AB} = 80^\circ = 2 \times 40^\circ$.

$\therefore \widehat{C}(\hat{A}\hat{B}) = 360^\circ - 80^\circ = 280^\circ$.

$\therefore \hat{A} = \hat{B}$.

$\therefore \widehat{C}(\hat{A}\hat{B}) = \widehat{C}(\hat{B}\hat{A}) = \frac{280^\circ}{2} = 140^\circ$.

حاول أن تحل

٣ في المثال (٣) إذا كان \hat{C} هـ، منتصف الزاوية الداخلية لـ \hat{C} ويقطع الدائرة في النقطة هـ. ما قياس القوس الأصغر \widehat{AH} ؟

مثال (٤)

في الشكل المقابل دائرة مركزها O . أثبت أن $\overline{DO} \perp \overline{AB}$ جـ

الحل:

المعطيات: \hat{A} ، \hat{B} جـ مثلث قائم الزاوية \hat{A} ، رؤوسه الثلاثة تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O .

\overline{AD} منتصف \widehat{AB} ويقطع الدائرة في D .

المطلوب: إثبات أن $\overline{DO} \perp \overline{AB}$ جـ

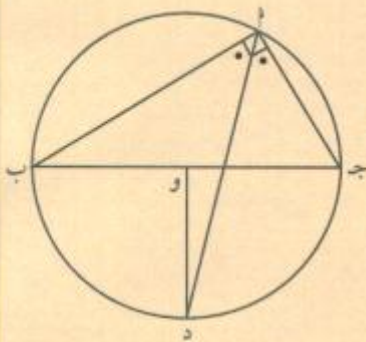
البرهان:

$\therefore \hat{C}(\hat{A}\hat{B}) = 90^\circ$.

\overline{AD} منتصف الزاوية \hat{A} جـ

$\therefore \hat{C}(\hat{A}\hat{D}) = 45^\circ$.

معطى



نظرية

$$\angle(\widehat{ج\hat{ا}د}) = \frac{1}{2} \angle(\widehat{دج\hat{ا}})$$

نظرية

$$\angle(\widehat{دج\hat{ا}}) = 90^\circ, \angle(\widehat{ج\hat{و}د}) = 90^\circ$$

$\therefore \overline{دو} \perp \overline{بج}$.

حاول أن تحل

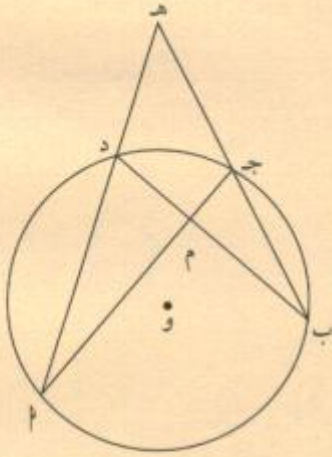
٤ في المثال (٤)، إذا كان $\angle(\widehat{بج\hat{ا}}) = 30^\circ$ ، أوجد $\angle(\widehat{ا\hat{د}ب})$.

مثال (٥)

في الشكل المقابل، أثبت أن: $\angle(\widehat{ب\hat{م}ا}) = \frac{\angle(\widehat{ب\hat{ا}د}) + \angle(\widehat{ج\hat{ا}د})}{2}$.

الحل:

المعطيات: $\hat{ا}$ ، $\hat{ب}$ ، $\hat{ج}$ ، $\hat{د}$ نقاط تنتمي إلى الدائرة التي مركزها $و$. ، $\overline{ا\hat{ج}ب} \cap \overline{ب\hat{د}ا} = \{م\}$ ، $\overline{ب\hat{ج}ا} \cap \overline{ا\hat{د}ب} = \{هـ\}$



$$\frac{\angle(\widehat{ب\hat{ا}د}) + \angle(\widehat{ج\hat{ا}د})}{2} = \angle(\widehat{ب\hat{م}ا})$$

البرهان:

$\angle(\widehat{ب\hat{م}ا})$ هي زاوية خارجة عن المثلث $ا\hat{م}د$.

$$\angle(\widehat{ب\hat{م}ا}) = \angle(\widehat{ب\hat{د}ا}) + \angle(\widehat{ا\hat{م}د})$$

$$\frac{\angle(\widehat{ب\hat{ا}د}) + \angle(\widehat{ج\hat{ا}د})}{2} = \frac{1}{2} \angle(\widehat{ب\hat{ا}د}) + \frac{1}{2} \angle(\widehat{ج\hat{ا}د})$$

حاول أن تحل

٥ في المثال (٥)، أثبت أن $\angle(\widehat{ب\hat{هـ}د}) = \frac{\angle(\widehat{ج\hat{ا}د}) - \angle(\widehat{ب\hat{ا}د})}{2}$.

مثال (٦)

أ ب ج د شكل رباعي دائري. أثبت أن $\angle(أب د) = \angle(أج د)$.

الحل:

المعطيات: أ ب ج د شكل رباعي دائري.

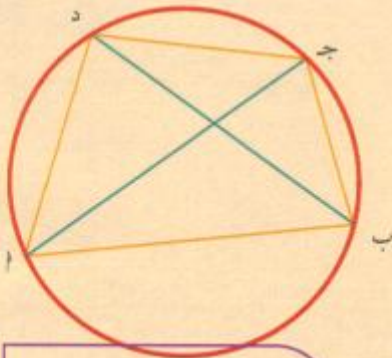
المطلوب: إثبات تساوي قياسي الزاويتين $\angle(أب د)$ ، $\angle(أج د)$.

البرهان: أ ب ج د شكل رباعي دائري.

(١) $\angle(أب د) = \frac{1}{2} \angle(أ د ب)$ ∴ زاوية محيطية.

(٢) $\angle(أج د) = \frac{1}{2} \angle(أ د ب)$ ∴ زاوية محيطية.

من (١)، (٢) نستنتج أن $\angle(أب د) = \angle(أج د)$.



معلومة رياضية:

الشكل الرباعي الدائري هو مضلع رباعي تقع رؤوسه على دائرة.

حاول أن تحل

٦ في المثال (٦)، أثبت أن $\angle(أ ب د) = \angle(أ ج د)$

مثال (٧)

أ ب قطر في دائرة مركزها و. من أ، ب نرسم وترين متوازيين يقطعان الدائرة في ج، د على الترتيب. أثبت أن الوترين هما على البعد نفسه من مركز الدائرة.

الحل:

المعطيات: أ ب قطر في دائرة مركزها و. $أ ج د // ب د$.

المطلوب: إثبات أن الوترين أ ج، ب د هما على البعد نفسه من المركز و.

العمل: من و نرسم مستقيماً متعامداً مع أ ج ويقطع أ ج في هـ ويقطع ب د في ي.

البرهان: $أ ج د // ب د$ ∴ وهما متعامدان مع ب د ويقطعها في النقطة ي. علينا إثبات أن $و هـ = و ي$.

في المثلثين أ هـ و ب ي: $أ هـ = ب ي$ و $أ هـ = ب ي$

$\angle(أ هـ و) = \angle(ب ي و) = 90^\circ$

$\angle(أ هـ و) = \angle(ب ي و)$

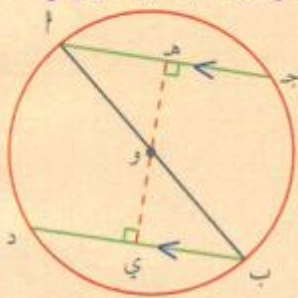
بالتبادل والتوازي

∴ المثلثان أ هـ و ب ي متطابقان (ز. ض. ز)

ومنه $و هـ = و ي$ (تطابق الأضلاع المتناظرة)

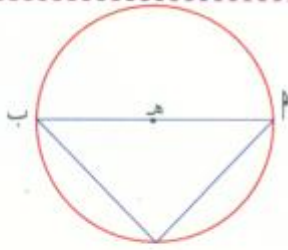
حاول أن تحل

٧ في المثال (٧)، أثبت أن $أ ج د = ب د$.



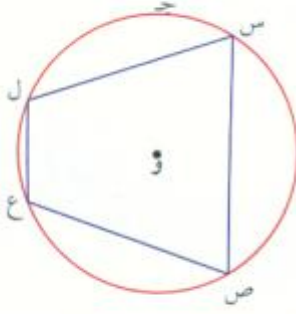
تدريب (١):

إذا كان \overline{AB} قطر في الدائرة التي مركزها هـ، جـ \in الدائرة، أثبت أن $\widehat{A} \widehat{B}$ زاوية قائمة.

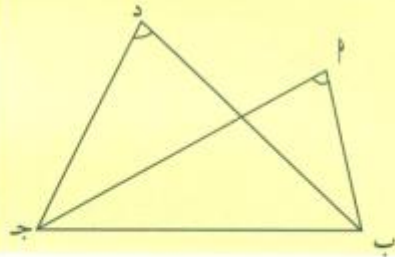


تدريب (٢):

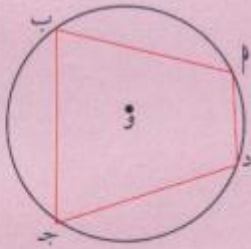
س ص ع ل شكل رباعي دائري. أثبت أن $\widehat{C}(\widehat{L} \widehat{S} \widehat{V}) + \widehat{C}(\widehat{L} \widehat{E} \widehat{V}) = 180^\circ$



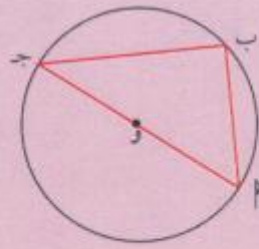
نتائج



- ١ كل زاويتين محيطيتين في دائرة تحصران القوس نفسه متطابقتان.
- ٢ كل زاوية محيطية في دائرة تحصر نصف دائرة تكون زاوية قائمة.
- ٣ كل شكل رباعي دائري (محاط بدائرة)، تكون زواياه المتقابلة متكاملة.
- ٤ في الشكل إذا تطابقت الزاويتان \widehat{A} ، \widehat{D} المرسومات على القاعدة \overline{BC} وفي جهة واحدة منها. كان الشكل \overline{AB} جـ د رباعياً دائرياً.

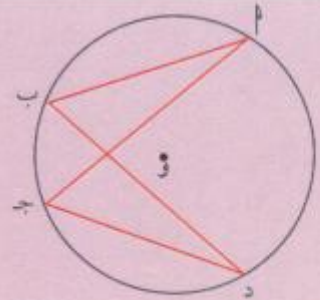


$$\widehat{C}(\widehat{A} \widehat{D}) + \widehat{C}(\widehat{B} \widehat{C}) = 180^\circ$$
$$\widehat{C}(\widehat{B} \widehat{C}) + \widehat{C}(\widehat{D} \widehat{A}) = 180^\circ$$



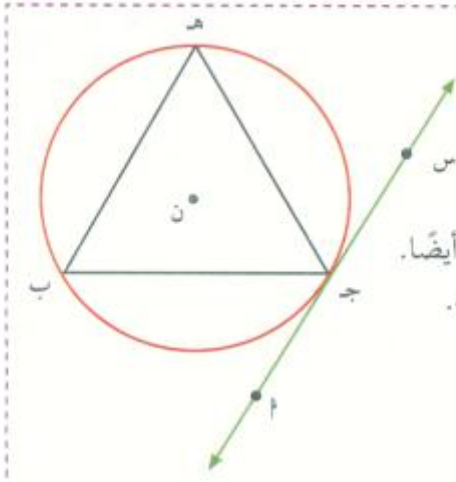
$$\widehat{A} \widehat{B} \widehat{C} \widehat{D} = \widehat{A} \widehat{B} \widehat{C} \widehat{D} = \text{نصف دائرة}$$
$$\therefore \widehat{C}(\widehat{A} \widehat{B} \widehat{C}) = 90^\circ$$

$\widehat{A} \widehat{B} \widehat{C}$ زاوية محيطية مرسومة على قطر الدائرة وهي زاوية قائمة



$$\widehat{A} \widehat{B} \widehat{C} \widehat{D}, \widehat{A} \widehat{C} \widehat{D} \widehat{B} \widehat{C} \widehat{D}$$
$$\therefore \widehat{C}(\widehat{A} \widehat{B} \widehat{C}) = \widehat{C}(\widehat{A} \widehat{C} \widehat{D})$$

تدريب (٣):



لتكن ب نقطة تنتمي إلى الدائرة التي مركزها ن
 أه مماس للدائرة عند النقطة ج
 ج ب وتر في الدائرة يمر بنقطة التماس جـ.

يسمى ج ب وتر التماس

الزاوية (م ج ب) تسمى زاوية مماسية، الزاوية (س ج ب) تسمى زاوية مماسية أيضًا.
 الزاوية (ج هـ ب) تشترك مع الزاوية المماسية في القوس نفسه باستخدام المنقلة.

أكمل:

$$\sphericalangle (م ج ب) = \sphericalangle (ج هـ ب)$$

$$\sphericalangle (ج هـ ب) = \sphericalangle (ج هـ ب)$$

ماذا تستنتج؟

نظرية (٣)

(١) قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطة المشتركة معها في القوس نفسه.

(٢) قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين المماس والوتر.

إثبات نظرية (٣)

المعطيات:

أه مماس للدائرة في ب.

ب ل وتر في الدائرة.

المطلوب:

إثبات أن $\sphericalangle (هـ ب ل) = \sphericalangle (ب م ل)$ حيث م نقطة تنتمي إلى الدائرة.

العمل: نرسم ب د قطر للدائرة يمر بنقطة التماس ب.

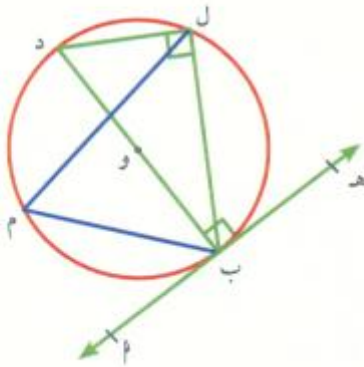
البرهان (١):

Δ ب ل د قائم الزاوية ل لأن ب د قطر في الدائرة.

$$\sphericalangle (هـ ب ل) + \sphericalangle (ل ب د) = 90^\circ \quad \text{خواص المماس للدائرة (١)}$$

$$\sphericalangle (ل ب د) + \sphericalangle (ب د ل) = 90^\circ \quad (\Delta ب ل د قائم الزاوية ل) \quad (٢)$$

من (١)، (٢) نستنتج أن:



$$\angle(ل\hat{ب}د) + \angle(ه\hat{ب}ل) = \angle(ه\hat{ب}ل) + \angle(ب\hat{د}ل) + \angle(ل\hat{ب}د)$$

$$\therefore \angle(ه\hat{ب}ل) = \angle(ب\hat{د}ل)$$

$$\text{ولكن } \angle(ب\hat{د}ل) = \angle(ب\hat{م}ل)$$

$$\therefore \angle(ه\hat{ب}ل) = \angle(ب\hat{م}ل) \text{ وهو المطلوب}$$

البرهان (٢):

$$\angle(ه\hat{ب}ل) = \angle(ب\hat{م}ل) \text{ من (١).}$$

$$\therefore \angle(ب\hat{م}ل) = \frac{1}{2} \angle(ب\hat{ك}ل) \text{ (خاصية الزاوية المحيطة).}$$

$$\therefore \angle(ه\hat{ب}ل) = \frac{1}{2} \angle(ب\hat{ك}ل) \text{ وهو المطلوب}$$

مثال (٨)

في الشكل المقابل إذا كان $\vec{ده}$ مماسًا للدائرة عند $ل$ ، فأوجد $\angle(ج\hat{آ}ب)$.

الحل:

المعطيات:

$\vec{ده}$ مماس للدائرة عند $ل$.

$$\angle(ه\hat{آ}ب) = 45^\circ, \angle(ل\hat{ب}ج) = 35^\circ$$

المطلوب: إيجاد $\angle(ج\hat{آ}د)$.

البرهان:

$$\angle(ل\hat{ج}ب) = \angle(ه\hat{آ}ب) = 45^\circ \text{ نظرية}$$

$$\therefore \angle(ج\hat{آ}ب) + \angle(ل\hat{ج}ب) + \angle(ل\hat{ب}ج) = 180^\circ$$

$$\therefore \angle(ج\hat{آ}ب) = 180^\circ - \angle(ل\hat{ج}ب) - \angle(ل\hat{ب}ج)$$

$$\angle(ج\hat{آ}ب) = 180^\circ - 45^\circ - 35^\circ = 100^\circ$$

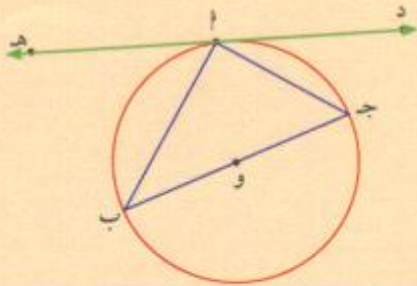
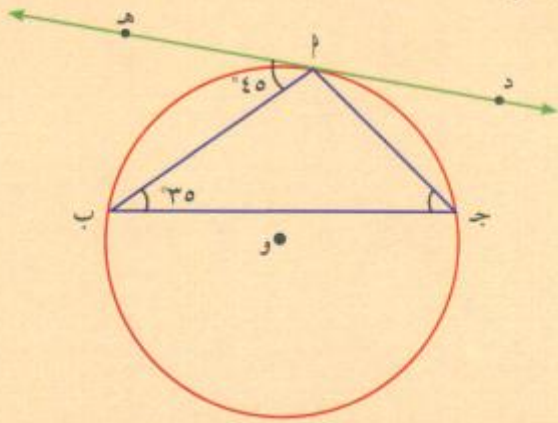
حاول أن تحل

٨ في الشكل المقابل، لدينا:

$$\angle(د\hat{آ}ج) = 40^\circ, \angle(ه\hat{آ}ب) = 50^\circ$$

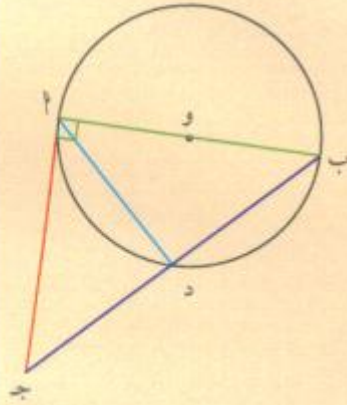
١ أوجد قياسات زوايا المثلث $ل\hat{ب}ج$.

٢ أثبت أن $\overline{ج\hat{ب}}$ قطر للدائرة.



مثال (٩)

أب قطر في دائرة مركزها و. نرسم مماساً للدائرة بحيث يكون
 $\angle ج = ٢$ نم. ب ج تقطع الدائرة في د. أثبت أن $\angle د = \angle ج$.



الحل:

المعطيات:

أب قطر في دائرة مركزها و. أ ج مماس للدائرة، $\angle ج = ٢$ نم، ب ج تقطع الدائرة في د

المطلوب: إثبات أن $\angle د = \angle ج$

العمل: نرسم أ د

البرهان:

ن(ج د أ) = ن(أ ب د) (نظرية الزاوية المماسية والزاوية المحيطة المشتركة معها في القوس نفسه) (١)

(أ ج مماس للدائرة).

أ ج \perp أ ب

$\angle ج = \angle ب = ٢$ نم

Δ أ ب ج قائم الزاوية أ متطابق الضلعين.

ومنه ن(أ ج د) = ن(أ ب د) (٢)

من (١)، (٢) نستنتج أن ن(ج د أ) = ن(أ ج د)

Δ أ د ج متطابق الضلعين $\therefore \angle د = \angle ج$

حاول أن تحل

٩ م ت مماس لدائرة مركزها و. م ن وتر في الدائرة بحيث يكون $\angle م = \angle ن$. ت (م نقطة التماس) ت ن تقطع الدائرة في ل.

أثبت أن Δ ت ل م متطابق الضلعين (ل ت = ل م)

مثال (١٠)

في الشكل المقابل، ده مماس للدائرة عند النقطة أ،

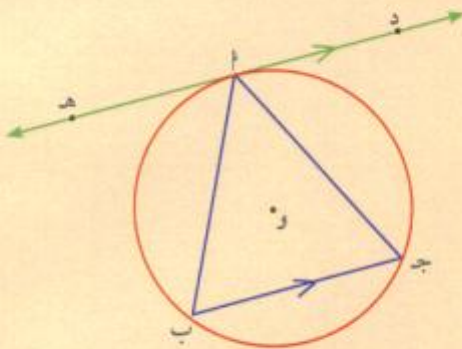
ب ج وتر في الدائرة مواز للمماس ده.

أثبت أن المثلث أ ب ج متطابق الضلعين.

الحل:

المعطيات: ده مماس للدائرة عند النقطة أ. ده // ب ج

المطلوب: أثبت أن Δ أ ب ج متطابق الضلعين



البرهان

$\overleftrightarrow{ده} // \overline{بج}$

بالتبادل والتوازي (١)

$$\therefore \widehat{ن(دأج)} = \widehat{ن(أج ب)}$$

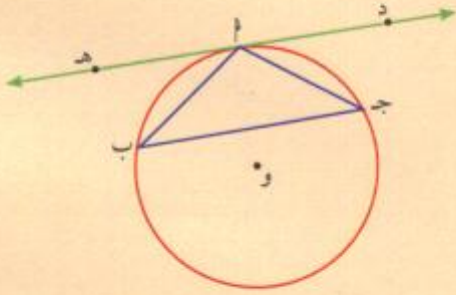
زاوية مماسية وزاوية محيطية تحصران القوس نفسه $\widehat{أج}$ (٢)

$$\therefore \widehat{ن(دأج)} = \widehat{ن(أج ب)}$$

$$(١)، (٢) \text{ تعطي: } \widehat{ن(أج ب)} = \widehat{ن(أب ج)}$$

$$\text{ومنه: } \widehat{أج} = \widehat{أب}$$

أي أن المثلث متطابق الضلعين



حاول أن تحل

١٠ في الشكل المقابل، إذا كان لدينا $\overleftrightarrow{ده}$ مماس للدائرة عند النقطة أ.

المثلث أب ج متطابق الضلعين ($\widehat{أب} = \widehat{أج}$).

أثبت أن $\overleftrightarrow{ده}$ مواز لـ $\overline{بج}$.

مثال (١١)

بيّن الشكل المقابل دائرة مركزها و، $\overline{بج}$ قطر طوله ٥ سم.

ك نقطة في مواضع مختلفة وفق الأسئلة.

في كل مما يلي، حدّد ما إذا كانت ك تنتمي إلى الدائرة أم لا.

أ $\Delta ب ج ك$ متطابق الضلعين ($\widehat{ك} = \widehat{ب} = \widehat{ج}$).

$$\widehat{ن(ب)} = ٤٥^\circ$$

$$\text{ب } \widehat{ن(ب)} = ٤٨^\circ، \widehat{ن(ج)} = ٣٥^\circ$$

$$\text{ج } ب ك = ٣ \text{ سم، ك ج} = ٤ \text{ سم.}$$

د طول القطعة المتوسطة في $\Delta ب ج ك$ المارة بالنقطة ك يساوي ٣ سم.

ه نقطة انعكاس ك حول و تنتمي إلى الدائرة.

الحل:

$$\text{أ } \widehat{ن(ب)} = ٤٥^\circ$$

\therefore المثلث ب ك ج متطابق الضلعين

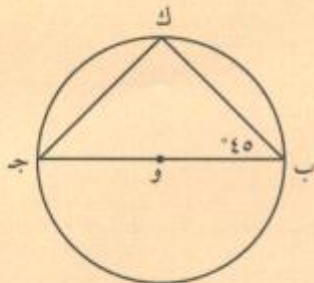
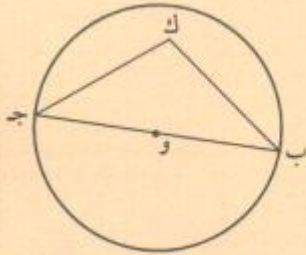
$$\therefore \widehat{ن(ج)} = ٤٥^\circ \text{ ومنه } \therefore \widehat{ن(ك)} = ٩٠^\circ$$

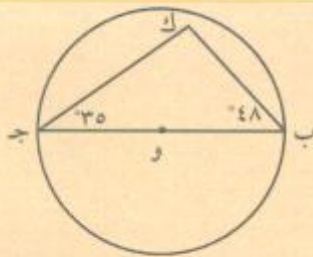
\therefore زاوية قائمة مرسومة على قطر الدائرة

\therefore ك تنتمي إلى الدائرة.

تذكر

القطعة المتوسطة في مثلث هي قطعة تصل بين رأس من رؤوس المثلث ومنتصف القاعدة المقابلة لهذا الرأس.





ب. $\therefore \angle(ك) = 180^\circ - (\angle(ب) + \angle(ج)) = 180^\circ - (48^\circ + 35^\circ) = 97^\circ$.

\therefore الزاوية ك ليست قائمة

\therefore ك لا تنتمي إلى الدائرة.

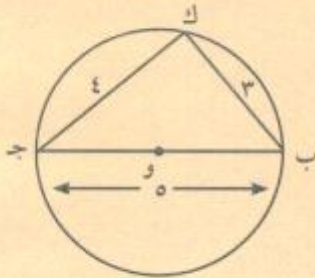
ج. $25 = 16 + 9 = (جك)^2 + (بك)^2$

\therefore ب ج = 5 سم \therefore (ب ج) = 25 سم²

\therefore (ب ك) = 3 سم \therefore (ب ج) = 9 سم²

Δ ب ك ج قائم الزاوية ك (عكس نظرية فيثاغورث)

\therefore ك تنتمي إلى الدائرة.

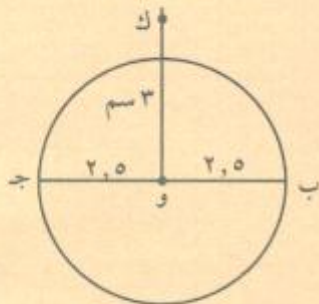


د. طول القطعة المتوسطة للمثلث ب ك ج: ك و = 3 سم

\therefore طول القطر = 5 سم \therefore ك و = 3 سم

\therefore ك و < 5

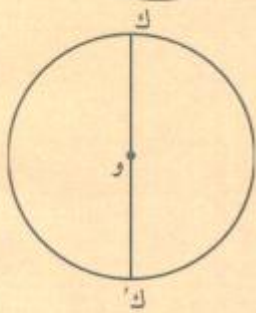
\therefore ك لا تنتمي إلى الدائرة.



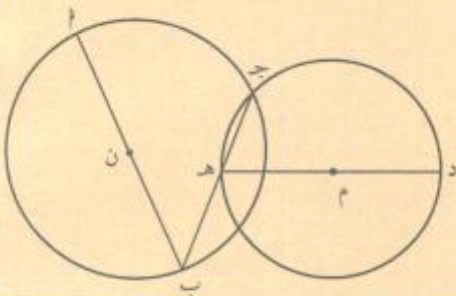
هـ. و مركز تناظر الدائرة.

\therefore صورة ك بالانعكاس حول و تنتمي إلى الدائرة

\therefore ك تنتمي إلى الدائرة.



حاول أن تحل



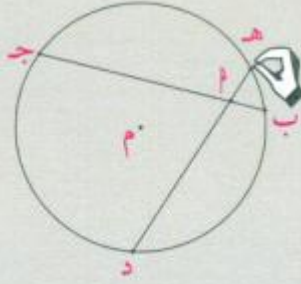
١١ في الشكل المقابل، أثبت أن النقاط ل، ج، د تقع على مستقيم واحد.

الدائرة: الأوتار المتقاطعة، المماس

Circle: Intersecting Chords and Tangent

سوف تتعلم

- الأوتار المتقاطعة
- المماس
- العلاقة بين وترين متقاطعين داخل الدائرة
- العلاقة بين طول القاطع المماسية وطول القاطع



عمل تعاوني

١ ارسم دائرة مركزها م، ثم ارسم وترين

ده، ب ج يتقاطعان في نقطة أ.

ب قس طول أب، أ ج، هـ أ، أ د.

أوجد نواتج الضرب أب × أ ج، هـ أ × أ د.

ج كرر الرسم والقياس واكتب ما تلاحظه.

د حاول أن تكتشف علاقة ما بين نواتج الضرب.

هـ خمن العلاقة بين نواتج ضرب أطوال الأجزاء التي ينقسم إليها وتران متقاطعان في دائرة.

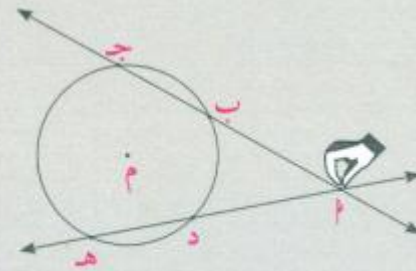
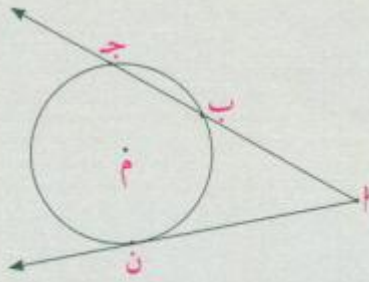
٢ ارسم دائرة أخرى، ثم ارسم قاطعين يقطعان الدائرة من نقطة خارج هذه الدائرة.

ب قس طول: أب، أ ج، أ د، هـ أ وأوجد نواتج الضرب: أب × أ ج، هـ أ × أ د.

ج خمن علاقة عامة بالنسبة إلى قاطعين من نقطة خارج دائرة.

الأدوات المستخدمة:

مسطرة، منقلة، فرجار



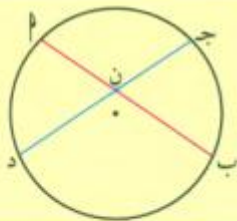
٣ من نقطة خارج دائرة م ارسم أ ج يقطع الدائرة في ب، ج ثم مماسًا للدائرة أن يمسه في ن. ابحث عن العلاقة بين

أ ب × أ ج، (أ ن)² مستفيدًا من تخمينك السابق.

Intersecting Chords Inside the Circle

١ - تقاطع الأوتار داخل الدائرة

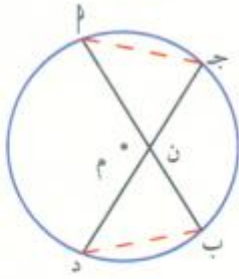
نظرية (١)



إذا تقاطع وتران داخل دائرة، فإن ناتج ضرب طولي جزئي أحد الوترين يساوي

ناتج ضرب طولي جزئي الوتر الآخر.

$$ن أ × ن ب = ن ج × ن د$$



برهان نظرية (١)

المعطيات: \overline{AB} ، \overline{CD} وتران متقاطعان في النقطة ن.

المطلوب: إثبات أن: $\overline{AN} \times \overline{NB} = \overline{CN} \times \overline{ND}$

العمل: نرسم \overline{PQ} ، \overline{BQ} ، \overline{PD} .

البرهان:

$$\angle(\widehat{ANQ}) = \angle(\widehat{DNB})$$

$$\angle(\widehat{BQ}) = \angle(\widehat{PD})$$

$$\Delta ANQ \sim \Delta DNB$$

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{DN}} = \frac{\overline{NQ}}{\overline{NB}}$$

$$\overline{AN} \times \overline{NB} = \overline{DN} \times \overline{ND}$$

زاويتان متقابلتان بالرأس

زاويتان محيطيتان مرسومتان على القوس \widehat{AD} نفسه

تطابق الزوايا

تناسب أطوال الأضلاع المتناظرة في المثلثين المتشابهين

مثال (١)

في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.

الحل:

باستخدام نظرية (١) نكتب:

$$\overline{AN} \times \overline{NB} = \overline{CN} \times \overline{ND}$$

$$7 \times 8 = 2 \times 28$$

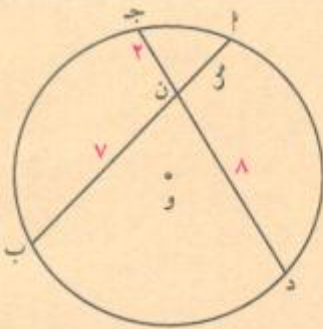
$$7 \times 8 = 56$$

$$\frac{7 \times 8}{7} = \frac{56}{7}$$

$$8 = \frac{56}{7}$$

حاول أن تحل

١ في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.

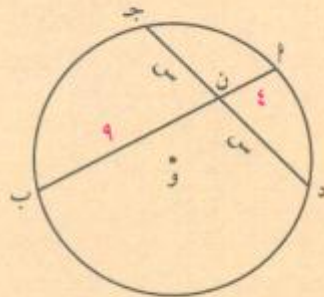


نظرية

بالتعويض

بالتبسيط

بالقسمة



مثال (٢)

هندسة معمارية: أنشئ جسر مشاة لعبور أحد الأنهار وكان قوس هذا الجسر على شكل قوس من الدائرة، بحيث كان طول الوتر الواصل بين طرفي الجسر في هذه الدائرة ٩٠ م. إذا كان طول العمود المقام من منتصف الوتر ٢١ م، فارسم شكلاً تقريبياً لهذا التصميم، ثم أوجد طول قطر الدائرة.

الحل:

المعطيات: طول الوتر = ٩٠ م طول العمود = ٢١ م

المطلوب: إيجاد طول قطر الدائرة

البرهان: ∵ العمود المنتصف لوتر يمر بمركز الدائرة (نظرية). ∴ د ج قطر في الدائرة.

من تقاطع القطر والوتر نجد أن:

$$٤٥ \times ٤٥ = ٢١ \times س$$

$$س = \frac{٤٥ \times ٤٥}{٢١} = ٩٦,٤٣ \text{ تقريباً}$$

$$\text{طول القطر} \approx ٩٦,٤٣ + ٢١$$

$$\approx ١١٧,٤٣$$

طول القطر = ١١٧ مترًا تقريباً.

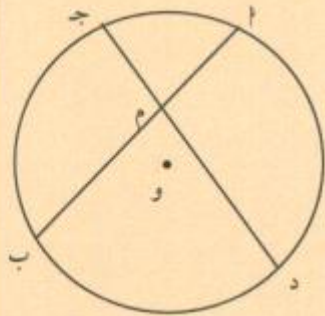
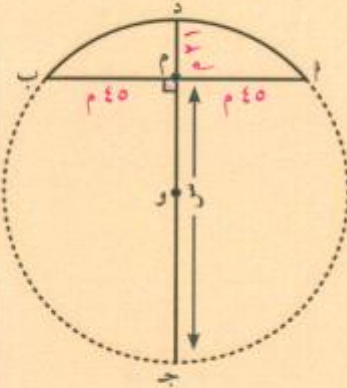
حاول أن تحل

٢ في الدائرة المقابلة التي مركزها و: م أ = ٤ سم، م ب = ٦ سم، م ج = ٣ سم، م د = ٥ سم.

١ أوجد قيمة س

ب أوجد البعد بين المركز و والوتر د ج إذا علمت أن طول نصف

قطر الدائرة يساوي ٨ سم.



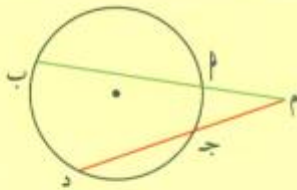
Intersecting Chords Outside the Circle

٢ - تقاطع الأوتار خارج الدائرة

نتيجة (١)

إذا رسم قاطعان من نقطة خارج دائرة، فإن ناتج ضرب طول أحد القاطعين في طول جزئه الخارجي يساوي ناتج ضرب طول القاطع الآخر في طول جزئه الخارجي.

$$م أ \times م ب = م ج \times م د.$$



برهان نتيجة (1)

المعطيات: م ب، م د قاطعان يلتقيان في النقطة م خارج الدائرة.

المطلوب: إثبات أن: $م ب \times م د = م ج \times م د$

العمل: نرسم $أد$ ، $ج ب$.

البرهان: المثلثان $م أ د$ ، $م ج ب$ فيهما:

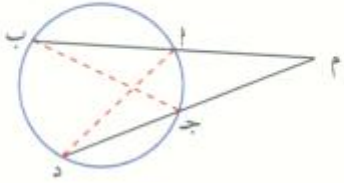
$$\angle م أ د = \angle م ج ب$$

$$\angle م د أ = \angle م د ب$$

$$\therefore \Delta م أ د \sim \Delta م ج ب$$

$$\therefore \frac{م أ}{م ج} = \frac{م د}{م ب}$$

$$م أ \times م ب = م ج \times م د$$



زاوية مشتركة

زاويتان محيطيتان تحصران $\angle م$

تطابق الزوايا

مثال (3)

في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.

الحل:

المعطيات: ب أ، د ج وتران للدائرة التي مركزها و يتقاطع امتدادهما خارجها عند النقطة م.

المطلوب: إيجاد قيمة س

البرهان:

$$م ب \times م د = م ج \times م د$$

$$س(س + ٤) = (٢ + س)٤$$

$$س^2 + ٤س - ٨ = ٠$$

$$س = \frac{-٤ \pm \sqrt{٤^2 - 4(١)(-٨)}}{2(١)}$$

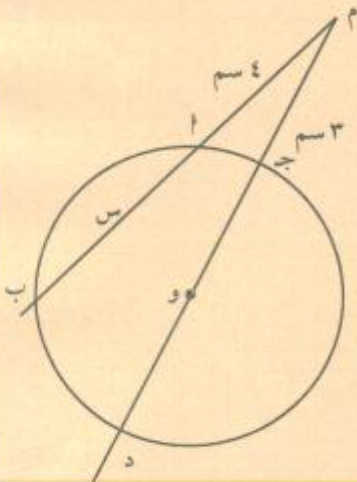
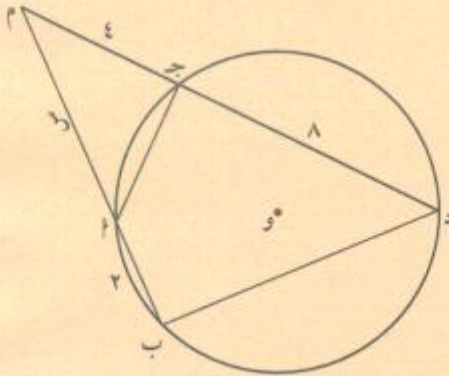
$$س = ٦ \text{ أو } س = -٨$$

فتكون قيمة س = ٦ لأن س = -٨ مرفوضة

حاول أن تحل

٣ في الشكل المقابل، دائرة مركزها و. طول نصف قطرها يساوي ٤ سم.

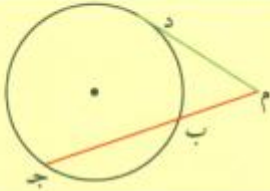
أوجد قيمة س.



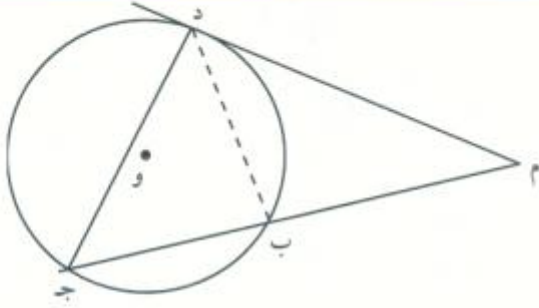
٣ - تقاطع مماس وقاطع الدائرة من نقطة خارج دائرة

Intersection Between Tangent and Secant from any Point Outside of a Circle

نتيجة (٢)



إذا رسم من نقطة خارج دائرة قاطع ومماس، فإن ناتج ضرب طول القاطع في طول جزئه الخارجي يساوي مربع طول القطعة المماسية.
 $(م د)^2 = م ب \times م ج$.



برهان نتيجة (٢)

المعطيات: دائرة مركزها O، $\overline{م د}$ قطعة مماسية، $\overline{م ج}$ قاطع
المطلوب: إثبات أن $(م د)^2 = م ب \times م ج$

البرهان:

$$\Delta م د ب \sim \Delta م ج د$$

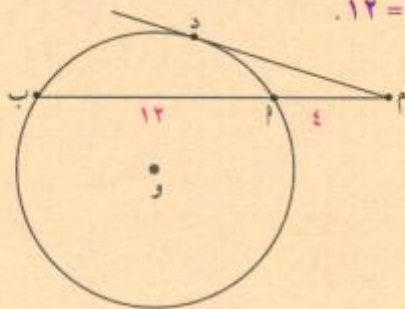
$\widehat{م}$ زاوية مشتركة

$$\frac{م د}{م ب} = \frac{م ج}{م د}$$

نكتب التناسب $\frac{م د}{م ب} = \frac{م ج}{م د}$ ومنه نأخذ: $\frac{م د}{م ج} = \frac{م ب}{م د}$

باستخدام الضرب التقاطعي نجد: $(م د)^2 = م ب \times م ج$

مثال (٤)



في الشكل المقابل، أوجد طول القطعة المماسية $\overline{م د}$ علمًا بأن: $م م = ٤$ ، $م ب = ١٢$.

الحل:

نجد طول $\overline{م ب}$ أولاً: $م ب = ١٢ + ٤ = ١٦$

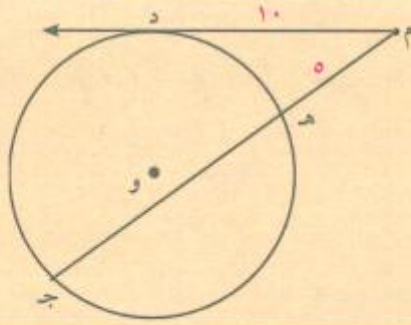
نكتب: $(م د)^2 = م ب \times م ج$ نتيجة

بالتعويض $١٦ \times ٤ = (م د)^2$

بالتبسيط $٦٤ = (م د)^2$

بإيجاد الجذر $٨ = م د$

حاول أن تحل



٤ في الشكل المقابل، \overline{MD} قطعة مماسية حيث $MD = 10$ م
 $MH = 5$ م. أوجد طول \overline{HJ} .

مثال (٥)

أراد أحد الأشخاص معرفة طول القطعة المماسية من النقطة P إلى النقطة B على الدائرة، فأخذ مسطرة ووضع الصفر عند النقطة P فوجد أن المسطرة تتقاطع مع الدائرة عند النقطة J بحيث $JP = 4$ سم وعند النقطة D بحيث $PD = 9$ سم. ما طول القطعة المماسية \overline{PB} ؟

الحل: جبرياً

المعطيات: $JP = 4$ سم، $PD = 9$ سم، \overline{PB} قطعة مماسية.

المطلوب: إيجاد طول \overline{PB} .

البرهان:

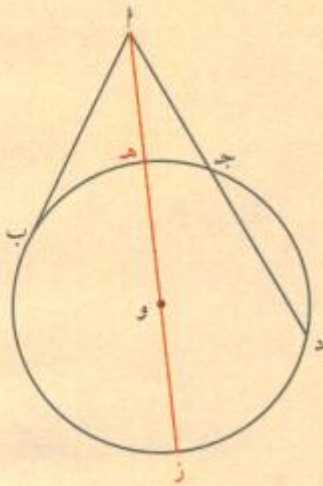
$$(\overline{PB})^2 = \overline{PJ} \times \overline{PD}$$

$$(\overline{PB})^2 = 4 \times 9$$

$$(\overline{PB})^2 = 36$$

$$\overline{PB} = 6$$

فيكون طول \overline{PB} يساوي ٦ سم



نتيجة

بالتعويض

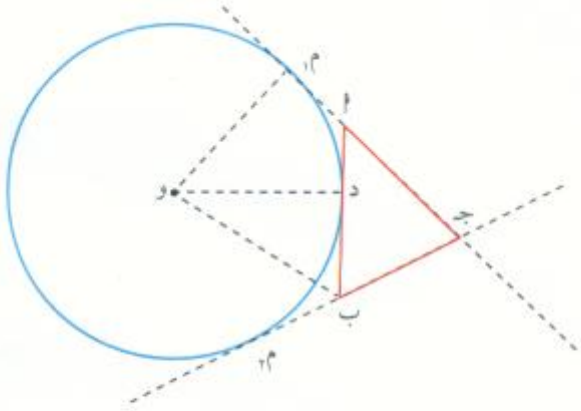
بالتبسيط

بإيجاد الجذر التربيعي

حاول أن تحل

٥ في المثال (٥). أوجد طول نصف قطر الدائرة إذا كانت $PH = 2$ سم.

المرشد لحل المسائل



ج م_١ ، ج م_٢ قطعتان مماسيتان للدائرة.
د نقطة متحركة على القوس الأصغر م_١ م_٢.
مماس الدائرة في د يقطع ج م_١ في م_١، ج م_٢ في ب.

سألت سلوى:

أين نضع د بحيث يكون محيط المثلث أب ج هو أكبر ما يمكن؟

فكرت هند:

سأستخدم خواص مماس الدائرة.

محيط المثلث = ج م_١ + أب + ج ب

$$= ج م - م_١ م + د ب + د م + م_١ م - م_١ ب = ج م - م_١ ب + د ب + د م$$

ولكن: م_١ م = د م ، ب م = د ب (خاصية المماسين المتقاطعين على الدائرة)

$$- م_١ م + د م = ٠ ، - ب م + د ب = ٠$$

$$\therefore \text{محيط المثلث} = ج م + ج م = ٢ ج م$$

استنتاج:

محيط Δ أب ج ثابت ولا يتغير مع تغير موقع النقطة د.

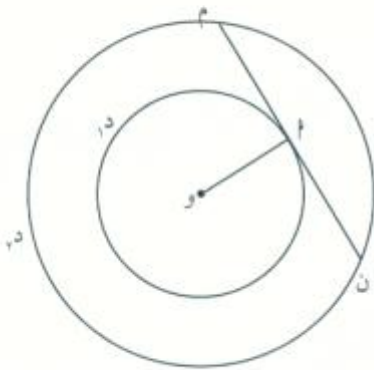
مسألة إضافية:

د_١، د_٢ دائرتان متحدتا المركز و.

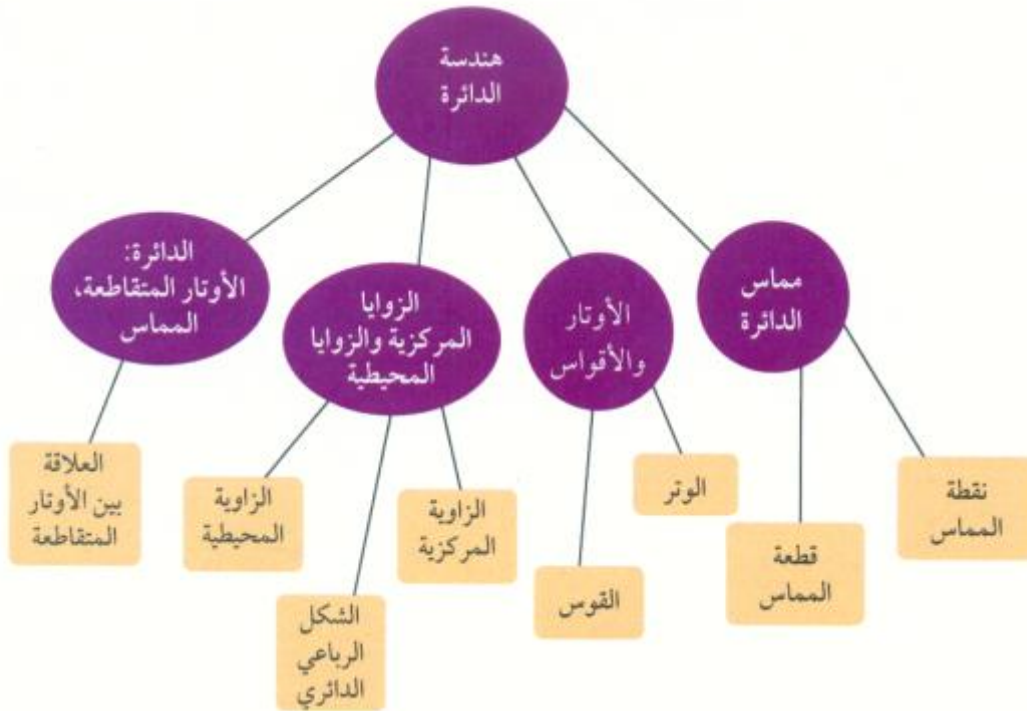
م نقطة على د_١.

مماس د_٢ المار في م يقطع د_١ في م، ن.

أثبت أن م منتصف م ن.



مخطط تنظيمي للوحدة السادسة



ملخص

- المماس لدائرة هو مستقيم في المستوي يتقاطع مع الدائرة في نقطة واحدة.
- إذا كان مستقيم مماساً لدائرة، فإنه يكون متعامداً مع نصف القطر المار بهذه النقطة.
- إذا تعامد مستقيم مع نصف قطر دائرة وكانت نقطة التعامد تنتمي إلى الدائرة، يكون المستقيم مماساً للدائرة.
- إذا تقاطع مماسان لدائرة في نقطة، تكون القطعتان المماسيتان متطابقتين.
- الدائرة المحاطة بمثلث هي دائرة مماسة لأضلاع المثلث من الداخل ومركزها نقطة تلاقي منصفات الزوايا الداخلية للمثلث.
- في دائرة أو في دوائر متطابقة:
 - للزوايا المركزية المتطابقة أوتار متطابقة.
 - الأوتار المتطابقة تقابل أقواساً متطابقة.
- للأقواس المتطابقة في دائرة زوايا مركزية متطابقة.
- الأوتار المتطابقة في دائرة هي على أبعاد متساوية من مركز الدائرة.
- في الدائرة: القطر العمودي على وتر ينصفه وينصف كلاً من قوسيه.
- القطر الذي ينصف وترًا (ليس قطرًا) هو عمودي على الوتر.

- العمود المنتصف لو تر يمر بمركز الدائرة.
- الزوايا المركزية زوايا رأسها مركز الدائرة.
 - الزوايا المحيطية زوايا رأسها إحدى نقاط دائرة وضلعها يقطعان الدائرة.
 - قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المحصور بين ضلعيها.
 - قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها.
 - كل زاويتين محيطيتين تحصران القوس نفسه متطابقتان.
 - كل زاوية محيطية تحصر نصف دائرة هي زاوية قائمة.
 - كل شكل رباعي دائري (محاط بدائرة) تكون زواياه المتقابلة متكاملة، أي كل زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان.
 - الزاوية المكونة من مماس ووتر تسمى زاوية مماسية، وقياسها يساوي نصف قياس القوس المحصور بين المماس والوتر.
 - إذا تقاطع وتران داخل دائرة، فإن ناتج ضرب طولي جزءي أحد الوترين يساوي ناتج ضرب طولي جزءي الوتر الآخر.
 - إذا رسم قاطعان من نقطة خارج دائرة، فإن ناتج ضرب طول أحد القاطعين في طول جزئه الخارجي يساوي ناتج ضرب طول القاطع الآخر في طول جزئه الخارجي.
 - إذا رسم من نقطة خارج دائرة مماس وقاطع، فإن ناتج ضرب طول القاطع في طول جزئه الخارجي يساوي مربع طول القطعة المماسية.

المصفوفات Matrices

مستويات المركب في التربة (ملجم / كجم)

العينة	ب	ت	ي	س
١	٠,٠٦	٠,٩٥	٠,٩	١٨,٥
٢	٠,٠٦	١,٠٥	٠,٧٣	١٣,٥
٣	٠,٣٥	٦	٥,٦	٤٩
٤	٠,٢٢	٠,١٩	٢	١٩,٥
٥	٠,١١	٠,٨٢	٢,٥	٢٦

أ عرض بيانات الجدول في ٤ مصفوفات.

ب استخدم هذه المصفوفات، وأوجد توفيقه البنزين والتوليدين وإيثيل البنزين والإكسيلين بالمليجرام/كجم لكل عينة تراب.

ج بعد ١٢ شهراً، لاحظ العلماء أن النسبة المئوية لكل مركب في كل عينة من التربة قد انخفضت إلى حدود ٠,٠٥ ملجم/كجم. فمثلاً، نسبة البنزين أصبحت في العينة الأولى ٠,٠١ وفي العينة الثانية ٠,٠١ وفي العينة الثالثة ٠,٣٠ وفي العينة الرابعة ١٧,٠ وفي العينة الخامسة ٠,٠٦. استخدم المصفوفات لحساب نقصان كل مركب في كل عينة.

د **التقرير:** حقق بحثاً عن موقع النفايات التي تتضمن خطورة، والتي تمت معالجتها حيويًا. ما مدى اتساع الموقع؟ ما طرق المعالجة الأخرى التي يمكن استخدامها بخلاف المعالجة الحيوية؟

اكتب فقرات قليلة تلخص بحثك وتتضمن بيانات عن الموقع كلما أمكن.

مشروع الوحدة: المعالجة الحيوية (Biotherapy).

١ **مقدمة المشروع:** يعتبر تسرب الزيت والمواد الكيميائية إلى المياه الجوفية من أهم مخاطر العصر الحديث، كما وتستخدم البكتيريا في مجال المعالجة الحيوية التي تتكوّن طبيعياً في محيط البيئة للحدّ من هذه الأخطار.

٢ **الهدف:** عند العمل في هذه الوحدة، سوف تحلل بيانات المشروع، وسوف تعالجها، وتستخدم النتائج لرسم المحتويات وتوقعها، ومن ثم سوف تبحث عن مصادر مشاريع أخرى. وفي النهاية، سوف تلخص ما ستجده وتوضحه للمساعدة في تكملة المشروع.

٣ **الواجب:** آلة حاسبة بيانية.

٤ **أسئلة حول التطبيق:** يوضح الجدول بيانات من نتائج تحليل العلماء لخمس عينات عشوائية من التربة نفسها. في أحد مشاريع المعالجة الحيوية، وجدوا التالي من عناصر المنتجات البترولية الخطرة: البنزين (ب)، التوليدين (ت) وهو سائل عديم اللون، إيثيل البنزين (ي)، إكسيلين (س) وهو مركب هيدروكربوني. اعرض البيانات في أربع مصفوفات، ثم اختر عنصرًا من كل مصفوفة، واذكر ماذا يمثل.

دروس الوحدة

تنظيم البيانات في مصفوفات	جمع المصفوفات وطرحها	ضرب المصفوفات	مصفوفات الوحدة و النظير الضربي (المعكوسات)	حل نظام من معادلتين خطيتين
١-٧	٢-٧	٣-٧	٤-٧	٥-٧

أضف إلى معلوماتك

يستخدم الناس في أغلب المجالات، البيانات المرتبة في قاعدة منظمة، وإحدى طرق تنظيم البيانات بصورة مختصرة هي كتابتها في صورة مصفوفة، بذلك نستطيع جمع المصفوفات وطرحها وضربها. كما يمكن استخدام ذلك للحصول على معلومات إضافية تساعد في اتخاذ القرار. تاريخياً، استخدمت المصفوفات لحل رسائل مشفرة، كما ويمكن استخدام ضرب المصفوفات في مسائل وتطبيقات حياتية.

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت تمثيل العلاقات باستخدام المتغيرات .
- تعلمت تبسيط العبارات الجبرية المتضمنة أعداداً صحيحة وكسوراً وإيجاد قيمتها.
- تعلمت تمثيل معادلات من متغيرين.
- تعلمت رسم المعادلات والمثابيات بيانياً.
- تعلمت رسم نظام من المعادلات أو المثابيات بيانياً.

ماذا سوف تتعلم؟

- سوف تستخدم المصفوفات لتنظيم البيانات.
- سوف تعرف المصفوفات المتساوية.
- سوف تستخدم جمع المصفوفات وطرحها لحل معادلات المصفوفات في مواقف حياتية.
- سوف تستخدم ضرب المصفوفات لحل مسائل حياتية.
- سوف تستخدم معكوسات المصفوفات لحل معادلات المصفوفات في مسائل حياتية.
- سوف تحل نظاماً من معادلتين خطيتين باستخدام قاعدة كرامر.



المصطلحات الأساسية

مصفوفة - أعمدة - صفوف - عنصر المصفوفة - العناصر المتناظرة - مصفوفة الجمع - المصفوفة الصفرية - العنصر المحايد الجمعي - العدد القياسي - مصفوفات الضرب - المصفوفة المربعة - مصفوفة الوحدة - النظير الضربي للمصفوفة (معكوس المصفوفة) - قاعدة كرامر - محدد المصفوفة.

تنظيم البيانات في مصفوفات Organising Data Into Matrices

سوف تتعلم

- تنظيم البيانات في مصفوفات
- المصفوفات المتساوية

عمل تعاوني

يبين الجدول الأرقام القياسية لأسعار المستهلك حسب أقسام الإنفاق الرئيسة:

مقارنة يناير ٢٠١١ بـ يناير ٢٠١٢. سنة الأساس ٢٠٠٠ = صفرًا

أقسام الإنفاق الرئيسة	يناير ٢٠١١	يناير ٢٠١٢
الرقم القياسي العام	١٤٦,٠	١٥١,١
المواد الغذائية	١٧٢,٠	١٨٥,٩
الحلويات	١٦٣,٢	١٦٩,١
الملابس	١٥٤,٨	١٥٩,٨
خدمات المسكن	١٤٨,٢	١٥١,٢
سلع وخدمات منزلية	١٣٧,٣	١٣٩,٨

© المصدر: الإدارة المركزية للإحصاء الكويت.

- ١ كم بلغت نسبة الزيادة في الرقم القياسي العام؟
- ٢ في أي قسم كانت نسبة الزيادة الأكبر؟ وفي أي قسم كانت الأصغر؟
- ٣ أضف عمودًا في نهاية الجدول عنوانه معدل التضخم % وأكمه.
- ٤ إذا أردت المقارنة بين أشهر يناير من العام ٢٠١٠ حتى العام ٢٠١٢، فماذا عليك أن تفعل؟

تعريف

المصفوفة هي تنظيم من الأعداد المرتبة في صفوف وأعمدة.

الأعداد المكونة للمصفوفة تسمى عناصر **Elements**.

رتبة المصفوفة Dimension of a Matrix

نرمز إلى المصفوفة بأحد حروف الهجاء ونضع تحته خطأً، نكتب **P** ونقرأ المصفوفة **P**.
عدد الصفوف (م) وعدد الأعمدة (ن) يحددان رتبة المصفوفة وتكتب م × ن.

$$P = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

المصفوفة **P** هي من الرتبة ٢ × ٣.

ملاحظة: لكتابة رتبة المصفوفة نكتب أولاً عدد الصفوف يليه عدد الأعمدة.

مثال (١)

اكتب رتبة كل مصفوفة مما يلي:

$$\begin{bmatrix} ٥ & ٦ & ٤ \\ ٧ & ٣ & ٢ \\ ٩ & ٠ & ١ \end{bmatrix} = \underline{\underline{أ}}$$

$$\begin{bmatrix} ٣ & -\frac{٢}{٣} & ٤ \end{bmatrix} = \underline{\underline{ب}}$$

$$\begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٠,٥ \end{bmatrix} = \underline{\underline{ج}}$$

الحل:

- تتكون المصفوفة أ من ٣ صفوف و ٣ أعمدة: المصفوفة من الرتبة ٣×٣ .
تتكون المصفوفة ب من صف واحد و ٣ أعمدة: المصفوفة من الرتبة ٣×١ .
تتكون المصفوفة ج من ٤ صفوف وعمود واحد: المصفوفة من الرتبة ١×٤ .

حاول أن تحل

١ اكتب رتبة كل مصفوفة مما يلي:

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٥ & ٤ \\ ٧ & ٠,٥ & ٢ \end{bmatrix} = \underline{\underline{أ}}$$

$$\begin{bmatrix} ١٠ & ٣ & ٨ \end{bmatrix} = \underline{\underline{ب}}$$

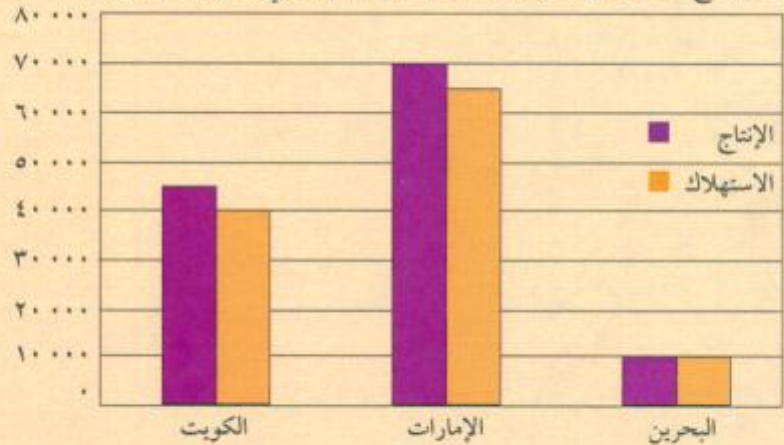
$$\begin{bmatrix} ٠ & ١٠ \\ ٥ & ١ \\ ٩ & ٠,٦ \end{bmatrix} = \underline{\underline{ج}}$$

تطبيقات حياتية

مثال (٢)

الطاقة: يمكن أن تقاس الطاقة الكهربائية بالجيجاوات/ ساعة. اكتب مصفوفة تمثل بيانات الرسم البياني التالي بالأعمدة المزدوجة.

نشرة إنتاج الطاقة الكهربائية والاستهلاك لإحدى السنوات في بعض الدول العربية



الحل:

افرض أن كل صف في المصفوفة يمثل دولة، وكل عمود يمثل مستوى الإنتاج أو الاستهلاك. استنتج عناصر المصفوفة من الرسم.

الإنتاج	الاستهلاك	
٤٥٠٠٠	٤٠٠٠٠	الكويت
٧٠٠٠٠	٦٥٠٠٠	الإمارات
١٠٠٠٠	١٠٠٠٠	البحرين

حاول أن تحل

- ٢ أ وضح كيف يمكنك تعديل المصفوفة لتشمل البيانات التي أضيفت إليها دول أخرى.
- ب أعد كتابة عناصر المصفوفة السابقة في مصفوفة من الرتبة 3×2 . ضع عنواناً للمصفوف والأعمدة.
- ج وضح الفرق بين المصفوفة التي رتبها ج \times د والمصفوفة التي رتبها د \times ج.

يمكنك أيضاً استخدام المصفوفات لعرض البيانات في الجداول.

مثال (٣)

تطبيقات حياتية

الرياضة: اكتب المصفوفة ب لتمثيل المعلومات في الجدول التالي، الذي يوضح النقاط الممنوحة لمحاولات بعض لاعبي الجمباز في إحدى دورات الألعاب الأولمبية [اليوم الثاني من المسابقة].

معلومة تاريخية:

اليونانيون القدماء
أرسى اليونانيون القدماء
والرومان شكلاً بدائياً لرياضة
الجمباز في الألعاب الأولمبية
القديمة والتي استمرت من عام
٧٦٦ ق.م إلى عام ٣٩٣ ق.م.
بدأ تدريس رياضة الجمباز
التي نعرفها اليوم في ألمانيا عام
١٧٧٦ م.

(موسوعة جينيس للأرقام القياسية)

الرياضة اللاعب	تمارين أرضية	عارضة الاتزان	أعمدة غير مستوية	وثب
الأول	٩,٧٨٧	٩,٨٦٢	٩,٧٨٧	٩,٦٢٥
الثاني	٩,٧١٢	٩,٢٧٥	٩,٨٢٥	٩,٨٠٠
الثالث	٩,٦١٢	٩,٨٢٥	٩,٩٥٠	٩,٨٥٠
الرابع	٩,٧١٢	٩,٢٨٧	٩,٨٢٥	٩,٧٣٧
الخامس	٩,٩٢٥	٩,٨٢٥	٩,٧٠٠	٩,٩٥٠

الحل:

يمكنك استخدام مصفوفة لها خمسة صفوف وأربعة أعمدة (مصفوفة 5×4). كل عمود يمثل إحدى ألعاب الجمباز المذكورة.

$$\text{كل صف يمثل نتائج لاعب مختلف} = \begin{bmatrix} 9,625 & 9,787 & 9,862 & 9,787 \\ 9,800 & 9,825 & 9,275 & 9,712 \\ 9,850 & 9,950 & 9,825 & 9,612 \\ 9,737 & 9,825 & 9,287 & 9,712 \\ 9,950 & 9,700 & 9,825 & 9,925 \end{bmatrix}$$

حاول أن تحل

٣ اكتب المصفوفة جـ لتمثل النقاط الممنوحة لبعض لاعبي الجمباز.

الرياضة اللاعب	تمارين أرضية	حصان المقابض	الحلقات الثابتة	العارضتان المتوازيتان
الأول	9,725	9,700	9,587	9,837
الثاني	9,650	9,537	9,712	9,775
الثالث	9,512	9,650	9,650	9,712

ترميز عناصر المصفوفة

ويحدّد أيّ عنصر في المصفوفة بدلالة رقمي الصفّ والعمود الواقع فيهما، فمثلاً، في المصفوفة P العنصر الذي في الصفّ الأول والعمود الثالث نرسم إليه بالرمز p_{13} (الصفّ أولاً والعمود ثانياً).

$$\text{العنصر في الصفّ الأول والعمود الثالث: } p_{13} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

مثال (٤)

في المصفوفة: $\underline{ب}$ = $\begin{bmatrix} ٤ & ٥ & ١ & ١٢ \\ ٣,٥ & ٢ & ٦ & ٢ \\ ٤- & ١ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$ اكتب قيمة كل عنصر مما يلي:

ج ب_{١١}

ب ب_{١٣}

أ ب_{٢٢}

الحل:

- أ) العنصر ب_{٢٢} يقع في الصف ٢ وفي العمود ٢. ∴ ب_{٢٢} = ٦
ب) العنصر ب_{١٣} يقع في الصف ٣ وفي العمود ١. ∴ ب_{١٣} = ١
ج) العنصر ب_{١١} يقع في الصف ١ وفي العمود ١. ∴ ب_{١١} = ١٢

حاول أن تحل

٤ في المثال (٤)، أوجد ب_{٢٢} من المصفوفة $\underline{ب}$.

Square , Horizontal and Vertical Matrices

المصفوفات: المربعة، الأفقية، العمودية

- **المصفوفة المربعة:** هي مصفوفة فيها عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة.
- وفي ما عدا ذلك، تسمى المصفوفة: مصفوفة مستطيلة Rectangular Matrix.
- **المصفوفة الأفقية:** هي مصفوفة مكونة من صف واحد Horizontal Matrix.
- **المصفوفة العمودية:** هي مصفوفة مكونة من عمود واحد Vertical Matrix.
- **فكر وناقش:** هل يمكن لمصفوفة أن تكون عمودية وأفقية معاً؟

مثال (٥)

صنّف كلّاً من المصفوفات التالية:

معلومة رياضية:

المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار تسمى مصفوفة صفرية

Zero Matrix

ويرمز إليها بالرمز $n \times n$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0, 2 \end{bmatrix} = \underline{\text{ب}} \quad \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 0 \\ 8 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \underline{\text{أ}}$$

$$\begin{bmatrix} 1, 4 & 3 & 2 \\ 5 & 8 & 12 \end{bmatrix} = \underline{\text{د}} \quad [5 \quad 4 \quad 3] = \underline{\text{ج}}$$

الحل:

أ : مصفوفة 3×3 . أ : مصفوفة مربعة.

ب : مصفوفة 1×3 . ب : مصفوفة عمودية.

ج : مصفوفة 3×1 . ج : مصفوفة أفقية.

د : مصفوفة 3×2 . د : مصفوفة مستطيلة.

حاول أن تحل

٥ صنّف المصفوفات في المثال (١).

Equal Matrices

المصفوفات المتساوية:

تكون مصفوفتان متساويتين إذا كانت لهما الرتبة (الأبعاد) نفسها، وكانت عناصرهما المتناظرة متساوية والعكس صحيح. المصفوفة التي عدد صفوفها (ج)، وعدد أعمدتها (د) هي من الرتبة ج \times د.

مثال (٦)

$$\begin{bmatrix} ٠,٢ & \frac{٣-}{٤} \\ ٢- & ٠,٥ \end{bmatrix} = \underline{\underline{ب}} \quad , \quad \begin{bmatrix} \frac{١}{٥} & ٠,٧٥- \\ ٢- & \frac{١}{٢} \end{bmatrix} = \underline{\underline{أ}}$$

الحل:

كلّ من أ، ب لهما صفّان وعمودان، وعناصرهما المتناظرة متساوية، وبالتالي فالمصفوفتان أ، ب متساويتان.

حاول أن تحل

٦ هل المصفوفتان س، ص متساويتان؟ فسّر.

$$\begin{bmatrix} ٩ & ١- \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} = \underline{\underline{ص}} \quad , \quad \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢- & ٠ \end{bmatrix} = \underline{\underline{س}}$$

والآن، يمكنك أن تستخدم تعريف المصفوفات المتساوية لحلّ المعادلات.

مثال (٧)

$$\text{إذا كانت: } \begin{bmatrix} ٤ & ٢٥ \\ ١٨+ص & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٥-س٢ \\ ١٢+ص٣ & ٣ \end{bmatrix} \text{ فأوجد قيمة كل من } س, ص.$$

الحل:

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٢٥ \\ ١٨+ص & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٥-س٢ \\ ١٢+ص٣ & ٣ \end{bmatrix}$$

بما أن المصفوفتين متساويتان، فإن عناصرهما المتناظرة متساوية.

$$\begin{array}{l|l} ١٨+ص = ١٢+ص٣ & ٢٥ = ٥-س٢ \\ ٦ = ص٢ & ٣٠ = س٢ \\ ٣ = ص & ١٥ = س \end{array}$$

الحل هو: $س = ١٥$ ، $ص = ٣$

حاول أن تحل

$$\text{أوجد قيمة كل من } س, ص. \text{ إذا كانت } \begin{bmatrix} ٥ & ٨+س \\ ص- & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٣٨ \\ ١٠-ص٤ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$\text{ب) إذا كانت } [١٠- \quad ٤ \quad ٩-] = [ص- \quad ص \quad ص+٣] \text{ فأوجد قيمة كل من } س, ص.$$

جمع المصفوفات وطرحها

Adding and Subtracting Matrices

سوف تتعلم

- جمع المصفوفات
- طرح المصفوفات
- حل المعادلات المصفوفية

عمل تعاوني

إحصائياً: اعمل مع زميل لك. استخدم المعلومات في الجدول:

المتوسط الحسابي للدرجات				
الرياضيات		اللغة		السنة
ذكور	إناث	ذكور	إناث	
٨٢	٧٦	٨٣	٨٥	٢٠٠٠
٨٥	٧٤	٨٥	٨٧	٢٠٠١
٧٨	٧٥	٨٧	٩٠	٢٠٠٢
٨٠	٧٨	٨٢	٨٦	٢٠٠٣

- أوجد من الجدول مجموع المتوسطين الحسابيين لدرجات الذكور في كل سنة.

ب) أوجد من الجدول مجموع المتوسطين الحسابيين لدرجات الإناث في كل سنة.
- اكتب مصفوفة تمثل المتوسط الحسابي لدرجات اللغة للذكور والإناث للسنوات الأربع. ضع عنواناً لكل من: المصفوفة، وصفوفها، وأعمدتها.

ب) اذكر رتبة هذه المصفوفة.
- اكتب مصفوفة تمثل المتوسط الحسابي لدرجات الرياضيات للذكور والإناث للسنوات الأربع. ضع عنواناً لكل من: المصفوفة، وصفوفها، وأعمدتها.

ب) اذكر رتبة المصفوفة.
- بالنظر إلى إجابتك عن السؤال الأول والمصفوفات التي كتبتها في السؤالين ٢، ٣. اكتب مصفوفة ثالثة تمثل مجموع المتوسطين الحسابيين لدرجات الذكور والإناث للسنوات الأربع. ضع عنواناً لكل من: المصفوفة، وصفوفها، وأعمدتها.

ب) اذكر رتبة هذه المصفوفة.
- استخدم ملاحظاتك وأي أنماط تراها لصياغة طريقة لجمع المصفوفات.

معلومة رياضية:

العناصر المتناظرة في المصفوفات هي العناصر التي لها الموضع نفسه في كل مصفوفة.

Adding and Subtracting Matrices

جمع المصفوفات وطرحها

تريد أحياناً أن تجمع المصفوفات أو تطرحها لكي تحصل على معلومات جديدة.

لجمع مصفوفتين \underline{A} ، \underline{B} يجب أن تكونا من الرتبة نفسها.

نجمع كل عنصرين لهما الموقع نفسه في \underline{A} ، \underline{B} . مصفوفة الجمع لها رتبة كل من المصفوفتين \underline{A} ، \underline{B} .

$$\underline{A} + \underline{B} = \underline{C}$$

معلومة رياضية:

كل عنصرين لهما الموقع نفسه في المصفوفتين اللتين لهما الرتبة نفسها يسميان عنصرين متناظرين.

\underline{A} من الرتبة $m \times n$ ، \underline{B} من الرتبة $m \times n$

∴ \underline{C} من الرتبة $m \times n$.

$$\text{جوس} = \underline{A} + \text{بوس}$$

مثال (1)

$$\begin{bmatrix} 3- & 9 & 3 \\ 12 & 6 & 9- \end{bmatrix} = \underline{C} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3- \\ 4- & 2 \\ 5 & 1- \end{bmatrix} = \underline{B} \quad \begin{bmatrix} 0 & 2- & 1 \\ 7 & 5- & 3 \end{bmatrix} = \underline{A}$$

فأوجد إن أمكن:

$$\text{أ} \quad \underline{A} + \underline{B} \quad \text{ب} \quad \underline{B} + \underline{A}$$

وإذا لم يكن الجمع ممكناً، فاذكر السبب.

الحل:

أ $\underline{A} + \underline{B}$. لا يمكن الجمع، لأن رتبة \underline{A} هي 2×3 لا تساوي رتبة \underline{B} وهي 3×2 .

ب $\underline{B} + \underline{A}$. يمكن الجمع، لأن المصفوفتين لهما الرتبة نفسها: 3×2 .

$$\begin{bmatrix} 3- & 7 & 4 \\ 19 & 1 & 6- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-0 & 9+2- & 3+1 \\ 12+7 & 6+5- & 9-3 \end{bmatrix} = \underline{B} + \underline{A}$$

رتبة $\underline{B} + \underline{A}$ هي 3×2 .

حاول أن تحل

$$\text{1} \quad \begin{bmatrix} 1- & 3- \\ 4 & 5- \\ 7- & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 24 & 12- \\ 5 & 3- \\ 10 & 1- \end{bmatrix} \quad \text{أوجد ناتج ما يلي:}$$

مثال (٢)

تطبيقات حياتية

الرياضة: في رياضة الخماسي الحديث، والتي تجرى منافسات فيها على مدار يوم واحد، يكون على كل متسابق أو لاعب أن يشارك في الألعاب الخمس: الرماية، المبارزة بالسيف، السباحة، الفروسية، اختراق الضاحية. من الجدول التالي، أوجد مجموع النقاط التي حصل عليها كل لاعب في الألعاب الخمس أثناء منافساتهم في إحدى البطولات.



الرياضة	رماية	مبارزة بالسيف	سباحة	فروسية	اختراق الضاحية
الأول	١١٥٦	٨١٦	١١٨٨	٨٨٩	١١٦٨
الثاني	١٠٣٦	٨١٦	١٢٨٠	٨٢٦	١٢١٠
الثالث	١٠٢٤	٦٧٨	١٢٩٦	١٠٧٠	١٢٧٠

الحل:

اكتب خمس مصفوفات ١×٣ ، ثم اجمع المصفوفات:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1168 \\ 1210 \\ 1270 \end{bmatrix} = \underline{\underline{ه}}, \quad \begin{bmatrix} 889 \\ 826 \\ 1070 \end{bmatrix} = \underline{\underline{د}}, \quad \begin{bmatrix} 1188 \\ 1280 \\ 1296 \end{bmatrix} = \underline{\underline{ج}}, \quad \begin{bmatrix} 816 \\ 816 \\ 678 \end{bmatrix} = \underline{\underline{ب}}, \quad \begin{bmatrix} 1156 \\ 1036 \\ 1024 \end{bmatrix} = \underline{\underline{أ}} \\
 & \begin{bmatrix} 1168 \\ 1210 \\ 1270 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 889 \\ 826 \\ 1070 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1188 \\ 1280 \\ 1296 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 816 \\ 816 \\ 678 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1156 \\ 1036 \\ 1024 \end{bmatrix} = \underline{\underline{ه}} + \underline{\underline{د}} + \underline{\underline{ج}} + \underline{\underline{ب}} + \underline{\underline{أ}} \\
 & \begin{bmatrix} 5217 \\ 5168 \\ 5338 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1168 + 889 + 1188 + 816 + 1156 \\ 1210 + 826 + 1280 + 816 + 1036 \\ 1270 + 1070 + 1296 + 678 + 1024 \end{bmatrix} =
 \end{aligned}$$

وبالتالي فاللاعب الفائز في هذه الألعاب هو اللاعب الثالث.

حاول أن تحل

- ٢ ا وضح لماذا لا تستطيع أن تجمع المصفوفات إلا إذا كانت لها الرتبة نفسها فقط.
 ا استخدم جمع المصفوفات لإثبات أن العبارة التالية صحيحة:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 11 & 10 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 11 & 10 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

خواص جمع المصفوفات

إذا كان \underline{A} ، \underline{B} ، \underline{C} مصفوفات من الرتبة $m \times n$ فإن:

- $\underline{A} + \underline{B}$ هي من الرتبة $m \times n$ خاصة الإفتال (الانغلاق)
- $\underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A}$ خاصة الإبدال Commutative
- $(\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C} = \underline{A} + (\underline{B} + \underline{C})$ خاصة التجميع Associative
- $\underline{A} = 0 \times \underline{A} + \underline{A} = \underline{A} + 0 \times \underline{A}$ المصفوفة الصفرية هي العنصر المحايد الجمعي من الرتبة $m \times n$
- $\underline{A} + (-\underline{A}) = 0$ خاصة المعكوس الجمعي (النظير الجمعي).

مثال (٣)

إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ، $\underline{B} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $\underline{C} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$

فأوجد: $\underline{A} + \underline{B}$ ، $\underline{B} + \underline{A}$ ، $(\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C}$ ، $\underline{A} + (\underline{B} + \underline{C})$ ، $\underline{A} + 0$ ، $0 + \underline{A}$ ، $(-\underline{A}) + \underline{A}$.
 الحل:

$$\underline{A} + \underline{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} + \underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} + (\underline{B} + \underline{C}) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} + 0 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

معلومة رياضية:

المصفوفة $-\underline{A}$ هي النظير الجمعي للمصفوفة \underline{A} .

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3- & 2- \\ 1 & 4- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1- & 4 \end{bmatrix} = (\underline{3-}) + \underline{2}$$

حاول أن تحل

٣ في المثال (٣)، أوجد $\underline{ج} + \underline{ب}$ ، $\underline{ج} + (\underline{ب})$.

طرح المصفوفات

يمكن طرح المصفوفات باستخدام خاصية مصفوفة المعكوس الجمعي.

إذا كان للمصفوفتين $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$ الرتبة نفسها، فإن $\underline{أ} - \underline{ب} = \underline{أ} + (\underline{ب-})$.

مثال (٤)

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 2- \end{bmatrix} = \underline{ب} \quad , \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1- \end{bmatrix} = \underline{أ}$$

أوجد $\underline{أ} - \underline{ب}$.

الحل:

الطريقة الأولى:

$$\underline{أ} - \underline{ب} = \underline{أ} + (\underline{ب-})$$

$$\begin{bmatrix} 3- & 4- & 1- \\ 4- & 2- & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1- \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (3-)+4 & (4-)+2 & (1-)+3 \\ (4-)+0 & (2-)+4 & (2)+1- \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2- & 2 \\ 4- & 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

الطريقة الثانية:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 2- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1- \end{bmatrix} = \underline{أ} - \underline{ب}$$

$$\begin{bmatrix} 3-4 & 4-2 & 1-3 \\ 4-0 & 2-4 & (2-)-1- \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2- & 2 \\ 4- & 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

ملاحظة:

إذا كان $\underline{أ} \neq \underline{ب}$ ولهما الرتبة نفسها

فإن: $\underline{أ} - \underline{ب} \neq \underline{ب} - \underline{أ}$

وبالتالي، عملية طرح

المصفوفات ليست إبدالية.

حاول أن تحل

٤ أوجد ناتج كل مما يلي:

$$\text{أ} \quad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4- \\ 10 & 5 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 9- & 6 \\ 8 & 1 & 2- \end{bmatrix}$$

$$\text{ب} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3- \\ 4- & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 3- \\ 10 & 1- \end{bmatrix}$$

Solving Matrix Equations

حل المعادلات المصفوفية

المعادلة المصفوفية هي معادلة إحدى مصفوفاتها غير معلومة (المتغير).

يمكنك استخدام خواص المساواة لحل المعادلات المصفوفية.

لأي مصفوفات \underline{A} ، \underline{B} ، \underline{C} ، جـ لها الرتبة نفسها إذا كان: $\underline{A} = \underline{B}$ ، فإن: $\underline{A} + \underline{C} = \underline{B} + \underline{C}$ ، $\underline{A} - \underline{C} = \underline{B} - \underline{C}$.

مثال (٥)

حل المعادلة المصفوفية التالية:

$$\underline{S} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\underline{S} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\underline{S} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \text{ وبالتالي: } \underline{S} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

بإضافة $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ لكل من طرفي المعادلة

حاول أن تحل

٥ أوجد \underline{S} حيث:

$$\underline{S} - \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 4 & 4- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1- \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

ضرب المصفوفات Matrix Multiplication

سوف تتعلم

- ضرب مصفوفة في عدد
- الضرب القياسي
- ضرب المصفوفات



عمل تعاوني

اعمل مع زميل لك. استخدم البيانات في الجدول:

مبيعات مطعم			
وجبة ٣	وجبة ٢	وجبة ١	
٢,٠٠٠ دينار	١,٧٥٠ دينار	٢,٥٠٠ دينار	ثمن وجبة الغداء
٧٥	١٠٠	٥٠	عدد الوجبات المباعة

١ ما ثمن: وجبات الغداء ١، وجبات الغداء ٢، وجبات الغداء ٣؟

٢ ما ثمن الوجبات المباعة؟

ب وضح كيف استخدمت البيانات الموجودة في الجدول لإيجاد الإجابة.

٣ أ اكتب مصفوفة ٣×١ لتمثل ثمن كل وجبة مباعة.

ب اكتب مصفوفة ١×٣ لتمثل عدد الوجبات المباعة.

ج الكتابة: استخدم الكلمات: (صف، عمود، عنصر) لتصف إجراءات استخدام المصفوفات التي حصلت عليها، لإيجاد المبلغ بالدينار الذي يبيع به المطعم جميع الوجبات.

Multiplying a Matrix by a Scalar

ضرب مصفوفة في عدد

يمكنك أن تضرب عدد حقيقي في مصفوفة مثل:

$$3 \begin{bmatrix} 15 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 & 18 \\ 27 & 36 \end{bmatrix}$$

العدد الحقيقي يسمى العدد القياسي

Scalar Multiplication

الضرب القياسي

الضرب القياسي هو عملية ضرب مصفوفة M في عدد قياسي k : $k \neq 0$.

الناتج هو المصفوفة kM .

نحصل على المصفوفة kM بضرب كل عنصر من M في k .

إذا كان $k = 0$ ، يكون الناتج مصفوفة صفرية.

معلومة رياضية:

رتبة المصفوفة kM تساوي
رتبة المصفوفة M .

مثال (١)

$$\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ٣ & ١- & ٢- \end{bmatrix} = \underline{\text{ب}} \quad , \quad \begin{bmatrix} ٤- & ٣ & ٢ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{bmatrix} = \underline{\text{أ}}$$

فأوجد: $\underline{\text{أ}}$ ، $\underline{\text{ب}}$ ، ثم $\underline{\text{أ}} - \underline{\text{ب}}$

الحل:

$$\begin{bmatrix} ٢٠- & ١٥ & ١٠ \\ ١٥ & ٢٠ & ٢٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (٤-) \times ٥ & ٣ \times ٥ & ٢ \times ٥ \\ ٣ \times ٥ & ٤ \times ٥ & ٥ \times ٥ \end{bmatrix} = \underline{\text{أ}}$$

$$\begin{bmatrix} ٦ & ٣ & ٠ \\ ٩ & ٣- & ٦- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \times ٣ & ١ \times ٣ & ٠ \times ٣ \\ ٣ \times ٣ & (١-) \times ٣ & (٢-) \times ٣ \end{bmatrix} = \underline{\text{ب}}$$

$$\begin{bmatrix} ٢٦- & ١٢ & ١٠ \\ ٦ & ٢٣ & ٣١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٣ & ٠ \\ ٩ & ٣- & ٦- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢٠- & ١٥ & ١٠ \\ ١٥ & ٢٠ & ٢٥ \end{bmatrix} = \underline{\text{أ}} - \underline{\text{ب}}$$

حاول أن تحل

١ من المثال (١)، أوجد:

ب $\underline{\text{ب}} + \underline{\text{أ}}$

أ $\underline{\text{أ}} - \underline{\text{ب}}$

مثال (٢)

الطعام: يخطط مطعم لرفع ثمن كل نوع من الشراب ليصبح مرة ونصف المرة، فكم سيكون ثمن كل نوع؟ (استخدم لائحة الأسعار في الجدول)



حجم كبير	حجم صغير	
٠,٥٠٠ دينار	٠,٣٠٠ دينار	لبن قليل الدسم
٠,٩٠٠ دينار	٠,٦٠٠ دينار	عصير البرتقال
٠,٨٠٠ دينار	٠,٥٠٠ دينار	عصير المانجو

الحل:

اضرب كل عنصر في ١,٥ .

$$\begin{bmatrix} ٠,٤٥٠ & ٠,٧٥٠ \\ ٠,٩٠٠ & ١,٣٥٠ \\ ٠,٧٥٠ & ١,٢٠٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (٠,٣٠٠)١,٥ & (٠,٥٠٠)١,٥ \\ (٠,٦٠٠)١,٥ & (٠,٩٠٠)١,٥ \\ (٠,٥٠٠)١,٥ & (٠,٨٠٠)١,٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠,٣٠٠ & ٠,٥٠٠ \\ ٠,٦٠٠ & ٠,٩٠٠ \\ ٠,٥٠٠ & ٠,٨٠٠ \end{bmatrix} \times ١,٥$$

سوف يصبح ثمن اللبن ٠,٧٥٠ دينار، ٠,٤٥٠ دينار، و ثمن عصير البرتقال ١,٣٥٠ دينار، ٠,٩٠٠ دينار، و ثمن عصير المانجو ١,٢٠٠ دينار، ٠,٧٥٠ دينار.

حاول أن تحل

٢ بعد رفع الأسعار، تناقصت مبيعات الشراب في المطعم. وضع صاحب المطعم إعلانًا كتب عليه: تخفيض الأسعار بنسبة ٢٠٪. ضع لائحة بالأسعار الجديدة.

خواص الضرب القياسي

إذا كان \underline{a} ، \underline{b} ، \underline{c} مصفوفات من الرتبة $m \times n$ ، \underline{d} عددان قياسيان. فإن:

- $\underline{c}(\underline{a} + \underline{b}) = \underline{c}\underline{a} + \underline{c}\underline{b}$ خاصية التجميع للضرب
- $(\underline{a} + \underline{b})\underline{c} = \underline{a}\underline{c} + \underline{b}\underline{c}$ خاصية التوزيع من اليمين
- $(\underline{a} + \underline{b})\underline{c} = \underline{a}\underline{c} + \underline{b}\underline{c}$ خاصية التوزيع من اليسار
- $\underline{0} = \underline{a} \times \underline{0}$ خاصية الضرب في صفر

يمكن استخدام خواص الضرب القياسي لحل معادلات تتضمن مصفوفات.

مثال (٣)

حل المعادلة: $\underline{2} + \underline{4s} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، ثم تحقق من إجابتك.

الحل:

$$\underline{2} + \underline{4s} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{4s} = \begin{bmatrix} 4 \times 2 & 3 \times 2 \\ 1 \times 2 & (2 -) \times 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{4s} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{4s} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{4s} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\underline{s} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

تحقق:

$$\underline{2} + \underline{4s} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot 2 + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot 4$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\checkmark \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

حاول أن تحل

٣ حل كل معادلة مما يلي:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\text{أ}} \cdot 2$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 10 \\ 10 & 18 & 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} + \underline{\text{ب}} \cdot 3$$



ضرب المصفوفات Matrices Multiplication

يريد صاحب مطعم شراء ٥ كجم برتقالاً و ٦ كجم تفاحاً و ٤ كجم مانجو. كانت لائحة الأسعار (للكيلوجرام الواحد) في المحلّ الأوّل كالتالي: برتقال ٠,٥٠٠ دينار، تفاح ٠,٨٠٠ دينار، مانجو ١,٢٠٠ دينار. وفي المحلّ الثاني: برتقال ٠,٦٠٠ دينار، تفاح ٠,٧٠٠ دينار، مانجو ١,١٠٠ دينار. ساعد صاحب هذا المطعم على اختيار المحلّ الأنسب الذي يقدم السعر الأفضل لشراء هذه الفواكه.

الحل:

السعر في المحلّ الثاني	السعر في المحلّ الأوّل	
٠,٦٠٠	٠,٥٠٠	برتقال
٠,٧٠٠	٠,٨٠٠	تفاح
١,١٠٠	١,٢٠٠	مانجو

$$= \underline{\text{ب}}$$

برتقال تفاح مانجو

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 5 \end{bmatrix} = \underline{\text{أ}}$$

ثمن الكميات المطلوبة من المحلّ الأوّل هو:

برتقال تفاح مانجو

$$12,100 = 1,200 \times 4 + 0,800 \times 6 + 0,500 \times 5$$

ثمن الكميات المطلوبة من المحلّ الثاني هو:

برتقال تفاح مانجو

$$11,600 = 1,100 \times 4 + 0,700 \times 6 + 0,600 \times 5$$

وهذا ينتج من ضرب المصفوفتين \underline{A} ، \underline{B} . لكي تقوم بعملية ضرب مصفوفتين، اضرب عناصر كل صف من المصفوفة الأولى في عناصر كل عمود من المصفوفة الثانية. أوجد ناتج كل ضرب، ثم اجمع نواتج الضرب كما في المثال التالي:

$$\begin{bmatrix} 0,600 & 0,500 \\ 0,700 & 0,800 \\ 1,100 & 1,200 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 6 & 5 \end{bmatrix} = \underline{A} \times \underline{B}$$

$$[1,100 \times 4 + 0,700 \times 6 + 0,600 \times 5 \quad 1,200 \times 4 + 0,800 \times 6 + 0,500 \times 5] =$$

$$\underline{A} \times \underline{B} = [11,600 \quad 12,100] \text{ من الأفضل شراء هذه الفواكه من المحل الثاني.}$$

مثال (٤)

أوجد ناتج $\underline{A} \times \underline{B}$.

$$\text{حيث } \underline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل:

اضرب \underline{A} بـ \underline{B} و \underline{B} بـ \underline{A} ، ثم اجمع نواتج الضرب.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$6 = (2)(3) + (4)(0)$$

الناتج هو العنصر في الصف الأول والعمود الأول. كرر الخطوات نفسها مع باقي الصفوف والأعمدة.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$4 = (2)(4) + (0)(1)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$3 = (1)(3) + (0)(0)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$0 = (2)(2) + (4)(1)$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4 = (1)(4) + (0)(1)$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6- \\ 4- & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4- & 1- \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2 = (1)(2) + (0)(1)$$

نتائج الضرب:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6- \\ 4- & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4- & 1- \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

حاول أن تحل

٤ أ صف الإجراءات التي تمت لضرب الصف الممثل في العمود الممثل في المثال (٤).

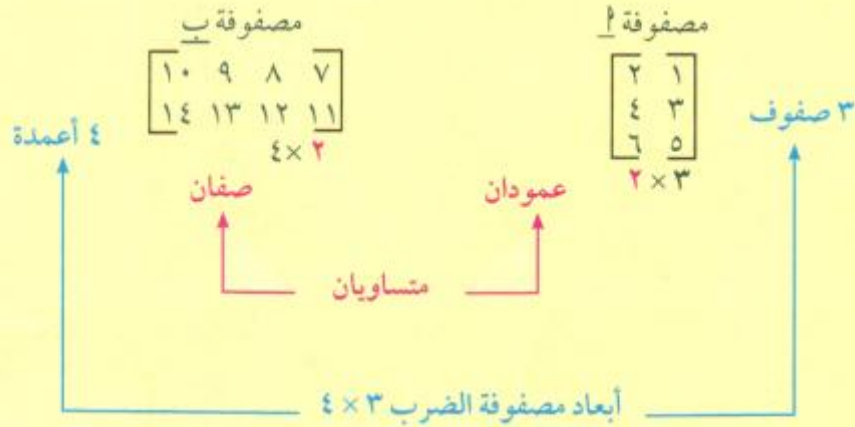
ب أوجد نتائج الضرب: $\begin{bmatrix} 3 & 3- \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1- \\ 4- & 3 \end{bmatrix}$

ج في المثال (٤)، ما رتبة المصفوفات الأصلية؟ ما رتبة مصفوفة الضرب؟

د التفكير الناقد: كيف تقارن رتبة مصفوفة الضرب برتب المصفوفات الأصلية؟

ضرب المصفوفات:

المصفوفة \underline{A} هي مصفوفة من الرتبة $m \times n$ والمصفوفة \underline{B} هي مصفوفة من الرتبة $n \times r$ ، عندئذٍ مصفوفة الضرب $\underline{A} \times \underline{B}$ هي مصفوفة من الرتبة $m \times r$.



تكون مصفوفة الضرب معرفة إذا كان عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى مساوياً لعدد الصفوف في المصفوفة الثانية.

$$\underline{A} \times \underline{B} = \underline{C} \quad \begin{matrix} m \times n \\ n \times r \\ m \times r \end{matrix}$$

مثال (٥)

$$\text{بفرض } \underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٨ & ١ \end{bmatrix}, \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٠ & ٨ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$$

حدّد ما إذا كانت كل من نواتج الضرب: $\underline{أ} \times \underline{ب}$ ، $\underline{ب} \times \underline{أ}$ معرفة أو غير معرفة.

أوجد رتبة كل مصفوفة ضرب معرفة.

الحل:

$$\begin{array}{c} \underline{أ} \times \underline{ب} \\ \underline{ب} \times \underline{أ} \\ (٢ \times ٣) \quad (٢ \times ٢) \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{غير متساويتين} \\ \underline{أ} \times \underline{ب} \text{ غير معرفة} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \underline{ب} \times \underline{أ} \\ \underline{أ} \times \underline{ب} \\ (٢ \times ٢) \quad (٢ \times ٣) \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{متساويتان} \\ \underline{أ} \times \underline{ب} \text{ معرفة ورتبتها } ٢ \times ٣ \end{array}$$

حاول أن تحل

$$\text{٥} \quad \text{بفرض: } \underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}, \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٠ & ٨ \\ ٨ & ١ & ٥ & ٢ \end{bmatrix}$$

أ حدّد ما إذا كانت كل من نواتج الضرب $\underline{أ} \times \underline{ب}$ ، $\underline{ب} \times \underline{أ}$ معرفة أو غير معرفة.

ب أوجد ناتج الضرب المعروف.

ج بفرض أن المصفوفة $\underline{أ}$ هي مصفوفة من الرتبة ٣×٢ ، المصفوفة $\underline{ب}$ هي مصفوفة من الرتبة ٢×٣ .

هل $\underline{أ} \times \underline{ب}$ ، $\underline{ب} \times \underline{أ}$ متساويتان؟ وضح إجابتك.

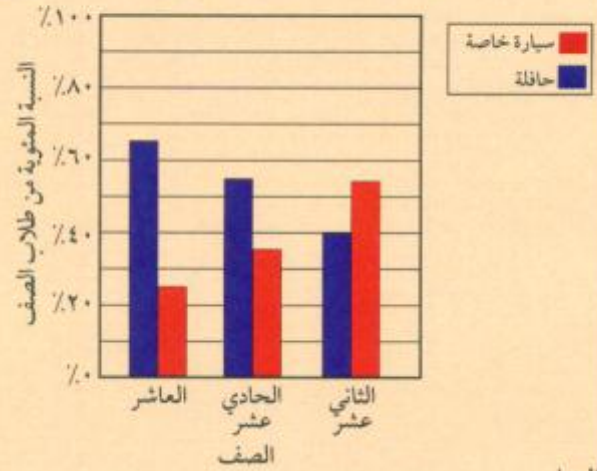
مثال (٦)

الانتقال: استخدم البيانات التي في الجدول والتمثيل البياني بالأعمدة المزدوجة.

ما عدد الطلاب والطالبات الذين يذهبون إلى المدرستين في كل من وسائل النقل الموضحة في البيانات التالية؟

عدد الطلاب والطالبات في مدرستين

طالبات المدرسة ب	طلاب المدرسة أ	
٩٥	١٠٠	العاشر
٩٠	٩٥	الحادي عشر
٨٩	٩٥	الثاني عشر



الحل:

$$\begin{matrix} & \text{طلاب} & \text{طالبات} \\ \begin{matrix} \text{العاشر} \\ \text{الحادي عشر} \\ \text{الثاني عشر} \end{matrix} & \begin{bmatrix} ٩٥ & ١٠٠ \\ ٩٠ & ٩٥ \\ ٨٩ & ٩٥ \end{bmatrix} & = \underline{\underline{\text{ب}}}$$

$$\begin{matrix} & \text{العاشر} & \text{الحادي عشر} & \text{الثاني عشر} \\ \begin{matrix} \text{حافلة} \\ \text{سيارة خاصة} \end{matrix} & \begin{bmatrix} ٠,٤٠ & ٠,٥٥ & ٠,٦٥ \\ ٠,٥٥ & ٠,٣٥ & ٠,٢٥ \end{bmatrix} & = \underline{\underline{\text{أ}}}$$

تمثل المصفوفة أ وسيلة نقل الطلاب في الصفوف المختلفة، وتمثل المصفوفة ب أعداد طلاب الصف حسب المدرسة (طلاب، طالبات)، إذاً، ناتج الضرب ب × أ يمثل أعداد الطلاب حسب وسيلة النقل المستخدمة. أوجد ب × أ.

$$\begin{bmatrix} ٩٥ & ١٠٠ \\ ٩٠ & ٩٥ \\ ٨٩ & ٩٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٠,٤٠ & ٠,٥٥ & ٠,٦٥ \\ ٠,٥٥ & ٠,٣٥ & ٠,٢٥ \end{bmatrix} = \underline{\underline{\text{ب}} \times \underline{\underline{\text{أ}}}}$$

$$\begin{bmatrix} 89 \times 0,40 + 90 \times 0,50 + 95 \times 0,60 & 95 \times 0,40 + 95 \times 0,50 + 100 \times 0,60 \\ 89 \times 0,50 + 90 \times 0,30 + 95 \times 0,20 & 95 \times 0,50 + 95 \times 0,30 + 100 \times 0,20 \end{bmatrix} = \underline{\underline{ب}} \times \underline{\underline{أ}}$$

(لاحظ من هذا المثال أن $\underline{\underline{ب}} \times \underline{\underline{أ}}$ معرفة)

$$\begin{bmatrix} 146,80 & 155,20 \\ 104,2 & 110,0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{ب}} \times \underline{\underline{أ}}$$

إذا، يذهب حوالي 155 طالبًا، 147 طالبة إلى المدرسة في الحافلة، ويذهب حوالي 111 طالبًا، 104 طالبات في السيارة الخاصة.

حاول أن تحل

٦ كيف يمكنك أن تتحقق من إجابتك في المثال (٦)؟

لضرب المصفوفات بعض خصائص ضرب الأعداد

خواص ضرب المصفوفات المربعة

إذا كانت $\underline{\underline{أ}}$ ، $\underline{\underline{ب}}$ ، $\underline{\underline{ج}}$ مصفوفات من الرتبة $m \times m$. فإن:

$$\underline{\underline{أ}} \times \underline{\underline{ب}} : \text{مصفوفة من الرتبة } m \times m.$$

$$\text{خاصية التجميع للضرب} \quad (\underline{\underline{أ}} \times \underline{\underline{ب}}) \times \underline{\underline{ج}} = \underline{\underline{أ}} \times (\underline{\underline{ب}} \times \underline{\underline{ج}})$$

$$\text{خاصية التوزيع} \quad \underline{\underline{أ}} \times (\underline{\underline{ب}} + \underline{\underline{ج}}) = (\underline{\underline{أ}} \times \underline{\underline{ب}}) + (\underline{\underline{أ}} \times \underline{\underline{ج}})$$

$$(\underline{\underline{أ}} + \underline{\underline{ب}}) \times \underline{\underline{ج}} = \underline{\underline{أ}} \times \underline{\underline{ج}} + \underline{\underline{ب}} \times \underline{\underline{ج}}$$

$$\text{خاصية الضرب في الصفر} \quad \underline{\underline{أ}} \times \underline{\underline{0}} = \underline{\underline{0}} \times \underline{\underline{أ}} = \underline{\underline{0}}$$

ملاحظة: عملية ضرب المصفوفات ليست إبدالية.

تذكر:

يكفي إيجاد مثال مضاد واحد لإثبات عدم صحة النظرية.

مثال (مضاد)

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

أوجد $\underline{A} \times \underline{B}$ ، $\underline{B} \times \underline{A}$. ماذا تستنتج؟

الحل:

$$\underline{A} \times \underline{B} = \begin{bmatrix} 16 & 31 \\ 12 & 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} \times \underline{A} = \begin{bmatrix} 17 & 18 \\ 25 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$\underline{A} \times \underline{B} \neq \underline{B} \times \underline{A}$. \therefore عملية ضرب المصفوفات ليست إبدالية.

Square Matrix

مربع المصفوفة

إذا كانت \underline{A} مصفوفة مربعة، فإن المصفوفة $\underline{A} \times \underline{A}$ يرمز إليها بالرمز \underline{A}^2 .
وتقرأ مربع المصفوفة \underline{A} . وبالمثل $\underline{A}^3 = \underline{A} \times \underline{A} \times \underline{A}$ ، $\underline{A}^4 = \underline{A} \times \underline{A} \times \underline{A} \times \underline{A}$ ، ...

مثال (٧)

$$\text{إذا كانت } \underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

أوجد: \underline{A}^2 ، \underline{A}^3

الحل:

$$\underline{A}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^3 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

حاول أن تحل

٧ إذا كانت $\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$. أوجد: \underline{B}^2 ، \underline{B}^3 .

مصفوفات الوحدة والنظير الضربي (المعكوسات) Identity and Inverse Matrices

عمل تعاوني

سوف تتعلم

- مصفوفة الوحدة للضرب
- محدد المصفوفة
- النظير الضربي (المعكوس الضربي) للمصفوفة
- حل المعادلة المصفوفية باستخدام النظير الضربي.

١ أوجد ناتج ما يلي:

$$\text{أ} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 & 5- \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{ب} \begin{bmatrix} 6 & 5- \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ج} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 2- \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{د} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 2- \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

٢ أنماط: صف أي أنماط تراها في إجابتك عن السؤال الأول.

٣ توقع ناتج ما يلي، ثم تحقق من توقعك.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 2- & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2- & 1- \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

٤ أوجد ناتج ما يلي:

$$\text{أ} \begin{bmatrix} 5- & 2 \\ 3 & 1- \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ب} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0, 2- & 0, 2 \\ 1 & 1- & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1- & 5 & 1 \\ 1- & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ج} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5- & 2 \\ 3 & 1- \end{bmatrix}$$

$$\text{د} \begin{bmatrix} 1- & 5 & 1 \\ 1- & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0, 2- & 0, 2 \\ 1 & 1- & 0 \end{bmatrix}$$

٥ أنماط: صف أي أنماط تراها في إجابتك عن السؤال (٤).

٦ التفكير الناقد: كيف ترتبط إجاباتك بالنسبة إلى السؤالين (١)، (٤)؟

مصفوفة الوحدة Identity Matrix

المصفوفة المربعة التي عناصر قطرها الرئيسي ١، وبقية العناصر صفر تسمى **مصفوفة الوحدة** للضرب. ويرمز إليها بـ I .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_{2 \times 2}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_{3 \times 3}$$

$$\text{بفرض أن } P = \begin{bmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{bmatrix}, \text{ و } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I \times P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{bmatrix} = P$$

$$P = \begin{bmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times أ + 0 \times ج & 1 \times ب + 0 \times د \\ 0 \times أ + 1 \times ج & 0 \times ب + 1 \times د \end{bmatrix} =$$

$$P = \begin{bmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{bmatrix} = I \times P$$

$$\text{أي أن: } P \times I = P \text{ و } I \times P = P$$

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ هي العنصر المحايد الضربي للمصفوفات المربعة من الرتبة الثانية.

وبصورة عامة I_n هي العنصر المحايد الضربي للمصفوفات المربعة من الرتبة n .

النظير الضربي Multiplicative Inverse

إذا كانت P ، S مصفوفتين مربعيتين من الرتبة نفسها بحيث يكون $S \times P = I$ ، فإن S هي النظير الضربي للمصفوفة P . ويرمز إليها بـ P^{-1} .

$$I = P^{-1} \times P = P \times P^{-1}$$

مثال (١)

$$\text{أثبت أن } B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ هي النظير الضربي للمصفوفة } P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$P \times B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 3 + 2 \times 2 & (3 \times 2) + 2 \times 1 \\ 2 \times 3 + (2 \times 2) & (2 \times 2) + (2 \times 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 10 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B \times P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 3 + 2 \times 2 & (3 \times 2) + 2 \times 1 \\ 2 \times 3 + (2 \times 2) & (2 \times 2) + (2 \times 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 10 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$$

يمكن القول أن المصفوفة P هي النظير الضربي للمصفوفة B .

حاول أن تحل

$$1 \text{ أثبت أن المصفوفة } P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ هي النظير الضربي لـ } B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

ب في المثال (١)، أثبت أن P هي النظير الضربي لـ B .

Determinant of a 2×2 Matrix

محدد مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية

ترتبط كل مصفوفة مربعة 2×2 بمحدد حقيقي يسمى **محدد** ويرمز إلى هذا العدد بالرمز $|A|$ ويقرأ محدد المصفوفة A . سنقتصر في هذا الدرس على محدد المصفوفة المربعة من الرتبة الثانية.

محدد المصفوفة المربعة $\begin{bmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{bmatrix}$ هو $أد - بـ ج$

$$\text{نكتب } |A| = \begin{vmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{vmatrix} = أد - بـ ج$$

مثال (٢)

أوجد محدد كل من المصفوفات التالية: $A = \begin{bmatrix} ٤ & ٣- \\ ٥- & ٢ \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} ٣- & ٢ \\ ٢- & ٣ \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} ٠ & س \\ س & ٠ \end{bmatrix}$

الحل:

$$٧ = ٢ \times ٤ - (٥-) \times (٣-) = \begin{vmatrix} ٤ & ٣- \\ ٥- & ٢ \end{vmatrix} = |A|$$

$$٥ = (٣) \times (٣-) - (٢-) \times (٢) = \begin{vmatrix} ٣- & ٢ \\ ٢- & ٣ \end{vmatrix} = |B|$$

$$٠ = ٠ - ٠ = \begin{vmatrix} ٠ & س \\ س & ٠ \end{vmatrix} = |C|$$

معلومة رياضية:

النظير الضربي للمصفوفة A يسمى أيضًا المصفوفة المعكوسة A^{-1} .

حاول أن تحل

٢ أوجد محدد كل من المصفوفات التالية:

$$A = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} ٧ & ٨ \\ ١٠ & ٢ \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} ٣ & ك \\ ٣- & ك-٣ \end{bmatrix}$$

ليس لكل المصفوفات المربعة نظير ضربي (معكوسات). سوف يساعدك الاختبار التالي على استنتاج ما إذا كانت المصفوفة 2×2 لها نظير ضربي، وكيف يمكنك إيجادها إن وجد.

خاصية

بفرض أن: $A = \begin{bmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{bmatrix}$ إذا كان $أد - بـ ج \neq ٠$ ، فإن لها نظير ضربي A^{-1} حيث:

$$A^{-1} = \frac{١}{أد - بـ ج} \begin{bmatrix} د & -ب \\ -ج & أ \end{bmatrix}$$

معلومة رياضية:

المصفوفة التي محددها الصفر ليس لها نظير ضربي وتسمى مصفوفة متفردة.

مثال (٣)

هل للمصفوفة: $\underline{1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ نظير (معكوس) ضربى؟ في حالة الإيجاب أوجده.
الحل:

$$\text{أد - ب ج} = (1-)(1-) - (2-)(8-) = 2 \neq 0 \therefore \underline{1} \text{ لها نظير ضربى } \underline{1}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \times \frac{1}{2} = \underline{1}^{-1}$$

حاول أن تحل

٣ **أ** هل $\underline{ب} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ لها نظير ضربى؟ فسر إجابتك.

ب هل $\underline{ب} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ لها نظير ضربى؟ فسر إجابتك.

مثال (٤)

حدّد أي مصفوفة مما يلي لها نظير (معكوس) ضربى، ثم أوجده.

$$\underline{ب} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = \underline{ن}$$

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \underline{م}$$

الحل:

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \underline{م}$$

$$\text{أد - ب ج} = (2-)(5-) - (4-)(2-) = 2 \neq 0$$

احسب: أد - ب ج

حيث إن: أد - ب ج $\neq 0$ ، فإن النظير الضربى (المعكوس) لم يكون موجودًا.

$$\underline{م}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2- & 4- \\ 2- & 5- \end{bmatrix} \times \frac{1}{2-} = \underline{م}^{-1}$$

$$\underline{ب} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = \underline{ن}$$

$$\text{أد - ب ج} = (2-)(9-) - (6-)(3-) = 0$$

احسب: أد - ب ج

حيث إن: أد - ب ج $= 0$ ، فإن معكوس $\underline{ن}$ غير موجود.

$\underline{ن}^{-1}$ غير موجود.

حاول أن تحل

٤ حدّد أي مصفوفة من المصفوفات التالية لها نظير ضربى (معكوس)، ثم أوجده.

$$\underline{ب} = \begin{bmatrix} 2,3 & 0,5 \\ 7,2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

نسمي المصفوفة التي محددتها يساوي الصفر بالمصفوفة المنفردة.

مثال (٥)

إذا كانت المصفوفة $\begin{bmatrix} ٤ & س \\ ٦ & ١٢ \end{bmatrix}$ منفردة أوجد قيمة س.

الحل:

محدد المصفوفة المنفردة

تبسيط المحدد

$$٠ = \begin{vmatrix} ٤ & س \\ ٦ & ١٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٤ & س \\ ٦ & ١٢ \end{vmatrix}$$

$$٠ = ٤٨ - ٦س$$

$$٤٨ = ٦س$$

$$٨ = س$$

حاول أن تحل

٥ إذا كانت المصفوفة $\begin{bmatrix} ١٠ & ٥ \\ س & ٤ \end{bmatrix}$ منفردة، أوجد قيمة س.

٦ هل $\begin{bmatrix} ٢ & ١,٥ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ لها نظير ضربى؟ فسر إجابتك.

نشاط إثرائي

تبين المعطيات التالية الاتجاه (أو التحول) في امتلاك الهواتف النقالة عند مجموعة من السكان.

٨٥٪ ممن يمتلكون هاتفًا نقالًا يستمرون في امتلاكه العام القادم، بينما ١٥٪ منهم يتخلون عنه.

٤٠٪ ممن لا يمتلكون هاتفًا نقالًا سيملكون هذا الجهاز العام القادم، ويبقى ٦٠٪ منهم من دون هاتف نقال.

اكتب مصفوفة تبين الاتجاه في امتلاك هواتف نقالة عند هذه المجموعة.

في عينة ثابتة من ١٦٢٠٠ شخص، يمتلك ٩٩٠٠ شخص هاتفًا نقالًا، بينما لا يمتلك ٦٣٠٠ شخص هاتفًا نقالًا. توقع عدد الأشخاص الذين سيملكون هاتفًا نقالًا العام القادم.

استخدم النظير الضربى للمصفوفة في إيجاد عدد مالكي الهواتف النقالة العام الماضي باعتبار نفس المعطيات.

الحل:

٨٥٪ من السكان يمتلكون هواتف نقالة، ويبقى ١٥٪ منهم سيتخلون عن الهاتف النقال في العام القادم.

٤٠٪ ممن لا يمتلكون هاتفًا نقالًا سيملكون هاتفًا في العام القادم، ويبقى ٦٠٪ منهم من دون هاتف نقال.

وبالتالي يكون لدينا المصفوفة التالية:

$$\begin{bmatrix} لا يمتلكون & لا يمتلكون & يمتلكون \\ ٠,١٥ & ٠,٦٠ & ٠,٨٥ \\ ٠,٤٠ & ٠,٦٠ & ٠,٨٥ \end{bmatrix}$$

معلومة رياضية:

اكتشف مارتن كوبر
Martin Cooper الهاتف
الخليوي سنة ١٩٧٣.

ب لإيجاد عدد الأشخاص الذين سوف يمتلكون هواتف نقالة في العام القادم نضرب المصفوفة A بالمصفوفة

$$B = \begin{bmatrix} 6300 & \text{لا يمتلكون} \\ 9900 & \text{يمتلكون} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5265 & \text{لا يمتلكون} \\ 10935 & \text{يمتلكون} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6300 & \text{لا يمتلكون} \\ 9900 & \text{يمتلكون} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,15 & 0,60 \\ 0,85 & 0,40 \end{bmatrix}$$

ج لإيجاد عدد مالكي الهواتف النقالة في العام الماضي نجد معكوس المصفوفة A .

$$\begin{bmatrix} 3- & 17 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,15- & 0,85 \\ 0,60 & 0,40- \end{bmatrix} \frac{1}{0,45} = \begin{bmatrix} 1- & - \\ - & 1- \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8600 & \text{لا يمتلكون} \\ 7600 & \text{يمتلكون} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6300 & \text{لا يمتلكون} \\ 9900 & \text{يمتلكون} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3- & 17 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$$

في العام الماضي، امتلك 7600 شخص هواتف نقالة.

حاول أن تحل

- ٦ يهوى الكويتيون السفر والتعرف إلى حضارات الشعوب. في عينة من 2000 شخص سافر 60٪ منهم إلى الدولة (أ) و 40٪ إلى الدولة (ب). في الصيف التالي، رجع 80٪ ممن سافروا إلى الدولة (أ) إليها وسافرت البقية إلى الدولة (ب). كذلك عاد 70٪ من زوار الدولة (ب) إليها وسافرت البقية إلى الدولة (أ). استخدم المصفوفات لمعرفة عدد الذين سافروا إلى كل من الدولتين (أ)، (ب) في الصيف التالي.

استخدام المصفوفة للتشفير واستخدام معكوسها لفك التشفير

يمكنك أن تستخدم أي مصفوفة غير منفردة ومناسبة (ومتفق عليها) لتشفير رسالة، ويمكنك أن تستخدم معكوسها لفك شيفرة هذه الرسالة. باستخدام الجدول المجاور، الرسالة «في فريق» تكتب كمصفوفات 2×1 لتصبح الأعداد الموجودة تباعاً على الشكل التالي:

١٥	ض	١	أ
١٦	ط	٢	ب
١٧	ظ	٣	ت
١٨	ع	٤	ث
١٩	غ	٥	ج
٢٠	ف	٦	ح
٢١	ق	٧	خ
٢٢	ك	٨	د
٢٣	ل	٩	ذ
٢٤	م	١٠	ر
٢٥	ن	١١	ز
٢٦	هـ	١٢	س
٢٧	و	١٣	ش
٢٨	ي	١٤	ص

كل حرف يقابله عدد على جدول حروف الأبجدية. في $\begin{bmatrix} 20 \\ 28 \end{bmatrix}$ فر $\begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix}$ يق $\begin{bmatrix} 28 \\ 21 \end{bmatrix}$

خطوات تشفير رسالة وفكها:

(أ) نضرب المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ في كل مصفوفة من المصفوفات المراد تشفيرها والتي ترد في الرسالة

أو أي مصفوفة A غير منفردة من الرتبة 2×2 كالتالي:

$$\begin{bmatrix} 176 \\ 68 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 28 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 140 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 210 \\ 77 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 21 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

فإن الرسالة المشفرة هي:

$$\begin{bmatrix} 210 \\ 77 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 140 \\ 50 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 176 \\ 68 \end{bmatrix}$$

(ب) لفك رسالة مشفرة (فك التشفير):

نوجد P^{-1} (النظير الضربي للمصفوفة P)

$$0 \neq 2 = 4 - 6 = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = |P|$$

$$\begin{bmatrix} 1- & 0,5 \\ 3 & 1- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2- & 1 \\ 6 & 2- \end{bmatrix} \frac{1}{2} = P^{-1}$$

ثم نوجد ناتج ضرب P^{-1} لكل مصفوفة موجودة في الرسالة.



توضح الصورة نوعاً من الماكينات المستخدمة في التشفير من سنة 1940.

مثال (٦) تطبيقات حياتية

رسالة بالشفيرة: تلقى وائل الرسالة التالية:

$$\begin{bmatrix} 42 \\ 16 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 68 \\ 31 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 188 \\ 72 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 84 \\ 32 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 22 \\ 10 \end{bmatrix}$$

ماذا كتب في هذه الرسالة؟

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = P$$

الحل:

نستخدم معكوس المصفوفة $P = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ وهو $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1- & 0,5 \\ 3 & 1- \end{bmatrix}$

$$\begin{matrix} \text{ر} \\ \text{س} \end{matrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 84 \\ 32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1- & 0,5 \\ 3 & 1- \end{bmatrix}, \begin{matrix} \text{أ} \\ \text{د} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 10 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1- & 0,5 \\ 3 & 1- \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \text{ت} \\ \text{ن} \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 68 \\ 31 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1- & 0,5 \\ 3 & 1- \end{bmatrix}, \begin{matrix} \text{ك} \\ \text{ي} \end{matrix} \begin{bmatrix} 22 \\ 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 188 \\ 72 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1- & 0,5 \\ 3 & 1- \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \text{ج} \\ \text{ح} \end{matrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1- & 0,5 \\ 3 & 1- \end{bmatrix}$$

مما سبق يكون:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 22 \\ 28 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 25 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

أ د رس كي ت ن ح

الإجابة: ادرس كي تنجح

حاول أن تحل

٧ تلقى خالد الرسالة التالية

$$\begin{bmatrix} 100 \\ 42 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 42 \\ 20 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 168 \\ 60 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 118 \\ 47 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 26 \\ 12 \end{bmatrix}$$

استخدم النظير الضربي للمصفوفة $P = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ لتعرف ما كتب في هذه الرسالة.

حل نظام من معادلتين خطيتين

Solving a System of Two Linear Equations

سوف تتعلم

- حل نظام من معادلتين خطيتين
- قاعدة كرامر

دعنا نفكر ونتناقش

يمكن للمعادلة المصفوفية أن تمثل أي نظام معادلات.

$$\begin{array}{l} \text{نظام معادلات} \\ \left. \begin{array}{l} 5 = 2ص + 3س \\ 14 = 5ص + 3س \end{array} \right\} \\ \text{المعادلة المصفوفية} \\ \left[\begin{array}{c} 5 \\ 14 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} س \\ ص \end{array} \right] \end{array}$$

- ١ قارن طريقتي كتابة النظام في معادلات المصفوفات. أين تجد معامل س، ص؟ المتغيرات؟ الثوابت؟ كل مصفوفة في معادلة المصفوفات على الشكل $\underline{ع} \times \underline{ب} = \underline{ب}$ لها اسمها:

$$\begin{array}{l} \text{مصفوفة المعاملات } \underline{ب} \\ \text{مصفوفة المتغيرات } \underline{ع} \\ \text{مصفوفة الثوابت } \underline{ب} \end{array} \quad \left[\begin{array}{c} 5 \\ 14 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} س \\ ص \end{array} \right]$$

- ٢ أوجد مصفوفة الضرب: $\left[\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} س \\ ص \end{array} \right]$
- ب يمكن كتابة مصفوفة الضرب بأنها مساوية للمصفوفة $\left[\begin{array}{c} 5 \\ 14 \end{array} \right]$.
- اشرح كيف أن معادلة المصفوفة تمثل نظام المعادلات.

١ - حل النظام: Solving a System

تستطيع إيجاد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات، ثم الحصول سريعاً على حل النظام من المعادلات الخطية.

٢ - الحل باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة المربعة: Solving by Using Inverse Matrix

مثال (١)

$$\begin{array}{l} \text{حل النظام:} \\ \left. \begin{array}{l} 3 = س + ص \\ 7 = س - ص \end{array} \right\} \end{array} \quad \text{باستخدام النظير الضربي للمصفوفة.}$$

الحل:

اكتب النظام مع معادلة المصفوفات.

$$(1) \left[\begin{array}{c} 3 \\ 7 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} س \\ ص \end{array} \right]$$

$$\text{حيث } \underline{ب} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \right], \underline{ع} = \left[\begin{array}{c} 3 \\ 7 \end{array} \right], \underline{ب} = \left[\begin{array}{c} 3 \\ 7 \end{array} \right]$$

$$\neq 2- = 1 \times 1 - (1-) \times 1 = \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \right| = \underline{ب}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

وبضرب كل من طرفي المعادلة (١) من جهة اليمين في $\frac{1}{2}$.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$$

وبالتالي: س = ٥، ص = ٢.

حاول أن تحل

١ حلّ النظام: $\begin{cases} 5\text{س} + 3\text{ص} = 7 \\ 3\text{س} + 2\text{ص} = 5 \end{cases}$ باستخدام النظير الضربي للمصفوفة...

تطبيقات حياتية

مثال (٢)

يمثل الجدول المقابل سعر بيع الخاتم، وعدد الخواتم المباعة خلال سنتين متتاليتين في أحد محلات الصاغة. أوجد كلفة إنتاج الخاتم الواحد والربح الذي تحقق في كل سنة، علمًا بأن ربحه زاد في السنة الثانية ٤٢٠٠٠ دينار عن السنة الأولى باستخدام المصفوفات.

عدد الخواتم المباعة	سعر بيع الخاتم الواحد	السنة
٣٠٠	٢٩٥ دينارًا	الأولى
٣٠٠٠	١٢٩ دينارًا	الثانية

الحل:

ليكن س (بالدينار) كلفة إنتاج الخاتم الواحد، ص (بالدينار) الربح الذي تحقق في السنة الأولى.

وبالتالي، يكون ص + ٤٢٠٠٠ (دينار) الربح الذي تحقق في السنة الثانية.

نعبر عن المسألة بالنظام التالي:

$$(السنة الأولى) \quad 300\text{س} + \text{ص} = 295 \times 300$$

$$(السنة الثانية) \quad 3000\text{س} + (\text{ص} + 42000) = 129 \times 3000$$

نبسط النظام:

$$300\text{س} + \text{ص} = 88500$$

$$3000\text{س} + \text{ص} = 345000$$



نكتب معادلة المصفوفات:

$$\begin{bmatrix} 88500 \\ 345000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 300 \\ 1 & 3000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 88500 \\ 345000 \end{bmatrix} = \underline{\text{ب}} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \underline{\text{ع}} \begin{bmatrix} 1 & 300 \\ 1 & 3000 \end{bmatrix} = \underline{\text{پ}}$$

$$\text{نحسب } \underline{\text{پ}}^{-1} \times \underline{\text{ب}} = \underline{\text{ب}}^{-1} \times \underline{\text{ع}} = \frac{1}{3000 - 300} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 300 & 3000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 300 & 3000 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 88500 \\ 345000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 95 \\ 60000 \end{bmatrix}$$

وبذلك $\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 95 \\ 60000 \end{bmatrix}$ ومنها $\text{س} = 95$ ، $\text{ص} = 60000$

بالتالي، تكون كلفة إنتاج الخاتم الواحد 95 دينارًا والربح الذي تحقق في العام الأول 60000 دينار، وفي العام الثاني 102000 دينار.

حاول أن تحل

٢ قطعة أرض مستطيلة طولها يساوي ضعف عرضها ومحيطها يساوي 840 مترًا. ما أبعادها باستخدام المصفوفات؟

يمكن أيضًا حلّ نظام من معادلتين خطيتين باستخدام المحددات، وتسمى قاعدة كرامر Cramer's Rule.

٣ - استخدام قاعدة كرامر (المحددات) لحل معادلتين خطيتين:

Using Cramer's Rule to Solve Two Linear Equations

مثال (٣)

أوجد مجموعة حلّ النظام: $\begin{cases} 3\text{س} + 2\text{ص} = 0 \\ \text{س} - \text{ص} = 5 \end{cases}$ باستخدام المحددات (قاعدة كرامر).
الحل:

الخطوات التالية توضح كيفية إيجاد مجموعة حلّ النظام باستخدام قاعدة كرامر.

اكتب مصفوفة المعاملات من النظام: $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ومحددتها.

اكتب المصفوفة $\underline{\text{س}}$ باستبدال العمود الأول من المصفوفة $\underline{\text{ب}}$ بالثوابت الموجودة في النظام:

$$\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \text{ ومحددتها } \Delta_{\text{س}}$$

ثم اكتب المصفوفة $\underline{\text{ص}}$ باستبدال العمود الثاني من المصفوفة $\underline{\text{ب}}$ بالثوابت الموجودة في النظام:

$$\underline{\text{ص}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ ومحددتها } \Delta_{\text{ص}}$$

أوجد المحددات للمصفوفات الثلاث:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \times (-1) - (1) \times 2 = -3 - 1 = -4 \quad (\text{محدد المصفوفة } \underline{\text{ب}})$$

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = (0) \times (-1) - (2) \times 5 = -10 \quad (\text{محدد المصفوفة } \underline{\text{س}})$$

معلومة رياضية:

لحل نظام معادلتين خطيتين

$$\begin{cases} \text{أس} + \text{ب ص} = \text{ج} \\ \text{أس} + \text{ب' ص'} = \text{ج'} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ب'} \\ \text{ب} & \text{ب'} \end{vmatrix} = \Delta$$

$$\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ب} & \text{ج} \end{vmatrix} = \Delta_{\text{س}}$$

$$\begin{vmatrix} \text{ج} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{ب} \end{vmatrix} = \Delta_{\text{ص}}$$

$$\frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \text{س}$$

$$\frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \text{ص}$$

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \times 1 - (5 \times 3) = -15$$

تعطي قاعدة كرامر الحل باستخدام الصيغ التالية:

$$\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{-15}{-5} = 3$$

$$\text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{-15}{-5} = 3$$

مجموعة حل النظام = $\{(3, 3)\}$.

حاول أن تحل

٣ أوجد مجموعة حل النظام: $\begin{cases} 2\text{س} + 7\text{ص} = 1 \\ 3\text{س} - 4\text{ص} = 16 \end{cases}$ باستخدام المحددات (قاعدة كرامر).

مثال (٤)

استخدم قاعدة كرامر لحل النظام: $\begin{cases} 5\text{ص} - 7 = 0 \\ 3\text{ص} - 6 + 3 = 0 \end{cases}$

الحل:

نكتب أولاً النظام بالطريقة القياسية: $\begin{cases} 5\text{ص} - 7 = 0 \\ 3\text{ص} - 6 + 3 = 0 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 18$$

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 36$$

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 54$$

$$\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{36}{18} = 2$$

$$\text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{54}{18} = 3$$

حاول أن تحل

٤ استخدم قاعدة كرامر لحل النظام: $\begin{cases} 3\text{س} + 2\text{ص} = 6 \\ 3\text{ص} - 7 = 0 \end{cases}$

المرشد لحل المسائل

الإحداثيان (س، ص) لنقطة في المستوي هي حل النظام: $\begin{cases} 13 = 3ص + 2س \\ 31 = 7ص + 5س \end{cases}$ أوجد إحداثيي هذه النقطة.

وماذا كتب؟

$$\begin{cases} 13 = 3ص + 2س \\ 31 = 7ص + 5س \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 13 \\ 31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3- & 7- \\ 2 & 5- \end{bmatrix} \frac{1}{3 \times 5 - 7 \times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 7- \\ 2- & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3- & 7 \\ 2 & 5- \end{bmatrix} 1- =$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 7- \\ 2- & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ 31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 7- \\ 2- & 5 \end{bmatrix}$$

$$2 \times 2 \quad 1 \times 2$$

لا يمكن أن أضرب

$$\begin{bmatrix} 13 \\ 31 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 7- \\ 2- & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 7- \\ 2- & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \times 3 + 13 \times (7-) \\ 31 \times (2-) + 13 \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$$

إحداثيا نقطة التقاطع هما (2، 3)

كيف فكر مرشد؟

حل المسألة هو الزوج المرتب (س، ص).

يمكنني رسم المستقيمين بيانياً وقراءة إحداثيي نقطة التقاطع، ولكن هذا ليس ضرورياً.

يمكنني استخدام المصفوفات في الحل.

سأعيد كتابة النظام في شكل معادلة مصفوفات.

لايجاد المصفوفة $\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$ سوف أضرب طرفي المعادلة

في النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$.

والآن، بما أنني حصلت على النظير الضربي فسوف أضرب.

تذكرت ! يجب أن أضرب من جهة اليمين، لأن عملية ضرب المصفوفات ليست ابدالية.

سأعيد كتابة معادلة المصفوفات، ثم أضرب. هذا يعني أن:

$$س = 2، ص = 3.$$

مسألة إضافية

1 إحدائيا نقطة في المستوي هما حل النظام: $\begin{cases} 14 = 13ص + 12س \\ 9 = 7ص + 5س \end{cases}$

استخدم المصفوفات لحل النظام وإيجاد إحداثيي هذه النقطة.

2 ما المشاكل التي ستعرض مرشدًا

أ إذا لم يكن للنظام حلول؟

ب إذا كان للنظام عدد غير منته من الحلول؟

مخطط تنظيمي للوحدة السابعة



ملخص

- المصفوفة عبارة عن تنظيم من الأعداد على شكل مستطيل، ترتب فيه الأعداد في صفوف وأعمدة وتكتب مثلًا: \underline{A} .
- يحدّد أي عنصر في المصفوفة بدلالة رقمي الصف والعمود الواقع فيهما.
- تكون المصفوفتان متساويتين إذا كانت لهما الرتبة (الأبعاد) نفسها، وكانت عناصرهما المتناظرة متساوية.
- تحصل على مصفوفة الجمع بجمع العناصر المتناظرة، كما ويمكنك أيضًا طرح المصفوفات عن طريق طرح العناصر المتناظرة.
- العناصر المتناظرة في المصفوفات هي العناصر التي لها الرتبة نفسها في كلّ مصفوفة.

- المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار تسمى مصفوفة صفرية.

- المصفوفة \underline{A} هي النظير الجمعي للمصفوفة \underline{A} .

- خواص جمع المصفوفات: $\underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A}$

$$\underline{A} + (\underline{B} + \underline{C}) = (\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C}$$

$$\underline{A} = \underline{0} + \underline{A} = \underline{A} + \underline{0}$$

$$\underline{0} = (\underline{A} -) + \underline{A}$$

- عند ضرب مصفوفة في عدد قياسي، نضرب كل عنصر من المصفوفة في هذا العدد.

- تكون مصفوفة الضرب معرّفة، إذا كان عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى مساويًا لعدد الصفوف في المصفوفة الثانية.

$$\underline{A} \times \underline{B} = \underline{C} \quad \text{جم } \underline{A} \times \underline{B}$$

- لكي تقوم بعملية ضرب المصفوفات، اضرب عناصر كل صف من المصفوفة الأولى في عناصر كل عمود من المصفوفة الثانية. أوجد ناتج كل ضرب، ثم اجمع نواتج الضرب.

- إذا كانت \underline{A} من الرتبة $m \times n$ ، \underline{B} من الرتبة $n \times r$ ، فإن رتبة المصفوفة $\underline{A} \times \underline{B}$ هي $m \times r$.

- خصائص ضرب المصفوفات: $(\underline{A} \times \underline{B}) \times \underline{C} = \underline{A} \times (\underline{B} \times \underline{C})$

$$\underline{A} \times (\underline{B} + \underline{C}) = (\underline{A} \times \underline{B}) + (\underline{A} \times \underline{C})$$

$$(\underline{A} + \underline{B}) \times \underline{C} = \underline{A} \times \underline{C} + \underline{B} \times \underline{C}$$

- المصفوفة المربعة هي مصفوفة فيها عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة.

- المصفوفة المربعة $n \times n$ التي عناصر قطرها الرئيسي هي 1 وبقية العناصر هي الصفر، تسمى مصفوفة الوحدة للضرب وتكتب \underline{I} .

- مصفوفة الوحدة هي مصفوفة مربعة عناصر قطرها الرئيسي 1 وبقية العناصر صفر.

- مصفوفة النظير (المعكوس) الضربي للمصفوفة المربعة A ، تكتب A^{-1} ويكون:

$$A^{-1} \times A = I, \quad A \times A^{-1} = I, \quad \text{وتسمى النظير الضربي للمصفوفة } A.$$

- تقترن كل مصفوفة مربعة A بعدد حقيقي يسمى «محدد» ويرمز إليه بالرمز $|A|$ ويقرأ محدد المصفوفة A . وإذا كانت $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\text{فإن } |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad \text{حيث } ad - bc \neq 0$$

- في المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، إذا كان $ad - bc = 0$ ، تسمى المصفوفة منفردة وليس لها نظير ضربي.

- حل نظام من معادلتين خطيتين هو زوج مرتب يحقق المعادلتين معاً.

- يمكن حل نظام من معادلتين خطيتين باستخدام النظير الضربي للمصفوفة أو باستخدام المحددات (قاعدة كرامر).

حساب المثلثات (٢) Trigonometry (2)

مشروع الوحدة: موجة المستقبل

١ مقدمة المشروع: يحتوي مدّ وجزر المحيط على كمّ هائل من الطاقة. استخدمت هذه الطاقة خلال القرون الغابرة لإدارة الطواحين. أما في العقود الأخيرة فقد اكتشفت الشركات كيفية تسخير هذه الطاقة لتوليد الكهرباء. تتغير قوة المدّ والجزر بدرجة عالية ولكن بطريقة متوقعة ومتكررة مما سهّل الاستفادة منها.

يجب إجراء دراسة دقيقة لحركة المدّ والجزر لتحديد مكان وضع المحركات، بغية (الهدف) الاستفادة القصوى من الطاقة المولدة. يبنى السد عادة حيث يوجد أكبر فرق بين المدّ والجزر. تتولد الطاقة من دخول الماء وخروجه من خلال السد. يتم استخدام مصادر أخرى للطاقة لدعم تلك المتولدة من حركة المدّ والجزر عندما تخفّ هذه الحركة.

٢ الأهداف: دراسة حول الطاقة المتولدة من حركة المدّ والجزر، وإمكانية الاستفادة منها في توليد الطاقة الكهربائية.

٣ اللوازم: أوراق مليمتريّة، آلة حاسبة بيانيّة.

٤ أسئلة حول التطبيق:

أ يسجّل يوميًا في مواقع معيّنة من العالم ارتفاع المياه فوق مستوى معيّن، يُسمّى متوسط المياه المنخفضة **Low Water Mean**. يُبيّن الجدولان المرفقان المعلومات المسجّلة في موقعين. قدّر فترة ومدى الدّالة التي تنمذج دورة المدّ والجزر في كلّ موقع.

الموقع الثاني		الموقع الأول	
الوقت	ارتفاع أو انخفاض المياه	الوقت	ارتفاع المياه
٤:٤٦ ب.ظ	-٧٣ سم	١١:٣٠ ق.ظ	١٨ سم
١٠:٥٩ ب.ظ	١٠١ سم	٥:٤٢ ب.ظ	١٤٦ سم
٥:١١ ق.ظ	-٧٣ سم	١١:٥٥ ب.ظ	١٨ سم
١١:٢٤ ق.ظ	١٠١ سم	٦:٠٧ ق.ظ	١٤٦ سم

ب يتأثر المدّ والجزر بمواقع الشمس والقمر، يحدث أصغر أو أكبر مدّ وجزر عندما يكون القمر هلالًا أو بدرًا. ابحث عن ترابط موقع القمر وقوة المدّ والجزر، وارسم تمثيلًا بيانيًا يُبيّن تحولات المدّ والجزر بدلالة الوقت خلال شهر قمريّ معيّن.

ج كيف يمكن تفسير عدم ثبات الطاقة المتولدة من حركة المدّ والجزر؟

د أوجد بعض المناطق على الكرة الأرضية حيث يمكن إقامة سدود للاستفادة من حركة المدّ والجزر.

٥ التقرير: مرتكزًا على الأبحاث التي قمت بها، أكتب مقالًا صغيرًا تبيّن فيه مزايا وعيوب هذه الطاقة. هل تعتقد أنّه يمكن تشكيل مصدر عملي للطاقة الكهربائية في المستقبل؟

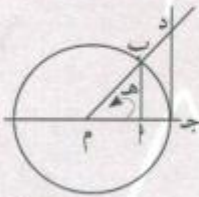
دروس الوحدة

العلاقات بين الدوال المثلثية (٢)	العلاقات بين الدوال المثلثية (١)	دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي والدوال المثلثية (الدائرية)
٣-٨	٢-٨	١-٨

أضف إلى معلوماتك

أطلق اسم جيب (sin) على دالة الجيب (sin function) نتيجة عدم وضوح حصل في القرون الوسطى. جاءت هذه التسمية من كلمة سنسكريتية (Sanskrit) وهي «جيبًا» (Jiva) وتعني الوتر. وقد استخدمت أولًا في الهند مع «أريابتا» (Araybheta) سنة ٥١٠ م. وكانت تعني نصف وتر ولكن تم اختصارها، ونقلت إلى اللغة العربية تحت اسم «جيبا» (jiba) وهي مشابهة لكلمة «جيب» (jaib) وتعني الصدر (أو التجويف). أما في الوقت الحاضر فكلمة جيب في اللغة العربية هي مرادفة لكلمة (sin).

وجد المترجمون عند نقل الناتج الفكري العربي إلى اللاتينية أن كلمة جيب (sinus) تعني أيضًا الصدر (أو التجويف) ومن كلمة (sinus) حصلنا على كلمة (sin) جيب، أما كلمة ظل (tangent) فهي تعود إلى «توماس فينك» (Thomas Finck) عام ١٥٨٣، التي يمكن فهمها بالنظر إلى الرسم:



القطعة المستقيمة دج هي مماسة للدائرة في النقطة ج. لنأخذ $m = b = 1$ فيكون $\text{ظاه} = \frac{\text{دج}}{م} = \frac{\text{دج}}{1} = \text{دج}$ ، كما وعرفت tangent قديمًا بعبارة «umbra versa» وتعني الظل المدار. تستخدم دائرة الوحدة في حل تمارين تتعلق بالدوال المثلثية.

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت كيفية استخدام النسب المثلثية.
- تعلمت كيفية استخدام نظرية فيثاغورث.

ماذا سوف تتعلم؟

- سوف تعرف دائرة الوحدة.
- سوف توجد إحداثيات النقطة على دائرة الوحدة لتستخدمها في إيجاد قيم الدوال المثلثية.
- سوف توجد العلاقة بين الدوال المثلثية لزوايا حادة لحل المعادلات المثلثية.
- سوف تقوم بتبسيط عبارات جبرية تحتوي على دوال مثلثية.
- سوف توجد العلاقة بين:
 - θ° ، θ° جتا لأي زاوية θ .
 - θ° ظا وأي زاوية θ .
 - θ° ظنا وأي زاوية θ .
- سوف تبسط عبارات تتضمن دوال مثلثية وتبرهن صحة متطابقات مثلثية.

المصطلحات الأساسية

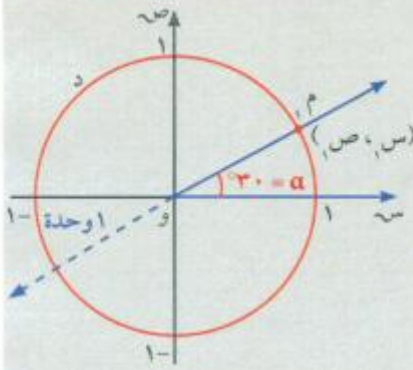
- دائرة الوحدة - دوال مثلثية - إشارات الدوال المثلثية - إشارات مقلوب دالة مثلثية - الربع الأول - الربع الثاني - الربع الثالث - الربع الرابع - زاوية الإسناد - متطابقات.

دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي والدوال المثلثية (الدائرية)

The Unit Circle in the Coordinate Plane and Trigonometric Functions (Circular Functions)

سوف تتعلم

- دائرة الوحدة
- النقطة المثلثية
- الدوال المثلثية (الدائرية)
- إشارات الدوال المثلثية
- زاوية الإسناد



عمل تعاوني

استخدم الفرجار وارسم دائرة د طول نصف قطرها ١ (وحدة قياس) ومركزها نقطة الأصل للمحورين المتعامدين في المستوى الإحداثي. استخدم منقلة وارسم زاوية موجهة في وضع قياسي موجبة قياسها 30° .

يقطع الضلع النهائي الدائرة (في الربع الأول) في النقطة م (س، ص).

١ ما الطرق التي يمكنك استخدامها لإيجاد إحداثيات م (بدون استخدام آلة حاسبة)

٢ استخدم إحدى هذه الطرق وأوجد قيم س، ص.

اكتب هذه القيم على شكل كسور عشرية.

٣ استخدم آلة حاسبة لإيجاد: جتا 30° ، جا 30° .

قارن هذه القيم بما وجدته في السؤال (٢).

٤ ١ كرر الخطوات أعلاه مستخدماً زاوية قياسها 45° . ما إحداثيات النقطة

الجديدة م؟

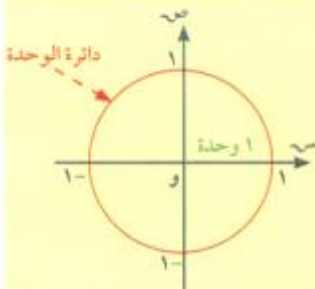
٢ ضع تخميناً. ما العلاقة بين إحداثيات النقطة م على الدائرة التي رسمتها

وقيم جيب تمام وجيب الزاوية في الوضع القياسي والتي يمر ضلعها النهائي في م؟

Unit Circle

دائرة الوحدة

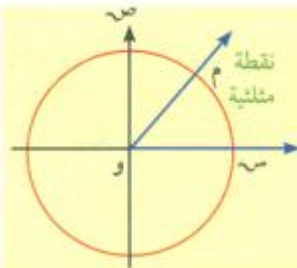
هي دائرة مركزها نقطة الأصل و طول نصف قطرها واحد وحدة.



The Triangular Point

النقطة المثلثية

هي نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجهة في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة.



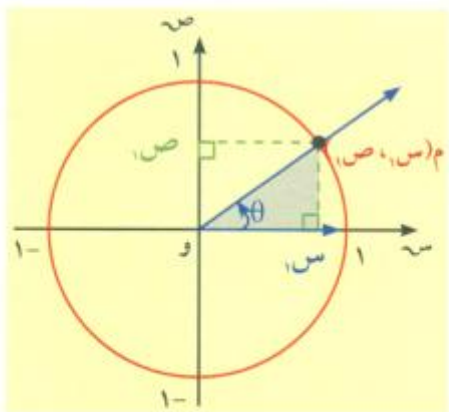
معلومة مفيدة:

عادة ما يستخدم الحرف اليوناني θ (يلفظ ثيتا) للتعبير عن قياس زاوية.

سوف نستخدم الرمز θ لرمز إلى قياس زاوية موجهة في الوضع القياسي.

النسب المثلثية للزاوية التي قياسها θ

بفرض أن زاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها θ ، يقطع ضلعها النهائي دائرة الوحدة في النقطة م (س، ص).



معلومة مفيدة:

عندما نقول الزاوية θ أو α أو ... نقصد الزاوية التي قياسها θ أو α أو ...

في الشكل المقابل المثلث المظلل قائم الزاوية.

تعرف من دراستك السابقة: أن $\cos \theta = \frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الوتر}}$

\therefore طول الوتر = 1 = 1

$$\therefore \cos \theta = \frac{\text{الضلع المجاور}}{1} = \frac{\cos \theta}{1}$$

$$\text{أي أن } \cos \theta = \cos \theta$$

$$\text{كذلك } \sin \theta = \frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\sin \theta}{1}$$

$$\text{أي أن } \sin \theta = \sin \theta$$

وبالتالي تكون النسب المثلثية للزاوية θ هي:

$$\cos \theta = \frac{\text{جا}}{\text{ص}}$$

$$\sin \theta = \frac{\text{ظا}}{\text{ص}}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{ظنا}}{\text{ص}}$$

$$\cot \theta = \frac{\text{ص}}{\text{ظا}}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

مثال (1)

باستخدام دائرة الوحدة أوجد جا 60° ، جتا 60° .

الحل:

نرسم دائرة الوحدة، ونرسم الزاوية الموجهة التي قياسها 60° في الوضع القياسي.

فيكون M و 1 وحدة طول

نسقط من M عمودًا على المحور السيني وليكن H .

$\triangle MHO$ قائم الزاوية هـ.

$\angle MOH = 60^\circ$

\therefore وهـ $\frac{1}{2}$ (لأن في المثلث الثلاثيني السيني طول الضلع المقابل

للزاوية $60^\circ = \frac{1}{2}$ طول الوتر)

من نظرية فيثاغورث

$$\therefore \text{ م هـ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

إحداثيا النقطة M هما: $\frac{1}{2}$ ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore \text{ جتا } 60^\circ = \frac{1}{2}، \text{ جا } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

حاول أن تحل

1 على دائرة الوحدة، ارسم زاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها 45° . ثم أوجد جتا 45° ، جا 45° .

يمكن استخدام مثلث قائم الزاوية لإيجاد جتا θ ، جا θ لأي زاوية θ موجهة في الوضع القياسي لا يقع ضلعها النهائي في الربع الأول.

مثال (٢)

باستخدام دائرة الوحدة أوجد جتا (120°)، جا (120°).

الحل:

الخطوة ١

ارسم زاوية موجّهة في الوضع القياسي قياسها 120° ويقطع ضلعها النهائي دائرة الوحدة في النقطة م.

الخطوة ٢

ارسم مثلثًا قائم الزاوية بحيث ينطبق الوتر على الضلع النهائي للزاوية ثم ضع أحد ضلعيه على محور السينات (بحيث يكون الضلع الآخر موازيًا لمحور الصادات) وليكن المثلث موم.

الخطوة ٣

لاحظ أن $n(\widehat{m}) = 60^\circ$ لماذا؟

أوجد طول كل ضلع في المثلث.

طول الوتر $\overline{om} = 1$

طول الضلع الأصغر $\overline{mm'} = \frac{1}{2}$

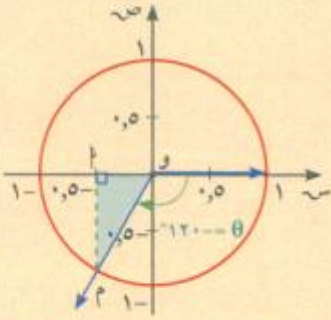
طول الضلع الأكبر $\overline{mm''} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

بما أن النقطة تقع في الربع الثالث، فكل الإحداثيين سالبان.

ينطبق الضلع الأصغر على محور السينات. ∴ جتا (120°) = $-\frac{1}{2}$ ، جا (120°) = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

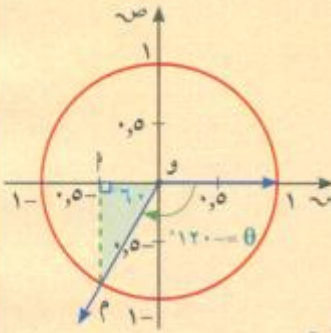
حاول أن تحل

٢ مستخدمًا طريقة المثال (٢)، أوجد جتا $\frac{\pi^3}{4}$ ، جا $\frac{\pi^3}{4}$.



الإحداثي السيني = جتا (120°)

الإحداثي الصادي = جا (120°)



المثلث ثلاثيني سيني

تدريب

استخدم آلة حاسبة وأكمل الجدول التالي مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين:

قياس الزاوية θ							النسبة
٥٣١٠	٥٢٥٠	٥٢٢٠	٥١٦٠	٥١٣٠	٥٨٠	٥٤٠	
							جا θ ($\sin\theta$)
							جتا θ ($\cos\theta$)
							ظا θ ($\tan\theta$)

Circular Functions (Trigonometric Functions)

الدوال الدائرية (المثلثية)

إذا كانت θ (ص، ص) هي النقطة المثلثية لزاوية قياسها θ ، وتحرك الضلع النهائي لهذه الزاوية في الاتجاه الموجب (الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة)، فإن θ تتغير على دائرة الوحدة وبالتالي تتغير معها كل من $\sin \theta$ و $\cos \theta$: لكل قيمة تأخذها θ حيث $\theta \in [0, 2\pi)$ ، قيمة واحدة لكل من المتغيرين $\sin \theta$ و $\cos \theta$ ، ص حيث $\sin \theta$ و $\cos \theta$ تتسميان إلى $[-1, 1]$.
مما تقدم، نستطيع تعريف الدوال المثلثية (أو الدوال الدائرية) التالية:

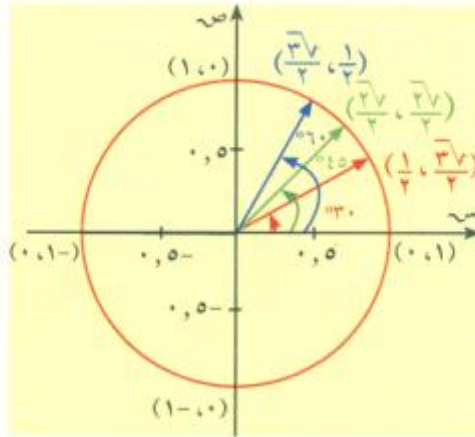
تعريف:

إذا كانت θ (ص، ص) هي النقطة المثلثية لزاوية قياسها θ حيث $0 \leq \theta < 2\pi$ فإن:

- (١) دالة الجيب: $\sin \theta = \text{جيب } \theta$
 (٢) دالة جيب التمام: $\cos \theta = \text{جيب } \theta$
 (٣) دالة الظل: $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$
 (٤) دالة القاطع: $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$
 (٥) دالة قاطع التمام: $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$
 (٦) دالة ظل التمام: $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$
- حيث $\text{جيب } \theta = \sin \theta$ (الإحداثي الصادي للنقطة المثلثية)
 حيث $\text{جيب } \theta = \cos \theta$ (الإحداثي السيني للنقطة المثلثية)
 حيث $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ ، $\cos \theta \neq 0$
 حيث $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$ ، $\sin \theta \neq 0$
 حيث $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$ ، $\cos \theta \neq 0$
 حيث $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ ، $\sin \theta \neq 0$

معلومة رياضية:

- الاتجاه الموجب هو الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة.
- النقطة المثلثية (ص، ص) يمكن التعبير عنها بـ $(\cos \theta, \sin \theta)$.



يمكن بسهولة إيجاد قيم الدوال المثلثية لبعض قيم θ الخاصة.

قياس الزاوية θ	٠	٣٠	٤٥	٦٠	٩٠	١٨٠	٢٧٠	٣٦٠
الدالة	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
جيب θ	٠	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	١	٠	-١	٠
جيب θ	١	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	٠	-١	٠	١
ظل θ	٠	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	١	$\sqrt{3}$	غير معرف	٠	غير معرف	٠



من الشكل: يمكن ملاحظة ما يلي:

- إذا كانت θ في الربع الأول فإن: $\theta < 0$ ، $\text{جتا}\theta < 0$
- إذا كانت θ في الربع الثاني فإن: $\theta < 0$ ، $\text{جتا}\theta > 0$
- إذا كانت θ في الربع الثالث فإن: $\theta > 0$ ، $\text{جتا}\theta < 0$
- إذا كانت θ في الربع الرابع فإن: $\theta > 0$ ، $\text{جتا}\theta > 0$

مثال (٣)

حدّد إشارة $\text{جتا}\theta$ ، $\text{جتا}\theta$ في كل مما يلي:

ج $\theta = 30.5^\circ$

ب $\theta = \frac{\pi 7}{6}$

أ $\theta = 135^\circ$

الحل:

أ $\therefore \theta = 135^\circ$ ، $\therefore 90^\circ < \theta < 180^\circ$ أي أن θ تقع في الربع الثاني.

$\therefore \text{جتا}\theta < 0$ ، $\text{جتا}\theta > 0$.

أي أن θ تقع في الربع الثالث.

ب $\therefore \theta = \frac{\pi 7}{6}$ ، $\therefore \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

$\therefore \text{جتا}\theta > 0$ ، $\text{جتا}\theta > 0$.

ج $\therefore \theta = 30.5^\circ$ ، $\therefore 0^\circ < \theta < 36^\circ$ أي أن θ تقع في الربع الرابع.

$\therefore \text{جتا}\theta > 0$ ، $\text{جتا}\theta < 0$.

حاول أن تحل

٣ أ إذا كانت $90^\circ < \theta < 270^\circ$ ، ما هي إشارة $\text{جتا}\theta$ ؟

ب إذا كانت $0^\circ < \theta < \pi$ ، ما هي إشارة $\text{جتا}\theta$ ؟

Reference Angle

زاوية الإسناد

تحتاج أحياناً إلى معرفة قيم النسب المثلثية لزاوية θ ضلعها النهائي موجود في الربع الثاني أو الربع الثالث أو الربع الرابع. يمكن إسناد هذه الزاوية إلى زاوية حادة α ، محددة بمحور السينات والضلع النهائي للزاوية θ .

معلومة

الرمز α يُقرأ ألفا.

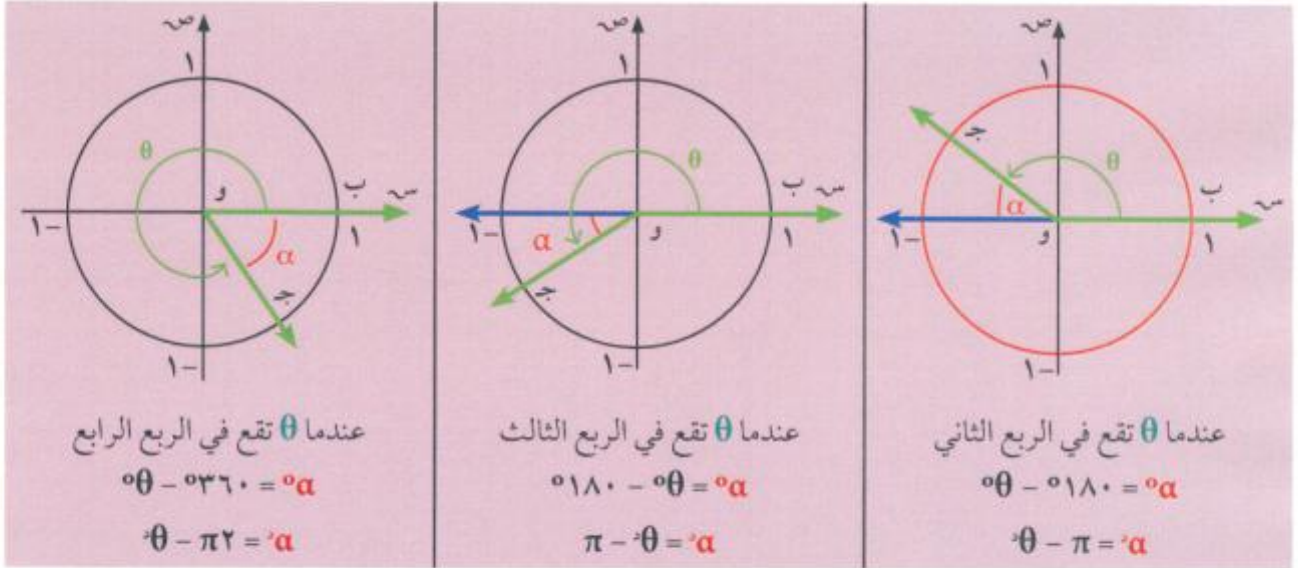
تعريف زاوية الإسناد:

زاوية الإسناد للزاوية الموجهة (\vec{OB} ، \vec{OJ}) التي في وضع قياسي هي الزاوية الحادة α التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات. فإذا كان α زاوية الإسناد فإن: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

الأشكال التالية توضح الحالات المختلفة لإيجاد زاوية الإسناد

تذكر

الزاوية الموجهة ب \vec{OJ} و \vec{OB} يمكن أن نرسم لها بالرمز (\vec{OB} ، \vec{OJ}) حيث \vec{OB} الضلع الابتدائي، و \vec{OJ} الضلع النهائي.



مثال (٤)

مستخدماً المنقلة، ارسم كلاً من الزوايا التالية على دائرة الوحدة، ثم عيّن زاوية الإسناد وأوجد قياسها.

ج $\frac{11\pi}{6}$

ب 215°

أ 125°

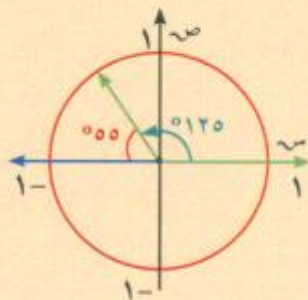
الحل:

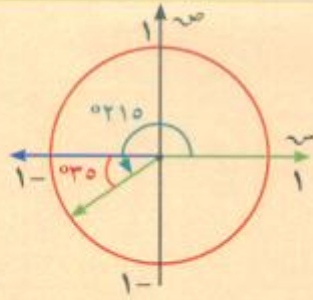
أ $\theta = 125^\circ$ تقع في الربع الثاني

∴ قياس زاوية الإسناد $^\circ\alpha = 180^\circ - \theta$

$$= 180^\circ - 125^\circ$$

$$= 55^\circ$$



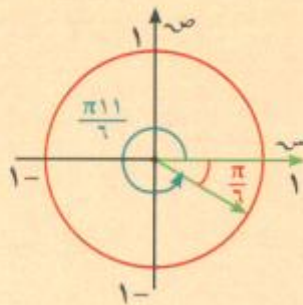


ب $\theta = 215^\circ$ تقع في الربع الثالث

\therefore قياس زاوية الإسناد $\alpha = 180^\circ - \theta$

$$180^\circ - 215^\circ =$$

$$35^\circ =$$

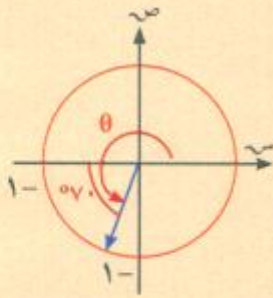


ج $\theta = \frac{11}{6}\pi$ تقع في الربع الرابع

\therefore قياس زاوية الإسناد $\alpha = \theta - \pi$

$$\frac{11}{6}\pi - \pi =$$

$$\frac{\pi}{6} =$$



حاول أن تحل

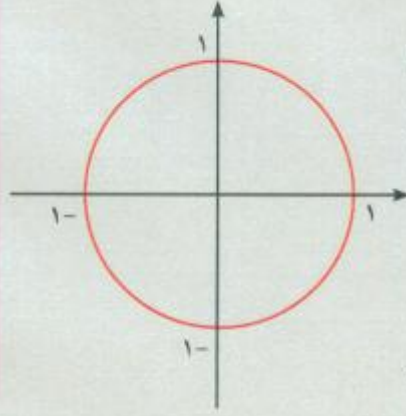
٤ بيّن الشكل المقابل، زاوية الإسناد α للزاوية θ . أوجد θ .

العلاقات بين الدوال المثلثية (١)

Relations Between Trigonometric Functions (1)

سوف تتعلم

- العلاقات بين الدوال المثلثية للزاوية θ والزاويا: $\theta - \pi$, $\theta - \frac{\pi}{4}$, $\theta + \frac{\pi}{4}$, $\theta + \pi$
- حل معادلات مثلثية
- تبسيط تعبيرات جبرية تحتوي على دوال مثلثية



عمل تعاوني

- ١ على دائرة الوحدة، عيّن زاوية موجهة موجبة θ في الوضع القياسي ضلعها النهائي في الربع الأول. أوجد θ .
- ٢ كرر الخطوات في ١ مع زاوية موجهة موجبة س ضلعها النهائي في الربع الثاني.
- ٣ ضع تخمينًا حول العلاقة بين قيم الدوال المثلثية لزاويتين كل منهما المعكوس الجمعي للأخرى.

تسمى θ جتا، θ جتا، θ ظا النسب المثلثية للزاوية التي قياسها θ وتدعى النسب المثلثية الأساسية

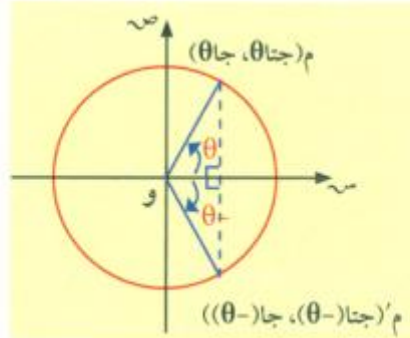
$$\begin{aligned} \text{علمًا بأن} \quad & 1 \geq \theta \geq -1 \\ & 1 \geq \theta \geq -1 \\ & \theta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

النسب المثلثية للزاويتين θ ، $-\theta$.

النقطة المثلثية م' هي انعكاس للنقطة المثلثية م في محور السينات حيث م (س، ص) ← م' (س، -ص)

$$\begin{aligned} \theta \text{ جتا} &= (-\theta) \text{ جتا} \\ \theta \text{ جا} &= -(-\theta) \text{ جا} \end{aligned}$$

تذكر
عـ تعني انعكاس في محور السينات.



قانون:

$$\theta \text{ جتا} = (-\theta) \text{ جتا}$$

$$\theta \text{ جا} = -(-\theta) \text{ جا}$$

وبالتالي $\theta \text{ ظا} = -(-\theta) \text{ ظا}$ بشرط أن يكون θ معرف.

مثال (١)

- ١ إذا كان جتا $\frac{\pi^3}{8} = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2\sqrt{2}}}{2}$ ، فأوجد جتا $(-\frac{\pi^3}{8})$.
 ب إذا كان جا $0,5878 \approx 0,36$ ، فأوجد جا $(-0,36)$.
 ج إذا كان ظا $1 = 0,45$ ، فأوجد ظا $(-0,45)$.

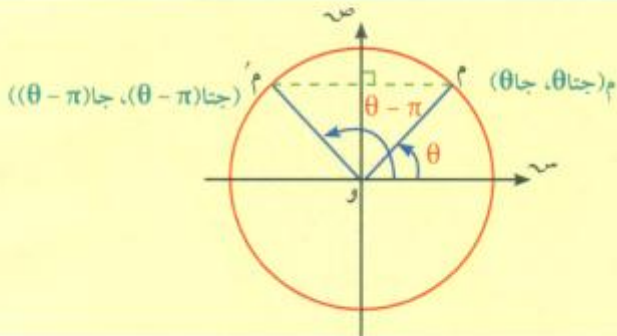
الحل:

- ١ جتا $(-\frac{\pi^3}{8}) = \frac{\pi^3}{8}$ جتا $\frac{\pi^3}{8} = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2\sqrt{2}}}{2}$.
 ب جا $(-0,36) = 0,5878$.
 ج ظا $(-0,45) = 1$.

حاول أن تحل

١ أكمل إذا كان:

- ١ جا $0,3 = 3$ ، فإن جا $(-3) = \dots$
 ب جتا $0,38 = 38$ ، فإن جتا $(-38) = \dots$
 ج ظاس $3,14 = 14$ ، فإن ظا $(-14) = \dots$
 د جتا $(-ص) = \frac{1}{4}$ ، فإن جتا ص = \dots



النسب المثلثية للزاويتين θ ، $(\theta - \pi)$.

النقطة المثلثية م' هي انعكاس للنقطة المثلثية م في محور الصادات.

حيث م(ص، س) ← م'(ص، -س)

فيكون: جتا $(\theta - \pi) = -\text{جتا } \theta$

جا $(\theta - \pi) = \text{جا } \theta$

تذكر

ع^س تعني انعكاس في محور الصادات.

قانون:

$$\text{جتا}(\theta - \pi) = -\text{جتا } \theta$$

$$\text{جا}(\theta - \pi) = \text{جا } \theta$$

وبالتالي ظا $(\theta - \pi) = -\text{ظا } \theta$ شرط أن يكون ظا θ معرفاً.

مثال (٢)

بدون استخدام الآلة الحاسبة

إذا كان:

أ جتا $60^\circ = \frac{1}{4}$ ، أو وجد جتا 120° .

ب جا $45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ، أو وجد جا 135° .

ج ظا $\theta = \frac{3}{5}$ ، أو وجد ظا $(\theta - \pi)$.

الحل:

أ جتا $120^\circ = \text{جتا}(180^\circ - 60^\circ) = -\text{جتا } 60^\circ = -\frac{1}{4}$.

ب جا $135^\circ = \text{جا}(180^\circ - 45^\circ) = \text{جا } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

ج ظا $(\theta - \pi) = -\text{ظا } \theta = -\frac{3}{5}$.

حاول أن تحل

٢ بدون استخدام الآلة الحاسبة. إذا كان:

أ جا $30^\circ = \frac{1}{4}$ ، فأوجد جا 150° .

ب جتا $\frac{4}{5} = \text{جتا } s$ ، فأوجد جتا $(\pi - s)$.

ج ظا $\frac{\pi}{12} = \sqrt{3} - 2$ ، فأوجد ظا $\frac{11\pi}{12}$.

معلومة مفيدة:

إذا كانت الزاوية α هي زاوية الإسناد للزاوية θ فإن:

$$|\text{جا}\theta| = \alpha$$

$$\text{جتا}\theta = \alpha$$

$$\text{ظا}\theta = \alpha$$

فمثلاً: الزاوية 60° زاوية إسناد للزاوية 120° .

$$|\text{جتا } 120^\circ| = \text{جتا } 60^\circ$$

النسب المثلثية للزاويتين θ ، $(\theta + \pi)$.

النقطة م' هي انعكاس للنقطة م في نقطة الأصل.

حيث م (ص، س) ، م' انعكاس في نقطة الأصل (ص، -س) .

فيكون: جتا $(\theta + \pi) = -\text{جتا}\theta$

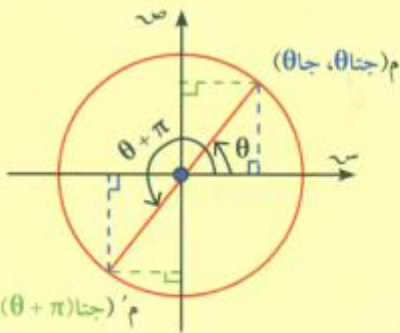
$$\text{جا}(\theta + \pi) = -\text{جا}\theta$$

قانون:

$$\text{جتا}(\theta + \pi) = -\text{جتا}\theta$$

$$\text{جا}(\theta + \pi) = -\text{جا}\theta$$

وبالتالي ظا $(\theta + \pi) = \text{ظا}\theta$ شرط أن يكون ظا θ معرفاً.



مثال (٣)

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان:

أ جا $٥٣٠ = \frac{1}{4}$ ، فأوجد جا ٥٢١٠ .

الحل:

أ جا $٥٢١٠ = \text{جا}(٥٣٠ + ٥١٨٠) = -\text{جا } ٥٣٠ = -\frac{1}{4}$

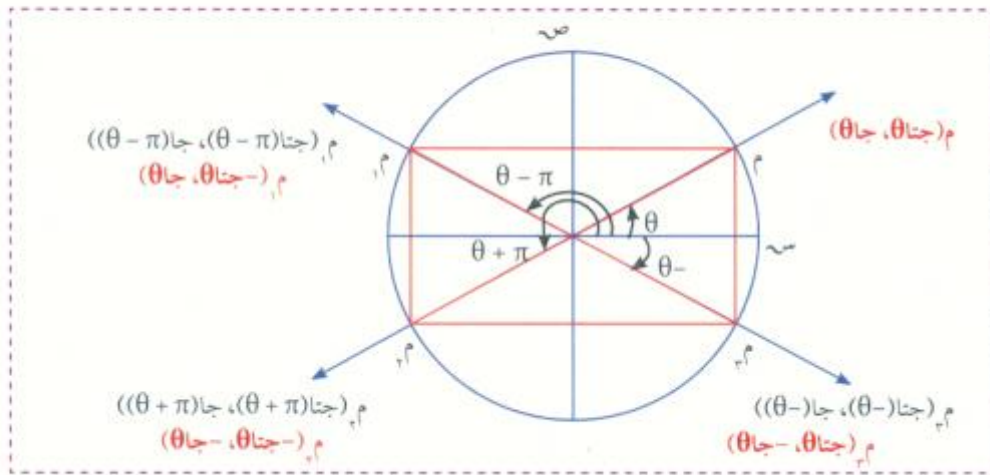
ب ظا $\frac{\pi}{8} = \text{ظا}\left(\frac{\pi}{8} + \pi\right) = \text{ظا}\left(\frac{\pi}{8} + \pi\right) = \sqrt{2} - 1$

ب ظا $\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ ، فأوجد ظا $\frac{\pi}{8}$.

حاول أن تحل

٣ بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جتا $٥٤٠ \approx ٧٦٦$ ، فأوجد جتا ٥٢٢٠ .

الخلاصة:



مثال (٤)

بدون استخدام الآلة الحاسبة، أوجد:

أ جا ٥١٥٠ .

ب جتا ٥٢٤٠ .

ج ظا $\frac{\pi}{3}$.

الحل:

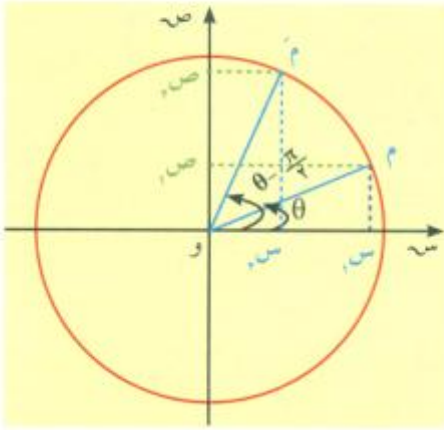
أ جا $٥١٥٠ = \text{جا}(٥٣٠ - ٥١٨٠) = \text{جا } ٥٣٠ = \frac{1}{4}$

ب جتا $٥٢٤٠ = \text{جتا}(٥٦٠ + ٥١٨٠) = -\text{جتا } ٥٦٠ = -\frac{1}{4}$

ج ظا $\frac{\pi}{3} = \text{ظا}\left(\frac{\pi}{3} - \pi\right) = -\text{ظا}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$

حاول أن تحل

٤ إذا كان جا $٥٥٦ \approx ٨٢٩$ ، بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد جا ٥٢٣٦ .



النسب المثلثية للزاويتين $\theta, (\theta - \frac{\pi}{4})$

Δ وس، م \cong م' وص، م' لماذا؟
استخدم تطابق الأضلاع المتناظرة لإثبات:

$$\text{جا } \theta = \left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \text{ جا}$$

$$\text{جا } \theta = \left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \text{ جا}$$

استنتاج: لأي زاويتين متتامتين، فإن جيب إحداهما يساوي جيب تمام الأخرى.

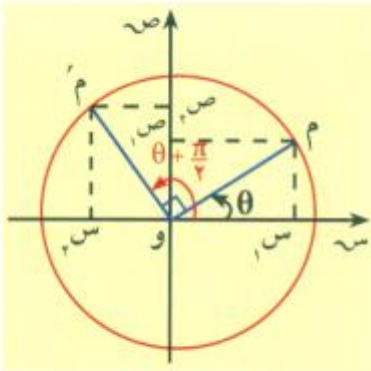
قانون:

$$\text{جا } \theta = \left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \text{ جا}$$

$$\text{جا } \theta = \left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \text{ جا}$$

شرط أن يكون ظنا θ معرفًا.

$$\text{ظا } \theta = \left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \text{ ظا}$$



النسب المثلثية للزاويتين $\theta, (\theta + \frac{\pi}{4})$

المثلثان وس، م \cong م' وص، م' متطابقان. لماذا؟
ما هي إحدائيات كل من م، م'؟

ما إشارة كل من $\text{جا } \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ ، $\text{جا } \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ ؟

أثبت: $\text{جا } \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -\text{جا } \theta$. $\text{جا } \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \text{جا } \theta$.

قانون:

$$\text{جا } \theta = \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \text{ جا}$$

$$\text{جا } \theta = -\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \text{ جا}$$

شرط أن يكون ظنا θ معرفًا.

$$\text{ظا } \theta = -\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \text{ ظا}$$

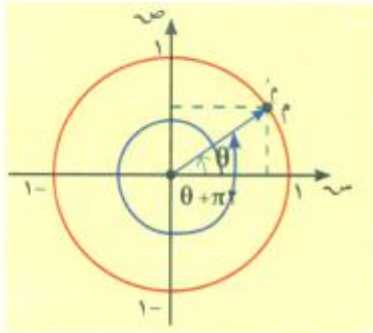
الدوال المثلثية (الدائرية) على حـ Trigonometric Functions on R

رأينا حتى الآن قيم الدوال الدائرية (المثلثية) على الفترة $[\pi/2, 0]$ أو على مجموعة جزئية من هذه الفترة مثل: $[\pi/4, 0]$ أو $(\pi/4, \pi/4]$... على أساس أن الضلع النهائي للزاوية الموجهة في وضعها القياسي يكمل دورة واحدة على مجال التعريف أي عندما $\theta \in (\pi/2, 0]$.

ولكن ماذا يحدث إذا سمحنا للضلع النهائي للزاوية θ بالدوران أكثر من دورة؟

يتبين لنا أنه إذا كانت θ قياس زاوية موجهة في وضع قياسي حيث نقطتها المثلثية (س، ص) سوف ترافقها زوايا موجهة كلاً منها في وضع قياسي أيضاً وقياساتها $(\theta + 2\pi k)$ حيث k عدد صحيح ولها النقطة المثلثية (س، ص) ونطلق عليها اسم «زوايا متكافئة» وأصغر قياس غير سالب للزوايا المتكافئة يسمى القياس الأساسي.

فمثلاً: $0.360 \times 2 - 0.360, 0.360 - 0.360, 0.360 \times 3 + 0.360, 0.360 \times 2 + 0.360, 0.360 \times 1 + 0.360, 0.360$
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $0.720, -0.360, 1.080, 0.720, 0.360, 0.360$



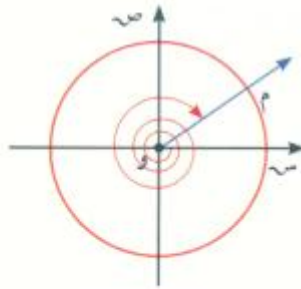
هي قياسات لزوايا متكافئة مع الزاوية التي قياسها الأساسي 0.360 .

كما أن: $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$ هي قياسات لزوايا متكافئة مع الزاوية التي قياسها الأساسي $\frac{\pi}{3}$ وهكذا يمكن استنتاج ما يلي:

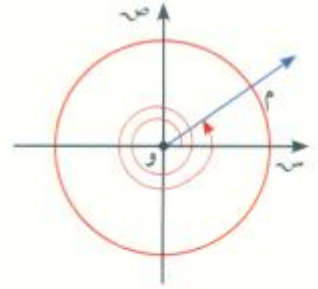
$$\begin{aligned} \cos(\theta + 2\pi k) &= \cos \theta \\ \sin(\theta + 2\pi k) &= \sin \theta \\ \tan(\theta + 2\pi k) &= \tan \theta \end{aligned}$$

حيث θ معرّف؛ k عددًا صحيحًا

يبين الشكلان أدناه أن القوانين السابقة هي صحيحة أيضًا لأي زاوية قياسها θ :



دوران بالاتجاه السالب

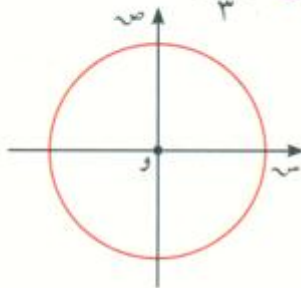


دوران بالاتجاه الموجب

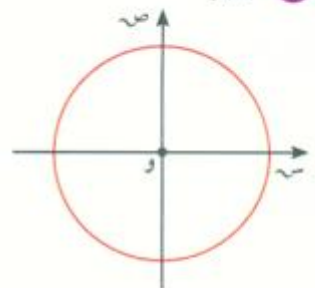
تدريب (١)

ارسم وحدد الربع الذي تقع فيه الزاوية التي قياسها:

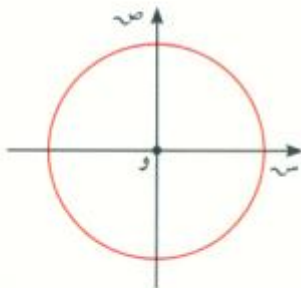
ب $\frac{\pi 17}{3}$



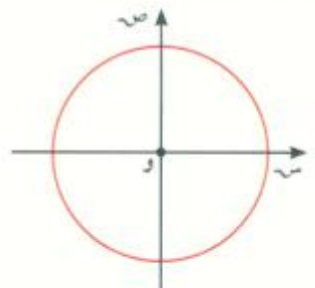
١ $^{\circ}475$



د $^{\circ}890-$



ج $\frac{\pi 16-}{3}$



تدريب (٢)

بدون استخدام الآلة الحاسبة، اكمل:

..... = = جتا $(^{\circ}360 + ^{\circ}30)$ = جتا $^{\circ}390$

..... = = جتا $^{\circ}765$

..... = = ظا $(\frac{\pi 11-}{3})$

من العرض السابق يمكننا إعادة تعريف الدوال الدائرية باعتبار المجال هو \mathbb{C} فيكون:

تعريف:

إذا كانت (s, c) هي النقطة المثلثية لزاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها θ فإن:

- ١ جتا $\theta = s$ $\forall \theta \in \mathbb{C}$
- ٢ جتا $\theta = s$ $\forall \theta \in \mathbb{C}$
- ٣ ظا $\theta = \frac{c}{s}$ ، $s \neq 0$ حيث $\theta \in \mathbb{C}$
- ٤ قتا $\theta = \frac{1}{s}$ ، $s \neq 0$ حيث $\theta \in \mathbb{C}$
- ٥ قتا $\theta = \frac{1}{c}$ ، $c \neq 0$ حيث $\theta \in \mathbb{C}$
- ٦ ظتا $\theta = \frac{s}{c}$ ، $c \neq 0$ حيث $\theta \in \mathbb{C}$

مثال (٥)

بسّط كلاً من التعبيرات التالية لأبسط صورة:

- أ جتا $s +$ جتا $(s + 90^\circ) +$ جتا $(s + 180^\circ) +$ جتا $(s - 90^\circ)$.
- ب جتا $(\theta + \frac{\pi}{4}) +$ جتا $(\pi - \theta) +$ جتا $(\frac{\pi}{4} + \theta) +$ جتا $(\pi + \theta)$.

الحل:

- أ جتا $s +$ جتا $(s + 90^\circ) +$ جتا $(s + 180^\circ) +$ جتا $(s - 90^\circ)$
 $=$ جتا $s +$ جتا $s -$ جتا $s +$ جتا s
 $= 2$ جتا s
- ب جتا $(\theta + \frac{\pi}{4}) +$ جتا $(\pi - \theta) +$ جتا $(\frac{\pi}{4} + \theta) +$ جتا $(\pi + \theta)$
 $=$ جتا $\theta +$ جتا $(\pi - \theta) +$ جتا $(\frac{\pi}{4} + \theta) -$ جتا $(\frac{\pi}{4} + \pi + \theta)$
 $=$ جتا $\theta -$ جتا $\theta -$ جتا $(\frac{\pi}{4} + \theta) -$ جتا $(\frac{\pi}{4} + \theta)$
 $=$ جتا $\theta -$ جتا $\theta -$ جتا $\theta -$ جتا θ
 $= -2$ جتا θ

حاول أن تحل

٥ بسّط كلاً من التعبيرات التالية لأبسط صورة:

- أ جتا $(\pi + \theta)$ ب جتا $(\theta - \frac{\pi}{4})$ ج جتا $(-630^\circ - s)$ د جتا $(270^\circ + s)$

Solving Trigonometric Equations

حل معادلات مثلثية

إذا كانت الزاوية θ تقع في الربع الأول فإن الزاوية $-\theta$ تقع في الربع الرابع.
تعلمت في هذا الدرس أن $\text{جتا } \theta = \text{جتا } (-\theta)$.
ولكن إذا عرفت جيب التمام لإحدى الزوايا، فهل يمكنك الجزم إن كانت الزاوية تساوي θ أو $-\theta$ ؟ عليك اعتماد الحلين.

حل المعادلة: $\text{جتا } \theta = \text{جتا } \theta$

$$\text{هو } \pi k + \theta = \text{س} \quad \text{أو} \quad \pi k + \theta = -\text{س} \quad (\text{ك} \in \mathbb{Z})$$

لاحظ أن جيب تمام الزاوية يكون موجباً عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الرابع.

مثال (٦)

حل كلا من المعادلتين:

$$\text{١} \quad \text{جتا } \theta = \frac{1}{4}$$

الحل:

$$\text{١} \quad \text{جتا } \theta = \frac{1}{4}$$

$$\text{جتا } \theta = \text{جتا } \frac{\pi}{4}$$

∴ جتا $\theta < 0$

∴ θ تقع في الربع الأول أو في الربع الرابع

$$\text{∴ } \pi k + \frac{\pi}{4} = \theta \quad \text{أو} \quad \pi k + \frac{\pi}{4} = -\theta \quad (\text{ك} \in \mathbb{Z})$$

$$\text{ب} \quad \text{جتا } \theta = -\sqrt{3}$$

$$\text{جتا } \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{جتا } \theta = \text{جتا } \frac{\pi}{3}$$

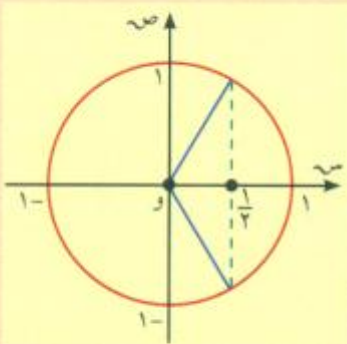
∴ جتا $\theta < 0$

∴ θ تقع في الربع الأول أو في الربع الرابع

$$\text{∴ } \pi k + \frac{\pi}{3} = \theta \quad \text{أو} \quad \pi k + \frac{\pi}{3} = -\theta \quad (\text{ك} \in \mathbb{Z})$$

حاول أن تحل

$$\text{٦} \quad \text{حل المعادلة: } \text{جتا } \theta = 1$$



إذا كانت الزاوية θ تقع في الربع الأول فإن الزاوية $(\theta - \pi)$ تقع في الربع الثاني.

تعلمت أيضًا أن $\text{جا } \theta = \text{جا } (\theta - \pi)$.

وبالتالي، إذا كانت $\text{جا } \theta = \frac{1}{2}$ فإن: $\theta = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ أو $\theta = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ (ك $\in \mathbb{Z}$)

حل المعادلة $\text{جا } \theta = \frac{1}{2}$

هو $\theta = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ أو $\theta = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ ، (ك $\in \mathbb{Z}$)

لاحظ أن جيب الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثاني.

مثال (٧)

حل كلا من المعادلتين:

أ $\text{جا } \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

الحل:

أ $\text{جا } \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{جا } \theta = \frac{\pi}{3}$

$\therefore \text{جا } \theta < 0$

$\therefore \theta$ تقع في الربع الأول أو الربع الثاني.

$\text{جا } \theta = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ أو $\text{جا } \theta = \left(\frac{\pi}{3} - \pi\right) + 2\pi k$ (ك $\in \mathbb{Z}$)

$\text{جا } \theta = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$

ب $\text{جا } \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{جا } \theta = \frac{\pi}{4}$

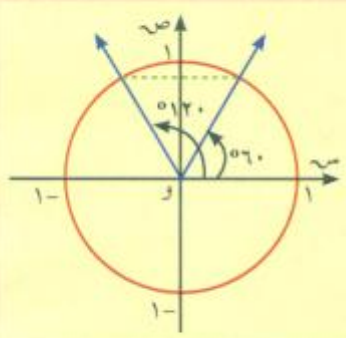
$\therefore \text{جا } \theta = \frac{\pi}{4}$

$\therefore \text{جا } \theta < 0$

$\therefore \theta$ تقع في الربع الأول أو الربع الثاني.

$\text{جا } \theta = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ أو $\text{جا } \theta = \left(\frac{\pi}{4} - \pi\right) + 2\pi k$ (ك $\in \mathbb{Z}$)

$\text{جا } \theta = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$



حاول أن تحل

٧ حل المعادلة: $\text{جا } \theta = 1$

إذا كانت الزاوية θ تقع في الربع الأول فإن الزاوية $(\pi + \theta)$ تقع في الربع الثالث.
الزاويتان $\theta, \pi + \theta$ لهما الظل نفسه.
ظا $\theta =$ ظا $(\pi + \theta)$

حل المعادلة ظا $\theta =$ ظا $\pi ك + \theta$ هو $\pi ك + \theta = \pi ك + \theta$ (ك $\in \mathbb{Z}$)
لاحظ أن ظل الزاوية يكون موجباً عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثالث.

مثال (٨)

حل المعادلة: ظا $\sqrt{3} = \theta$.

الحل:

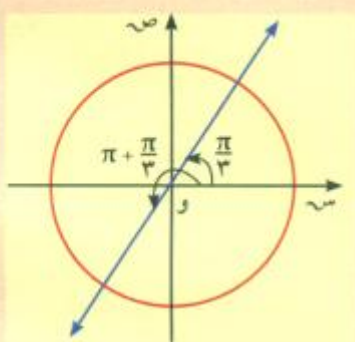
$$\sqrt{3} = \theta$$

$$\frac{\pi}{3} = \theta$$

$$\pi ك + \frac{\pi}{3} = \theta \quad (\text{ك} \in \mathbb{Z})$$

حاول أن تحل

٨ حل المعادلة: ظا $\sqrt{3} = \theta = 1$.



مثال (٩)

حل كلاً من المعادلتين:

أ جتا $(\frac{\pi}{6} + 3س) =$ جتا $(\frac{\pi}{3} - س)$

ب جا $2س =$ جا $(\frac{\pi}{4} + س)$

الحل:

أ جتا $(\frac{\pi}{6} + 3س) =$ جتا $(\frac{\pi}{3} - س)$

$$\pi ك 2 + \frac{\pi}{3} - س = \frac{\pi}{6} + 3س$$

$$\pi ك 2 + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} - س = 3س$$

$$\pi ك 2 + \frac{\pi}{6} - س = 3س$$

$$\pi ك + \frac{\pi}{4} - س = 3س$$

أو $3س + \frac{\pi}{6} - (\frac{\pi}{3} - س) = \pi ك 2$ (ك $\in \mathbb{Z}$)

$$3س + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + س = \pi ك 2$$

$$4س + \frac{\pi}{6} = \pi ك 2$$

$$س = \frac{\pi ك 2}{4} - \frac{\pi}{24}$$

$$\text{ب) جا } 2\text{س} = \text{جا} \left(\frac{\pi}{4} + \text{س} \right)$$

$$2\text{س} = \pi - \left(\frac{\pi}{4} + \text{س} \right) \quad (\text{ك} \ni \text{ص})$$

$$\text{أو } 2\text{س} = \frac{\pi}{4} + \pi - \text{ك} \quad \text{أو}$$

$$2\text{س} + \frac{\pi}{4} - \pi = \pi - \text{ك} \quad \text{أو}$$

$$2\text{س} - \frac{\pi}{4} = \pi - \text{ك} \quad \text{أو}$$

$$2\text{س} + \frac{\pi}{4} = \pi - \text{ك} \quad \text{أو}$$

$$2\text{س} + \frac{\pi}{4} = \pi - \text{ك} \quad \text{أو}$$

$$2\text{س} = \pi - \frac{\pi}{4} - \text{ك} \quad \text{أو}$$

$$2\text{س} = \pi - \frac{\pi}{4} - \text{ك} \quad \text{أو}$$

حاول أن تحل

٩ حل كلاً من المعادلتين:

$$\text{ب) جا } 2\text{س} = \text{جا} \left(\frac{\pi}{5} + \text{س} \right)$$

$$\text{أ) جتا } 3\text{س} = \left(\frac{\pi}{4} - \text{س} \right) \quad \text{أو}$$

مثال (١٠)

حل المعادلة: جتا $\left(\frac{\pi}{4} - \text{س} \right) = \text{جا } 3\text{س}$.
الحل:

$$\text{جتا} \left(\frac{\pi}{4} - \text{س} \right) = \text{جا } 3\text{س}$$

$$\text{جا } \theta = \text{جتا} \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{جتا} \left(\frac{\pi}{4} - \text{س} \right) = \text{جتا} \left(3\text{س} - \frac{\pi}{4} \right)$$

(ك \ni ص)

$$\text{أو } \text{س} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - 3\text{س} \quad \text{أو}$$

$$\text{س} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - 3\text{س} \quad \text{أو}$$

$$\text{أو } 2\text{س} = \frac{\pi}{4} - \pi + \text{ك} \quad \text{أو}$$

$$4\text{س} = \frac{\pi}{4} + \pi - \text{ك} \quad \text{أو}$$

$$\text{أو } \text{س} = \frac{\pi}{8} - \frac{\text{ك}}{2} \quad \text{أو}$$

$$\text{س} = \frac{\pi}{16} + \frac{\text{ك}}{4} \quad \text{أو}$$

معلومة رياضية:

القيمة $\theta - \text{ك}$ هي نفسها
القيمة $\theta + \text{ك}$ ، لأن $\text{ك} \ni \text{ص}$
ويمكن أن تأخذ ك قيمًا
صحيحة موجبة أو سالبة.

حاول أن تحل

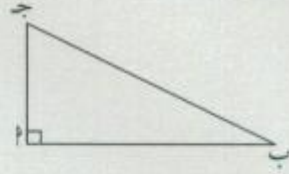
١٠ حل المعادلة: جتا $\left(\frac{\pi}{3} + \text{س} \right) = \text{جا} \left(\frac{\pi}{3} - \text{س} \right)$.

العلاقات بين الدوال المثلثية (٢)

Relations Between Trigonometric Functions (2)

سوف تتعلم

- متطابقات فيثاغورث
- علاقات مثلثية
- تبسيط عبارات تتضمن دوالً مثلثية
- برهنة صحة بعض المتطابقات المثلثية



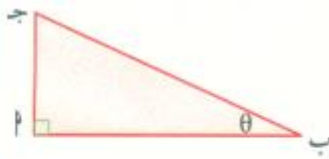
عمل تعاوني

- ١ ارسم مثلثاً Δ ب ج قائم الزاوية \angle .
 ب أوجد $\sin(\hat{ب})$ ، $\cos(\hat{ج})$ مستخدماً منقولة.
 ج استخدم آلة حاسبة لإيجاد: $\sin \hat{ب}$ ، $\cos \hat{ب}$ ، $\sin \hat{ج}$ + $\cos \hat{ب}$.
 ج ج ج، $\sin \hat{ج}$ ، $\cos \hat{ج}$ + $\sin \hat{ج}$.
- ٢ كرر الخطوات أ، ب، ج مع مثلث آخر Δ ب' ج' قائم الزاوية \angle .
- ٣ ضع تخميناً يبين ما حصلت عليه.

في هذا الدرس كله، θ ليست زاوية ربعية. يمكن استخدام المثلث Δ ب ج قائم الزاوية \angle ، لإثبات المتطابقات المثلثية الأساسية.

تدريب

أكمل:



$$\frac{\dots}{\dots} = \theta \text{ ظا} , \frac{\dots}{\dots} = \theta \text{ جتا}$$

$$\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\theta \text{ جتا}}{\dots} = \theta \text{ ظا}$$

Basic Trigonometric Identities

المتطابقات المثلثية الأساسية



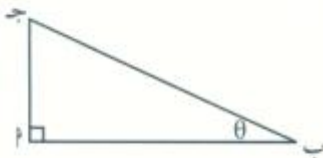
حيث المقام $\neq 0$.

$$\frac{\theta \text{ ظا}}{\theta \text{ جتا}} = \theta \text{ ظا} , \frac{\theta \text{ جتا}}{\theta \text{ جتا}} = \theta \text{ ظا} , \frac{\theta \text{ ظا}}{\theta \text{ جتا}} = \theta \text{ ظا}$$

$$\frac{1}{\theta \text{ جتا}} = \theta \text{ قتا} , \frac{1}{\theta \text{ جتا}} = \theta \text{ قتا}$$

Pythagorean Identities

متطابقات فيثاغورث



في الشكل المقابل Δ ب ج قائم الزاوية \angle :

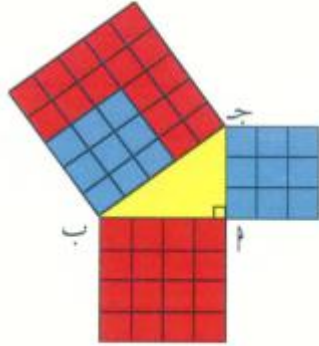
$$\frac{\text{ج}}{\text{ب}} = \theta \text{ جتا} , \frac{\text{ب}}{\text{ب}} = \theta \text{ قتا} , \frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \theta \text{ ظا}$$

$$\frac{\text{ج}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{ب}^2}{\text{ب}^2} = \frac{\text{ا}^2}{\text{ب}^2} \Rightarrow \frac{\text{ج}^2}{\text{ب}^2} + 1 = \frac{\text{ا}^2}{\text{ب}^2}$$

$$\frac{\text{ج}^2}{\text{ب}^2} + 1 = \frac{\text{ا}^2}{\text{ب}^2} \quad (1)$$

\therefore $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ في Δ ب ج قائم الزاوية في \angle

(أب) تساوي عدد
المربعات الصغيرة
الموجودة في المربع
الذي ضلعه $\overline{أب}$ كذلك
بالنسبة إلى $\overline{أج}$ ، $\overline{ب ج}$.



نظرية فيثاغورث

$$\therefore (أب)^2 = (أج)^2 + (ب ج)^2$$

وبالتعويض في (١) نحصل على: $\text{جا}^2 \theta + \text{جتا}^2 \theta = \frac{(ب ج)^2}{(ب ج)^2} = ١$

$$\text{جا}^2 \theta + \text{جتا}^2 \theta = ١ \text{ تسمى متطابقة فيثاغورث}$$

مثال (١)

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان $\text{جتا} \theta = ٤$ ، $٠ < \theta < \frac{\pi}{٤}$.

أ أوجد $\text{جا} \theta$.

ب استنتج θ .

الحل:

أ باستخدام متطابقة فيثاغورث:

$$\text{جا}^2 \theta + \text{جتا}^2 \theta = ١$$

$$\text{جا}^2 \theta = ١ - \text{جتا}^2 \theta = ١ - ١٦ = -١٥$$

$$\text{جا}^2 \theta = -١٥ \Rightarrow \text{جا} \theta = \pm \sqrt{-١٥}$$

$$\text{جا} \theta = \pm \sqrt{-١٥} \text{ أو } \text{جا} \theta = \pm \sqrt{-١٥} \text{ مرفوض لأن } ٠ < \theta < \frac{\pi}{٤}$$

ب $\theta = \arccos \left(\frac{\text{جا} \theta}{\text{جتا} \theta} \right) = \arccos \left(\frac{\pm \sqrt{-١٥}}{٤} \right) = \arccos \left(\pm \frac{\sqrt{-١٥}}{٤} \right)$

حاول أن تحل

١ بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان $\text{جتا} \theta = \frac{٣}{٥}$ ، $٠ < \theta < \frac{\pi}{٤}$ فأوجد $\text{جتا} \theta$ ، θ .

Relation Between $\tan \theta$, $\sec \theta$

العلاقة بين $\tan \theta$ ، $\sec \theta$

إذا قسمنا طرفي متطابقة فيثاغورث على $\text{جتا}^2 \theta$ نحصل على:

حيث $\text{جتا} \theta \neq ٠$

$$\frac{١}{\text{جتا}^2 \theta} = \frac{\text{جتا}^2 \theta}{\text{جتا}^2 \theta} + \frac{\text{جتا}^2 \theta}{\text{جتا}^2 \theta}$$

$$١ + \text{جتا}^2 \theta = \text{جتا}^2 \theta$$

$$\therefore ١ + \text{جتا}^2 \theta = \text{جتا}^2 \theta$$

مثال (٢)

بدون استخدام الآلة الحاسبة،

إذا كان $\theta = 2\sqrt{2}$ ، جتا $\theta > 0$ فأوجد جتا θ .

الحل:

طريقة أولى:

$$\theta = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{\theta}{\text{جتا}\theta} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \text{جتا}\theta = \frac{\theta}{2\sqrt{2}} \quad (1)$$

$$\therefore \text{جا}\theta + \text{جتا}\theta = 1$$

$$\therefore 1 = \text{جتا}\theta + (2\sqrt{2})\text{جتا}\theta$$

متطابقة فيثاغورث

عوض عن جتا θ بـ $2\sqrt{2}$ جتا θ

$$1 = \text{جتا}\theta + 8\text{جتا}\theta$$

$$9 = \text{جتا}\theta$$

$$\therefore \text{جتا}\theta = \frac{1}{9}$$

$\therefore \text{جتا}\theta = \frac{1}{9}$ (قيمة مرفوضة لأن $\text{جتا}\theta > 0$) أو $\text{جتا}\theta = -\frac{1}{9}$

من (1) نحصل على: $\text{جتا}\theta = \frac{1}{9} \times 2\sqrt{2}$

$$\text{جتا}\theta = \frac{2\sqrt{2}}{9}$$

طريقة ثانية:

$$\text{قا}\theta + 1 = \theta$$

$$\text{قا}\theta = \theta - 1$$

$$9 = \theta$$

$$\therefore \text{قا}\theta = 3 \text{ أو } \text{قا}\theta = -3$$

$$\therefore \text{جتا}\theta = \frac{1}{3} \text{ أو } \text{جتا}\theta = -\frac{1}{3}$$

$\therefore \text{جتا}\theta = \frac{1}{3}$ (وهي قيمة مرفوضة لأن $\text{جتا}\theta > 0$) أو $\text{جتا}\theta = -\frac{1}{3}$

$$\therefore \text{جتا}\theta = \frac{\theta}{2\sqrt{2}} \text{ ومنه جتا}\theta = \frac{1}{3} \times \frac{\theta}{2\sqrt{2}} \text{ أي جتا}\theta = \frac{\theta}{6\sqrt{2}}$$

حاول أن تحل

٢ بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان $\theta = \frac{3}{4}$ ، جتا $\theta > 0$ فأوجد جتا θ .

معلومة رياضية:

إذا كان $\theta < 0$

\therefore جتا θ ، جتا θ لهما

الإشارة نفسها.

مثال (٣)

بدون استخدام الآلة الحاسبة،
إذا كان $\theta = \frac{12}{5}$ ، فأوجد $\sin \theta$ ، $\cos \theta$ ، $\tan \theta$.
الحل:

طريقة أولى: نبدأ بتحديد إشارة θ

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \theta$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\sin \theta}{\theta} < 0 \text{ لأن } \sin \theta < 0, \cos \theta < 0$$

$$1 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta$$

$$1 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 + \cos^2 \theta$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \frac{144}{25} = \frac{25 - 144}{25} = \frac{-119}{25}$$

$$\cos \theta = \frac{13}{5} \text{ مرفوضة}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{13} = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \theta$$

$$\sin \theta \times \cos \theta = \theta$$

$$\left(\frac{1}{13}\right) \times \frac{12}{5} = \theta$$

$$\cos \theta = \frac{12}{13}, \sin \theta = \frac{5}{13}$$

طريقة ثانية: نرسم Δ ABC قائمة الزاوية C حيث $AC = 5$ ، $BC = 12$. (لأن الزاوية θ تقع في الربع الأول)

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 \text{ نظرية فيثاغورث}$$

$$AB^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow AB = 13$$

$$\cos \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{13}$$

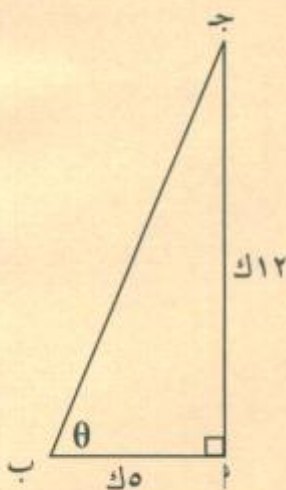
$$\sin \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{13}$$

$$\tan \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{5}$$

حاول أن تحل

٣ بدون استخدام الآلة الحاسبة،

إذا كان $\theta = \frac{24}{7}$ ، فأوجد $\sin \theta$ ، $\cos \theta$ ، $\tan \theta$.



Relation Between $\cot \theta$, $\csc \theta$

المقام المشترك
 $1 = \theta^2 \csc^2 + \theta^2 \cot^2$

العلاقة بين ظلثا، قنثا

$$\begin{aligned} 1 + \theta^2 \csc^2 &= \frac{\theta^2 \csc^2}{\theta^2 \csc^2} + 1 \\ 1 + \theta^2 \csc^2 &= \frac{\theta^2 \csc^2 + \theta^2 \cot^2}{\theta^2 \csc^2} \\ 1 + \theta^2 \csc^2 &= \frac{\theta^2 \csc^2 + \theta^2 \cot^2}{\theta^2 \csc^2} \\ 1 + \theta^2 \csc^2 &= \frac{1}{\theta^2 \csc^2} = \theta^2 \cot^2 \\ \therefore 1 + \theta^2 \csc^2 &= \theta^2 \cot^2 \end{aligned}$$

مثال (٤)

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان $\csc \theta = \frac{3}{\sqrt{49}}$ ، جتا $\theta < 0$ فأوجد ظلثا، ظا θ .
 الحل:

$$\begin{aligned} 1 + \theta^2 \csc^2 &= \frac{1}{\theta^2 \csc^2} \\ \frac{49}{9} &= \frac{1}{\frac{9}{49}} = \frac{1}{\left(\frac{3}{\sqrt{49}}\right)^2} = \theta^2 \csc^2 + 1 \\ \theta^2 \csc^2 &= 1 - \frac{49}{9} = \frac{40}{9} \\ \theta^2 \csc^2 &= \frac{40}{9} \quad \text{أو} \quad \theta^2 \csc^2 = -\frac{40}{9} \\ \therefore \text{جا } \theta, \text{ جتا } \theta &\text{ لهما الإشارة نفسها (موجبة)} \\ \therefore \theta^2 \csc^2 &< 0 \text{ وبالتالي } \theta^2 \csc^2 = \frac{40}{9} \\ \theta^2 \csc^2 &= \theta^2 \cot^2 = \frac{1}{\frac{40}{9}} = \frac{9}{40} \approx 0,225 \end{aligned}$$

ملاحظة: يمكن حل المثال ٤ باستخدام متطابقة فيثاغورث: $\csc^2 \theta + \cot^2 \theta = 1$. حاول ذلك.

حاول أن تحل

٤ بدون استخدام الآلة الحاسبة،

إذا كان $\csc \theta = \frac{5}{8}$ ، جتا $\theta < 0$ فأوجد جا θ .

مثال (٥)

أثبت صحة المتطابقة التالية: $\text{جا}^2 \text{س} + \text{جا} \text{س} \times \text{جتا}^2 \text{س} = \text{جا} \text{س}$.

الحل:

$$\text{جا}^2 \text{س} + \text{جا} \text{س} \times \text{جتا}^2 \text{س} = \text{جا} \text{س} (\text{جا}^2 \text{س} + \text{جتا}^2 \text{س})$$

$$\text{جا}^2 \text{س} + \text{جتا}^2 \text{س} = 1$$

$$1 \times \text{جا} \text{س} =$$

$$\text{جا} \text{س}.$$

حاول أن تحل

٥ أثبت صحة المتطابقة: $\text{جتا}^2 \text{س} + \text{جا}^2 \text{س} \times \text{جتا}^2 \text{س} = \text{جتا}^2 \text{س}$.

مثال (٦)

أثبت صحة المتطابقة التالية: $\theta^2 \text{قا} = \frac{(1 + \theta \text{قا})(1 - \theta \text{قا})}{\theta^2 \text{جا}^2}$ حيث المقام $\neq 0$.

الحل:

$$\text{ب}^2 - \text{ا}^2 = (\text{ب} - \text{ا})(\text{ب} + \text{ا})$$

$$\theta^2 \text{قا} = \theta^2 \text{ظا} + 1$$

$$\frac{\theta \text{جا}}{\theta \text{جتا}} = \theta \text{ظا}$$

$$\frac{1 - \theta^2 \text{قا}}{\theta^2 \text{جا}^2} = \frac{(1 + \theta \text{قا})(1 - \theta \text{قا})}{\theta^2 \text{جا}^2}$$

$$\frac{\theta^2 \text{ظا}}{\theta^2 \text{جا}^2} =$$

$$\frac{1}{\theta^2 \text{جا}^2} \times \frac{\theta^2 \text{جا}^2}{\theta^2 \text{جتا}^2} =$$

$$\frac{1}{\theta^2 \text{جتا}^2} =$$

$$\theta^2 \text{قا} =$$

حاول أن تحل

٦ أثبت صحة المتطابقة: $2 = (\theta^2 \text{ظنا} + \theta^2 \text{ظا}) - (\theta^2 \text{قتا} + \theta^2 \text{قا})$.

مثال (٧)

أثبت صحة المتطابقة: $\theta \text{قا} = \frac{\theta \text{جا}}{\theta \text{جتا}} - \frac{\theta \text{جتا}}{\theta \text{جا} - 1}$ حيث المقام $\neq 0$.

الحل:

$$\frac{\theta \text{جا} - 1}{\theta \text{جا} - 1} \times \frac{\theta \text{جا}}{\theta \text{جتا}} - \frac{\theta \text{جتا}}{\theta \text{جتا}} \times \frac{\theta \text{جتا}}{\theta \text{جا} - 1} = \frac{\theta \text{جا}}{\theta \text{جتا}} - \frac{\theta \text{جتا}}{\theta \text{جا} - 1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\theta \csc \theta \times \csc \theta}{(\csc \theta - 1)\csc \theta} - \frac{\csc \theta \times \csc \theta}{\csc \theta (\csc \theta - 1)} &= \\ \frac{\csc^2 \theta + \csc \theta - \csc^2 \theta}{(\csc \theta - 1)\csc \theta} &= \\ \frac{\csc \theta - 1}{(\csc \theta - 1)\csc \theta} &= \\ \csc \theta &= \frac{1}{\csc \theta} \end{aligned}$$

$$\csc^2 \theta + \csc \theta = 1$$

حاول أن تحل

٧ أثبت صحة المتطابقة: $\csc \theta - \frac{\csc \theta}{\csc \theta} = \csc \theta$ حيث المقام $\neq 0$

مثال (٨)

حل المعادلة: $\frac{\csc^2 \theta}{\csc \theta} = \csc \theta$ ، حيث $\theta \in (\pi/2, \pi)$. شرط أن تكون $\csc \theta \neq 0$

الحل:

$$\csc \theta = \frac{\csc^2 \theta}{\csc \theta}$$

$$\csc \theta = \frac{\csc^2 \theta}{\csc \theta}$$

$$\therefore \csc \theta \neq 0$$

$$\therefore \csc \theta = \csc \theta$$

$$\csc \theta - \csc \theta = 0$$

$$\csc \theta (1 - \csc \theta) = 0$$

$$\csc \theta = 0 \text{ أو } \csc \theta = 1$$

$$\csc \theta = 0 \text{ أو } \csc \theta = 1$$

$$\csc \theta = 0 \text{ أو } \csc \theta = 1 \text{ مرفوضة}$$

قيم θ على الفترة $[\pi/2, \pi)$ التي تحقق $\csc \theta = 0$ هي $\theta = \pi/2$ أو $\theta = \pi/4$.

متطابقة فيثاغورث

حاول أن تحل

٨ حل المعادلة: $2 \csc \theta - \csc \theta = 0$ حيث $\theta \in (\pi/2, \pi)$

مثال (٩)

حل المعادلة المثلثية: $2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$ حيث $\cos\theta < 0$

الحل:

نضع $\cos\theta = x$

تصبح المعادلة: $2x^2 + x - 1 = 0$

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

يمكن حل هذه المعادلة التربيعية بالتحليل إلى عوامل:

$$0 = (x + 1)(2x - 1)$$

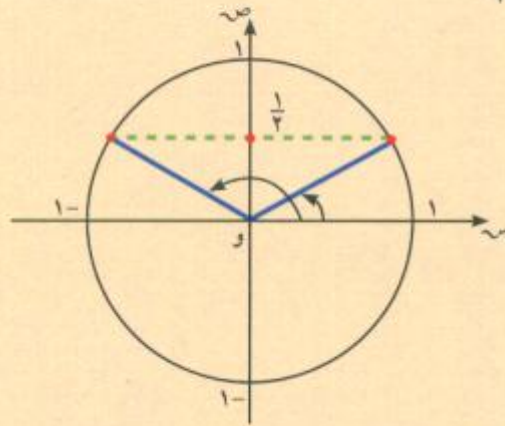
$$x = -1 \quad \text{أو} \quad x = \frac{1}{2}$$

(مرفوضة لأن $\cos\theta < 0$)

أو $\cos\theta = -1$

وبالعودة إلى المعادلة: $\cos\theta = \frac{1}{2}$

$\cos\theta = \frac{1}{2}$



$\cos\theta = \frac{1}{2}$

$\cos\theta = \frac{\pi}{4}$

$\cos\theta < 0$ ∴ θ تقع في الربع الأول أو الثاني.

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{أو} \quad \theta = \frac{\pi}{4} - \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{أو} \quad \theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

حاول أن تحل

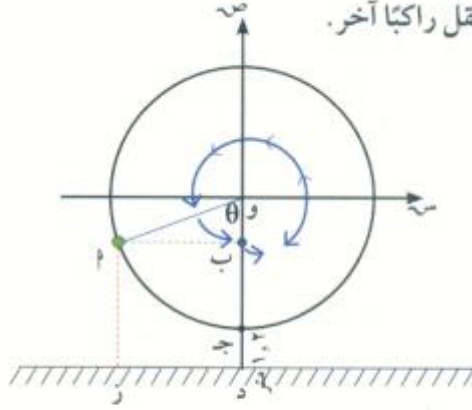
٩ حل المعادلات التالية:

حيث $\cos\theta < 0$

أ $4\cos^2\theta - 1 = 0$

ب $4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1 = 0$

المرشد لحل المسائل



في مدينة الملاهي، ركب سلطان الدوارة.

دارت الدوارة عكس اتجاه دوران عقارب الساعة وتوقفت لتقل راكبًا آخر.

تساءل محمد: ما ارتفاع سلطان عن الأرض؟

كيف فكر محمد؟

بداية، سوف ارسم مخططًا.

تمثل النقطة P موقع سلطان عند توقف الدوارة.

جد $d = 1, 2$ متر (الارتفاع عن الأرض)

زاوية الدوران $\theta - \pi 2 =$

عليّ إيجاد طول القطعة \overline{OP} .

سأستخدم ما تعلمته في الوحدة عن النسب المثلثية.

$$\overline{OP} = d$$

المثلث $\triangle OPB$ وقائم الزاوية ب

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OP}} = \cos(\theta - \pi 2)$$

$$\frac{\overline{OB}}{d} = \cos \theta$$

$$\therefore \overline{OB} = d \times \cos \theta$$

$$d = \overline{OB} + \overline{OC}$$

$$\text{ولكن } d = \overline{OC} + \overline{OB}$$

$$\therefore d = \overline{OC} + \overline{OB} + \overline{OC}$$

$$d = \overline{OC} - \overline{OB} + \overline{OC} + \theta \cos$$

$$d = \overline{OC} + (\overline{OC} - \overline{OB}) + 1, 2$$

سأستخدم خواص القطع المستقيمة.

استنتاج محمد: عليّ معرفة طول نصف قطر الدوارة وزاوية الدوران لإيجاد ارتفاع سلطان عن الأرض.

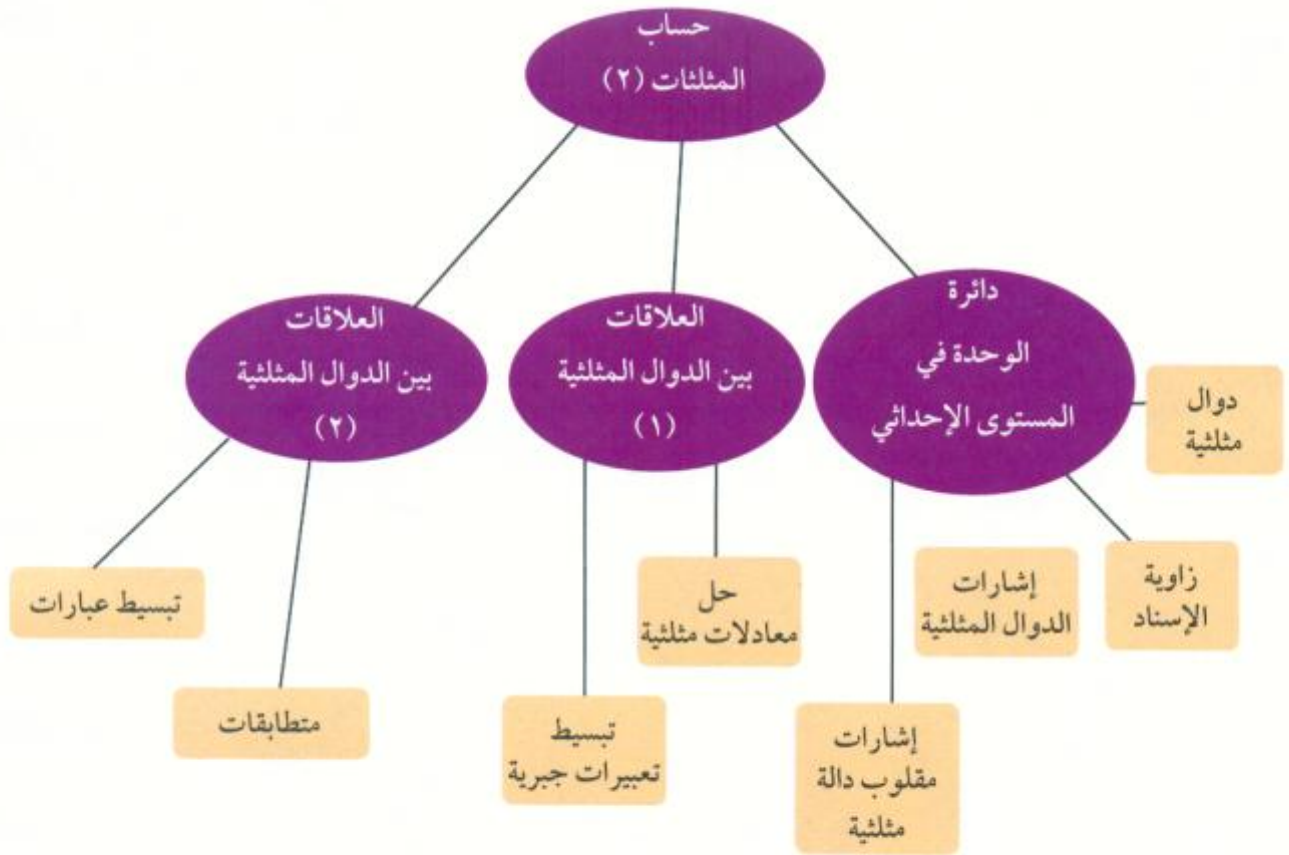
تطبيق

في المسألة أعلاه، أوجد ارتفاع سلطان عن الأرض إذا كان طول نصف قطر الدوارة 5 أمتار وقياس الزاوية التي يصنعها مقعد سلطان مع المحور الرأسي للدوارة 30° .

مسألة إضافية

ركب سالم دوارة طول نصف قطرها 6 أمتار وترتفع قاعدتها 5, 1 متر عن الأرض. أوجد الزاوية التي يصنعها مقعد سالم مع المحور الرأسي للدوارة إذا كان سالم على ارتفاع 11, 7 مترًا.

مخطط تنظيمي للوحدة الثامنة



ملخص

- الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها واحد وحدة تسمى «دائرة الوحدة».
- نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجهة في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة تسمى «النقطة المثلثية».
- زاوية الإسناد للزاوية الموجهة (وب، وج) التي في وضع قياسي هي الزاوية الحادة α التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات. ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$).

$$\text{المقام} \neq 0 \quad \begin{aligned} \theta \text{ قا} &= \frac{1}{\theta \text{ جتا}}; \theta \text{ قتا} = \frac{1}{\theta \text{ جا}}; \theta \text{ ظا} = \frac{\theta \text{ جا}}{\theta \text{ جتا}}; \theta \text{ ظتا} = \frac{\theta \text{ جتا}}{\theta \text{ جا}} \end{aligned}$$

- دالة الجيب: θ حيث $\theta \text{ جا} = \theta$ ص
- دالة جيب التمام: θ حيث $\theta \text{ جتا} = \theta$ س
- دالة الظل: θ حيث $\theta \text{ ظا} = \theta$ ص؛ $\theta \text{ ظتا} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ؛ $\theta \neq 0$
- دالة القاطع: θ حيث $\theta \text{ قا} = \theta$ ؛ $\theta \text{ قتا} = \frac{1}{\text{ص}}$ ؛ $\theta \neq 0$
- دالة قاطع التمام: θ حيث $\theta \text{ قتا} = \theta$ ؛ $\theta \text{ قتا} = \frac{1}{\text{ص}}$ ؛ $\theta \neq 0$
- دالة ظل التمام: θ حيث $\theta \text{ ظتا} = \theta$ ؛ $\theta \text{ ظتا} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$ ؛ $\theta \neq 0$
- في الربع الأول جميع الدوال المثلثية موجبة.
- في الربع الثاني $\theta \text{ جا}$ ، $\theta \text{ قتا}$ موجبتان وبقية الدوال سالبة.
- في الربع الثالث $\theta \text{ ظا}$ ، $\theta \text{ ظتا}$ موجبتان وبقية الدوال سالبة.
- في الربع الرابع $\theta \text{ قا}$ ، $\theta \text{ قتا}$ موجبتان وبقية الدوال سالبة.
- إشارة مقلوب دالة مثلثية هي إشارة الدالة المثلثية الأصلية نفسها.
- العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية:

$$\theta \text{ جا}(-\theta) = -\theta \text{ جا} \theta; \theta \text{ جتا}(-\theta) = \theta \text{ جتا} \theta; \theta \text{ ظا}(-\theta) = -\theta \text{ ظا} \theta$$

$$\theta \text{ جا}(\theta - \pi) = -\theta \text{ جا} \theta; \theta \text{ جتا}(\theta - \pi) = -\theta \text{ جتا} \theta; \theta \text{ ظا}(\theta - \pi) = -\theta \text{ ظا} \theta$$

$$\theta \text{ جا}(\theta + \pi) = -\theta \text{ جا} \theta; \theta \text{ جتا}(\theta + \pi) = -\theta \text{ جتا} \theta; \theta \text{ ظا}(\theta + \pi) = \theta \text{ ظا} \theta$$

$$\theta \text{ جا}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \theta \text{ جتا} \theta; \theta \text{ جتا}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \theta \text{ قا} \theta$$

$$\theta \text{ جا}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\theta \text{ جتا} \theta; \theta \text{ جتا}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \theta \text{ قا} \theta$$

$$\theta \text{ جا}(\theta + 2\pi) = \theta \text{ جا} \theta; \theta \text{ جتا}(\theta + 2\pi) = \theta \text{ جتا} \theta; \theta \text{ ظا}(\theta + 2\pi) = \theta \text{ ظا} \theta$$

$$\theta^2 \text{ جتا} + \theta^2 \text{ جتا} = 1 \text{ تسمى متطابقة فيثاغورث}$$

$$\theta \text{ قا}^2 = \theta^2 + 1 \text{ حيث المقام} \neq 0 \quad \frac{1}{\theta^2 \text{ جتا}^2} = \theta^2 \text{ ظا}^2 + 1$$

$$\theta \text{ قتا}^2 = \theta^2 + 1 \text{ حيث المقام} \neq 0 \quad \frac{1}{\theta^2 \text{ جا}^2} = \theta^2 \text{ ظتا}^2 + 1$$

الهندسة التحليلية Analytic Geometry

مشروع الوحدة: اختيار وظيفة

١ مقدمة المشروع: هل لديك عمل ما؟ إذا لم يكن لديك عمل، فما الوظيفة التي تفضلها؟ ما المصاريف المتوقعة؟ ما المبلغ الذي ستتقاضاه؟ كيف يمكنك المقارنة بين وظيفتين أو بين دخلين؟ إن معادلات المستقيم تساعدك على الإجابة عن هذه الأسئلة كلها.

خلال عملكم على هذا المشروع، سوف ترسمون الخطوط المستقيمة وتكتبون المعادلات التي ترمز مختلف الأعمال أو الوظائف وسوف تستخدمون هذه النماذج لتوقع الدخل.

٢ الهدف: محادثة شخص ما حول أول عمل قام به. اختيار العمل أو الوظيفة المفضلة مع تبرير الاختيار.

٣ اللوازم: أوراق رسم مليمتريّة وآلة حاسبة.

٤ أسئلة حول التطبيق:

أوجد قيمة الأجر في الساعة لوظيفتين تفضلهما. ارسم تمثيلًا بيانيًا بالخطوط تبين فيه مدخول كل وظيفة. يكون عدد الساعات بين ٠ و ١٠ على المحور الأفقي وقيمة المدخول على المحور الرأسي. على افتراض أنك عملت ٨ ساعات، اشرح كيف يفسر التمثيل البياني فرق المدخول بين الوظيفتين.

على افتراض أنك تنال ٤٠٠ فلس في الساعة لقاء عملك في أحد أفران الحلويات ويحسم من أجرك ١٠٠ فلس ضريبة أسبوعية، إذا كنت تعمل س ساعة خلال ٥ أيام في الأسبوع وتدفع يوميًا ٢٥٠ فلسًا ثمن وجبة:

أ اكتب معادلة تبين فيها ربحك في أسبوع واحد بعد احتساب الضريبة والمصاريف.

ب في هذه الحالة ماذا يمثل الميل (معامل س)؟ وماذا يمثل التقاطع مع محور الصادات؟

ج كم ساعة عمل يلزمك كي يساوي ربحك الصافي ١٤ دينارًا و ٦٥٠ فلسًا بعد احتساب الضريبة والمصاريف؟

د حاور رجلًا مستأ حول وظيفته. اسأله عن إيجابيات هذه الوظيفة وسلبياتها من حيث الراتب والمصاريف. اكتب معادلة تبين فيها دخله الأسبوعي بعد احتساب المصاريف.

٥ التقرير: ضع تقريرًا مفصلاً حول مقارنة دخل كل وظيفة وكيفية رسم التمثيلات البيانية والاستفادة منها للإجابة عن الأسئلة.

دروس الوحدة

الدائرة	البعد بين نقطة ومستقيم	معادلة الخط المستقيم	ميل الخط المستقيم	تقسيم قطعة مستقيمة	المستوى الإحداثي
٥-٩	٤-٩	٣-٩ (ب)	٣-٩ (٢)	٢-٩	١-٩

أضف إلى معلوماتك

ديكارت والهندسة التحليلية
(١٥٩٦ - ١٦٥٠م)

رينيه ديكارت **Descartes** الرياضي والفيلسوف الفرنسي، هو الذي ربط بين العدد والنقطة وهذا ما أنتج لنا الهندسة التحليلية، حيث ابتكر النظام الإحداثي المكوّن من محورين متعامدين متقاطعين (محور السينات ومحور الصادات)، والذي بواسطته يمكن التعبير عن كل نقطة في المستوى بعددين حقيقيين (س، ص). وباستخدام النظام الإحداثي، استطاع ديكارت أن يثبت صحة كل خواص الهندسة الإقليدية، معبراً عن المستقيمات والمنحنيات بمعادلات جبرية باعتبارها مسارات لنقطة عامة تتحرك بشروط تحكم العلاقة بين (س، ص).



رينيه ديكارت

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت كيف تضع النقاط على المستوى الإحداثي.
- تعلمت كيفية تطبيق نظرية فيثاغورث.
- تعلمت كيف توجد القيم المطلقة والجذور التربيعية.

ماذا سوف تتعلم؟

- سوف توجد المسافة بين نقطتين.
- سوف توجد طول قطعة مستقيمة.
- سوف تحدد إحداثيات نقطة المنتصف لقطعة مستقيمة.
- سوف تحدد إحداثيات نقطة تقسيم قطعة مستقيمة من الداخل ومن الخارج.
- سوف تقوم بحساب ميل خط مستقيم.
- سوف تقوم برسم خط مستقيم عندما تعرف نقطة منه وتعرف ميله.
- سوف تتعرف العلاقة بين ميل المستقيم وظل الزاوية.
- سوف تكتب معادلة المستقيمات المتوازية أو المتعامدة.
- سوف تتعرف صورة معادلة الخط المستقيم بمعلومية الميل ونقطة أو نقطتين.
- سوف تتعرف البعد بين نقطة ومستقيم.
- سوف تتعرف الدائرة ومعادلتها.
- سوف تتعرف الصورة العامة لمعادلة الدائرة وتوظيفها.
- سوف توجد مركز الدائرة وطول نصف قطرها.
- سوف تكتب معادلة المماس لدائرة.
- سوف تتعرف العلاقة بين دائرتين في المستوي.

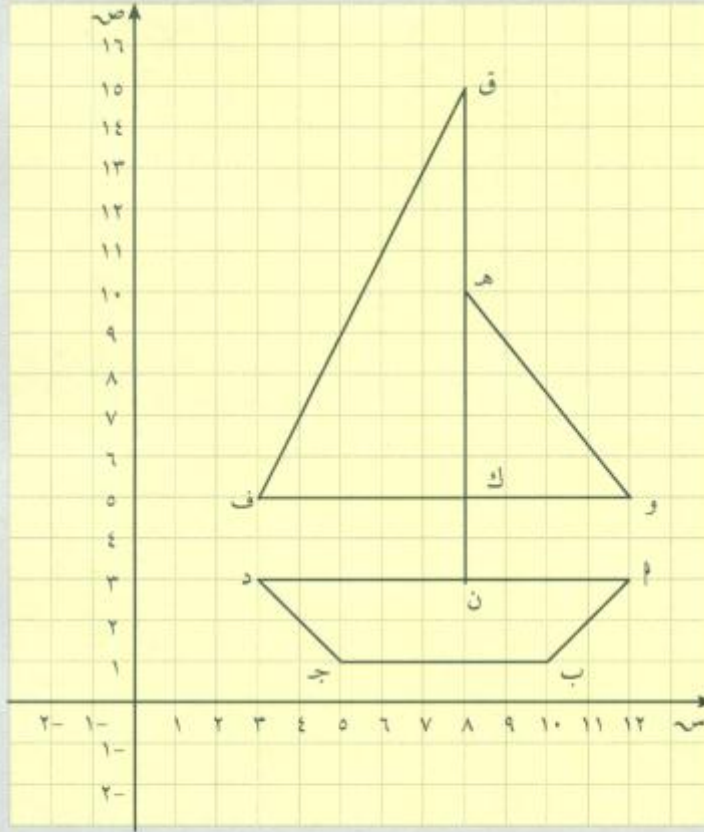
المصطلحات الأساسية

طول القطعة المستقيمة - المسافة بين نقطتين - البعد بين نقطة ومستقيم - نقطة المنتصف - ميل المستقيم - ظل الزاوية - ميلا مستقيمين متوازيين - ميلا مستقيمين متعامدين - معادلة الخط المستقيم - الدائرة - معادلة الدائرة - مركز الدائرة - نصف قطر الدائرة - مماس الدائرة.

المستوى الإحداثي Coordinate Plane

سوف تتعلم

- إيجاد المسافة بين نقطتين.
- إيجاد إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة.



دعنا نفكر ونتناقش

في حصة النشاط الفني قام راشد بتصميم مركب شراعي كما في الشكل.

١ اكتب إحداثيات النقاط المبينة في الرسم.

٢ أوجد طول كل من \overline{AD} ، \overline{B} ج.

٣ قارن الفرق بين الإحداثيات السينية لكل من \overline{AD} ، \overline{B} ج من جهة. ماذا تلاحظ؟

Distance Between Two Points

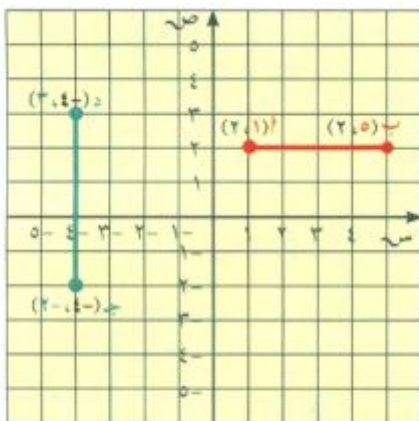
المسافة بين نقطتين

في المخطط إلى اليسار، \overline{AB} موازية للمحور السيني (قطعة أفقية). يمكنك إيجاد طولها بطرح الإحداثي السيني للنقطة A من الإحداثي السيني للنقطة B .

$$\text{طول } \overline{AB} = |1 - 5| = 4 \text{ وحدة طول.}$$

وبالطريقة نفسها، يمكنك إيجاد طول \overline{CD} قطعة موازية للمحور الصادي (قطعة رأسية) وذلك بطرح الإحداثي الصادي للنقطة C من الإحداثي الصادي للنقطة D .

$$\text{طول } \overline{CD} = |(-2) - 3| = 5 \text{ وحدة طول.}$$



مثال (١)

أوجد أطوال كل من القطع المستقيمة ن ك، ق ك، د أ، في رسم المركب الشعاعي في "دعنا نفكر ونتناقش".
الحل:

$$ن ك = |3 - 5| = 2 \text{ وحدة طول}$$

$$ق ك = |5 - 15| = 10 \text{ وحدة طول}$$

$$د أ = |3 - 12| = 9 \text{ وحدة طول}$$

حاول أن تحل

١ إذا كانت أ (٥، ٢)، ب (٥، ١٠)، ج (٦، ٢)، فأوجد أطوال كل من: أ ب، أ ج، ب ج.



أي نقطتين أ (٥، ٢)، ب (٥، ١٠)، ج (٦، ٢) ليستا على مستقيم أفقي أو مستقيم رأسي، يمكن تمثيلهما بيانياً وصنع مثلث قائم الزاوية (كما هو مبين في الشكل المقابل).

نستخدم نظرية فيثاغورث لإيجاد المسافة بين النقطتين أ، ب.

$$\text{نظرية فيثاغورث} \quad (أ ب)^2 = (أ ج)^2 + (ب ج)^2$$

$$(أ ب)^2 = (أ ج)^2 + (ب ج)^2 \quad \text{التعويض}$$

$$أ ب = \sqrt{(أ ج)^2 + (ب ج)^2} \quad \text{الجذر التربيعي الأساسي}$$

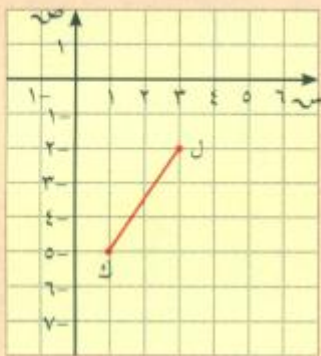
قانون:

$$\text{المسافة بين أي نقطتين أ (٥، ٢)، ب (٥، ١٠) تساوي} \quad \sqrt{(٥ - ٥)^2 + (٢ - ١٠)^2}$$

يعطي القانون المسافة الدقيقة بين نقطتين بينما تعطي الآلة الحاسبة إجابة تقريبية، إلا إذا كانت القيمة تحت علامة الجذر مربعاً كاملاً.

مثال (٢)

أوجد المسافة بين ك (٥، ١)، ل (٣، ٢).



$$\text{الحل: المسافة} = \sqrt{(٥ - ٣)^2 + (١ - ٢)^2}$$

$$= \sqrt{2^2 + (-1)^2}$$

$$= \sqrt{4 + 1}$$

$$= \sqrt{5} \approx 2.24 \text{ وحدة طول}$$

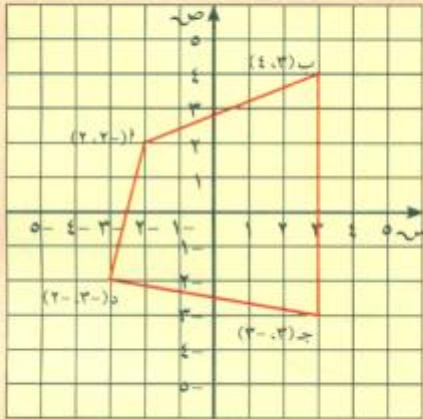
المسافة بين ك، ل تساوي حوالي ٢، ٢٤ وحدات طول.

حاول أن تحل

٢ أوجد المسافة بين م (١، ٢)، ن (٤، ٧). قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

مثال (٣)

أوجد الطول الدقيق لكل ضلع من أضلاع الشكل الرباعي أ ب ج د ، ثم أوجد محيطه لأقرب وحدة طول.



$$\text{الحل: أ ب} = \sqrt{(2-4)^2 + ((2-)-3)^2} \sqrt{=}$$

$$\sqrt{2^2 + 25} \sqrt{=}$$

$$\sqrt{4 + 25} \sqrt{=}$$

$$\sqrt{29} \sqrt{=} \text{ وحدة طول.}$$

$$\text{ب ج} = 4 - (3-) = 1 \text{ وحدة طول.}$$

$$\text{ج د} = \sqrt{((3-) - 2-) + (3-3-)^2} \sqrt{=}$$

$$\sqrt{1 + 36} \sqrt{=}$$

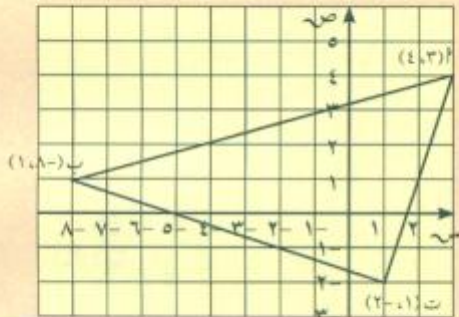
$$\sqrt{37} \sqrt{=} \text{ وحدة طول.}$$

$$\text{د أ} = \sqrt{((2-) - 2) + ((3-) - 2-)^2} \sqrt{=}$$

$$\sqrt{4 + 1} \sqrt{=}$$

$$\sqrt{17} \sqrt{=} \text{ وحدة طول.}$$

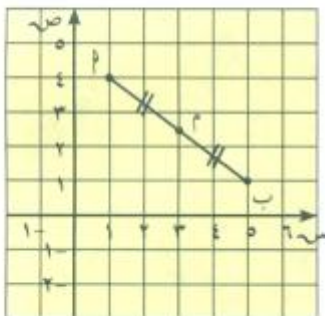
$$\text{المحيط} = \sqrt{17} \sqrt{=} + \sqrt{37} \sqrt{=} + 1 + \sqrt{29} \sqrt{=} = 23 \text{ وحدة طول.}$$



حاول أن تحل

١ في الشكل المقابل، أوجد محيط المثلث أ ب ت.

٢ أثبت أن Δ أ ب ت قائم الزاوية.



Midpoint

نقطة المنتصف

أ، ب نقطتان في المستوى. م نقطة منتصف أ ب.
النقطة م تقسم القطعة أ ب إلى قطعتين متطابقتين أ م، م ب.

قانون:

إذا كانت $M(s_1, v_1)$ ، $B(s_2, v_2)$ ، فإن إحداثيات نقطة المنتصف هي $M(s, v)$ حيث $s = \frac{s_1 + s_2}{2}$ ، $v = \frac{v_1 + v_2}{2}$.

مثال (٤)

في الشكل المقابل أوجد نقطة منتصف $\overline{ج د}$ حيث $ج(٥, ١-)$ ، $د(٠, ٣)$.

$$\text{الحل: } \left(\frac{٥ + ٠}{٢}, \frac{٣ + ١-}{٢} \right) = \left(\frac{s_1 + s_2}{٢}, \frac{v_1 + v_2}{٢} \right)$$

$$\left(\frac{٥}{٢}, \frac{٢}{٢} \right) =$$

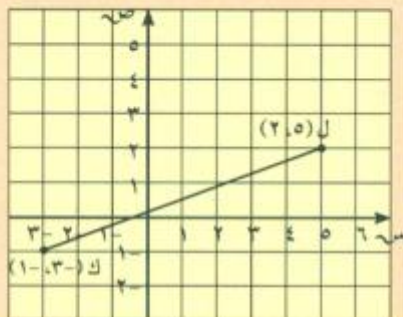
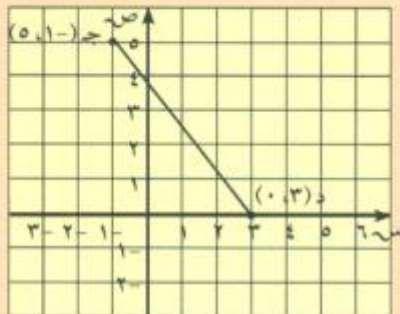
$$(٢, ٥, ١) =$$

نقطة منتصف $\overline{ج د}$ هي $(٢, ٥, ١)$.

حاول أن تحل

٤ في الشكل المقابل، أوجد نقطة منتصف $\overline{ك ل}$

حيث $ك(-٣, ١-)$ ، $ل(٢, ٥)$.



مثال (٥)

يبين الشكل المقابل دائرة، نقطتا نهاية أحد أقطارها هما: $(٥, ١-)$ ، $(٣-, ٤)$.

أوجد مركز هذه الدائرة.

الحل:

مركز الدائرة هو نقطة منتصف كل قطر فيها.

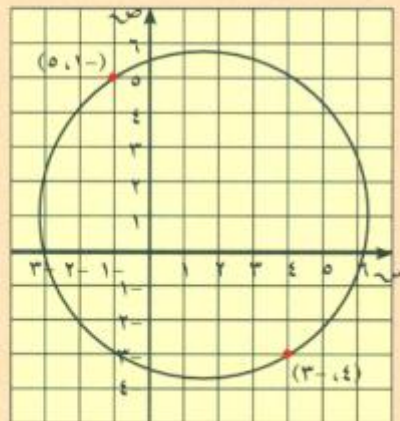
$$\left(\frac{(٣-) + ٥}{٢}, \frac{٤ + ١-}{٢} \right) = \left(\frac{s_1 + s_2}{٢}, \frac{v_1 + v_2}{٢} \right) = M$$

$$(١, ١, ٥) = \left(\frac{٢}{٢}, \frac{٣}{٢} \right) =$$

مركز الدائرة: $(١, ١, ٥)$.

حاول أن تحل

٥ إذا كان $\overline{أ ب}$ هو قطر دائرة، حيث: $أ(٧, ٤-)$ ، $ب(٢-, ٨)$. فأوجد مركز الدائرة.

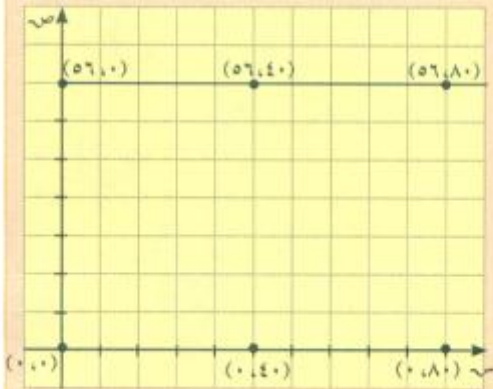


مثال (٦)

أرادت إحدى الشركات بناء مدينة ملاهي في العاصمة. فوضعت التصميم المقابل على أن يكون لها ٦ مداخل رئيسية. وترغب إدارة الشركة في تركيب نافورتين للماء على أن تكون كل نافورة موجودة على مسافة واحدة من أربعة مداخل في مدينة الملاهي:

أ حدد أنسب موقع لتركيب هاتين النافورتين؟

ب ما المسافة بينهما؟

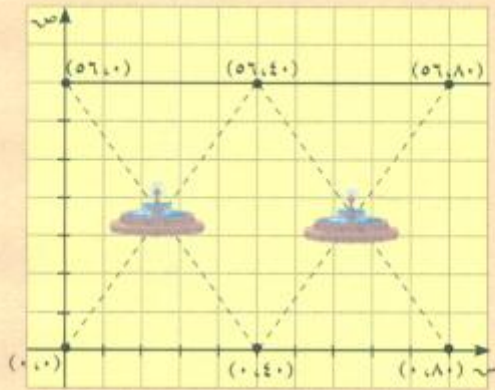


الحل:

أ النافورة الأولى لجهة اليسار يجب أن تكون على نقطة تقاطع القطرين للمستطيل المكون من النقاط $(0,0)$; $(0,40)$; $(56,40)$; $(56,0)$.
نقطة تقاطع القطرين هي منتصف كل قطر لذا يكون موقع تركيب هذه النافورة عند النقطة

$$\left(\frac{0+56}{2}, \frac{0+40}{2} \right) \text{ أي عند النقطة } (28, 20)$$

النافورة الثانية لجهة اليمين يجب أن تكون عند نقطة تقاطع القطرين للمستطيل المكون من النقاط $(0,40)$; $(0,80)$; $(56,80)$; $(56,40)$.



نقطة تقاطع القطرين هي منتصف كل قطر. لذا يكون موقع تركيب النافورة الثانية عند النقطة

$$\left(\frac{0+56}{2}, \frac{40+80}{2} \right)$$

أي عند النقطة $(28, 60)$.

ب المسافة بين النافورتين

نستخدم القاعدة: $\sqrt{(س_٢ - س_١)^2 + (ص_٢ - ص_١)^2}$

$$٤٠ = \sqrt{(٤٠)^2} = \sqrt{(٢٨ - ٢٨)^2 + (٢٠ - ٦٠)^2} =$$

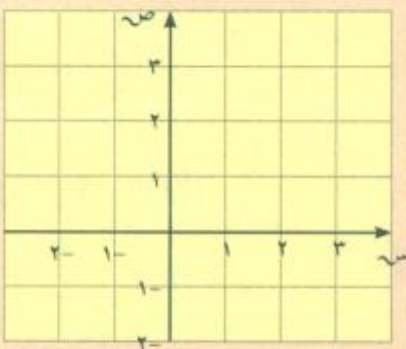
أي أن المسافة سوف تكون ٤٠ وحدة طول.

حاول أن تحل

٦ تقع المدرسة في الموقع ٢ شرق، ١ جنوب ويقع منزل خالد ٣ شرق، ٣ شمال. عيّن على المستوى الإحداثي موقع المدرسة وموقع منزل خالد، ثم أوجد المسافة من منزل خالد إلى المدرسة.

ملاحظة: الموقع ٣ شرق، ٢ شمال يعني $(٣, ٢)$.

كل وحدة طول على المحاور تساوي ٢ كيلومتر



تقسيم قطعة مستقيمة Dividing Line Segment

سوف تتعلم

- تقسيم قطعة مستقيمة من الداخل بنسبة معلومة.
- تقسيم قطعة مستقيمة من الخارج بنسبة معلومة.

فلنعمل معاً

خشبة طولها ٩٠ سم، يريد نجار تقسيمها إلى قطعتين مختلفتي الطول. يزيد طول القطعة الكبرى عن طول الصغرى ما يساوي نصف طول القطعة الصغرى. أوجد طول كل من القطعتين.

الحل:

لنفترض أن لدينا القطعة الصغرى فنقسمها إلى قسمين متطابقين، فيكون طول القطعة الكبرى ثلاثة أمثال أحد القسمين، وبالتالي هذا يعني أننا نقسم القطعة الخشبية إلى ٥ أقسام متطابقة. ونقسم طول الخشبة ٩٠ سم إلى ٥ أقسام فنحصل على ١٨ سم.

لاحظ أننا قسمنا القطعة الخشبية بنسبة ٢ : ٣ فيكون طول القطعة الصغرى:

$$١٨ \times ٢ = ٣٦ \text{ سم}$$

وطول القطعة الكبرى: $١٨ \times ٣ = ٥٤ \text{ سم}$



Internal Division

١ - التقسيم من الداخل

مثال تمهيدي

لنكن \overline{AB} قطعة مستقيمة بحيث $A(٤, ٥)$ ، $B(٦, ١٠)$ والمطلوب تقسيم \overline{AB} بنسبة ٣:٢ من الداخل من جهة A . أوجد إحداثيات نقطة التقسيم.

الحل:

لنكن $J(س, ص)$ هي نقطة التقسيم المطلوبة.

نرسم المثلث $\triangle ADB$ قائم الزاوية في D .

نلاحظ الآتي: إحداثيات D هي $(٤, ١٠)$

$B = D = ٢$ وبتقسيمها بنسبة ٣:٢ من جهة D

يكون طول الجزءين هما $٨ = ٢ \times \frac{٢}{٥}$ ، $٥ = ٢ \times \frac{٣}{٥}$ ، $١, ٢ = ٢ \times \frac{٣}{٥}$ على الترتيب،

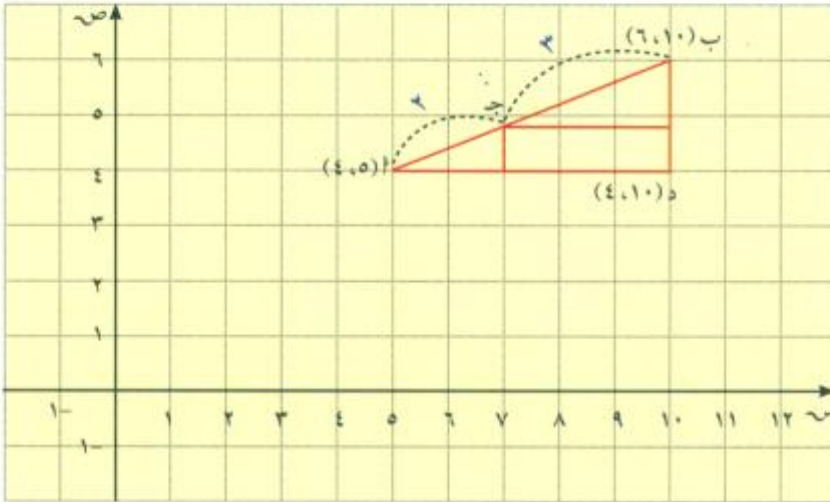
وتكون نقطة تقسيم B هي $(٤, ٨, ١٠)$.

$A = D = ٥$ وبتقسيمها بنسبة ٣:٢ من جهة A

يكون طول الجزءين هما $٢ = ٥ \times \frac{٢}{٥}$ ، $٣ = ٥ \times \frac{٣}{٥}$ على الترتيب

وتكون نقطة تقسيم A هي $(٤, ٧)$.

وبذلك تكون $J(٤, ٨, ٧)$.

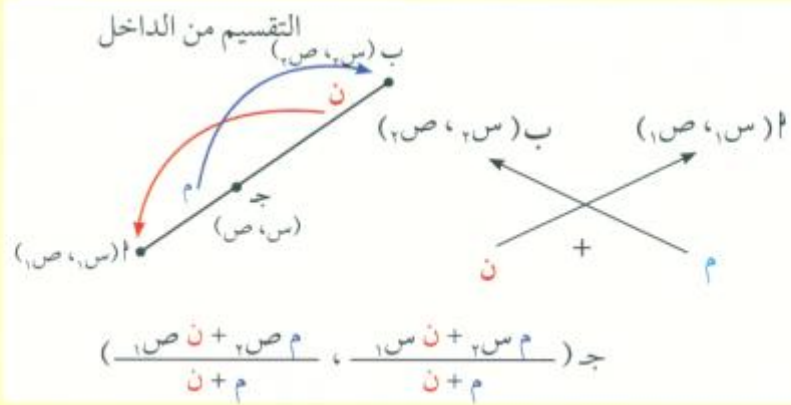


وبصفة عامة:

إذا كانت \overline{AB} قطعة مستقيمة بحيث $A(س_1, ص_1)$ ،
 $B(س_2, ص_2)$ ويراد تقسيمها من جهة A بنسبة $m:n$ من الداخل وكانت نقطة التقسيم جـ $(س, ص)$ فإن:

$$\frac{m س_2 + n س_1}{n + m} = س$$

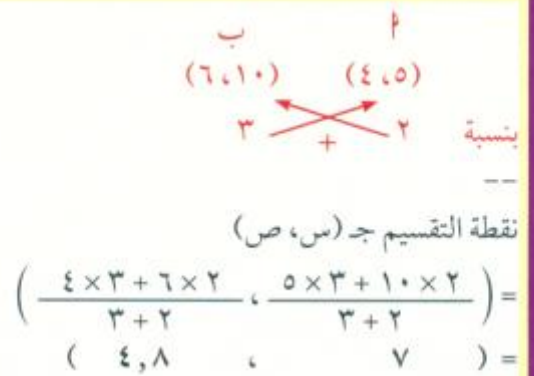
$$\frac{m ص_2 + n ص_1}{n + m} = ص$$



ويمكن إيجاد نقطة التقسيم جـ $(س, ص)$ للمثال التمهيدي كالتالي:

$$س = \frac{35}{5} = \frac{5 \times 3 + 10 \times 2}{3 + 2}$$

$$ص = \frac{24}{5} = \frac{4 \times 3 + 6 \times 2}{3 + 2}$$



مثال (١)

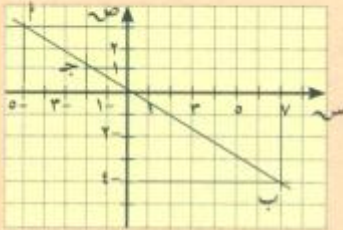


إذا كان $P(3, 5)$ ، $B(-4, 7)$. فأوجد نقطة تقسيم \overline{AB} من جهة A بنسبة $1:3$ من الداخل.

$$\text{الحل: نقطة التقسيم } (س, ص) = \left(\frac{م_1 س_2 + م_2 س_1}{م_1 + م_2}, \frac{م_1 ص_2 + م_2 ص_1}{م_1 + م_2} \right)$$

$$س = \frac{٨-}{٤} = \frac{(٥-) \times ٣ + ٧ \times ١}{٣+١} = ٢-، ص = \frac{١,٢٥}{٤} = \frac{٣ \times ٣ + (٤-) \times ١}{٣+١}$$

نقطة التقسيم هي: $J(-2, 1.25)$.



حاول أن تحل

١ إذا كان $P(3, 2)$ ، $B(-4, 3)$. فأوجد J بحيث $J_2 = J_1$ ، $J \in \overline{AB}$.

إرشاد: $A: J = 1:2$

ملاحظة: الرسم ليس جزءاً من الحل ولكنه يساعد على التحقق من معقولية الإجابة.

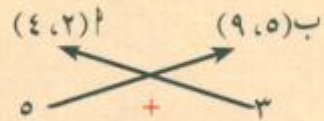
مثال (٢)

إذا كان $P(4, 2)$ ، $B(9, 5)$.

ويراد تقسيم \overline{AB} من الداخل من جهة B في نقطة J بنسبة $3:5$.
أوجد إحداثيات النقطة J .

الحل:

المطلوب إيجاد قيم $س, ص$ إحداثيات النقطة J حيث $\frac{ج_ب}{ج_أ} = \frac{٣}{٥}$ من الداخل. باستخدام قاعدة التقسيم من الداخل من جهة B نكتب:



$$س = \frac{٣١}{٨} = \frac{٥ \times ٥ + ٢ \times ٣}{٥ + ٣}، ص = \frac{٥٧}{٨} = \frac{٩ \times ٥ + ٤ \times ٣}{٥ + ٣}$$

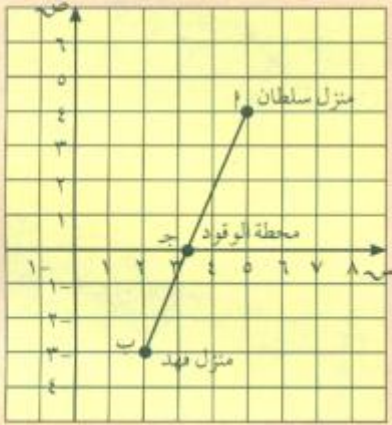
فتكون $J\left(\frac{٣١}{٨}, \frac{٥٧}{٨}\right)$

حاول أن تحل

٢ لتكن $P(2, 3)$ ، $B(-4, 7)$. أوجد إحداثيات النقطة J على \overline{AB} بحيث: $J_2 = ٧ ج_١$.

تطبيقات حياتية

مثال (٣)



يقع منزل سلطان عند النقطة $P(5, 4)$ بينما يقع منزل صديقه فهد عند النقطة $B(2, -3)$.

أوجد نسبة البعد بين كلا المنزلين ومحطة الوقود إذا تمثلت بالنقطة $J(0, \frac{23}{7})$.

علماً بأن النقاط P ، J ، B على استقامة واحدة.
الحل:

نفرض أن نسبة التقسيم m : n جهة منزل سلطان

لإيجاد نسبة البعد، نستخدم القانون العام لتقسيم قطعة من الداخل.

$$J\left(\frac{m \cdot x_1 + n \cdot x_2}{m+n}, \frac{m \cdot y_1 + n \cdot y_2}{m+n}\right)$$

$$\left(\frac{m \cdot 5 + n \cdot 2}{m+n}, \frac{m \cdot 4 + n \cdot (-3)}{m+n}\right) = \left(0, \frac{23}{7}\right)$$



$$\begin{array}{ccc} (3, 0) & & (5, 4) \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ & + & \\ & \nwarrow \quad \nearrow & \\ (2, -3) & & \end{array}$$

$$= \frac{m \cdot 5 + n \cdot 2}{m+n}$$

$$0 = \frac{m \cdot 4 + n \cdot (-3)}{m+n}$$

$$m \cdot 4 = m \cdot 3$$

أو

$$\frac{23}{7} = \frac{m \cdot 4 + n \cdot (-3)}{m+n}$$

$$14m + 23n = 35m + 14n$$

$$9n = 21m$$

$$\frac{4}{3} = \frac{m}{n}$$

لاحظ أنه يمكنك الاكتفاء بإيجاد النسبة من أحد الحلين $\frac{4}{3} = \frac{m}{n}$

بذلك، تكون نسبة البعد من كلا المنزلين إلى محطة الوقود هي $4 : 3$ من جهة منزل سلطان.

ملاحظة: نسبة البعد بين كلا المنزلين ومحطة الوقود هي $3 : 4$ من جهة منزل فهد.

حاول أن تحل

٣ في المثال (٣)، يقع منزل صالح على المستقيم المار بمنزلي سلطان وفهد وهو يقسم \overline{AB} من الداخل من جهة P بنسبة $4 : 5$. أوجد إحداثيات منزل صالح.

External Division

٢ - التقسيم من الخارج

مثال تمهيدي

لتكن $P(2, 1)$ ، $B(8, 4)$ ،

ويراد تقسيم \overline{AB} من الخارج من جهة B في نقطة J بنسبة $4:1$.
أوجد إحداثيات J .

الحل:

لتكن $J(ص, س)$ حيث $J \in \overline{PB}$ ، $J \notin \overline{AB}$

ج $B: P = 4:1$

وهذا يعني أن P : B : $J = 3:1$

أي أن $B(8, 4)$ تقسم \overline{PJ} بنسبة $3:1$ من الداخل من جهة P .

بتطبيق قاعدة التقسيم من الداخل نجد أن:

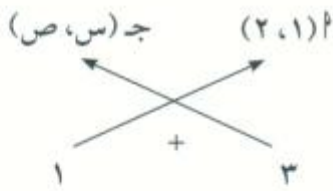
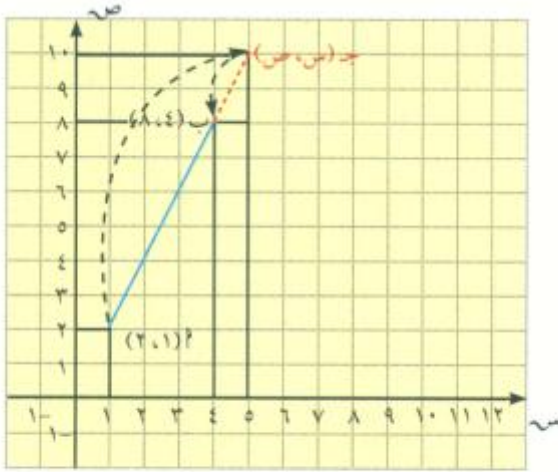
$$\frac{1 + 3س}{4} = \frac{1 \times 1 + 3 \times 4}{1 + 3} = 4$$

ومن ذلك نجد أن: $3س + 1 = 16$ ومنها $س = 5$ ،

$$\frac{2 + 3ص}{4} = \frac{2 \times 1 + 3 \times 8}{1 + 3} = 8$$

ومن ذلك نجد أن: $3ص + 2 = 32$ ومنها $ص = 10$ ،

أي أن $J(10, 5)$ وهي نقطة التقسيم من الخارج.

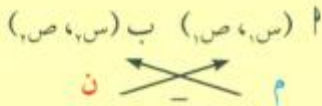
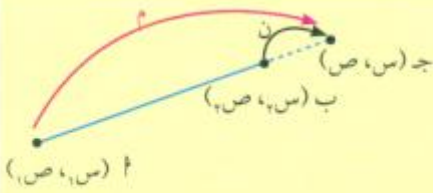


وبصفة عامة:

إذا كانت $P(ص_1, س_1)$ ، $B(ص_2, س_2)$ فإن النقطة $J(ص, س)$ التي تقسم

\overline{AB} من الخارج بنسبة $n:m$ من جهة B تكون إحداثياتها: $س = \frac{ن س_2 - م س_1}{ن - م}$

$$ص = \frac{ن ص_2 - م ص_1}{ن - م}$$



ملاحظة: يمكن إيجاد نقطة التقسيم السابقة كالتالي:

$$س = \frac{ن س_2 - م س_1}{ن - م} ، ص = \frac{ن ص_2 - م ص_1}{ن - م}$$

بتطبيق قاعدة التقسيم من الخارج على المثال التمهيدي من جهة ب.

$$\begin{array}{ccc} \text{أ} (2, 1) & & \text{ب} (8, 4) \\ \swarrow & & \searrow \\ & - & \\ \nwarrow & & \swarrow \\ & 1 & & 4 \end{array}$$

جـ (س، ص)

$$س = \frac{1 - 16}{3} = \frac{1 \times 1 - 4 \times 4}{1 - 4} = 5$$

$$ص = \frac{2 - 32}{3} = \frac{2 \times 1 - 8 \times 4}{1 - 4} = 10$$

جـ (5، 10) وهو ما حصلنا عليه نفسه في الحل السابق.

تدريب

أوجد نقطة تقسيم \overline{AB} من الخارج بنسبة 4 : 1 من جهة أ.
حيث أ (2، 1)، ب (8، 4).

مثال (5)

إذا كان \overline{AB} (4، 1)، ب (-2، 1)، ويراد تقسيم \overline{AB} من الخارج جهة أ في نقطة جـ بنسبة 3 : 2.
أوجد إحداثيات النقطة جـ.

الحل:

$$\begin{array}{ccc} \text{أ} (4, 1) & & \text{ب} (-2, 1) \\ \swarrow & & \searrow \\ & - & \\ \nwarrow & & \swarrow \\ & 3 & & 2 \end{array} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\text{جـ أ}}{\text{جـ ب}}$$

المطلوب إيجاد قيم س، ص إحداثيات النقطة جـ من الخارج حيث $\frac{2}{3} = \frac{\text{جـ أ}}{\text{جـ ب}}$ باستخدام قاعدة التقسيم من الخارج لجهة أ نكتب:

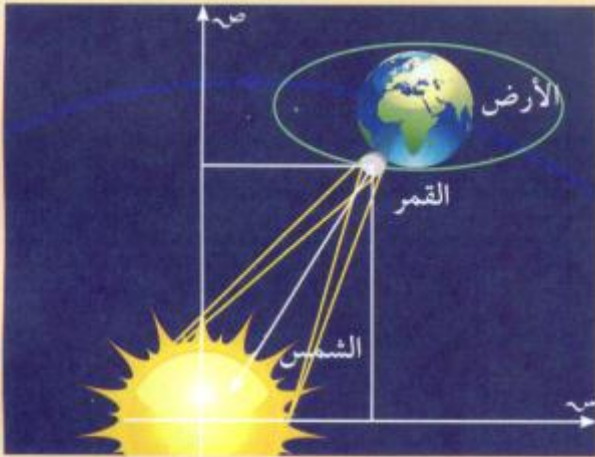
$$س = \frac{1 - 10}{3 - 2} = \frac{4 \times 3 - 1 \times 2}{3 - 2} = 10; \text{ص} = \frac{1 - 7}{1 - 1} = \frac{1 \times 3 - (-2) \times 2}{3 - 2} = 7$$

فتكون جـ (10، 7)

حاول أن تحل

٤ لتكن \overline{AB} (-2، 2)، ب (1، 3). أوجد إحداثيات النقطة جـ التي تقسم \overline{AB} من الخارج من جهة ب بنسبة 3 : 8.

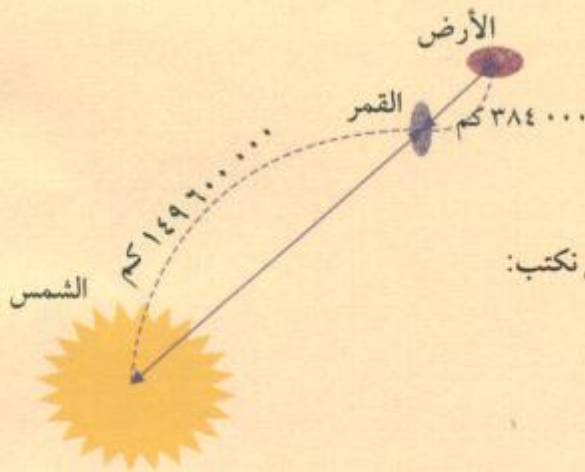
مثال (٥)



أثناء الكسوف تكون الأرض والشمس والقمر على استقامة واحدة كما تبين الصورة المقابلة. المسافة بين الأرض والشمس ١٤٩ ٦٠٠ ٠٠٠ كم تقريباً والمسافة بين الأرض والقمر ٣٨٤ ٠٠٠ كم تقريباً.

- أ أوجد نسبة التقسيم من الخارج جهة القمر على القطعة المستقيمة الواصلة بين القمر والشمس حيث توجد الأرض.
ب لتأخذ مستوى إحداثي مركزه نقطة الأصل وهي الشمس.

إذا كان القمر في هذه الحالة له الإحداثيات (٦، ١٠)، فما هي إحداثيات الأرض؟
الحل:



أ المسافة بين الأرض والقمر = ٣٨٤ ٠٠٠ كم

المسافة بين الأرض والشمس = ١٤٩ ٦٠٠ ٠٠٠ كم

$$\frac{١٢}{٤٦٧٥} = \frac{٣٨٤٠٠٠}{١٤٩٦٠٠٠٠٠} = \text{النسبة}$$

ب التقسيم من الخارج بالنسبة إلى الأرض والقمر والشمس نكتب:

القمر (٦، ١٠) الشمس (٠، ١٠)

$$\begin{array}{r} ١٢ \\ - ٤٦٧٥ \\ \hline \end{array}$$

$$س = \frac{٤٦٧٥ \times ٦ - ٠ \times ١٢}{٤٦٧٥ - ١٢} \approx ٦,٠١٥$$

$$ص = \frac{٤٦٧٥ \times ١٠ - ٠ \times ١٢}{٤٦٧٥ - ١٢} \approx ١٠,٠٢٦$$

أي أن إحداثيات الأرض هي تقريباً: (٦, ١٠) ، (١٠, ٠٢٦)

حاول أن تحل

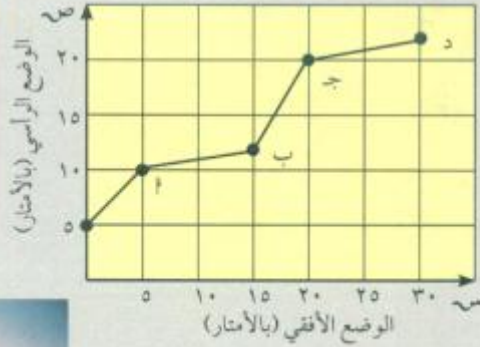
٥ أ في المثال (٥)، أوجد نسبة التقسيم: $\frac{\text{مسافة (شمس، قمر)}}{\text{مسافة (شمس، أرض)}}$

ب إذا افترضنا أن إحداثيات الأرض هي (٧، ١١). فما هي إحداثيات القمر؟

ميل الخط المستقيم Slope of a Straight Line

سوف تتعلم

- معدل التغير .
- إيجاد الميل .
- العلاقة بين ميل المستقيم وظل الزاوية .



دعنا نفكر ونتناقش

- يمثل المخطط مسار أحد مصاعد التزلج.
- ١ ما التغير الرأسي من أ إلى ب؟
من ب إلى ج؟ من ج إلى د؟
 - ٢ ما التغير الأفقي من أ إلى ب؟
من ب إلى ج؟ من ج إلى د؟
 - ٣ ما نسبة التغير الرأسي إلى التغير الأفقي لكل قطعة؟
 - ٤ أي مرحلة هي الأكثر ارتفاعاً؟ فسّر.

Rate of Change

معدل التغير

معلومة رياضية

المعدل هو مقارنة بين كميتين بوحدات قياس مختلفة.

في المخطط أعلاه، \overline{AB} ، \overline{BC} لهما معدلان مختلفان. يسمح معدل التغير بمتابعة العلاقة بين كميتين تتغيران باستمرار. يكون ما يلي صحيحاً إذا ارتبطت إحدى الكميتين بالأخرى فإن:

$$\text{معدل التغير} = \frac{\text{التغير في المتغير التابع ص}}{\text{التغير في المتغير المستقل س}}$$

مثال (١)

باستخدام البيانات في الجدول أدناه أوجد معدل التغير. هل معدل التغير لكل يومين متتاليين هو نفسه؟

عدد الأيام	تكلفة تأجير الحاسوب
١	٦ دنانير
٢	٧,٥ دنانير
٣	٩ دنانير
٤	١٠,٥ دنانير
٥	١٢ ديناراً

ترتبط الكلفة بعدد الأيام

$$\frac{1,5}{1} = \frac{7,5 - 6}{2 - 1}$$

$$\frac{1,5}{1} = \frac{10,5 - 9}{4 - 3}$$

$$\text{معدل التغير} = \frac{\text{التغير في الكلفة}}{\text{التغير في عدد الأيام}}$$

$$\frac{1,5}{1} = \frac{6 - 7,5}{1 - 2}$$

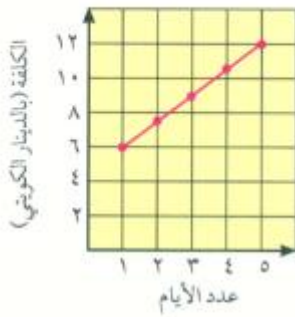
$$\frac{1,5}{1} = \frac{9 - 10,5}{3 - 4}$$

تذكر
معدل التغير يمكن أن يكون موجباً
أو سالباً أو صفراً.

معدل التغير لكل يومين متتاليين هو $\frac{1,5}{1}$
وبالتالي، معدل التغير هو نفسه في كل بيانات الجدول.
∴ كلفة تأجير الحاسوب تزداد ١,٥ دينار لكل يوم بعد اليوم الأول.

حاول أن تحل

- ١ أوجد معدل التغير مستخدماً اليوم الخامس واليوم الثاني.
٢ تفكير ناقد: هل إيجاد معدل التغير لزوج واحد من الأيام المتتالية يعني أن معدل التغير هو نفسه في كل بيانات الجدول؟ فسر إجابتك.



استخدام الرسم البياني لإيجاد معدل التغير
يبين الرسم البياني أن الأزواج المرتبة (عدد الأيام، الكلفة)
في المثال (١) موجودة على خط مستقيم.
∴ بيانات الجدول هي خطية.
∴ يمكن استخدام الرسم البياني لإيجاد معدل التغير.
يتم تعيين المتغير المستقل على المحور الأفقي ويتم تعيين المتغير التابع على المحور الرأسي.

Finding The Slope

إيجاد الميل

درست في ما سبق أن ميل المستقيم يمكن إيجاده باستخدام
العلاقة.

$$\text{الميل} = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$$



فمثلاً ميل المستقيم الموضح بالشكل المقابل

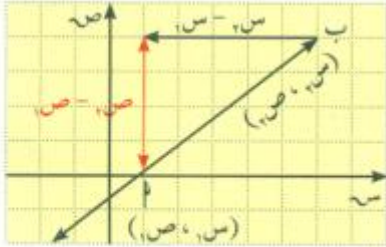
$$\text{الميل} = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}} = \frac{5 - 2}{(1) - (-1)} = \frac{3}{2}$$

ميل الخط المستقيم يساوي $\frac{3}{2}$.

كذلك يمكن استخدام نقطتين على خط مستقيم لإيجاد ميله.

في الرسم البياني إلى اليسار،

لإيجاد ميل \overleftrightarrow{AB} ، حيث $A(س_١، ص_١)$ ، $B(س_٢، ص_٢)$ نستخدم الصيغة التالية:



$$\text{الميل} = \frac{\text{التغيير الرأسي}}{\text{التغيير الأفقي}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} \neq ٠$$

يجب مراعاة الترتيب المعتمد في كتابة إحداثيات النقطتين عند إيجاد الميل. فمثلاً، إذا بدأنا بالإحداثي الصادي للنقطة B في البسط فيجب البدء بالإحداثي السيني للنقطة B في المقام.

مثال (٢)

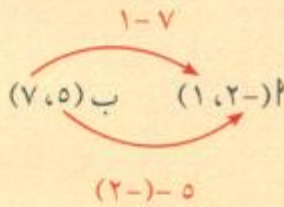
أوجد ميل الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين $A(١، ٢-)$ ، $B(٧، ٥)$.

الحل:

$$\text{الميل} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

عوض $\frac{١ - ٧}{(٢-) - ٥} =$

بسط $\frac{٦}{٧} =$
ميل الخط المستقيم \overleftrightarrow{AB} يساوي $\frac{٦}{٧}$.



حاول أن تحل

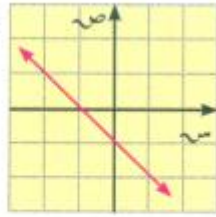
٢ أوجد ميل الخط المستقيم الذي يمر بكل زوج من النقاط.

ج م (٣، ٤)، ن (٣، ٧-)

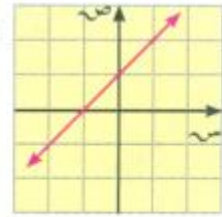
ب ق (٤، ١-)، ك (٢-، ٣)

١ د (٧، ٤)، ج (٥، ٢)

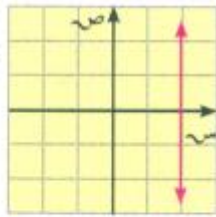
ميل المستقيم سالب



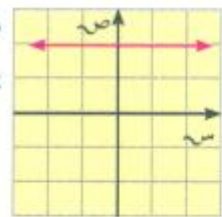
ميل المستقيم موجب



المستقيم الرأسى
ليس له ميل



ميل المستقيم الأفقى
يساوي صفرًا



مثال (٣)

نأخذ في المستوى الإحداثي النقاط: أ(١، ١)، ب(٢، ٢)، ج(٧، ١-). أثبت أن النقاط أ، ب، ج على استقامة واحدة.

الحل:

$$١م = \text{ميل } \overleftrightarrow{أب} = \frac{ص٢ - ص١}{س٢ - س١} = \frac{١ - ١}{٢ - ١} = ٠$$

$$٢م = \text{ميل } \overleftrightarrow{أج} = \frac{ص٢ - ص١}{س٢ - س١} = \frac{١ - ٧}{١ - ١} = ٠$$

$$٣ = ١م = ٢م$$

∴ $\overleftrightarrow{أب} // \overleftrightarrow{أج}$ ولكنهما يشتركان في النقطة أ.

∴ تكون النقاط أ، ب، ج على استقامة واحدة.

حاول أن تحل

٣ أثبت أن النقاط أ(٢، ١-)، ب(٥، ١-)، ج(٣، ٣) على استقامة واحدة.

تذكر أن العلاقة بين ظل الزاوية θ التي يصنعها مستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وميل هذا المستقيم م هي: $\text{م} = \text{ظا } \theta$.

مثال (٤)

أوجد ميل \vec{AB} حيث $A(4,0)$ ، $B(0,-2)$ وقارنه بظل الزاوية \hat{B} في المثلث قائم الزاوية B و A .

الحل:

$$\frac{\text{الميل}}{\text{الميل}} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$$

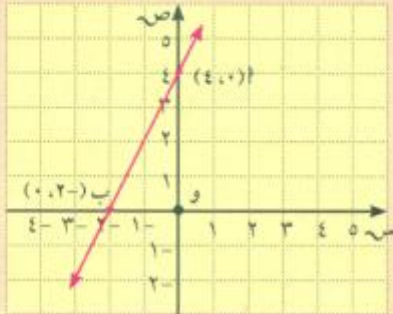
$$\frac{0 - 4}{(2-) - 0} =$$

$$\frac{4}{2} =$$

$$2 =$$

عوض

بسط



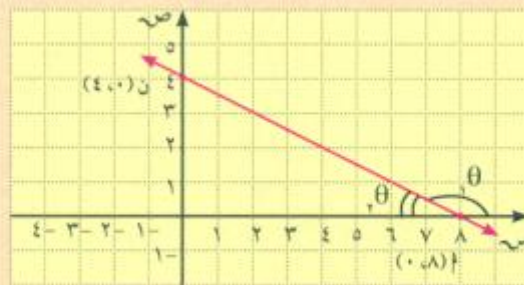
في المثلث $\triangle OAB$: $AO = 4$ ، $OB = 2$

$$\text{ظل } B = \frac{AO}{OB} = \frac{4}{2} = 2$$

\therefore ظل $B = \text{ميل } \vec{AB} = 2$

حاول أن تحل

- ٤ **أ** أوجد ميل \vec{AN} وقارنه بظل الزاوية المكونة من \vec{AN} والاتجاه الموجب لمحور السينات.
- ب** أوجد ميل المستقيم \vec{AN} وقارنه بظل الزاوية الحادة التي قياسها θ وظل الزاوية المنفرجة التي قياسها θ .



مثال (٥)

ارسم كلاً من المستقيمين التاليين بمعلومية نقطة من كل مستقيم وميله.

أ م (١، ١)، الميل = $\frac{٤}{٣}$.

ب ن (٢، ٣-)، الميل = $٢-$.

تذكر

يكفي معرفة إحداثيات نقطتين من مستقيم لرسم هذا المستقيم.



الحل:

أ الميل = $\frac{٤}{٣}$ ∴ يمكن اعتبار التغير الرأسى = ٤ ، التغير الأفقى = ٣.

نبدأ من النقطة م (١، ١) ونتحرك إلى الأعلى ٤ وحدات ثم نتجه

يميناً ٣ وحدات أو نتحرك إلى اليمين ٣ وحدات ثم نتجه إلى الأعلى ٤ وحدات.

لتكن ل النقطة التي وصلنا إليها.

نرسم المستقيم م ل.

ب الميل = $٢-$ أو $\frac{٢-}{١}$ ∴ يمكن اعتبار التغير الرأسى = $٢-$ ، التغير الأفقى = ١.

نبدأ من النقطة ن (٢، ٣-) ونتحرك وحدتين إلى الأسفل ثم نتجه يميناً وحدة واحدة.

لتكن ك النقطة التي وصلنا إليها. نرسم المستقيم ن ك.



حاول أن تحل

٥ ارسم المستقيمات التالية بمعلومية نقطة من كل مستقيم وميله:

أ (٣، ١)، الميل = ١-

ب (٢، ١)، الميل = $\frac{٣}{٢}$.

ج (٣، ٢-)، الميل = $\frac{٥}{٢}-$.

معادلة الخط المستقيم Equation of a Straight Line

سوف تتعلم

- كتابة معادلة الخط المستقيم.
- الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم.
- إيجاد معدل التغيير.

دعنا نفكر ونتناقش

تُمثل المعادلة: $ص = م س + ن$ بيانيًا بخط مستقيم، حيث $م \neq ٠$ ، $ن \neq ٠$.
إذا كانت $م = ٠$ فإن معادلة المستقيم تصبح $ص = ن$ وهي تمثل مستقيمًا موازيًا للمحور السيني (مستقيم أفقي).

إذا كانت $ن = ٠$ ، فإن المستقيم يمر بنقطة الأصل ومعادلته $ص = م س$.

معادلة المستقيم الرأسي هي $س = ١$ (وهذا المستقيم ليس له ميل).

ملاحظة:

لكتابه معادلة خط مستقيم نحن بحاجة إلى معرفة:

- الميل (م).
 - نقطة من نقاط المستقيم ولتكن $(س١، ص١)$.
- تكون معادلة المستقيم: $ص - ص١ = م(س - س١)$.

مثال (١)

اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{٣}{٤}$ ويمر بالنقطة $(٤، -١)$.

الحل:

بالتعويض $ص - (-١) = \frac{٣}{٤}(س - ٤)$

$ص + ١ = \frac{٣}{٤}س - ٣$

بالتبسيط $ص = \frac{٣}{٤}س - ٧$

∴ المعادلة: $ص = \frac{٣}{٤}س - ٧$.

حاول أن تحل

- ١ اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{٢}{٣}$ ويمر بالنقطة $(٥، -٦)$.

تذكر

- معادلة محور السينات هي: $ص = ٠$
- معادلة محور الصادات هي: $س = ٠$
- وبالتالي إحداثيات نقاط محور السينات $(س، ٠)$ وإحداثيات نقاط محور الصادات $(٠، ص)$.

معلومة رياضية

معدل درجة الحرارة بالفهرنهايت يرتبط بمعدل الدرجة المئوية (سيليزية) بالعلاقة:
 $٩ \text{ ف} = ٥ \text{ م} + ٣٢$ ويمكن كتابتها:
 $ص = \frac{٩}{٥}س + ٣٢$ وهي معادلة خط مستقيم ميله $\frac{٩}{٥}$
أو $ص = ١,٨س + ٣٢$.



مثال (٢)

اكتب معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين $A(3, 1)$ ، $B(-2, 0)$.
الحل:

نوجد الميل

$$m = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{0 - 3}{(-2) - 1}$$

$$m = \frac{3}{3} = 1$$

المعادلة: $ص - ص_1 = m(س - س_1)$

بالتعويض في المعادلة $ص - 1 = 1(س - 3)$

بالتبسيط $ص - 1 = س - 3$

$ص = س + 2$

وبالتالي المعادلة: $ص = س + 2$

حاول أن تحل

٢ أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين ج $(3, -1)$ ، د $(2, -2)$.

لأي مستقيمين غير رأسيين ومتوازيين الميل نفسه. أما إذا كان المستقيمان متعامدين وليس أحدهما رأسيًا، فنتائج ضرب ميلييهما يساوي -١. وبالتالي إذا علمنا ميل أحد المستقيمتين فيمكننا إيجاد ميل المستقيمتين المتوازيتين معه أو ميل المستقيمتين المتعامدتين معه، كذلك يمكننا إيجاد معادلته بمعرفة نقطة على هذا المستقيم.

مثال (٣)

إذا كان المستقيم ل: $ص = 2س + 1$ ، فأوجد:

أ معادلة المستقيم هـ الموازي للمستقيم ل والذي يمر بالنقطة $(2, -3)$.

ب معادلة المستقيم ف العمودي على المستقيم ل والذي يمر بالنقطة $(4, -3)$.

الحل:

أ ∴ المستقيمان ل، هـ متوازيان ، ميل المستقيم هـ = ميل المستقيم ل

∴ ميل المستقيم هـ = ٢

وبالتالي، معادلة المستقيم هـ تكتب على الشكل:

$$ص - ص_1 = m(س - س_1)$$

$$ص - (-3) = 2(س - 4)$$

$$ص + 3 = 2س - 8$$

$$ص = 2س - 11$$

بالتعويض في المعادلة

بالتبسيط

وبالتالي معادلة هـ: $ص = 2س - 11$

أو $ص = 2س - 11$ وهي الصورة العامة لمعادلة المستقيم.

معلومة مفيدة

الصورة العامة لمعادلة المستقيم هي:

$$ص = س + ج = ٠$$

حيث $ج$ ، $ب$ لا يساويان الصفر معًا.

ب) ل، ف مستقيمان متعامدان .∴ ميل المستقيم ل × ميل المستقيم ف = -1

$$2 \times \text{ميل المستقيم ف} = -1$$

$$\frac{1}{2} = \text{ميل المستقيم ف}$$

وبالتالي معادلة المستقيم ف:

$$\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م} (\text{س} - \text{س}_1)$$

بالتعويض

$$\text{ص} - (3) = (1/2) (\text{س} - 4)$$

بالتبسيط

$$\text{ص} + 3 = 1/2 \text{س} + 2$$

$$\text{ص} = 1/2 \text{س} - 1$$

$$\text{∴ معادلة المستقيم ف: ص} = 1/2 \text{س} - 1$$

حاول أن تحل

٣ إذا كان المستقيم ك: $3\text{ص} + \text{س} + 3 = 0$ ، فأوجد:

أ) معادلة المستقيم الموازي للمستقيم ك والذي يمر بالنقطة $(-3, 2)$.

ب) معادلة المستقيم العمودي على المستقيم ك والذي يمر بالنقطة $(1, 4)$.

يمكن كتابة معادلة خطية لنمذجة البيانات في جدول لتوضيح العلاقة الخطية بين مجموعتين من البيانات فإذا كان معدل التغير بين الأزواج المتتالية من البيانات هو نفسه فيوجد علاقة خطية ويكون معدل التغير هو الميل.

مثال (٤)

هل يمكن إيجاد علاقة خطية بين الأزواج المتتالية في الجدول الموضح؟ إذا وجدت، فاكتب المعادلة الخطية التي يمكن أن تمثل جدول هذه البيانات.

الحل:

الخطوة الأولى:

أوجد معدل التغير بين كل زوج مرتب.

ص	س
٤	١-
٦	٣
٧	٥
١٠	١١

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4-6}{1+3}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{6-7}{3-5}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{7-10}{5-11}$$

$$\text{معدل التغير} = \frac{1}{2} \text{ وبالتالى م} = \frac{1}{2}$$

∴ يمكن إيجاد علاقة خطية بين الأزواج في جدول البيانات.

ص	س
٤	١-
٦	٣
٧	٥
١٠	١١

الخطوة الثانية:

استخدم صيغة الميل والنقطة لكتابة المعادلة:

$$\text{ص} - \text{ص}_1 = m(\text{س} - \text{س}_1)$$

$$\begin{aligned} \text{ص} - 7 &= \frac{1}{4}(\text{س} - 5) \text{ عوض } (\text{س}_1, \text{ص}_1) \text{ بـ } (5, 7) \text{ و } m = \frac{1}{4} \\ \text{ص} &= \frac{1}{4}\text{س} + \frac{9}{4} \end{aligned}$$

ص	س
7-	11-
3-	1-
1-	4
5	19

حاول أن تحل

٤ هل يمكن إيجاد علاقة خطية بين الأزواج المتتالية في جدول البيانات المرسوم؟ في حال وجود تلك العلاقة، اكتب المعادلة الخطية التي يمكن أن تمثل جدول هذه البيانات .

مثال (٥)

يبين الجدول التالي النسبة المئوية ص لتناقص الطاقة الكهربائية بدلالة س عدد ساعات عند استخدام البطارية في الحاسوب المحمول.

عدد ساعات استهلاك الطاقة الكهربائية (س)	١	٢	٣
النسبة المئوية للطاقة المتبقية (ص)	٪٨٠	٪٦٠	٪٤٠

١ اكتب معادلة خطية يمكن أن تمثل العلاقة بين عدد الساعات والنسبة المئوية للطاقة المتبقية.

٢ بعد كم ساعة تصبح الطاقة المتبقية في البطارية ٥٪؟

الحل:

١ نوجد معدل التغير: $\frac{0,8 - 0,6}{1 - 2}, 2 = \frac{0,8 - 0,6}{1 - 2}$

$0,2 = \frac{0,6 - 0,4}{2 - 3}$ فيكون معدل التغير ثابت

نستخدم المعادلة:

ص - ص_١ = m(س - س_١) معادلة المستقيم

ص - ٠,٦ = ٠,٢ - ٠(س - ٢) بالتعويض

ص - ٠,٢ = ١ + س بالتبسيط

٢ المعادلة: ص - ٠,٢ = ١ + س

ص = ٠,٥ بالتعويض نكتب ٠,٥ = ٠,٢ - ١ + س

٠,٥ - ١ = س - ٠,٢



$$٠,٢ \text{ س} = ٠,٩٥$$

$$\text{س} = ٤,٧٥ = ٠,٢ \div ٠,٩٥$$

أي بعد مرور ٤ ساعات و٤٥ دقيقة.

حاول أن تحل

٥ في المثال (٥)، ما عدد ساعات استهلاك الطاقة كي تكون النسبة المئوية للطاقة المتبقية في البطارية تساوي ٧٠٪؟

٦ جاءت نتائج تمدد شريط زنبركي بالسنتيمتر بحسب الأوزان المعلقة عليه كما يبين الجدول التالي:

١٠	٧	٥	٤	٢	الوزن س (كيلوجرام)
٢٠	١٥,٥	١٢,٥	١١	٨	التمدد ص (سنتيمتر)

هل العلاقة بين الوزن والتمدد يمكن أن تكون خطية؟ في حال الإيجاب اكتب المعادلة الخطية.

البعد بين نقطة ومستقيم

Distance Between a Point and a Straight Line

دعنا نفكر ونتناقش

سوف تتعلم

- إيجاد البعد بين نقطة ومستقيم.

رأينا سابقًا المسافة بين النقطتين $(س_١، ص_١)$ ، $(س_٢، ص_٢)$ والقاعدة التي توجد هذه المسافة ل على الشكل التالي:

$$ل = \sqrt{(س_١ - س_٢)^2 + (ص_١ - ص_٢)^2}$$

ومعادلة المستقيم هي على الصورة $ص = م س + ن$ ، حيث $م$ هي ميل المستقيم.

في هذا الدرس سوف نوجد البعد بين نقطة ومستقيم حيث هو طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من النقطة على المستقيم، ولكي نجد هذا البعد

نحن بحاجة إلى كتابة معادلة المستقيم على الصورة:

$$س + ب ص + ج = ٠، \text{ حيث } س، ب \text{ لا يساويان الصفر معًا.}$$

إذا كانت معادلة المستقيم على الصورة ل: $س + ب ص + ج = ٠$ ، فإن البعد $ف$ بين النقطة $د (س_١، ص_١)$ والمستقيم ل

$$\text{تعطى بالصيغة: } ف = \frac{|س_١ س + ب ص_١ + ج|}{\sqrt{س^2 + ب^2}}$$

إذا كانت النقطة $د$ تنتمي إلى المستقيم ل فالبعد بينهما يساوي صفرًا.

مثال (١)

أثبت أن النقطة $هـ (١، ٢)$ لا تنتمي إلى المستقيم ل الذي معادلته: $ص = ٣ س - ٤$ ، ثم أوجد البعد بين المستقيم ل والنقطة $هـ$.
الحل:

بالتعويض عن $(س، ص)$ ب $(١، ٢)$ في المعادلة: $ص = ٣ س - ٤$

$$\text{نحصل على } ١ = ٣ \times ١ - ٤$$

$$٢ \neq ١ \text{ هـ لا تنتمي إلى المستقيم ل.}$$

لإيجاد البعد بين $هـ$ ، المستقيم ل يجب كتابة معادلة المستقيم ل على الصورة:

$$س + ب ص + ج = ٠$$

$$\therefore ل: س - ٣ ص - ٤ = ٠$$

$$س = ٣ \quad ب = -٣ \quad ج = -٤$$

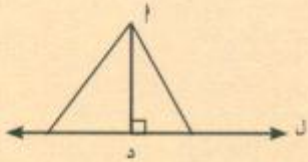
$$س_١ = ١ \quad ص_١ = ٢$$

$$\text{البعد } ف = \frac{|س_١ س + ب ص_١ + ج|}{\sqrt{س^2 + ب^2}}$$

$$= \frac{١}{\sqrt{١٠}} = \frac{|٥ - ٦|}{\sqrt{١٠}} = \frac{|٤ - ١ - ٢ \times ٣|}{\sqrt{١ + ٩}}$$

ملاحظة

أقصر بعد بين نقطة ومستقيم هو طول القطعة العمودية المرسومة من النقطة على الخط المستقيم.



$أ د$ هي أقصر مسافة بين النقطة $أ$ والمستقيم ل.

∴ البعد يساوي $\frac{10\sqrt{2}}{10}$ وحدة طول.

حاول أن تحل

١ أوجد البعد بين المستقيم ل: ص = -س + ٣ والنقطة د(٢، ٥).

مثال (٢)

أوجد البعد من النقطة د(-٤، ٣) إلى المستقيم ل: ٢ص = ٣ - س - ٧.

الحل:

نكتب أولاً معادلة المستقيم ل على الصورة: $١س + ٢ب + ٣ج = ٠$

$$ل: ٣س - ٢ص - ٧ = ٠$$

$$١س = ٣ \quad ٢ب = -٢ \quad ٣ج = -٧$$

$$١س = ٣ \quad ١ص = -٢ \quad ١ج = -\frac{٧}{٣}$$

$$\text{البعد ف} = \frac{|١س + ٢ب + ٣ج|}{\sqrt{١^2 + ٢^2 + ٣^2}}$$

$$ف = \frac{|٣ - ٤ - ٧|}{\sqrt{١ + ٤ + ٩}} = \frac{|-٨|}{\sqrt{١٤}} = \frac{٨}{\sqrt{١٤}}$$

أي أن البعد من النقطة د إلى المستقيم ل يساوي $\frac{٨}{\sqrt{١٤}}$ وحدة طول.

حاول أن تحل

٢ أوجد البعد من النقطة ط(٣، -٤) إلى المستقيم ل: ص = $\frac{٤}{٣}$ س + $\frac{٤}{٦}$.

ملاحظة

إذا كانت المسافة بين نقطة ومستقيم تساوي صفرًا تكون النقطة على المستقيم.

مثال (٣)

أوجد طول أقصر أنبوب متوصله شركة الغاز من منزل يقع عند النقطة م (-٦، ٨) إلى الخط الأساسي الذي تنمذج معادلته على الصورة: $ص - ٣س = ٢$.

الحل:

لإيجاد البعد بين النقطة م والخط الأساسي يجب كتابة المعادلة على الصورة التالية: $٠ = ج + ب ص + ١س$ وبالتالي تصبح: $٠ = ٢ - ص + ٣س$

$$\begin{aligned} ٣ = ١س & \quad ١ = ب & \quad ٢ = ج \\ ٨ = ١ص & & \end{aligned}$$

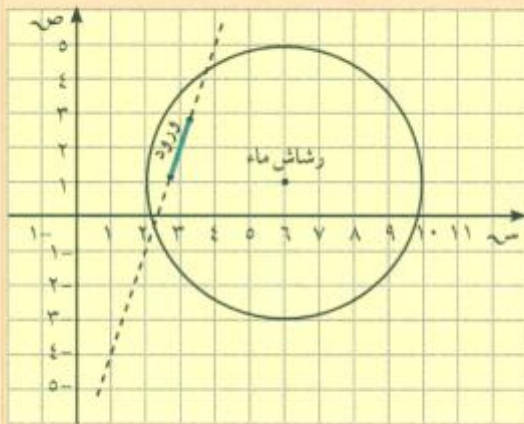
$$\text{البعد} = \frac{|١س + ب ص + ج|}{\sqrt{١ + ب^٢ + ٢}}$$

$$\begin{aligned} \frac{١٢}{١٠\sqrt{٧}} &= \frac{|٢ - ٨ + ١٨|}{١٠\sqrt{٧}} = \frac{|٢ - ٨ + (٦-) \times ٣|}{\sqrt{١ + ٢٣}} \\ \therefore \text{طول الأنبوب يساوي} & \frac{١٠\sqrt{٦}}{٥} \text{ وحدة طول.} \end{aligned}$$



حاول أن تحل

٣ تم زرع مجموعة ورود في حديقة على خط مستقيم (كما في الشكل المقابل) معادلته على الصورة: $ص - ٣س = ٧$.
بالقرب من الورود رشاش ماء دوار إحداثياته (٦، ١) ومداه الأقصى ٤ أمتار. فهل تصل مياهه إلى الورود؟



الدائرة Circle

سوف تتعلم

- معادلة الدائرة.
- الصورة العامة لمعادلة الدائرة.
- إيجاد مركز الدائرة وطول نصف قطرها.
- معادلة مماس الدائرة.
- العلاقة بين دائرتين في المستوي.



دعنا نفكر ونتناقش

إذا كان لديك قطعة من الحبل طولها ٦ أمتار، وأردت أن ترسم دائرة في فناء المدرسة، فما الذي تفعله؟ فكر مع زملائك.

هذا سيقدونا إلى تعريف الدائرة

الدائرة هي مجموعة النقاط في المستوي التي تكون على بعد ثابت من نقطة معلومة، والنقطة المعلومة تسمى مركز الدائرة.

والبعد الثابت هو طول نصف قطر الدائرة ويرمز له بالرمز r .

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة:

لأي دائرة مركزها $M(d, h)$ وطول نصف قطرها r فإن المسافة بين مركز الدائرة وأي نقطة $P(s, v)$ على الدائرة يمكن إيجادها باستخدام قانون المسافة بين نقطتين.

$$\text{المسافة} = \sqrt{(s - d)^2 + (v - h)^2}$$

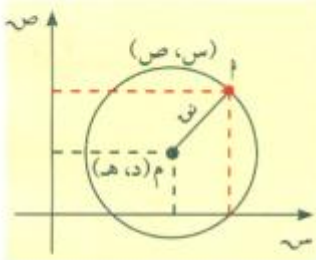
$$r = \sqrt{(s - d)^2 + (v - h)^2}$$

$$r^2 = (s - d)^2 + (v - h)^2$$

وعلى ذلك، تكون معادلة الدائرة التي مركزها $M(d, h)$ وطول نصف قطرها r على الصورة:

$$(s - d)^2 + (v - h)^2 = r^2$$

وتسمى هذه الصورة القياسية لمعادلة الدائرة بمعلومية المركز $M(d, h)$ وطول نصف القطر r .



مثال (١)

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها $(3, -2)$ وطول نصف قطرها ٧ وحدات.

الحل:

معادلة الدائرة على الصورة القياسية: $(s - d)^2 + (v - h)^2 = r^2$ ، حيث (d, h) مركزها

$$\text{بالتعويض عن } (d, h) \text{ بـ } (3, -2) \quad 49 = (s - (-2))^2 + (v - (-2))^2$$

$$49 = (s + 2)^2 + (v + 2)^2$$

حاول أن تحل

١ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها $(5, -3)$ وطول نصف قطرها ٥ وحدات.

مثال (٢)

أوجد معادلة دائرة قطرها \overline{AB} حيث $A(2, -4)$ ، $B(4, 2)$.

الحل:

نوجد أولاً إحداثيات مركز الدائرة والتي هي منتصف \overline{AB}

$$M\left(\frac{4+2}{2}, \frac{2+(-4)}{2}\right) \text{ أي } M(3, -1)$$

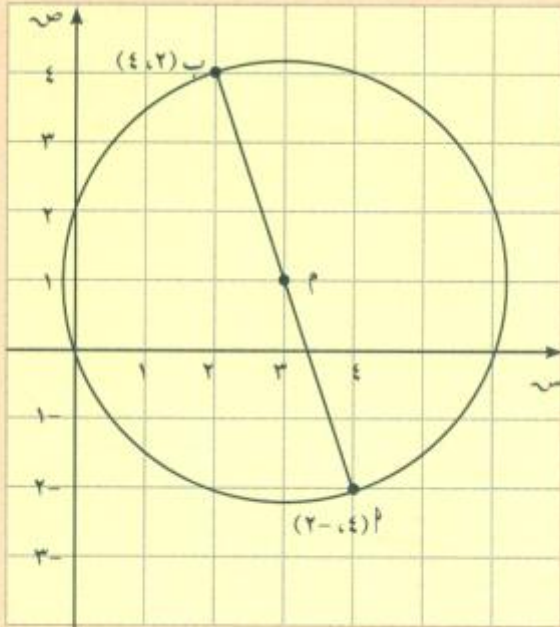
نوجد طول نصف قطر الدائرة $\frac{\overline{AB}}{2}$ ،

$$نق = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + (-6)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 36} = \frac{1}{2} \sqrt{52} = \sqrt{13}$$

$$نق = \sqrt{13} \text{ وحدة طول}$$

معادلة الدائرة:

$$13 = (x-3)^2 + (y+1)^2$$



حاول أن تحل

٢ أوجد معادلة دائرة مركزها $M(4, -4)$ وتمس كل من محور السينات ومحور الصادات.

إذا كان $نق$ طول نصف قطر الدائرة مركزها نقطة الأصل، فإن معادلتها على الصورة: $نق^2 = س^2 + ص^2$

مثال (٣)

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٤ وحدات.

الحل:

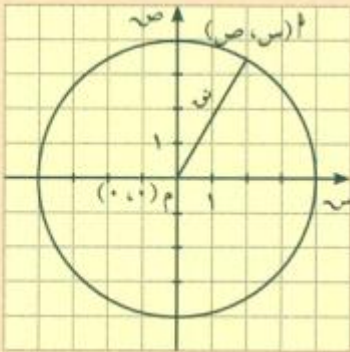
إذا فرضنا نقطة مثل $M(س, ص)$ على الدائرة، فإن $م = ٤ = نق$ وحدات،

معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل: $س^2 + ص^2 = نق^2$

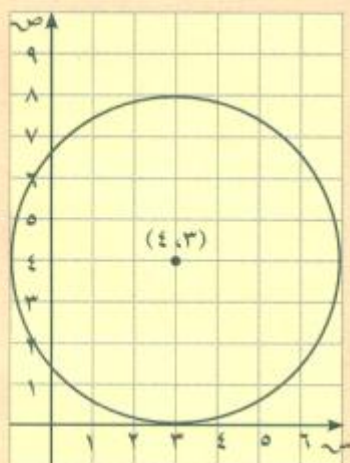
$$\therefore س^2 + ص^2 = ١٦ \text{ معادلة الدائرة المطلوبة.}$$

حاول أن تحل

٣ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول قطرها ٦ سم.



مثال (٤) تطبيقات حياتية



في حديقة، زرعت مجموعة من الأزهار على شكل دائرة مركزها م (٤، ٣)، بحيث إن كل زهرة تبعد ٤ وحدات عن المركز. اكتب معادلة الدائرة التي تنمو عليها مجموعة الأزهار.

الحل:

معادلة الدائرة على الصورة القياسية: $(س - د)^2 + (ص - هـ)^2 = ن^2$

$$١٦ = (س - ٤)^2 + (ص - ٣)^2$$

حاول أن تحل

٤ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٤، ٣) وتمس محور الصادات.

مثال (٥)

أوجد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها: $(س + ٢)^2 + (ص - ٣)^2 = ٩$ ، ثم ارسم الدائرة.

الحل:

بمقارنة معادلة الدائرة المعطاة بالصورة القياسية لمعادلة الدائرة: $(س - د)^2 + (ص - هـ)^2 = ن^2$

$$\text{نجد أن: } د = -٢، هـ = ٣، ن = ٣$$

$$د = -٢، هـ = ٣، ن = ٣$$

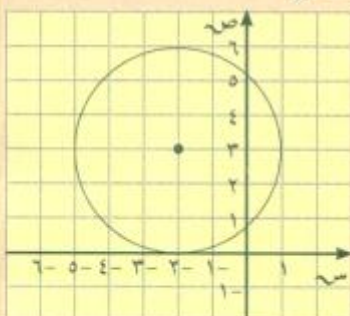
مركز الدائرة (-٢، ٣) وطول نصف قطر الدائرة = ٣ وحدات.

حاول أن تحل

٥ أوجد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها:

أ) $س^2 + ص^2 = ٤٩$

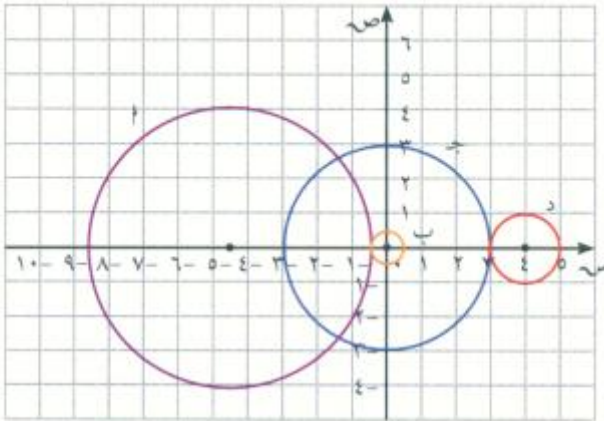
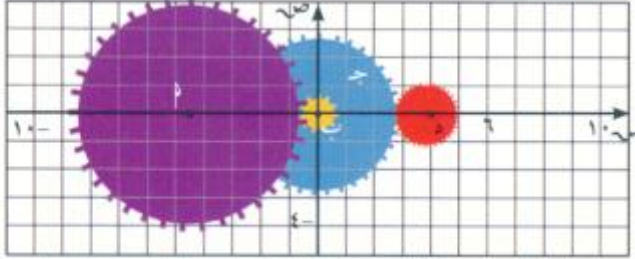
ب) $٣٦ = (س - ٤)^2 + (ص + ٥)^2$



تدريب (١)

تطبيق من ميكانيكا السيارات

يوضح الشكل أربع تروس في سيارة، الترس ب يدور ٨ دورات كاملة عند دورة الترس أ دورة واحدة. الترسان ب، ج يدوران حول محور واحد عند نقطة الأصل. إذا كان طول نصف قطر الترس ج يساوي ٦ مرات طول نصف قطر الترس ب، وطول نصف قطر الترس د يساوي $\frac{1}{3}$ طول نصف قطر الترس ج، فأوجد مركز وطول نصف قطر كل من الدوائر التي تمثل التروس أ، ب، ج، د علمًا بأن طول نصف قطر الترس ب = $\frac{1}{4}$ وحدة، وطول نصف قطر الترس أ = ٨ أمثال طول نصف قطر الترس ب. أوجد معادلات الدوائر التي تمثل التروس: أ، ب، ج، د. من الشكل أكمل الجدول التالي:



المعادلة	طول نصف قطر	(د، هـ)	دوائر التروس
		(٠، ٤، ٥-)	أ
	$\frac{1}{4}$		ب
		(٠، ٠)	ج
	٦		د

الصورة العامة لمعادلة الدائرة

معادلة الدائرة التي مركزها م (د، هـ) وطول نصف قطرها نصفه تكتب على الصورة التالية: $(س - د)^2 + (ص - هـ)^2 = نصفه^2$ وبالفك نحصل على الصورة التالية: $س^2 + ص^2 - ٢دس - ٢هـص + د^2 + هـ^2 - نصفه^2 = ٠$ بوضع $ل = ٢ - د$ ؛ $ك = ٢ - هـ$ ؛ $ب = د^2 + هـ^2 - نصفه^2$ تصبح صورة المعادلة:

س^٢ + ص^٢ + ل^٢ + س + ك ص + ب = ٠ ، حيث ل، ك، ب ثوابت
وتسمى الصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها $(\frac{ل-}{٢}, \frac{ك-}{٢})$
طول نصف قطرها $ن = \frac{١}{٢} \sqrt{ل^٢ + ك^٢ - ٤ب}$.

معلومة مفيدة

$$\begin{aligned} ب = د^٢ + هـ^٢ - ن^٢ \\ \therefore ن^٢ = د^٢ + هـ^٢ - ب \\ ن^٢ = \left(\frac{ل-}{٢}\right)^٢ + \left(\frac{ك-}{٢}\right)^٢ - ب \\ = \frac{ل^٢}{٤} + \frac{ك^٢}{٤} - ب \\ ن^٢ = \frac{١}{٤} (ل^٢ + ك^٢ - ٤ب) \\ \therefore ن = \frac{١}{٢} \sqrt{ل^٢ + ك^٢ - ٤ب} \end{aligned}$$

الصورة العامة: س^٢ + ص^٢ + ل^٢ + س + ك ص + ب = ٠ هي معادلة دائرة ونلاحظ التالي:

١ إنها معادلة من الدرجة الثانية في س، ص.

٢ معامل س^٢ = معامل ص^٢.

٣ لا يوجد الحد الذي يتضمن س ص.

حالة خاصة: إذا كان ل^٢ + ك^٢ - ٤ب = ٠ فيكون لدينا معادلة تمثل نقطة لأن طول نصف القطر يساوي صفرًا.

مثال (٦)

عَيِّن مركز وطول نصف قطر الدائرة الممثلة بالمعادلة: س^٣ + ص^٣ - ٦س + ٩ص - ١٢ = ٠

الحل:

بالقسمة على ٣

$$س^٣ + ص^٣ - ٢س + ٣ص - ٤ = ٠$$

وهي معادلة دائرة على الصورة العامة

$$\therefore ل = -٢، ك = ٣، ب = -٤$$

$$\text{المركز} = \left(\frac{ل-}{٢}, \frac{ك-}{٢}\right) = \left(\frac{٣-}{٢}, ١\right)$$

$$ن = \frac{١}{٢} \sqrt{ل^٢ + ك^٢ - ٤ب}$$

$$ن = \frac{١}{٢} \sqrt{٤ + ٩ - ١٦}$$

$$ن = \frac{١}{٢} \sqrt{٢٩}$$

الدائرة مركزها $(١, \frac{٣-}{٢})$ وطول نصف قطرها $ن = \frac{١}{٢} \sqrt{٢٩}$ وحدة طول.

حاول أن تحل

٦ عَيِّن مركز وطول نصف قطر الدائرة الممثلة بالمعادلة: س^٢ + ص^٢ + ٢ص - ١٢س - ٤ص - ٣٠ = ٠

مثال (٧) تطبيقات حياتية



تريد وضع ملصق إعلاني لدراجة هوائية بإطارين. تبلغ أبعاد الورقة ٢٦ سم × ٢٠ سم.

معادلة الإطار الأمامي:

$$س^2 + ص^2 - ١٠س - ١٠ص + ٢٥ = ٠$$

معادلة الإطار الخلفي:

$$س^2 + ص^2 - ٣٤س - ٦ص + ٢٨٩ = ٠$$

علمًا بأن المسافة بين مركزي الدائرتين اللتين تمثلان الإطارين هي ١٢ سم. هل يمكن رسم الدراجة على الورقة؟ علّل إجابتك.

الحل:

معادلة الإطار الأمامي: $س^2 + ص^2 - ١٠س - ١٠ص + ٢٥ = ٠$

وهي على شكل الصورة العامة حيث $ل = ١٠$ ، $ك = ١٠$ ، $ب = ٢٥$

وبالتالي مركزها $\left(\frac{ل}{٢}, \frac{ك}{٢}\right)$ أي $(٥, ٥)$

وطول نصف قطرها: $ن = \sqrt{\frac{ل^2}{٤} + \frac{ك^2}{٤} - ب} = \sqrt{\frac{١٠٠}{٤} + \frac{١٠٠}{٤} - ٢٥} = ٥$

معادلة الإطار الخلفي: $س^2 + ص^2 - ٣٤س - ٦ص + ٢٨٩ = ٠$

وهي على شكل الصورة العامة حيث $ل = ٣٤$ ، $ك = ٦$ ، $ب = ٢٨٩$

وبالتالي مركزها $\left(\frac{ل}{٢}, \frac{ك}{٢}\right)$ أي $(١٧, ٣)$

طول نصف قطرها: $ن = \sqrt{\frac{ل^2}{٤} + \frac{ك^2}{٤} - ب} = \sqrt{\frac{٣٤^2}{٤} + \frac{٦^2}{٤} - ٢٨٩} = ٣$

وبهذا يكون طول نصف قطر الإطار الأمامي ٥ سم وطول نصف قطر الإطار الخلفي ٣ سم.

وبالتالي تكون المسافة الضرورية لرسم الإطارين: $٢٠ = ٣ + ١٢ + ٥$

$$٢٦ > ٢٠$$

∴ يمكن رسم الملصق الإعلاني على الورقة ذات الأبعاد ٢٦ × ٢٠ شرط ألا يتعدى ارتفاع الدراجة الـ ٢٠ سم.

حاول أن تحل

٧ هل يمكن رسم الدائرة التي معادلتها: $س^2 + ص^2 - ١٠س - ١٢ص - ٦٠ = ٠$ على ورقة (A_4) أبعادها

٢١ سم × ٢٩,٧ سم؟

ملاحظة

عندما يكون لدينا معادلة على الصورة العامة التالية: $س^2 + ص^2 + ل س + ك ص + ب = ٠$ يمكننا معرفة ما تمثله بيانيًا هذه المعادلة بمجرد مقارنة $ل^2 + ك^2 - ٤ ب$ مع الصفر.

- ١ عندما $ل^2 + ك^2 - ٤ ب > ٠$ فإن المعادلة لا تمثل معادلة دائرة.
- ٢ عندما $ل^2 + ك^2 - ٤ ب = ٠$ فإن المعادلة تمثل نقطة.
- ٣ عندما $ل^2 + ك^2 - ٤ ب < ٠$ فإن المعادلة تمثل دائرة.

مثال (٨)

هل كل معادلة مما يلي تمثل معادلة دائرة؟ فسر.

- أ $س^2 + ص^2 - ٢ ص - ٣ س + ٥ = \frac{١٥}{٤}$
- ب $س^2 + ص^2 + ٤ س - ٧ ص + ٢٠ = ٠$
- ج $س^2 + ص^2 - ٦ س + ٨ ص + ٢٥ = ٠$

الحل:

أ المعادلة: $س^2 + ص^2 - ٢ ص - ٣ س + ٥ = \frac{١٥}{٤}$
معامل $س^2 =$ معامل $ص^2 = ١$
 $ل = -٣$ ، $ك = -٥$ ، $ب = \frac{١٥}{٤}$

$$ل^2 + ك^2 - ٤ ب = ٩ + ٢٥ - ١٥ = ١٩ > ٠$$

∴ المعادلة تمثل معادلة دائرة.

ب المعادلة: $س^2 + ص^2 + ٤ س - ٧ ص + ٢٠ = ٠$
معامل $س^2 =$ معامل $ص^2 = ١$
 $ل = ٤$ ، $ك = -٧$ ، $ب = ٢٠$

$$ل^2 + ك^2 - ٤ ب = ١٦ - ٤٩ + ٢٠ = -١٣ < ٠$$

∴ المعادلة لا تمثل معادلة دائرة.

ج المعادلة: $س^2 + ص^2 - ٦ س + ٨ ص + ٢٥ = ٠$
معامل $س^2 =$ معامل $ص^2 = ١$
 $ل = -٦$ ، $ك = ٨$ ، $ب = ٢٥$

$$ل^2 + ك^2 - ٤ ب = ٣٦ + ٦٤ - ١٠٠ = ٠$$

∴ المعادلة تمثل نقطة.

حاول أن تحل

٨ هل كل معادلة مما يلي تمثل معادلة دائرة؟ فسر.

- أ $x^2 + y^2 - 4x + 7y + 17 = 0$
 ب $x^2 + y^2 + 5x - 6y - 4 = 0$
 ج $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0$



Tangent to a Circle

معادلة مماس لدائرة

سبق وتبين لنا أن نصف قطر الدائرة عمودي على مماس الدائرة عند نقطة التماس. باستخدام هذه الخاصية، نستطيع إيجاد معادلة مماس الدائرة.

مثال (٩)

أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5 \text{ عند نقطة التماس } (1, 3).$$

الحل:

النقطة $(1, 3)$ تنتمي إلى الدائرة.

إحداثيات مركز الدائرة $(2, 1)$.

$$\text{ميل } \overline{PQ} = \frac{3 - 1}{1 - 2} = \frac{2}{-1} = -2$$

∴ نصف قطر التماس \overline{PQ} عمودي على مماس الدائرة

$$\therefore \text{ميل المماس} \times \text{ميل } \overline{PQ} = -1$$

$$\text{ميل المماس} = \left(-\frac{1}{-2}\right) \times -1 = -\frac{1}{2}$$

$$\text{ميل المماس} = 2$$

معادلة المماس \overline{PQ} الذي ميله ٢ ويمر بالنقطة $(1, 3)$ هي:

$$y - 3 = 2(x - 1)$$

$$y - 3 = 2x - 2$$

$$y - 1 = 2x$$

$$\therefore \text{معادلة المماس } y - 1 = 2x$$

حاول أن تحل

٩ أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ عند النقطة $(6, 4)$.

مثال (١٠)

أثبت أن النقطة $P(٦, -٤)$ تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ، معادلتها: $س^٢ + ص^٢ - ٤س + ٢ص - ٢٠ = ٠$ ، ثم أوجد معادلة المماس لهذه الدائرة عند هذه النقطة.

الحل:

$$س^٢ + ص^٢ - ٤س + ٢ص - ٢٠ = ٠$$

المعادلة على شكل الصورة العامة لمعادلة الدائرة حيث $ل = -٤$ ، $ك = ٢$ ، $ب = -٢٠$

بالتعويض عن النقطة $(٦, -٤)$

$$٢٠ - (٤-)٢ + (٦)٤ - ٢(٤-) + ٢(٦)$$

$$\checkmark ٠ = ٢٠ - ٨ - ٢٤ - ١٦ + ٣٦ =$$

∴ النقطة $P(٦, -٤)$ تنتمي إلى الدائرة.

مركز الدائرة $O(٢, -١)$ ، طول نصف قطرها: $ر = \sqrt{\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}} = ١$

$$ر = \sqrt{\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}} = ١$$

ميل نصف قطر التماس $م = \frac{ص١ - ص٢}{س١ - س٢} = \frac{٣-}{٤} = \frac{(١-) - ٤-}{٢ - ٦}$

نعرف أن نصف قطر التماس $م$ هو عمودي على المماس عند النقطة P

ليكن $م'$ ميل المماس: $م \times م' = -١$

$$\frac{٤}{٣} \times م' = -١ \text{ ومنه } م' = -\frac{٣}{٤}$$

نأخذ المعادلة: $ص - ص١ = م'(س - س١)$

$$ص - (٤-) = -\frac{٣}{٤}(س - (٦-))$$

$$ص - ٤ = -\frac{٣}{٤}(س + ٦)$$

∴ معادلة المماس $ص - ٤ = -\frac{٣}{٤}(س + ٦)$

حاول أن تحل

١٠ أثبت أن النقطة $P(١, ١)$ تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ، معادلتها: $س^٢ + ص^٢ + ٦س + ٨ص - ١٦ = ٠$ ، ثم أوجد معادلة المماس لهذه الدائرة عند هذه النقطة.

Intersection of Two Circles

العلاقة بين دائرتين في المستوي

معلومة

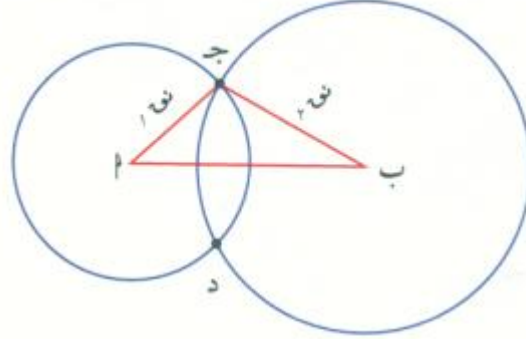
عندما نكتب: الدائرة (أ)، (ب) فهذا يعني أن أ مركز الدائرة و (ب) نصف قطرها.

معلومة رياضية

متباينة المثلث
في كل مثلث، طول أي ضلع أصغر من مجموع طولي الضلعين الآخرين وأكبر من الفرق بين طوليهما.



$$|ب - أ| \geq ج \geq |ب + أ|$$



في الشكل، الدائرتان (أ، ب)، (ب، ج) تتقاطعان في ج، د.

لدراسة العلاقة بين دائرتين، نستخدم متباينة المثلث.

إن مقارنة البعد بين مركزي الدائرتين وطولي نصف قطري الدائرتين يحدد موقع الدائرتين كما هو مبين في الجدول التالي:

ملاحظة	الشكل	العلاقة بين الدائرتين	العلاقة بين أ و ب وطولي نصف القطرين
البعد بين المركزين أصغر من مجموع طولي نصف القطرين وأكبر من الفرق بينهما.		الدائرتان تتقاطعان في نقطتين مختلفتين	$ أ - ب > ب - أ > أ + ب$
- البعد بين المركزين يساوي مجموع طولي نصف القطرين - مركزا الدائرتين ونقطة المماس هي على استقامة واحدة.		الدائرتان متماستان خارجياً	$أ + ب = أ - ب$
- البعد بين المركزين يساوي الفرق بين طولي نصف القطرين. - مركزا الدائرتين ونقطة المماس هي على استقامة واحدة.		الدائرتان متماستان داخلياً	$أ - ب = أ - ب$
- البعد بين المركزين أكبر من مجموع طولي نصف قطري الدائرتين.		الدائرتان لا تتقاطعان (متباعدتان)	$أ + ب < أ - ب$
- البعد بين المركزين أصغر من الفرق بين طولي نصف القطرين.		الدائرتان لا تتقاطعان (متداخلتان)	$أ - ب > أ - ب$

مثال (١١)

حدد وضع الدائرة التي معادلتها: $س^2 + ص^2 = 36$ بالنسبة إلى كل دائرة مما يلي:

أ هـ: $(س - 3)^2 + (ص + 1)^2 = 16$

ب هـ: $س^2 + ص^2 - 2س + 2ص - 1 = 0$

الحل:

مركز الدائرة التي معادلتها $س^2 + ص^2 = 36$ ، $(0, 0)$ وطول نصف قطرها $س_1 = 6$.

أ مركز الدائرة التي معادلتها $(س - 3)^2 + (ص + 1)^2 = 16$

هو ب $(3, -1)$ وطول نصف قطرها $س_2 = 4$

$$س_1 ب = \sqrt{(3-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{10}$$

$$س_1 + س_2 = 6 + 4 = 10$$

$$|س_1 - س_2| = 6 - 4 = 2$$

وبالتالي $|س_1 - س_2| < س_1 ب < س_1 + س_2$

∴ الدائرتان تتقاطعان في نقطتين مختلفتين.

ب مركز الدائرة التي معادلتها $س^2 + ص^2 - 2س + 2ص - 1 = 0$

هو ج $(1, -1)$ وطول نصف قطرها $س_3 = \frac{1}{4} \sqrt{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$س_1 ج = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{2}$$

$$|س_1 - س_3| = \left| \sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| \approx 0.7$$

$$س_1 + س_3 \approx \sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 2.7$$

وبالتالي $|س_1 - س_3| < س_1 ج < س_1 + س_3$

∴ الدائرتان لا تتقاطعان (متداخلتان).

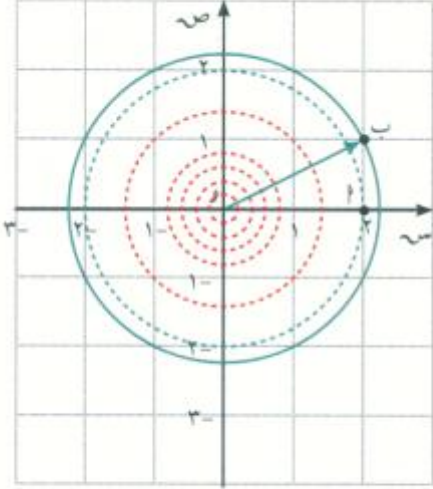
حاول أن تحل

١١ حدد وضع الدائرة التي معادلتها: $س^2 + ص^2 - 4س - 12ص = 0$ بالنسبة إلى كل من الدائرتين التاليتين:

أ هـ: $(س - 1)^2 + (ص + 3)^2 = 25$

ب هـ: $س^2 + ص^2 = 16$

المرشد لحل المسائل



وجد جاسم هذه المسألة:

أدى قذف حصاة في بركة مياه إلى تشكل موجات دائرية يتزايد طول نصف قطرها بمعدل 6 سم/ثانية.

بعد كم ثانية تصل هذه الموجات إلى مركب صغير كان على مسافة 2 متر شرقًا و 3 مترًا واحدًا شمالًا من مركز الموجة الأولى.

أوجد معادلة الدائرة التي تصل إلى المركب.

كيف فكر جاسم لحل المسألة؟

سوف أضع مخططًا للمسألة:

ليكن O مركز الموجة، النقطة A تبعد 2 متر شرق المركز، النقطة B تبعد 3 مترًا واحدًا إلى شمال النقطة A .

لكي أحصل على الزمن:

أجد المسافة OB من مركز الموجة الأولى إلى المركب.

أقسم المسافة على السرعة (6 سم/ثانية).

أستخدم قاعدة الدائرة لأجد معادلتها.

التطبيق:

سأستخدم نظرية فيثاغورث على المثلث OAB القائم في A ، $(OB)^2 = (OA)^2 + (AB)^2$

$$(OB)^2 = 2^2 + 3^2$$

$$5 = (OB)^2$$

$$OB = \sqrt{5} \text{ م}$$

سأستخدم قاعدة الزمن = $\frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$

$$\text{الزمن} = \frac{\sqrt{5} \text{ م}}{6 \text{ سم/ثانية}} = \frac{100 \times \sqrt{5} \text{ سم}}{6 \text{ سم/ثانية}}$$

$$\text{الزمن} = 37 \text{ ثانية.}$$

معادلة الدائرة التي مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها $\sqrt{5}$ هي:

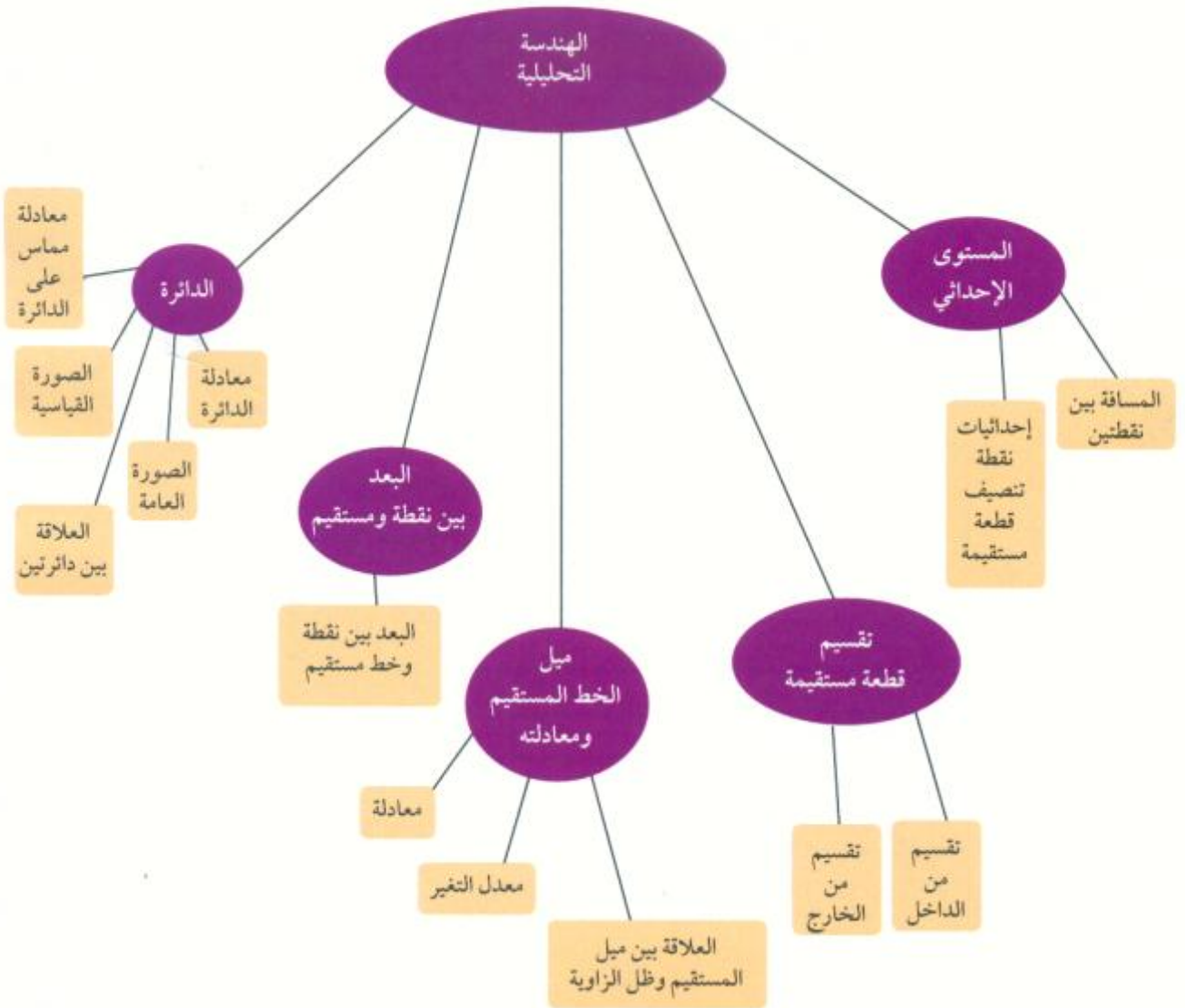
$$س^2 + ص^2 = 5$$

مسألة إضافية

حوض زهور دائري الشكل، نمذج دائرته بالمعادلة: $(س-1)^2 + (ص-2)^2 = 9$ (طول نصف القطر بالأمتار).

إذا أحطنا الحوض بالرمل بسماكة منتظمة 50 سم، فأوجد طول نصف قطر الشكل الجديد ومعادلته.

مخطط تنظيمي للوحدة التاسعة



ملخص

- المسافة بين نقطتين A, B على محور السينات تساوي القيمة المطلقة للفرق بين إحداثيات النقطتين.
- المسافة المائلة بين نقطتين $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
- إذا كانت AB قطعة مستقيمة بحيث $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ فإن نقطة منتصف AB هي $J\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.
- تقسيم AB من الداخل من جهة A بنسبة $m:n$ ، ج (x, y) نقطة التقسيم حيث: $x = \frac{m x_2 + n x_1}{m + n}$ ، $y = \frac{m y_2 + n y_1}{m + n}$.
- تقسيم AB من الخارج من جهة A بنسبة $m:n$ ، ج (x, y) نقطة التقسيم حيث: $x = \frac{m x_2 - n x_1}{m - n}$ ، $y = \frac{m y_2 - n y_1}{m - n}$.
- ميل الخط المستقيم = $\frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$.
- ميل \vec{AB} حيث $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ شرط أن: $x_2 \neq x_1$.
- ميل المستقيم m يساوي ظل الزاوية θ التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات: $m = \tan \theta$.
- إذا كان $\vec{AB} // \vec{CD}$ فإن ميل \vec{AB} يساوي ميل \vec{CD} وبالعكس.
- إذا كانا \vec{AB}, \vec{CD} متعامدين فإن ناتج ضرب ميليهما يساوي -1 وبالعكس.
- معادلة الخط المستقيم بمعلومية الميل (m) والجزء المقطوع من محور الصادات $y = m x + n$.
- طول العمود النازل من النقطة $M(x_1, y_1)$ على المستقيم (L) ومعادلته $As + Bv + C = 0$ هو: $f = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.
- معادلة الدائرة التي مركزها $M(d, h)$ وطول نصف قطرها r : $(s - d)^2 + (v - h)^2 = r^2$.
- الصورة العامة لمعادلة الدائرة: $s^2 + v^2 + لs + كv + ب = 0$ حيث $ل, ك, ب$ ثوابت
- وحيث إن مركز الدائرة $\left(-\frac{ل}{2}, -\frac{ك}{2}\right)$ ونوه $\frac{1}{4} \sqrt{ل^2 + ك^2 - 4ب} = r$ حيث $ل^2 + ك^2 - 4ب > 0$.
- لدراسة العلاقة بين دائرتين نستخدم المتباينة في المثلث.
- لإيجاد ميل المماس عند نقطة على دائرة نستخدم العلاقة: ميل المماس \times ميل $ق = -1$.

الإحصاء والاحتمال Statistic and Probability

مشروع الوحدة : اختيار وظيفة

١ مقدمة المشروع: هل تحلم بمتابعة دراستك الجامعية؟ أو بشراء سيارة؟ أو امتلاك منزل؟ أو تنفيذ مشروع يؤمن لك مستقبلاً زاهراً؟

أسئلة كثيرة تعبر حتماً في مخيلتك، ولكن كيف تجيب عنها؟

إن التفكير بادخار مبلغ من المال لفترات معينة يُمكن أي شخص من تحقيق أجزاء مهمة من أحلامه.

٢ الهدف: إن البدء بوضع موازنة صغيرة لمدخولك ومصروفك واستخدام برنامج Excel على الحاسوب وصنع قرارات عن كيفية إدارة الأموال سوف يكون الهدف الأساسي لهذا المشروع، حيث ستجد سبيلاً إلى ادخار مبلغ محدد خلال فترات من أسابيع أو من أشهر.

٣ اللوازم: حاسوب - آلة حاسبة.

٤ المتابعة:

شجع الطلاب على الإجابة عن الأسئلة التالية:

- أ ما المبلغ الذي يحصل عليه الطالب؟ (من الأهل - راتب - مقابل عمل ...)
- ب ما المبلغ الذي يصرفه الطالب في أسبوع؟ (طعام، نقلات، ...)
- ج ما المبلغ غير المتوقع الذي يصرفه الطالب؟ (سينما، ألعاب، مجلات، ...)
- د ما المبلغ الذي ادخره الطالب؟ (أسبوعياً، شهرياً، ...)

٥ التقرير: حفّز الطلاب على كتابة تقرير مفصل يبين خطوات تنفيذ المشروع مرفقاً بجدولة واضحة للدخل والمصاريف والادخار. شجعهم على تبادل الأفكار ومراجعة حساباتهم إذا كان ذلك ضرورياً.

دروس الوحدة

الاحتمال المشروط	طرق العد	الانحراف المعياري	الأرباعيات	تحليل البيانات
٥-١٠	٤-١٠	٣-١٠	٢-١٠	١-١٠

أضف إلى معلوماتك

أحداث نادرة

إن استباق خطر حدوث عطل في حاسوب أو في صاروخ يحمل قمرًا اصطناعيًا أو في مفاعل نووي، يحتمسه العلماء آخذين بالاعتبار احتمال الخلل في كل من مكوناته. يهدف العلماء للوصول إلى احتمالات تقرب من 10^{-10} أي أن احتمال حدوث عطل هو قريب من النسبة ١ إلى مليون خلال عام في مفاعل نووي. ولكن إذا كان هناك مجمع لمئة مفاعل نووي؟؟؟

في بعض الصواريخ التي تحمل أقمارًا اصطناعية يقترب احتمال حدوث عطل من $\frac{1}{10}$ ولكن هذه النسبة تقل كثيرًا في الرحلات المأهولة.



أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت عرض البيانات (تمثيل بياني مصور - تمثيل بياني بالأعمدة - تمثيل بياني بالنقاط المجمعة - تمثيل بياني بالخطوط - تمثيل بياني بالدائرة).
- تعلمت وصف البيانات (المتوسط الحسابي - الوسيط - المنوال - مخطط الساق والأوراق).
- استخدمت الشجرة البيانية.
- طبقت طرق العد في حالات يكون فيها الترتيب مهمًا التباديل (الترتيب) وحالات يكون فيها الترتيب غير مهم (التوافيق).
- تعلمت حساب الاحتمال.
- استخدمت التجارب لإيجاد الاحتمالات.

ماذا سوف تتعلم؟

- حساب مقاييس النزعة المركزية جبريًا وباستخدام التكنولوجيا.
- استخدام هذه المقاييس في تحليل البيانات.
- تحديد الأرباعيات ومجمل الأعداد الخمسة في البيانات وتمثيلها بواسطة الصندوق ذو العارضتين وتفسيرها.
- دراسة تشتت البيانات من خلال علاقتها بالانحراف المعياري.
- تفسير البيانات الإحصائية.
- حل مسائل باستخدام مبدأ العد.
- حل مسائل باستخدام قوانين التوافيق والتباديل.
- الاحتمال المشروط.

المصطلحات الأساسية

- تحليل البيانات - مقاييس النزعة المركزية - مجمل الأعداد الخمسة - التشتت
- الأرباعيات - الصندوق ذو العارضتين - الانحراف المعياري - التباين - مبدأ العد
- التباديل - التوافيق - الأحداث المستقلة - الاحتمال المشروط.

تحليل البيانات Data Analysis

سوف تتعلم

- إيجاد مقياس النزعة المركزية جبرياً وباستخدام التكنولوجيا
- استخدام مقياس النزعة المركزية في تحليل البيانات

معلومة رياضية

مركز الفئة [١٥٠، ١٥٥] هو

$$١٥٢,٥ = \frac{١٥٥ + ١٥٠}{٢}$$

عمل تعاوني

يبين الجدول التالي أطوال القامات بالسنتيمتر عند ٥٠ طالباً في المرحلة الثانوية.

١٧٢	١٦٣	١٦٨	١٦٧	١٦٩	١٧٥	١٧١	١٦٤	١٥٨	١٧٠
١٥٥	١٦٩	١٦٠	١٦٦	١٦٢	١٦٤	١٧٧	١٦٩	١٥٩	١٧٤
١٦٨	١٦٥	١٦٨	١٧٥	١٧٣	١٧٠	١٧٥	١٧١	١٧٤	١٧٩
١٦٨	١٧٣	١٥٩	١٦١	١٥٤	١٧٥	١٧٢	١٥٦	١٧٠	١٦٩
١٦٧	١٥٧	١٥٨	١٥٩	١٧٧	١٧٠	١٦٥	١٦٨	١٥٥	١٧٤

١ استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد المتوسط الحسابي لأطوال هؤلاء الطلاب.

ما الوسيط لهذه البيانات؟

ب أكمل الجدول التالي:

الفئة	-١٧٥	-١٧٠	-١٦٥	-١٦٠	-١٥٥	-١٥٠
التكرار						
مركز الفئة						

ج ما الفئة التي تتضمن الوسيط؟

د ما الفئة التي تتضمن التكرار الأكبر؟

ه استخدم مراكز الفئات والتكرار لتجد المتوسط الحسابي لأطوال قامات هؤلاء الطلاب.

و قارن بين النتيجة في السؤال ١ والنتيجة في السؤال ه. ماذا تلاحظ؟

Measure of Central Tendency

مقاييس النزعة المركزية

على افتراض أن مدير شركة أو مؤسسة يريد إجراء دراسة حول رواتب الموظفين لعدة أعوام متتالية ويريد عددًا واحدًا يبين له متوسط الرواتب في عام معين. فما الذي يحتاج إليه؟

الربط بالحياة



STAT	FREQ
x	
3	3
4	4
5	5

لإدخال بيانات ذو متغير منفرد $x = \{1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5\}$,

باستخدام العمود FREQ لتعيين عدد التكرارات لكل بند ($\{xn; freqn\}$) = $\{1; 1; 2; 3; 3; 2; 2; 1; 4; 5\}$ ، وحساب الانحراف المعياري للسكان والمتوسط.

SHIFT MODE (SETUP) 4 (STAT) 1 (ON)

MODE 3 (STAT) 1 (1-VAR)

1 = 2 = 3 = 4 = 5 =

1 = 2 = 3 = 4 = 2 =

AC SHIFT 1 (STAT) 3 (Var) 2 (σ) =

AC SHIFT 1 (STAT) 3 (Var) 2 (σx) =

الناتج: المتوسط 3 الانحراف المعياري للسكان: 1.154700538

Mean

المتوسط الحسابي

المتوسط الحسابي لن من الأعداد

$s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ هو:

$$\bar{s} = \frac{s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n}{n}$$

$$\bar{s} = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n s_r$$

وبصورة عامة يمكننا إيجاد المتوسط الحسابي من جدول تكراري ذو فئات باستخدام القانون التالي:

قانون: (الطريقة المباشرة)

$$\bar{s} = \frac{s_1 t_1 + s_2 t_2 + s_3 t_3 + \dots + s_n t_n}{t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n}$$

$$\bar{s} = \frac{\sum_{r=1}^n (s_r t_r)}{\sum_{r=1}^n t_r}$$

حيث t_r تكرار الفئة r ،
 s_r مركز الفئة r ،
 n عدد الفئات

مثال (١)

يبين الجدول التالي الأوزان بالكيلوجرام لـ ٦٠ طالبًا في المرحلة الثانوية.

أوجد المتوسط الحسابي لأوزان هؤلاء الطلاب.

الفئة	-٨٠	-٧٥	-٧٠	-٦٥	-٦٠	-٥٥	-٥٠
التكرار	٣	٩	١١	١٤	١٢	٧	٤

الحل:

يمكن تكوين الجدول التالي: (استخدم الآلة الحاسبة)

الفئة	مركز الفئة s_r	التكرارات f_r	ت s_r
-50	52,5	4	210
-55	57,5	7	402,5
-60	62,5	12	750
-65	67,5	14	945
-70	72,5	11	797,5
-75	77,5	9	697,5
-80	82,5	3	647,5
		$\sum_{r=1}^7 f_r = 60$	$\sum_{r=1}^7 ت s_r = 4050$

$$\bar{s} = \frac{\sum_{r=1}^7 (ت s_r)}{\sum_{r=1}^7 ت} = \frac{4050}{60} = 67,5$$

أي أن المتوسط الحسابي لأوزان 60 طالبًا هو 67,5 كيلوجرامًا.

حاول أن تحل

1 بين الجدول التالي التوزيع التكراري لدرجات 70 طالبًا في مادة الرياضيات حيث النهاية العظمى 100 درجة.

أوجد المتوسط الحسابي لهذه الدرجات.

الفئة	-20	-30	-40	-50	-60	-70	-80	-90
التكرار	4	8	14	15	13	9	4	3

يمكن تبسيط الحسابات وإيجاد قيمة تقريبية أيضًا للمتوسط الحسابي.

نأخذ وسطاً فرضياً f (من المستحسن أن يكون مركز الفئة الذي يقابل أكبر تكرار للبيانات)، نطبق القانون التالي:

قانون: (الطريقة المختصرة)

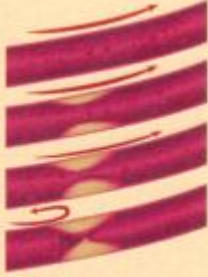
$$\bar{s} = f + \frac{\sum_{r=1}^n ت ح_r}{\sum_{r=1}^n ت}$$

حيث $ح_r = s_r - f$ تسمى انحراف مركز كل فئة عن الوسط الفرضي f .

مثال (٢)

مراحل تصلب الشرايين

شريان بصحة جيدة
بداية تصلب الشرايين
أشكال ألواح تصلب الشرايين
التصدعات اللوحية وأشكال تجلط الدم



خفض الكوليسترول

ممارسة الرياضة
تخفيض الوزن
حمية صحية
تناول الأدوية



يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لمعدل الكوليسترول عند ٣٠ شخصًا. أوجد قيمة تقريبية للمتوسط الحسابي لمعدل الكوليسترول عند هؤلاء الأشخاص باستخدام الطريقة المختصرة.

الفترة	-١٩٥	-٢٠٠	-٢٠٥	-٢١٠	-٢١٥	-٢٢٠
التكرار	٥	٣	٤	٩	٦	٣

الحل:

نأخذ $f = 5$ ، $212,5$ لأنها تقابل أكبر تكرار. نكون الجدول التالي:

الفترة	مركز الفترة s_r	التكرارات t_r	الانحراف عن f $h_r = s_r - f$	$t_r \times h_r$
-١٩٥	١٩٧,٥	٥	-١٥	-٧٥
-٢٠٠	٢٠٢,٥	٣	-١٠	-٣٠
-٢٠٥	٢٠٧,٥	٤	-٥	-٢٠
-٢١٠	٢١٢,٥	٩	٠	٠
-٢١٥	٢١٧,٥	٦	٥	٣٠
-٢٢٠	٢٢٢,٥	٣	١٠	٣٠
		$\sum_{r=1}^7 t_r = 30$		$\sum_{r=1}^7 t_r h_r = -٦٥$

$$\text{وباستخدام القاعدة: } \bar{s} = f + \frac{\sum_{r=1}^7 t_r h_r}{\sum_{r=1}^7 t_r} = 212,5 + \frac{-65}{30} \approx 210,33$$

أي أن المتوسط الحسابي لمعدل الكوليسترول عند ٣٠ شخصًا هو ٢١٠,٣٣ مليجرامات تقريبًا.

حاول أن تحل

٢ من الجدول في المثال (٢)، أوجد المتوسط الحسابي باستخدام الطريقة المباشرة ثم قارن النتيجة.

Median

الوسيط

الوسيط لعدد n من القيم المرتبة تصاعدياً أو تنازلياً هو:

١ العدد الذي يتوسط القيم إذا كان العدد n فردياً.

٢ المتوسط الحسابي للعددين في منتصف القيم إذا كان العدد n زوجياً.

أي أن الوسيط هو القيمة التي ترتيبها $\frac{n+1}{2}$ من الأعداد إذا كان العدد n فردياً ومتوسط القيمتين اللتين ترتيبهما $\frac{n}{2}$ ، $\frac{n}{2} + 1$ من الأعداد إذا كان العدد n زوجياً.

يمكن إيجاد الوسيط باستخدام التمثيل البياني للتردد المتجمع الصاعد وللتكرار المتجمع النازل أو لكليهما.

مثال (٣)

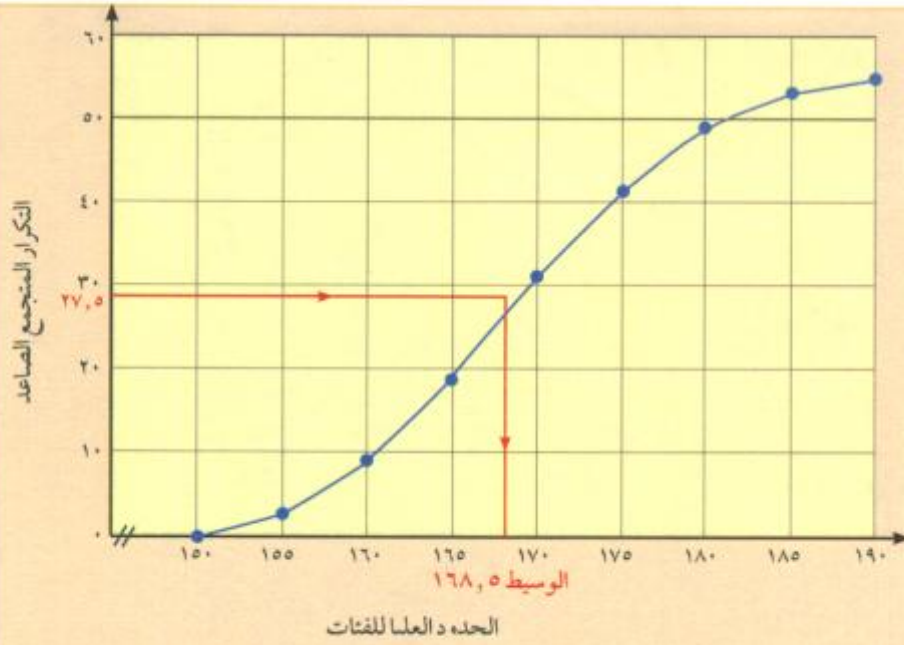
يوضح الجدول التالي التوزيع التكراري لأطوال قامات ٥٥ طالباً في المرحلة الثانوية.

أكمل الجدول لإيجاد الوسيط باستخدام التمثيل البياني لمنحنى التكرار المتجمع الصاعد.

الفئات	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
-١٥٠	٣		
-١٥٥	٧		
-١٦٠	٩		
-١٦٥	١٢		
-١٧٠	١٠		
-١٧٥	٨		
-١٨٠	٤		
-١٨٥	٢		

الحل:

الفئات	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
-١٥٠	٣	أقل من ١٥٥	٣
-١٥٥	٧	أقل من ١٦٠	١٠
-١٦٠	٩	أقل من ١٦٥	١٩
-١٦٥	١٢	أقل من ١٧٠	٣١
-١٧٠	١٠	أقل من ١٧٥	٤١
-١٧٥	٨	أقل من ١٨٠	٤٩
-١٨٠	٤	أقل من ١٨٥	٥٣
-١٨٥	٢	أقل من ١٩٠	٥٥



ترتيب الوسيط = $\frac{55}{2} = 27,5$
 من الشكل يتضح أن الوسيط يساوي
 تقريباً 168,5.

حاول أن تحل

٣ أكمل جدول البيانات التالي لإيجاد الوسيط لأوزان ٢٠ طالبًا بالكيلوجرام باستخدام التمثيل البياني لمنحنى التكرار المتجمع الصاعد.

الفئات	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
-٥٥	٣		
-٦٠	٤		
-٦٥	٥		
-٧٠	٦		
-٧٥	٢		

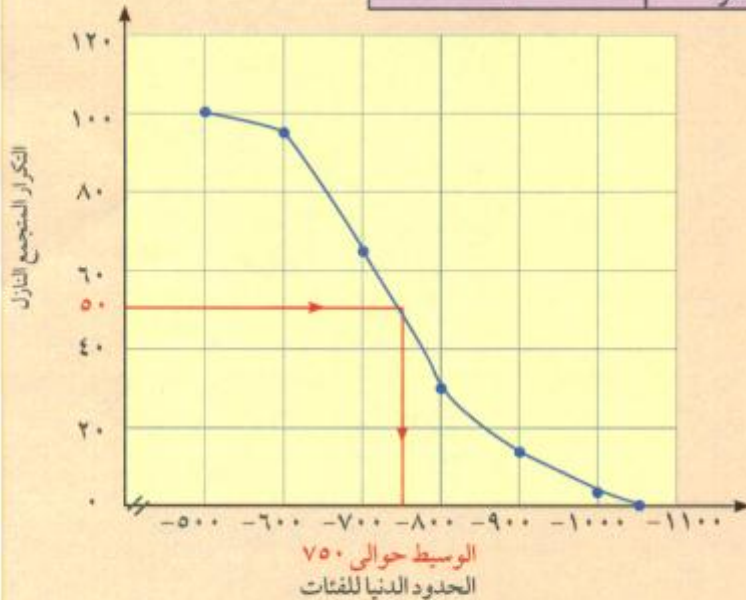
مثال (٤)

يوضح الجدول التالي توزيع الرواتب الشهرية لمئة موظف في إحدى الشركات بالدينار.
أكمل الجدول لإيجاد الوسيط باستخدام التمثيل البياني لمنحنى التكرار النازل.

الفئات	التكرار	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
-٥٠٠	٥		
-٦٠٠	٣٠		
-٧٠٠	٣٢		
-٨٠٠	٢٠		
-٩٠٠	١٠		
-١٠٠٠	٣		

الحل:

الفئات	التكرار	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
-٥٠٠	٥	٥٠٠ فأكثر	١٠٠
-٦٠٠	٣٠	٦٠٠ فأكثر	٩٥
-٧٠٠	٣٢	٧٠٠ فأكثر	٦٥
-٨٠٠	٢٠	٨٠٠ فأكثر	٣٣
-٩٠٠	١٠	٩٠٠ فأكثر	١٣
-١٠٠٠	٣	١٠٠٠ فأكثر	٣



ترتيب الوسيط = $\frac{100}{2} = 50$
من الشكل يتضح أن الوسيط يساوي تقريباً ٧٥٠.

حاول أن تحل

٤ أكمل الجدول التالي لإيجاد الوسيط لدرجات ٢٥ طالبًا باستخدام التمثيل البياني لمنحنى التكرار المتجمع النازل.

الفترة	التكرار	الحد الأدنى للفترة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
-٥	٢		
-٨	٥		
-١١	٨		
-١٤	٦		
-١٧	٤		

يمكن إيجاد قيمة تقريبية للوسيط باستخدام التمثيل البياني لمنحنى التكرار المتجمع الصاعد ولمنحنى التكرار المتجمع النازل معًا.

مثال (٥)

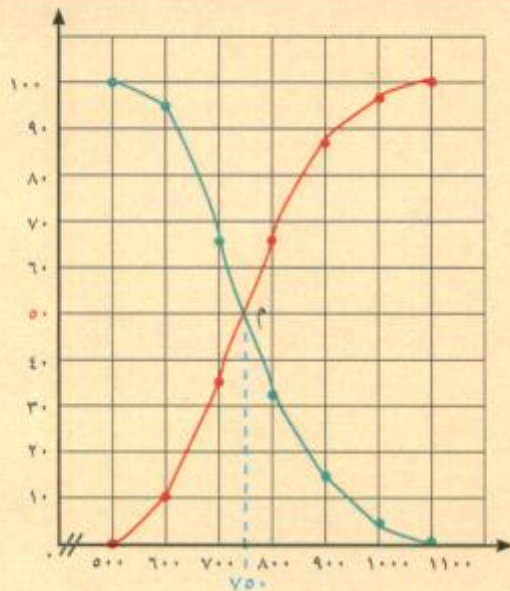
يوضح الجدول التالي الرواتب الشهرية لمئة موظف في إحدى الشركات بالدينار.

أكمل الجدول التالي لتبين التكرار المتجمع الصاعد والتكرار المتجمع النازل، ثم استخدم التمثيل البياني لهما معًا لإيجاد الوسيط.

الفئات	-٥٠٠	-٦٠٠	-٧٠٠	-٨٠٠	-٩٠٠	-١٠٠٠
التكرار	٥	٣٠	٣٢	٢٠	١٠	٣

الحل:

الفئات	التكرار	أقل من الحدود العليا للفتة	التكرار المتجمع الصاعد	الحد الأدنى للفتة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
-500	5	أقل من 600	5	500 فأكثر	100
-600	30	أقل من 700	35	600 فأكثر	95
-700	32	أقل من 800	67	700 فأكثر	65
-800	20	أقل من 900	87	800 فأكثر	33
-900	10	أقل من 1000	97	900 فأكثر	13
-1000	3	أقل من 1100	100	1000 فأكثر	3



يتقاطع منحنى تكرار المتجمع الصاعد مع منحنى تكرار المتجمع النازل عند نقطة م. العمود المرسوم من النقطة م على المحور الأفقي يعطي العدد 750 تقريبًا. الوسيط يساوي 750 دينارًا تقريبًا.

حاول أن تحل

5 أكمل الجدول التالي لدرجات 60 طالبًا في اختبار الرياضيات حيث النهاية العظمى 100 درجة لتبين التكرار المتجمع الصاعد والتكرار المتجمع النازل، ثم استخدم التمثيل البياني لهما معًا لإيجاد الوسيط.

الفئات	-40	-50	-60	-70	-80	-90
التكرار	7	10	17	12	8	6

المنوال هو القيمة الأكثر تكرارًا في البيانات.

مثال (٦)

أوجد المنوال في ما يلي:

أ ٥، ١٠، ٦، ٥، ٤، ٧، ٩، ٨، ٥

ب ٢٣، ١٧، ١٦، ١٥، ١١، ٢٠، ١٢، ١١، ١٨، ١٢

ج ٧، ٧، ٧، ٧، ٧

د ٧، ٦، ٥، ٦، ٥، ٦، ٥

الحل:

أ المنوال = ٥ (الأكثر تكرارًا)

ب يوجد منوالان: ١٢، ١١

ج لا يوجد منوال

د يوجد منوالان: ٦، ٥

حاول أن تحل

٦ أوجد المنوال في ما يلي:

أ ١٤، ٧، ٦، ١٢، ٥، ٧

ب ١٠، ٧، ٨، ١٥، ١٢، ٩، ٨، ١٥

ج ١، ١، ١، ١، ١

د ٤، ٤، ٣، ٨، ٨، ٣، ٨، ٣

ملاحظة

إذا لم يوجد تكرار في البيانات فلا يوجد منوال لها. ويمكن أن يوجد أكثر من منوال لمجموعة القيم.

الربط بالحياة

استخدم الآلة الحاسبة (Casio Classpad 300)

لإيجاد وسيط ومنوال البيانات التالية:

٩، ٥، ٥، ٧، ١، ٨، ٣، ٧، ٥، ٦، ٣، ٤، ٥، ٣، ٢

انقر  (في قائمة التطبيقات).



استخدم List 1؛ تأكد من أن المؤشر في الموضع الأول من List 1.

أدخل ٢ في المركز الأول، وهذا سوف يظهر في الجزء السفلي من الشاشة كما $2 = [1]$.

الفتاح **EXE** للانتقال إلى الموضع التالي في القائمة.

اكتب قيم البيانات المتبقية في لائحة القائمة ١ اضغط على

EXE بعد كل إدخال. تظهر الشاشة كافة البيانات التي يتم إدخالها في List 1.

العثور على الإحصاء الوصفي للبيانات

انقر على Calc في شريط القوائم للحصول على الإحصاء الوصفي.



نحن نتعامل مع متغير واحد لذا انقر على **One-Variable**

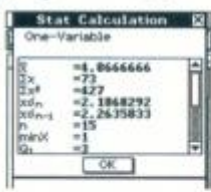
فإن نافذة Set Calculation تتيح لك اختيار القائمة التي

تحتوي على البيانات ذات الصلة.

اضغط **OK**

جميع الإحصاءات المتوفرة وصفيًا

هذا المتغير تظهر على الشاشة:



القيمة الأولى، ٥٠، تعني المتوسط الحسابي **the mean**

أي ٤,٨٦٧ (إلى ٣ منازل عشرية)

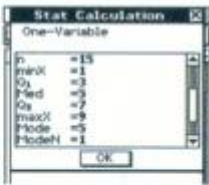
القيمة الثانية تعني: $\sum X = 73$ أي مجموع البيانات 73

$n=15$ تعني أن عدد قيم مجموعة البيانات ١٥.

نتجه إلى الأسفل لإيجاد كل من الوسيط والمنوال

$Med = 5$ يعني الوسيط يساوي ٥

$Mode = 5$ يعني المنوال يساوي ٥



إيجاد المنوال للتوزيع التكراري باستخدام قانون الرافعة:

نحدد الفئة المنوالية وهي الفئة التي يقابلها أكبر تكرار.

نحدد التكرار للفئتين السابقتين السابقة مباشرة واللاحقة مباشرة للفئة المنوالية على الترتيب $ك_1$ ، $ك_2$.

المنوال يقسم الفئة المنوالية كما في الشكل بحيث إن:

$$ك_1 \times س = س \times ك_2 \times (ف - س)$$

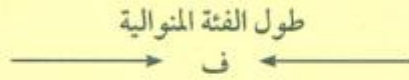
$$ف = طول الفئة المنوالية$$

المنوال = الحد الأدنى للفئة المنوالية + س

هذا ما يعرف «بطريقة الرافعة» لحساب المنوال.

ويمكن وضع صيغة رياضية لقانون الرافعة على الشكل التالي:

$$\text{المنوال} = \text{الحد الأدنى للفئة المنوالية} + \frac{ك_1}{ك_1 + ك_2} \times ف$$



مثال (٧)

يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لعدد ساعات الدراسة الأسبوعية عند ٥٠ طالبًا.

أوجد المنوال لعدد ساعات الدراسة الأسبوعية عند الطلاب .

الفئة	-٥٥	-٥٠	-٤٥	-٤٠	-٣٥
التكرار	٢	٦	١٥	٢٠	٧

الحل:

باستخدام قانون الرافعة

$$\text{الحد الأدنى للفئة المنوالية} = ٤٠$$

$$ف: \text{طول الفئة المنوالية} = ٥$$

$$ك_1: \text{تكرار الفئة السابقة للفئة المنوالية} = ٧$$

$$ك_2: \text{تكرار الفئة اللاحقة للفئة المنوالية} = ١٥$$

$$ك_1 \times س = س \times ك_2 \times (ف - س)$$

$$٧ \times س = س \times ١٥ \times (٥ - س)$$

$$٧ = ١٥ - ٧٥ = س$$

$$٧٥ = س \times ٢٢$$

$$\therefore س = \frac{٧٥}{٢٢}$$

$$س \approx ٣,١٤$$

معلومة مفيدة

قانون الرافعة:

القوة \times طول ذراعها = المقاومة \times طول ذراعها.



المنوال = الحد الأدنى للفئة المنوالية + س

$$\therefore \text{المنوال} \approx 40 + 3,14$$

$$\approx 43,14$$

وبذلك يكون منوال ساعات الدراسة أسبوعياً عند الطلاب ٤٣ ساعة و ٢٥ دقيقة تقريباً.

حاول أن تحل

٧ بين الجدول التالي التوزيع التكراري لمعدل الكوليسترول عند ٢٠ شخصاً.

أوجد المنوال لمعدل الكوليسترول عند هؤلاء الأشخاص.

الفئة	-١٩٥	-٢٠٠	-٢٠٥	-٢١٠	-٢١٥	-٢٢٠
التكرار	١	٣	٤	٧	٤	١

معلومة صحية

المعدل الطبيعي للكوليسترول في الدم في دولة الكويت:

CHOL ... 3.10 → 5.20

HDL.D ... 1.04 → 1.68

يمكن إيجاد قيمة تقريبية للمنوال بيانياً باستخدام المدرج التكراري ثم تحديد فئة المنوال والفئة السابقة مباشرة والفئة اللاحقة مباشرة.

مثال (٨)

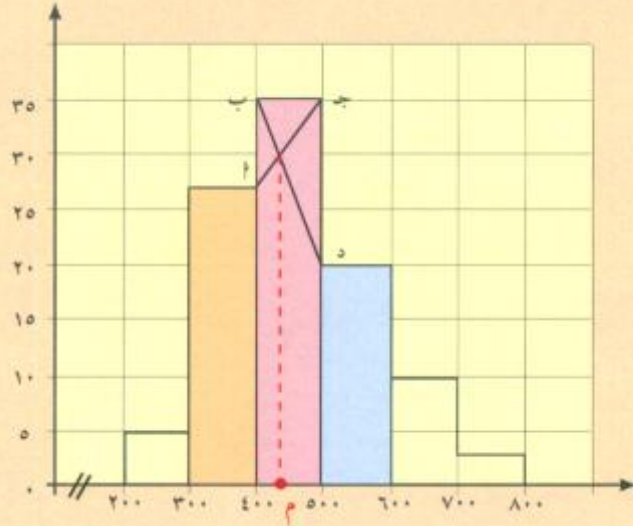
بين الجدول التالي التوزيع التكراري لرواتب الموظفين بالدينار في إحدى المؤسسات.

استخدم التمثيل البياني للمدرج التكراري لإيجاد قيمة تقريبية لمنوال رواتب الموظفين.

الفئة	-٢٠٠	-٣٠٠	-٤٠٠	-٥٠٠	-٦٠٠	-٧٠٠
التكرار	٥	٢٧	٣٥	٢٠	١٠	٣

الحل:

يبين الجدول أن الفئة المتوالية هي ٤٠٠ - والفئة السابقة المباشرة هي ٣٠٠ - والفئة اللاحقة المباشرة هي ٥٠٠ -



من نقطة تقاطع $\overline{ب د}$ مع $\overline{ب د}$ نرسم عمودًا على المحور الأفقي يقطعه في النقطة م. فنحصل على قيمة تقريبية للمنوال وهي ٤٤٥ دينارًا.

حاول أن تحل

٨ بين الجدول التالي التوزيع التكراري لأوزان ٦٠ طالبًا ثانويًا بالكيلوجرام. استخدم المدرج التكراري لإيجاد قيمة تقريبية لمنوال أوزان هؤلاء الطلاب.

الفئة	-٦٠	-٦٤	-٦٨	-٧٢	-٧٦	-٨٠
التكرار	٧	١٢	١٨	١٠	٨	٥

الأرباعيات Quartiles

سوف تتعلم

- من مقياس التشتت
- المدى
- الأرباعيات
- الصندوق ذو العارضتين

تذكر

الوسيط: هو القيمة من البيانات التي تأتي في المنتصف بعد ترتيبها تصاعديًا أو تنازليًا.

عمل تعاوني

كانت درجات الطلاب في مادة الرياضيات حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة كما يلي:

١٤، ١٥، ١٧، ٩، ٨، ١٠، ١٣، ١٤، ١٦، ١٧،

٧، ٥، ٦، ٩، ١٤، ١٩، ١٥، ١٠، ١١،

١٤، ١٠، ١٧، ١٦، ١٨، ١٠، ٦، ١٢، ١٠.

١ أوجد الفرق بين أعلى قيمة وأدنى قيمة.

٢ رتب قيم هذه البيانات تصاعديًا.

٣ أوجد الوسيط لهذه البيانات.

٤ يقسم الوسيط قيم البيانات إلى قسمين متساويين:

أ أوجد الوسيط الأدنى لمجموعة القيم التي هي أصغر من الوسيط الذي حصلت عليه في السؤال (٣).

ب أوجد الوسيط الأعلى لمجموعة القيم التي هي أكبر من الوسيط الذي حصلت عليه في السؤال (٣).

٥ رتب تصاعديًا القيم التالية:

القيمة الصغرى للبيانات، الوسيط الأدنى، الوسيط، الوسيط الأعلى، القيمة العظمى للبيانات.

إن مقياس النزعة المركزية تعطينا فكرة عن قرب أو بعد قيم البيانات عن المتوسط الحسابي أو عن الوسيط ولكنها لا توضح كيفية توزيع هذه القيم وانتشارها.

تصف مقياس الانتشار (التشتت) مدى التغير في البيانات.

يكون التشتت صغيرًا عندما تكون مفردات البيانات متقاربة من بعضها ويكون كبيرًا عندما تكون المفردات متباعدة

فأهمية دراسة التشتت تكمن في معرفة مدى تجانس قيم هذه البيانات .

إذا كان لدينا مجموعتان من البيانات لديهما نفس المتوسط الحسابي.

فإن المجموعة التي قيم بياناتها قريبة أكثر من المتوسط الحسابي تكون الأكثر تجانسًا وانسجامًا في ما بينها.

أبسط مقياس الانتشار هو معرفة المدى.

المدى = القيمة العظمى - القيمة الصغرى.

يوضح المدى الانتشار الكامل لقيم البيانات والذي يمكن أن يتضمن القيمة المتطرفة والتي قد تزيد المدى بشكل كبير، وبالتالي تعطي فكرة خاطئة عن انتشار قيم البيانات.

مثال (١)

أوجد المدى لقيم البيانات التالية:

أ ١٤، ١١، ٩، ٦، ١٢، ١٠، ٨، ٧

ب ٤٧، ١٨، ٢٠، ١١، ١٠، ١٥، ١٢

الحل:

أ المدى = $6 - 14 = 8$

ب المدى = $10 - 47 = 37$. القيمة المتطرفة ٤٧ أعطت مدى كبيرًا جدًا لانتشار القيم.

حاول أن تحل

١ أوجد المدى لقيم البيانات التالية:

أ ٥٩، ٤٨، ٤٥، ٤٠، ٥٣، ٥٧

ب ١٢٤، ١٣٢، ١٣٠، ١٢٨، ١٧٦، ١٢٥

لكي نتجاهل المدى الكبير الناتج عن القيمة المتطرفة في قيم البيانات نستخدم الأرباعيات والمدى الأرباعي.

Quartiles

الأرباعيات

يقسم الوسيط قيم البيانات إلى نصفين وتقسم الأرباعيات قيم البيانات إلى ٤ أرباع ومنها نستنتج:

أ الأرباعي الأول Q_1 وهو وسيط النصف الأدنى من قيم البيانات ويسمى **الأرباعي الأدنى**.

ب الأرباعي الثاني Q_2 وهو وسيط قيم البيانات ويسمى **الوسيط**.

ج الأرباعي الثالث Q_3 وهو وسيط النصف الأعلى من قيم البيانات ويسمى **الأرباعي الأعلى**.

د المدى الأرباعي = $Q_3 - Q_1$.

تسمى (القيمة الصغرى، الأرباعي الأدنى، الوسيط، الأرباعي الأعلى، القيمة العظمى) "بجمل الأعداد الخمسة".

مثال (٢)

يبين الجدول التالي نتائج الدوري الكويتي الممتاز لكرة القدم ٢٠١١ - ٢٠١٢.

الفريق	القادسية	الكويت	العربي	السالمية	الجهراء	كاظمة	النصر	الشباب
النقاط	٥١	٤٠	٣٣	٢٥	٢٤	٢٢	١٧	١٤

أ رتب هذه القيم تصاعديًا.

ب أوجد قيمة المدى.

ج أوجد قيم الوسيط والأرباعيات (الأدنى والأعلى والمدى الأرباعي).

د اكتب "بجمل الأعداد الخمسة".

الحل:

أ $٥١,٤٠,٣٣,٢٥,٢٤,٢٢,١٧,١٤$

ب المدى: $١٤ - ٥١ = ٣٧$ (نلاحظ أن المدى كبير)

ج الوسيط (ر) $= \frac{٢٥ + ٢٤}{٢} = ٢٤,٥$

البيانات مع الوسيط: $٥١,٤٠,٣٣,٢٥,٢٤,٢٢,١٧,١٤, ٢٤,٥ = ر$

الأربعاء الأدنى هو وسيط القيم: $٢٤,٢٢,١٧,١٤$

$$١٩,٥ = \frac{٢٢ + ١٧}{٢} = ر$$

الأربعاء الأعلى هو وسيط القيم: $٥١,٤٠,٣٣,٢٥$

$$٣٦,٥ = \frac{٤٠ + ٣٣}{٢} = ر$$

المدى الأربعة $١٧ = ١٩,٥ - ٣٦,٥ =$



د مجمل الأعداد الخمسة: $(٥١,٣٦,٥,٢٤,٥,١٩,٥,١٤)$

ملاحظة: يمكن ترتيب قيم البيانات على الشكل التالي:

$$٥١,٤٠,٣٦,٥ = ر, ٣٣,٢٥,٢٤,٥ = ر, الوسيط ر, ٢٤,٢٢,١٩,٥ = ر, ١٧,١٤$$

حاول أن تحل

٢ بين الجدول التالي نتائج الدوري الكويتي لكرة القدم ٢٠١٠-٢٠١١.

الفريق	القادسية	الكويت	العربي	كاظمة	الجهراء	النصر	السالمية	الشباب
النقاط	٥١	٤٧	٣٩	٣٨	١٩	١٦	١٤	١٢

أ أوجد الوسيط والمدى والأربعاء والمدى الأربعة لقيم هذه البيانات.

ب اكتب "مجمل الأعداد الخمسة".

Box Plot

منظط الصندوق

هو تمثيل بياني يصف مجمل الأعداد الخمسة لقيم البيانات وهو يتكون من مستطيل مركزي (الصندوق) يمثل الأربعة الأدنى ر، والوسيط ر، والأربعاء الأعلى ر، وقطعتين مستقيمتين من الجهتين تمثلان القيمة الصغرى والقيمة العظمى ونسميهما العارضتين.

مثال (٣)

استخدم "مجممل الأعداد الخمسة" من المثال (٢) لترسم مخطط الصندوق ذي العارضتين. فسّر النتائج.
الحل:

"مجممل الأعداد الخمسة": (١٤، ١٩، ٥، ٢٤، ٥، ٣٦، ٥، ٥١)

مخطط الصندوق



يبين مخطط الصندوق أن المنطقة المحصورة بين الوسيط والأربعاء الأدنى هي أصغر من المنطقة المحصورة بين الوسيط والأربعاء الأعلى. أي أن الوسيط أقرب إلى الأربعاء الأدنى. ولتفسير ذلك:

إن انتشار قيم البيانات قريبة أكثر إلى بعضها بين الوسيط والأربعاء الأدنى وتبتعد عن بعضها بين الوسيط والأربعاء الأعلى. مما يعني أن هناك مجموعتين من الأندية متقاربة في ما بينهما المجموعة الأولى بين المركز الأول والثالث ومجموعة بين المركز الرابع والأخير.

كما أن مخطط الصندوق لا يبين وجود قيمة متطرفة.

حاول أن تحل

٣ ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين للبيانات الموجودة في فقرة "حاول أن تحل (٢)". فسّر النتائج.

يمكن رسم مخططين لصندوقين لمقارنة النتائج.

مثال (٤)

تمثل المجموعة الأولى بيانات معدل مصروف المنزل الشهري على الطعام بالدولار الأمريكي في ١٢ بلدًا أوروبيًا:
٣١٠، ٤٢٠، ٧٥٠، ٤٥٠، ٥٢٠، ٦٨٠، ٤٧٠، ٤٩٠، ٥٩٠، ٥٦٠، ٣٨٠، ٣٥٠.

تمثل المجموعة الثانية بيانات معدل مصروف المنزل الشهري على الطعام بالدولار الأمريكي في ١٢ بلدًا عربيًا:
١٠٥٠، ٦٥٠، ٧٠٠، ٣٧٠، ٩٠٠، ٨٠٠، ٢٢٠، ٨٣٠، ١١٠٠، ١١٩٠، ١٩٠، ٧٦٠.

١ رتب البيانات بطريقة تصاعدية.

٢ أوجد الوسيط والأرباعي الأدنى والأعلى لكل مجموعة من البيانات بالإضافة إلى القيمة الأصغر والقيمة الأكبر لكل مجموعة من البيانات.

٣ ارسم مخططين لصندوقين مستخدمًا البيانات المرتبة تصاعديًا لكل من المجموعتين الأولى والثانية.

٤ فسر النتائج.

الحل:

١ المجموعة الأولى بحسب الترتيب التصاعدي:

٣١٠، ٣٨٠، ٤٢٠، ٤٥٠، ٤٧٠، ٤٩٠، ٥٢٠، ٥٦٠، ٥٩٠، ٦٨٠، ٧٥٠.

المجموعة الثانية بحسب الترتيب التصاعدي:

١٩٠، ٢٢٠، ٣٧٠، ٦٥٠، ٧٠٠، ٧٦٠، ٨٠٠، ٨٣٠، ٩٠٠، ١٠٥٠، ١١٠٠، ١١٩٠.

٢ القيمة الصغرى = ٣١٠، وسيط المجموعة الأولى = $\frac{٤٩٠ + ٤٧٠}{٢} = ٤٨٠$ ،

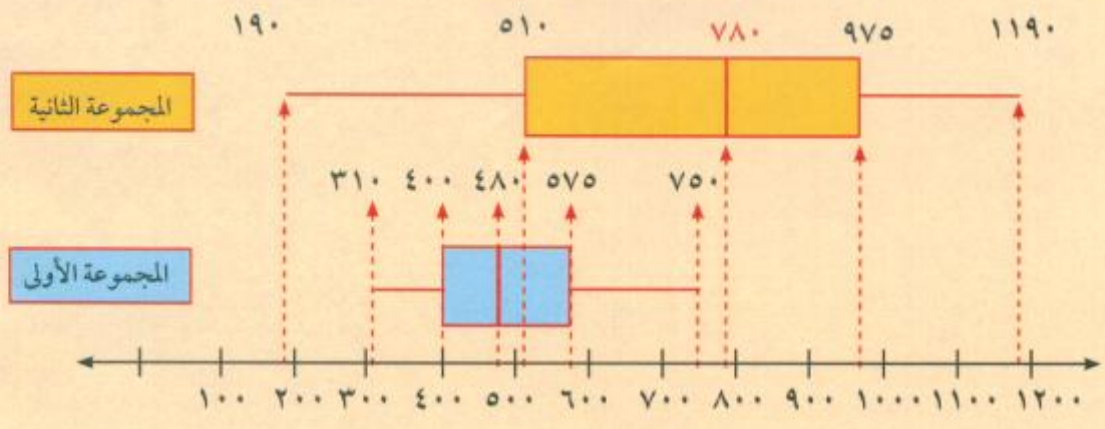
الأرباعي الأدنى = ٤٠٠، الأرباعي الأعلى = ٥٧٥،

القيمة الكبرى = ٧٥٠.

القيمة الصغرى = ١٩٠، وسيط المجموعة الثانية = $\frac{٨٠٠ + ٧٦٠}{٢} = ٧٨٠$ ،

الأرباعي الأدنى = ٥١٠، الأرباعي الأعلى = ٩٧٥،

القيمة الكبرى = ١١٩٠.



٤ الصندوق الذي يمثل الدول العربية أطول من الصندوق الذي يمثل الدول الأوروبية ما معناه أن هناك تباعد في المصروف الشهري بين الدول العربية والدول الأوروبية على الطعام. ففي الدول الأوروبية نجد أن الوسيط أقرب إلى الأرباعي الأدنى وهو أبعد من الأرباعي الأعلى مما يدل على أن المصروف على الطعام أقرب إلى ٤٥٠ دولارًا شهريًا علمًا أنه لا يوجد قيمًا متطرفة لأن المدى يساوي:

$$.٤٤٠ = ٣١٠ - ٧٥٠$$

أما في مجموعة الدول العربية الوسيط أقرب إلى الأرباعي الأعلى من الأرباعي الأدنى مما يعني أن المجتمعات العربية تنفق كثيرًا على الطعام حوالي ٧٨٠ دولارًا شهريًا، ولكن نجد أيضًا أن هناك تفاوت كبير في المجتمعات العربية لأن المدى يساوي:

$$١٩٠ - ١١٩٠ = ١٠٠٠$$
 ما يدل على التفاوت الاجتماعي في الدول العربية.

حاول أن تحل

٤ ارسم مخططين لصندوقين لقيم البيانات التالية وفسر النتائج:

أ ٧، ٨، ٤، ٥، ٩، ١٠، ٦

ب ١٢، ١٠، ١٥، ١٦، ٢٠، ١٧، ١٨، ٣٨

الانحراف المعياري Standard Deviation

سوف تتعلم

- من مقاييس التشتت:
- التباين
- الانحراف المعياري



عمل تعاوني

أراد معلم الفصل مقارنة درجات ٨ طلاب الأوائل من الشعبة (٢) والشعبة (ب) للصف العاشر حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة.

درجات الشعبة (٢): ١٠، ١٢، ١٣، ١٤، ١٥، ١٧، ١٩، ١٢.

درجات الشعبة (ب): ١١، ١٢، ١٣، ١٤، ١٤، ١٥، ١٦، ١٧.

١ أوجد $\bar{ص}$ المتوسط الحسابي لدرجات طلاب الشعبة (٢).

٢ أوجد $\bar{ص}$ المتوسط الحسابي لدرجات طلاب الشعبة (ب).

٣ استنادًا إلى قيم $\bar{ص}$ ، $\bar{س}$: هل يستطيع معلم الفصل أن يقرر أي مجموعة من الطلاب درجاتهم هي الأفضل؟

٤ أكمل الجدولين التاليين:

شعبة (ب)

شعبة (٢)

$ص_i$	$ص_i - \bar{ص}$	$(ص_i - \bar{ص})^2$	$س_i$	$س_i - \bar{س}$	$(س_i - \bar{س})^2$
١١			١٠		
١٢			١٢		
١٣			١٢		
١٤			١٣		
١٤			١٤		
١٥			١٥		
١٦			١٧		
١٧			١٩		
المجموع			المجموع		

سوف تتعلم في هذا البند مؤشرات أخرى من مقاييس التشتت وهي التباين σ^2 والانحراف المعياري σ .

Variance and Standard Deviation

التباين والانحراف المعياري

إذا كانت $س_١، س_٢، س_٣، \dots، س_n$ مجموعة من القيم عددها n حيث متوسطها الحسابي $\bar{س}$ فإن:

$$\text{التباين} = \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (س_i - \bar{س})^2}{n}$$

ومنه الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

معلومة رياضية

- $(s_r - \bar{s})$ هي انحراف s_r عن المتوسط الحسابي.
- المتوسط الحسابي هو ناتج قسمة مجموع قيم البيانات على عدد هذه القيم.

إذا كانت $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ هي قيم بيانات؛ $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ هي تكرار هذه القيم على الترتيب فيكون التباين لهذه القيم هو:

$$\sigma^2 = \frac{t_1(s_1 - \bar{s})^2 + t_2(s_2 - \bar{s})^2 + \dots + t_n(s_n - \bar{s})^2}{t_1 + t_2 + \dots + t_n}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{r=1}^n t_r (s_r - \bar{s})^2}{\sum_{r=1}^n t_r}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{r=1}^n t_r (s_r - \bar{s})^2}{\sum_{r=1}^n t_r}} = \text{ع} = \text{الانحراف المعياري}$$

مثال (١)

أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم البيانات:

٤، ٦، ٨، ٥، ٣، ٧، ٢

الحل:

نوجد أولاً المتوسط الحسابي:

$$\bar{s} = \frac{35}{7} = \frac{2+7+3+5+8+6+4}{7}$$

تكون الجدول التالي:

القيمة s_r	الانحراف عن المتوسط الحسابي $s_r - \bar{s}$	مربع الانحراف عن المتوسط الحسابي $(s_r - \bar{s})^2$
٤	-١	١
٦	١	١
٨	٣	٩
٥	٠	٠
٣	-٢	٤
٧	٢	٤
٢	-٣	٩
المجموع = ٣٥		المجموع = ٢٨

$$\text{التباين } \sigma^2 = \frac{\sum_{r=1}^n (s_r - \bar{s})^2}{n} = \frac{28}{7} = 4$$

التباين $\sigma^2 = 4$

الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{4} = 2$.

حاول أن تحل

١ أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم البيانات:

٢، ٤، ٦، ٨، ٧، ٩

من المتعارف عليه عند الإحصائيين أنه كلما كان الانحراف المعياري صغيراً كلما كان تشتت قيم البيانات أقرب إلى المتوسط الحسابي، وكلما كان كبيراً كان تشتت قيم البيانات بعيداً عن المتوسط الحسابي.

مثال (٢)

يمكن استخدام الآلة الحاسبة

يبين الجدول التالي عدد الساعات القصوى لعمر ٧ مصابيح كهربائية بالساعات من إنتاجين مختلفين.

٩٧٠	٩٦٠	٩٤٠	١٠٣٠	١٠٠٠	٩١٠	١٠٥٠	إنتاج (أ)
٨٧٠	١١٨٠	١٠٥٠	٩٦٠	٩٧٠	٧٠٠	١١٣٠	إنتاج (ب)

١ أوجد المتوسط الحسابي \bar{x} للإنتاج (أ) والمتوسط الحسابي \bar{y} للإنتاج (ب).

٢ أوجد وسيط الإنتاج (أ) ثم وسيط الإنتاج (ب).

٣ سبب الحسابات في السؤالين (أ)، (ب) أن المتوسط الحسابي في الإنتاجين هو نفسه وأن الوسيط في الإنتاجين هو نفسه.

أوجد الانحراف المعياري σ في الإنتاج (أ) والانحراف المعياري σ في الإنتاج (ب). ماذا تستنتج؟

أي إنتاج هو الأفضل؟

الحل:

$$\bar{x} = \frac{970 + 960 + 940 + 1030 + 1000 + 910 + 1050}{7} = 980$$

$$\bar{y} = \frac{870 + 1180 + 1050 + 960 + 970 + 700 + 1130}{7} = 980$$

ب) إنتاج (أ): ٩١٠، ٩٤٠، ٩٦٠، ٩٧٠، ١٠٠٠، ١٠٣٠، ١٠٥٠

الوسيط = ٩٧٠

إنتاج (ب): ٧٠٠، ٨٧٠، ٩٦٠، ٩٧٠، ١٠٥٠، ١١٣٠، ١١٨٠

الوسيط = ٩٧٠

ج)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})^2}{\sum_{i=1}^n 1}}$$

القيمة s_i	$s_i - \bar{s}$	$(s_i - \bar{s})^2$
١٠٥٠	٧٠	٤٩٠٠
٩١٠	٧٠-	٤٩٠٠
١٠٠٠	٢٠	٤٠٠
١٠٣٠	٥٠	٢٥٠٠
٩٤٠	٤٠-	١٦٠٠
٩٦٠	٢٠-	٤٠٠
٩٧٠	١٠-	١٠٠
المجموع =		١٤٨٠٠

الانحراف المعياري في الإنتاج (أ)

$$\sigma = \sqrt{2114,2867} = 45,98$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})^2}{\sum_{i=1}^n 1}}$$

القيمة s_i	$s_i - \bar{s}$	$(s_i - \bar{s})^2$
١١٣٠	١٥٠	٢٢٥٠٠
٧٠٠	٢٨٠-	٧٨٤٠٠
٩٧٠	١٠-	١٠٠
٩٦٠	٢٠-	٤٠٠
١٠٥٠	٧٠	٤٩٠٠
١١٨٠	٢٠٠	٤٠٠٠٠
٨٧٠	١١٠-	١٢١٠٠
المجموع =		١٥٨٤٠٠

الانحراف المعياري في الإنتاج (ب)

$$\sigma = \sqrt{22628,077} = 150,43$$

نلاحظ أن ع_٣ يساوي ع_٣ تقريباً.
لذا في الإنتاج (ب) التشتت عن المتوسط الحسابي كبير وبالتالي المصاييح الكهربائية في الإنتاج (أ) هي الأفضل.

حاول أن تحل

٢ لتكن (أ)، (ب) مجموعتين من البيانات

(أ): ٢٠، ١٩، ٨، ١٥، ٧، ١٠، ١٢

(ب): ١٩، ١١، ٨، ٩، ١٢، ١٨، ١٤

(أ) أوجد المتوسط الحسابي \bar{x} لقيم (أ) والمتوسط الحسابي \bar{y} لقيم (ب). ماذا تلاحظ؟

(ب) أوجد وسيط قيم المجموعة (أ)، ثم وسيط قيم المجموعة (ب). ماذا تلاحظ؟

(ج) أوجد الانحراف المعياري σ لقيم المجموعة (أ) والانحراف المعياري σ لقيم المجموعة (ب). أي القيم أقل تشتتاً عن متوسطها الحسابي؟ اشرح إجابتك.

ملاحظة: لحساب التباين لقيم بيانات في جدول تكراري ذو فئات نعتبر \bar{x} هي مركز الفئة.

مثال (٣)

يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لدرجات ٦٠ طالباً في امتحان نهاية العام الدراسي حيث النهاية العظمى ١٠٠ درجة.

الفئة (درجات)	-٨٠	-٦٠	-٤٠	-٢٠	-٠
التكرار	١٠	٢٤	١٦	٦	٤
مركز الفئة	٩٠	٧٠	٥٠	٣٠	١٠

أوجد المتوسط الحسابي \bar{x} والتباين σ^2 والانحراف المعياري σ لقيم هذه البيانات.

الحل:

المتوسط الحسابي:

$$\bar{س} = \frac{(90 \times 10) + (70 \times 24) + (50 \times 16) + (30 \times 6) + (10 \times 4)}{10 + 24 + 16 + 6 + 4}$$

$$\bar{س} = 60$$

$$\text{التباين} = \bar{ع} = \frac{^2(60 - 90)10 + ^2(60 - 70)24 + ^2(60 - 50)16 + ^2(60 - 30)6 + ^2(60 - 10)4}{10 + 24 + 16 + 6 + 4}$$

$$\frac{28400}{60} = \frac{9000 + 2400 + 1600 + 5400 + 10000}{60} =$$

$$473,3 =$$

$$\text{الانحراف المعياري} = \bar{ع} = \sqrt{473,3} = \sqrt{21,756} \approx 4,66$$

حاول أن تحل

٣ بيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لأوزان ١٠٠ طالب ثانوي (الوزن بالكيلوجرام).

٧٦	-٧٢	-٦٨	-٦٤	-٦٠	الفئة
٨	٢٧	٤٢	١٨	٥	التكرار
٧٨	٧٤	٧٠	٦٦	٦٢	مركز الفئة

أوجد المتوسط الحسابي $\bar{س}$ والانحراف المعياري $\bar{ع}$ لهذه الأوزان.

مثال (٤)

إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة قيم من بيانات هو $\sigma = 6$ وأن مجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي هو 540 ، فما عدد قيم هذه البيانات؟

الحل:

$$\text{نأخذ القاعدة: } \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$\text{وبالتعويض: } 6^2 = \frac{540}{n}$$

$$n = \frac{540}{36} = 15$$

عدد قيم هذه البيانات هو 15 .

حاول أن تحل

٤ الانحراف المعياري لمجموعة قيم من بيانات هو $\sigma = 4$ ، ومجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي هو 480 . فما عدد قيم هذه البيانات؟

طرق العد Methods of Counting

سوف تتعلم

- حل مسائل باستخدام مبدأ العد
- حل مسائل باستخدام قوانين التباديل أو التوافق

يقوم خالد برمي حجرين نرد معًا مرة واحدة. الأول لونه أحمر والثاني لونه أخضر. انظر الشكل أدناه.



١ مم يتألف كل ناتج؟

ب اكتب كل عناصر فضاء العينة في قائمة.

ج ما عدد النواتج الممكنة؟

د ما النواتج التي تشكل الحدث «رمي حجرين نرد معًا بحيث يكون مجموع العددين الظاهرين يساوي ٩»؟

كلنا نعرف كيف نعد، ولكننا سنتعرف في هذا الدرس على طرق للعد أكثر تطورًا. مبدأ العد هو في صلب الجبر المتقطع، وسنستفيد منه عند دراسة الاحتمال. العديد من المسائل البسيطة أو المعقدة تتطلب تحديد عدد عناصر مجموعة أو الطرق التي يمكن بها ترتيب أشياء أو تجميعها.

Counting Principle

مبدأ العد

يمكن أن نحل بعض مسائل العد عن طريق ترتيب المجموعة التي سوف نقوم بعدها. وسوف نبدأ بمثالين يتبعان هذه الطريقة.

مثال (١) العد عن طريق القوائم

ما عدد الرموز ثلاثية الحروف التي يمكن تكوينها من بين الحروف: أ، ب، ج، د من دون تكرار لأي حرف منها؟
الحل:

اكتب قائمة بالإمكانات بشكل مرتب (متوال بحسب الترتيب):

أ ب ج	أ ب د	أ ج ب	أ ج د	أ د ب	أ د ج	(أ أولاً)
ب أ ج	ب أ د	ب ج أ	ب ج د	ب د أ	ب د ج	(ب أولاً)
ج أ ب	ج أ د	ج ب أ	ج ب د	ج د أ	ج د ب	(ج أولاً)
د أ ب	د أ ج	د ب أ	د ب ج	د ج أ	د ج ب	(د أولاً)

يوجد $4 \times 6 = 24$ إمكانية. يمكن كتابة ٢٤ رمزًا.

حاول أن تحل

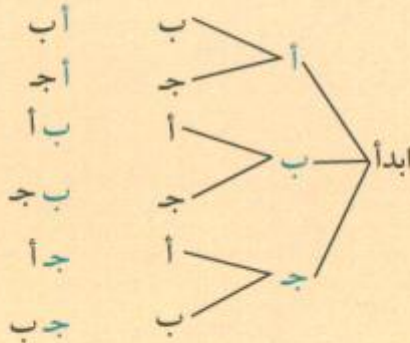
١ ما عدد الرموز التي يمكن تكوينها من حروف "نواف" من دون تكرار لأي حرف منها شرط ألا يبدأ الرمز بـ "أ"؟

إذا كان عدد الإمكانات صغيرًا بما يكفي، فإن الشجرة البيانية يمكن أن تساعد في تنظيم مهمة العد.

مثال (٢) الشجرة البيانية

في تجربة على سلوك الحيوان، استخدم علماء النفس نوعين من الأطعمة على التوالي كمكافأة، كل مكافأة عبارة عن واحدة من ثلاثة أنواع ممكنة. كم عدد التشكيلات المختلفة الممكنة في حال كانت أنواع الجوائز غير مكررة؟

الحل:



يتميز بين الأنواع الثلاثة من الجوائز كالتالي: أ، ب، ج.

الشجرة البيانية إلى اليسار توضح كل الإمكانات. كل طريق عبر الشجرة البيانية بالاتجاه من اليمين إلى اليسار تمثل تنبؤًا ممكنًا للجائزة، ولأن هناك ست طرق لذلك سيكون لدينا ست تشكيلات ممكنة.

لاحظ أن: $6 = 2 \times 3$.

حاول أن تحل

٢ يقدم أحد المطاعم وجبة غداء مؤلفة من: سلطة أو حساء، دجاج أو سمك أو لحم، حلويات أو فاكهة. استخدم الشجرة البيانية لإعطاء عدد الوجبات الممكنة.

يصبح استخدام مخطط الشجرة البياني غير عملي في حال كانت مجموعة الإمكانات الجاري عدّها كبيرة. في مثل هذه الحالات تستخدم طريقة الضرب التي تمت نمذجتها بالعد على الشجرة البيانية.

Counting Principle

مبدأ العد

إذا كان لدينا عملية مركبة مع تتكون من عدة عمليات متتالية عددها n وهي:

ع_١، ع_٢، ع_٣، ع_٤، ع_٥، ... ع _{n} وإذا كانت:

ع_١ يمكن أن تحدث بـ r_1 طريقة،

ع_٢ يمكن أن تحدث بـ r_2 طريقة،

:

ع _{n} يمكن أن تحدث بـ r_n طريقة،

فإن عدد الطرق التي يمكن أن يحدث بها الإجراء ط هي:

$$r_1 \times r_2 \times \dots \times r_n$$

إن مفتاح حل مسائل مبدأ العد هو أن نحدد المراحل ع_١، ع_٢، ع_٣، ... ع _{n} . وبمجرد تعريفها، يتم تحديد عدد مرات حدوث كل منها، ومن ثم ضرب هذه الأعداد للحصول على عدد الطرق الممكنة لحل المسألة.

مثال (٣) استخدام مبدأ العد

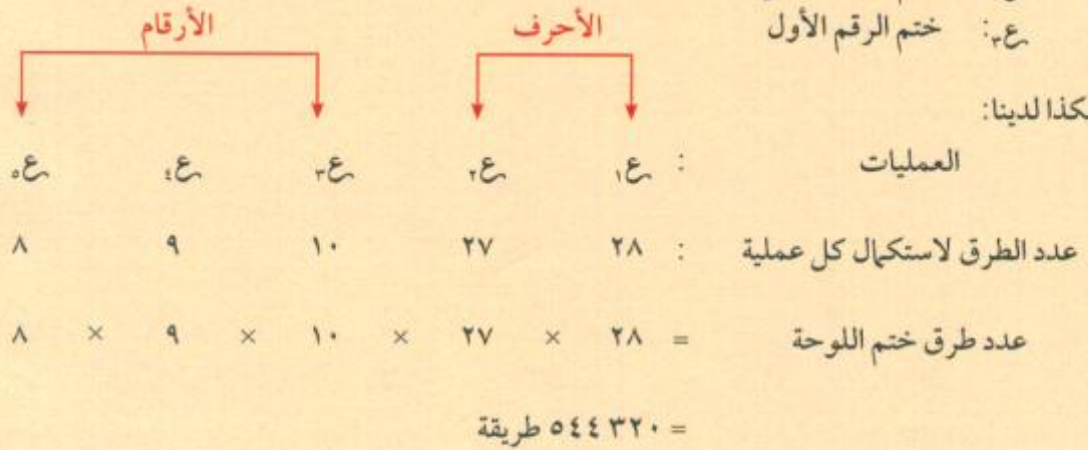
تبدأ لوحات السيارات في إحدى المدن بحرفين من الحروف الأبجدية يتبعهما ثلاثة أرقام. كم عدد اللوحات التي يمكن الحصول عليها؟ افترض أنه لا يوجد تكرار لأي من الحروف أو الأرقام في أي من لوحات التراخيص.

الحل:

جك ٥٦٠

- ع: ختم اللوحة
- ١ع: ختم الحرف الأول
- ٢ع: ختم الحرف الثاني
- ٣ع: ختم الرقم الأول

وهكذا لدينا:



يمكن الحصول على ٥٤٤٣٢٠ لوحة في هذه المدينة.

حاول أن تحل

٣ استخدم معطيات المثال (٣)، ما هو عدد اللوحات التي يمكن الحصول عليها إذا كان رقم الأحاد فردي؟

مثال (٤) استخدام مبدأ العد

يوجد ثمانية متسابقين في سباق ١٠٠ م جري. ما هو عدد النتائج الممكنة لهذا السباق؟ افترض عدم وجود تعادل بين أي متسابقين. علماً بأن المتسابقين وصل كلاً منهم إلى خط النهاية.

الحل:

- ع: قائمة العدائين بترتيب إنهاء السباق.
- ١ع: المتسابق الذي ينهي السباق أولاً.
- ٢ع: المتسابق الذي ترتيبه الثاني في إنهاء السباق.

وهكذا لدينا:

العمليات : $١ع, ٢ع, ٣ع, ٤ع, ٥ع, ٦ع, ٧ع, ٨ع$

عدد الطرق لاستكمال كل عملية : $١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦, ٧, ٨$

عدد الطرق لإجراء ع = $١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦ \times ٧ \times ٨$

$$٤٠٣٢٠ = !٨ =$$

تذكر

مضروب ن أون! هو: $١ \times ٢ \times ٣ \times \dots \times (١-ن) \times ن$

فمثلاً: $١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ = !٥$

$١ = !٠$ تُقرأ مضروب صفر = ١

يوجد ٤٠٣٢٠ ناتجًا ممكنًا لهذا السباق.

حاول أن تحل

٤ اشترك ٢٠ جملًا في سباق للهجن ووصلت جميعها إلى خط النهاية في أوقات مختلفة (أي أنه لا يوجد أي تعادل). ما هو عدد النتائج الممكنة لهذا السباق؟

Permutations

التباديل

في المثالين السابقين، كان الترتيب مهمًا ومعتمدًا. مثل هذا الترتيب يسمى **بالتباديل**. وعمومًا عدد تباديل ن من الأشياء هو ن! (مضروب ن) كما هو مبين في المثال (٤) وفي حالة العديد من المواقف التي تتعامل مع تباديل الأشياء تهتم فقط بمجموعة جزئية من الأشياء المتضمنة. المثال (٥) يختبر موقفًا مشابهًا.

مثال (٥) إيجاد عدد التباديل

افترض أن ٣١ عضوًا من جمعية الرياضيات في مدرستك يريدون اختيار أربعة أشخاص لأربعة مناصب: رئيس، نائب رئيس، أمين السر، أمين الصندوق. حدّد كم طريقة يمكن بها الاختيار لهذه المناصب.

الحل:

اختيار الرئيس: ٣١ طريقة

اختيار نائب الرئيس: ٣٠ طريقة

اختيار أمين السر: ٢٩ طريقة

اختيار أمين الصندوق: ٢٨ طريقة

عدد الطرق التي يمكن بها اختيار الأشخاص للمناصب الأربعة هو: $٣١ \times ٣٠ \times ٢٩ \times ٢٨ = ٧٥٥١٦٠$

حاول أن تحل

٥ في إحدى الجمعيات الخيرية يوجد ٢٠ عضوًا يشكلون مجلس الأمناء. يريدون اختيار رئيسًا، أمينًا للسر، أمينًا للصندوق. حدّد كم طريقة يمكن بها الاختيار لهذه المناصب.

قانون التباديل Law of Permutations

عدد تباديل n من العناصر المختلفة مأخوذة منها r في كل مرة هو:

$${}^n P_r = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)(n-2)\dots(1+r-n), \quad r \leq n, \quad r, n \in \mathbb{N}$$

عندما $r = n$ يعرف ${}^n P_n = 1$

$${}^n P_1 = n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (2-n) \times (1-n)$$

ر عامل

$${}^n P_r = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (r-n)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (r-n)} \times \underbrace{(1+r-n) \times \dots \times (2-n) \times (1-n)}_{r \text{ عوامل}} = \frac{n!}{(n-r)!}$$



مساعدة

يمكن استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد عدد التباديل، اضغط على **nPr**.

قانون

$${}^n P_r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad \text{حيث } r \leq n, \quad r, n \in \mathbb{N}, \quad n! = 1$$

مثال (٦)

أوجد قيمة كل تبديل بدون استخدام الآلة الحاسبة بصورة مباشرة.

أ ${}^6 P_2$ ب ${}^{11} P_3$ ج ${}^6 P_6$

الحل:

أ الطريقة الأولى:

$${}^6 P_2 = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 3 \times 5 = 15$$

$${}^6 P_2 = 3 \times 4 \times 5 \times 6 = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}{1 \times 2} = 3 \times 5 \times 6 = 90$$

الطريقة الثانية:

$${}^6 P_2 = 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 360$$

نبدأ ب 6
4 أعداد

$${}^{11} P_3 = \frac{11!}{(11-3)!} = \frac{11!}{8!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8} = 9 \times 10 \times 11 = 990$$

$${}^6 P_6 = \frac{6!}{(6-6)!} = \frac{6!}{0!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}{1} = 720$$



طرق حساب nCr

$$6 \text{ shift } nPr 4 = 360$$

$$6! \div (6 - 4)! = 360$$

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

حاول أن تحل

٦ أوجد قيمة كل تبديل بدون استخدام الآلة الحاسبة بصورة مباشرة.

أ nCr ب nPr ج $n!$

مثال (٧)

ما عدد الكلمات التي يمكن أن تتشكل من خمسة حروف مختلفة من الأبجدية العربية وذلك في حال عدم تكرار أي منها؟
الحل:

المطلوب في المسألة إيجاد عدد التباديل لـ ٥ حروف من ٢٨ حرفاً في الوقت نفسه.

مساعدة

ترتيب الحروف مهم في كتابة الكلمات. فكلما كتابت تختلف عن كلمة كاتب.

$$24 \times 25 \times 26 \times 27 \times 28 = \frac{!28}{!23} = \frac{!28}{!(5 - 28)} = {}^{28}P_5$$

$$= 11793600$$

يوجد ١١٧٩٣٦٠٠ كلمة مكونة من خمسة حروف مختلفة من الأبجدية العربية.

حاول أن تحل

٧ ما عدد الأعداد التي يمكن أن تتشكل من ٤ أرقام من أرقام النظام العشري بدون الصفر وذلك في حال عدم تكرار أي رقم؟

Combinations

التوافيق

عندما تريد إيجاد عدد المجموعات الجزئية والمكون كل منها من ر عنصر، والتي يمكن اختيارها من مجموعة مكونة من ن عنصر ($r \leq n$) دون الاعتماد على الترتيب فنحن نحسب التوافيق.

مثال (٨)

ما عدد اللجان المكونة من ثلاثة أشخاص، والتي يمكن تكوينها من مجموعة من أربعة أشخاص؟

الحل:

سَمَّ الأشخاص الأربعة أ، ب، ج، د ثم قم بإعداد قائمة كتلك الموجودة في المثال (١) وذلك كالتالي:
(لاحظ أن هناك $n! = 24$ ترتيباً ممكنًا لاختيار ثلاثة منها).

أ ب ج	أ ب د	أ ب ج د	أ ب ج د	أ ب ج د	أ ب ج د
ب أ ج	ب أ د	ب ج د	ب ج أ	ب ج د	ب ج د
ج أ ب	ج أ د	ج ب د	ج ب أ	ج ب د	ج ب د
د أ ب	د أ ج	د ب ج	د ب أ	د ب ج	د ب ج

لاحظ أن لجنة معينة مكونة من ثلاثة أشخاص أ، ب، ج تظهر $13 = 6$ مرات في القائمة.

أ ب ج أ ب د أ ب ج د أ ب ج د أ ب ج د أ ب ج د
تشكل هذه الترتيبات الستة مجموعة واحدة لذلك فإن إجمالي أعداد اللجان مساو لـ 6 ترتيبًا ممكنًا مقسمًا على 13 ترتيبًا مختلفًا لكل لجنة.

$$\text{عدد اللجان} = \frac{6!}{13} = \frac{720}{13} = 55 \frac{5}{13}$$

حاول أن تحل

٨ ما عدد اللجان المكونة من شخصين والتي يمكن تكوينها من مجموعة من أربعة أشخاص؟

وبصفة عامة، عدد التوافيق المكوّن كل منها من r عنصر والمختارة من بين مجموعة مكونة من n عنصر يمكن إيجادها كالآتي:

$$\text{عدد التوافيق} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

تعريف: قانون التوافيق

إذا كان n ، r عددان صحيحان موجبان حيث $n \geq r$ ، فإن:

عدد التوافيق المكونة كل منها من r من الأشياء والمختارة من بين n من الأشياء هو:

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

ملاحظات:

$$(1) \text{ عندما } r = 0 \text{ يُعرَّف } \binom{n}{0} = 1$$

$$(2) \binom{n}{n} = 1$$

ملاحظة

يستخدم الرمز $\binom{n}{r}$ للتعبير عن عدد التوافيق.

مثال (٩)

إذا كان فريق كرة سلة يتكوّن من ١٢ لاعبًا. فما عدد الفرق المختلفة التي يمكن تكوينها من خمسة لاعبين من بين لاعبي هذا الفريق (يمكن لأي لاعب اللعب في كل المراكز)؟

الحل:

يجب أن نوجد ${}_{12}^5$ وهي عدد الفرق المختلفة المكونة من ٥ لاعبين والذين يمكن اختيارهم من ١٢ لاعبًا.

$$792 = 5 \text{ nCr } \text{shift} \text{ 12} \text{ عند استخدام الآلة الحاسبة } 792 = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = \frac{112}{(5-12)!5} = {}_{12}^5$$

يوجد ٧٩٢ فريقًا مختلفًا، كل فريق مكون من ٥ لاعبين وتم اختيارهم من بين ١٢ لاعبًا.

حاول أن تحل

٩ إذا كان فريق كرة قدم يتكوّن من ٢٠ لاعبًا. فما عدد الفرق المختلفة التي يمكن تكوينها من ١١ لاعبًا من بين لاعبي هذا الفريق؟ (يمكن لأي لاعب اللعب في أي مركز)



تستخدم الخطوات التالية لإيجاد التوافق بواسطة الآلة الحاسبة:

ن = 5 nCr 12

تستطيع العديد من الآلات الحاسبة أن تحسب ${}_{12}^5$ مباشرة من دون ضرورة لإيضاح الخطوات الوسيطة. وعلى الرغم من ذلك فنحن نوضحها هنا لأنها قد تساعدك في بعض الأحيان التي تكون فيها الأعداد كبيرة بحيث يصعب أن تعطي إجابة دون استخدام الآلة الحاسبة. وفي حالة الأعداد الكبيرة جدًا قد لا تساعدك بعض الآلات الحاسبة مثل ${}_{12}^5$. فطبق القانون.

مثال (١٠)

من أجل اختيار لوائح المرشحين للانتخابات النيابية، يجب اختيار ١٠ مرشحين من بين ٥١ مرشحًا. ما عدد اللوائح المختلفة التي يمكن تكوينها؟

الحل:

إن الترتيب أثناء اختيار اللائحة غير مطلوب، إذا هذه مسألة تتعلق بالتوافق لإيجاد ${}_{51}^{10}$.

$$1,2777711870 \cdot 10^{10} = 10 \text{ nCr } 51 \text{ عند استخدام الآلة الحاسبة } 12777711870 = \frac{51!}{10! \times 41!} = {}_{51}^{10}$$

عدد اللوائح المختلفة الممكنة هو ١٢٧٧٧٧١١٨٧٠

حاول أن تحل

١٠ أثناء الإعداد لزيارة المتحف الوطني، أراد منظمو الزيارة إعداد لوائح للطلاب لاستخدام حافلات تتسع كل منها ١٥ طالبًا. علمًا بأن عدد الطلاب هو ٦٠ طالبًا، فما عدد اللوائح المختلفة التي يمكن إعدادها لهذه الزيارة؟

مثال (١١)

في كل مما يلي حدّد ما إذا كان المثال يبيّن تبديلًا أو توفيقًا واحسب عدد الطرق في كل حالة.

- أ اختيار رئيس، نائب رئيس، أمين سر من بين ٢٥ عضوًا في نادي القراءة.
- ب اختيار ٥ حبات بطاطا من كيس يحتوي على ١٢ حبة لإعداد وجبة غذائية.
- ج وضع معلم مخططًا يبيّن مقاعد ٢٢ طالبًا في غرفة بها ٢٥ مقعدًا.
- د اختيار ٤ أبيات من قصيدة شعرية مكونة من ١١ بيتًا لكتابتها وتعليقها في غرفة الفصل.

الحل:

- أ الترتيب مهم في الاختيار. ∴ تبادل. ${}^25P_4 = 13800$
- ب الترتيب غير مهم في الاختيار. ∴ توفيق. ${}^{12}C_5 = 792$
- ج الترتيب مهم. ∴ تبادل. ${}^{25}P_{22} \approx 2,5852 \times 10^{24}$
- د الترتيب غير مهم. ∴ توفيق. ${}^{11}C_4 = 330$

حاول أن تحل

١١ في ما يلي، حدّد ما إذا كان المثال يبيّن تبديلًا أو توفيقًا.

- أ اختيار ٣ طلاب من الصف العاشر للمشاركة في مسابقة تلاوة القرآن.
- ب مراكز المشاركين الثلاثة في مسابقة تلاوة القرآن.

الاحتمال المشروط Conditional Probability

دعنا نفكر ونتناقش

سوف نتعلم

- الحدث المستقل
- الحدث التابع
- الاحتمال المشروط



تتألف لعبة الدومينو من بلاطات على شكل متوازي مستطيلات، دُونَ على أحد أوجهها نقاط عددها يتراوح من الصفر (فراغ) إلى ٦.

١ كَوْن جدولاً يبيّن الأزواج الممكنة. ما عددها؟

ب ما عدد النواتج المؤلفة من رقمين متساويين؟

٢ تم سحب بلاطة رقمها غير متساويين، ما احتمال أن يكون مجموع الرقمين يساوي ٥؟

٣ سحبت بلاطة رقمها متساويان. ما احتمال أن يكون مجموع الرقمين أصغر من ٥؟

في كل تجربة عشوائية، نهتم أولاً بمعرفة مجموعة النواتج الممكنة والتي تسمى فضاء العينة (ف). كل حدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة.

إذا كانت جميع نواتج التجربة لها فرصة الظهور نفسها فإن احتمال الحدث A هو:

$$P(A) = \frac{\text{عدد نواتج الحدث } A}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة}}$$

$$\text{أي أن: } P(A) = \frac{n(A)}{n(F)}$$

يكتب الاحتمال بصورة كسر عشري أو كسر أو نسبة أو نسبة مئوية.

مثال (١)

في لعبة «رمي حجري نرد منتظمين ومتمايزين» والتجربة هي ملاحظة الوجه العلوي لكل من الحجرين

أ مِمَّ يتألف كل ناتج؟ اكتب فضاء العينة. وما عدد النواتج الممكنة؟

ب مثل فضاء العينة بيانياً.

ج ما احتمال الحدث A : «ظهور عددين مجموعهما يساوي ٤»؟



الحل:

أ يتألف كل ناتج من زوج مرتب (m, n) حيث $1 \leq m \leq 6$ ، $1 \leq n \leq 6$ ، $n \in \mathbb{N}$.

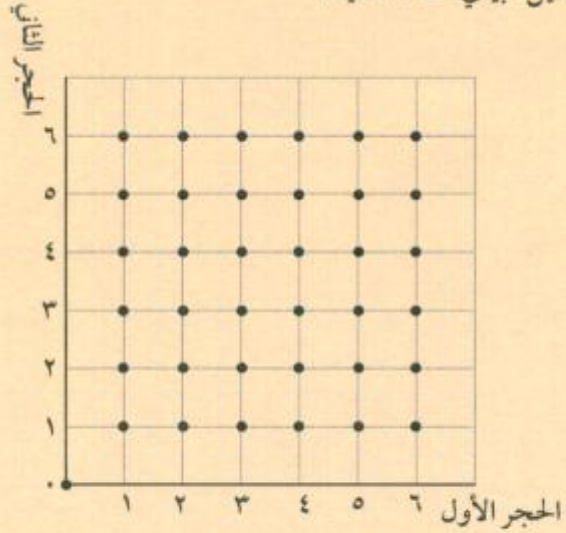
$F = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

$(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2),$

\vdots

$(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6)$

وبتطبيق مبدأ العد، عدد النواتج هو $6 \times 6 = 36$ ناتجًا. وكل هذه النواتج لها فرصة الظهور نفسها.
ب التمثيل البياني لفضاء العينة.



ج يتألف الحدث A من ثلاثة نواتج: $\{(2, 2), (1, 3), (3, 1)\}$.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

حاول أن تحل

- ١ في المثال (١): **أ** ما احتمال الحدث «ب»: «ظهور عددين مجموعهما يساوي ٧»؟
- ب** ما احتمال الحدث «ج»: «ظهور عددين مجموعهما يساوي ١٣»؟
- ج** ما احتمال الحدث «د»: «ظهور عددين أحدهما مربعًا للآخر»؟

ولأن أي حدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة، فإن عدد النواتج في حدث ما يكون دائمًا أصغر من أو يساوي عدد نواتج فضاء العينة. لذلك فإن احتمال وقوع حدث ما، هو عدد ينتمي إلى الفضاء $[0, 1]$.

خواص الاحتمال لحدث ما

ليكن A حدث في فضاء عينة S منته وغير خالٍ فإن:

- ١ $0 \leq P(A) \leq 1$
- ٢ إذا كان $A = \{\}$ إذاً $P(A) = 0$ ويسمى A حدثًا مستحيلًا.
- ٣ إذا كان $A = S$ ف إذاً $P(A) = 1$ ويسمى A حدثًا مؤكدًا.
- ٤ مجموع احتمالات جميع النواتج في فضاء العينة يساوي ١.

معلومة مفيدة

فضاء العينة، في تجربة رمي حجر نرد منتظمين ومتمايزين هو نفسه فضاء العينة في تجربة رمي حجر نرد مرتين متتاليتين.

مثال (٢)

في تجربة رمي حجرى نرد متمايزين معًا وملاحظة الوجه العلوي لكل منهما، الحدث A هو «مجموع العددين الظاهريين هو ١٣». فما احتمال وقوع الحدث A ؟

الحل:

نعلم أن عدد النواتج الممكنة هو ٣٦

وبما أن أكبر عدد هو ٦ في كل حجر فإن المجموع ١٣ لا يمكن أن يحصل

بالتالي فإن عدد النواتج في الحدث A هو صفر إذ $L(A) = 0$

وهذا الحدث هو حدث مستحيل.

ملاحظة

إذا لم يذكر نوع حجر النرد فهذا يعني أنه منتظم.

حاول أن تحل

٢ في تجربة رمي حجرى نرد متمايزين معًا وملاحظة الوجه العلوي لكل منهما، كان الحدث B «الحصول على مجموع أصغر من ١٣»، فما احتمال وقوع الحدث B ؟

في الكثير من الحالات نستخدم التباديل أو التوافيق لإيجاد الاحتمال.

مثال (٣)

اشترى ناصر علبة حلوى تحتوي على ١٢ قطعة بينها ٤ قطع بالشوكولاتة. يريد ناصر أخذ قطعتين من العلبة معًا عشوائيًا. فما احتمال أن يختار قطعتين بالشوكولاتة؟

الحل:

التجربة: اختيار قطعتي حلوى من بين ١٢ قطعة دون اعتماد الترتيب.

$$\therefore \text{عدد نواتج التجربة } N = \binom{12}{2} = \frac{12 \times 11}{1 \times 2} = 66 \text{ ناتجًا.}$$

الحدث A : اختيار قطعتين بالشوكولاتة، دون اعتماد الترتيب

$$\therefore \text{عدد نواتج الحدث } A = \binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{1 \times 2} = 6 \text{ نواتج.}$$

$$\therefore L(A) = \frac{6}{66} = \frac{1}{11} = \frac{N(A)}{N}$$

حاول أن تحل

٣ في المثال (٣)، ما احتمال اختيار قطعتي حلوى عشوائيًا ليستا بالشوكولاتة؟

تساعد النماذج الهندسية أحياناً على فهم المسائل وإيجاد الاحتمالات.

مثال (٤) منطقتين

في إحدى المدارس الثانوية يهتم ٥٤٪ من الطلاب بالأنشطة الكشفية، ٦٢٪ بالرياضة. نصف الذين يهتمون بالأنشطة الكشفية يهتمون أيضاً بالرياضة.

- أ) ما النسبة المئوية للطلاب الذين يهتمون فقط بالرياضة؟
ب) اختير طالب عشوائياً من طلاب هذه المدرسة، فما احتمال ألا يهتم بالرياضة؟

الحل:

لترتيب المعطيات وعرضها نختار مستطيلاً يمثل فضاء العينة (كل طلاب المدرسة) ونرسم داخل المستطيل منطقتين متداخلتين لتمثيل الطلاب الذين يهتمون بالأنشطة الكشفية والطلاب الذين يهتمون بالرياضة. ندون داخل هذه المناطق النسب المئوية كما يلي:

المنطقة المتداخلة (الخضراء) تتضمن نصف الطلاب المهتمين بالأنشطة الكشفية والمهتمين بالرياضة: $0,5 \times 54 = 27\%$
المنطقة الصفراء تتضمن: $27 - 54 = 27\%$
المنطقة الزرقاء تتضمن: $27 - 62 = 35\%$



للمنطقة البيضاء تتضمن: $100 - [27 + 27 + 35] = 11\%$
يمكننا الآن الإجابة عن الأسئلة بقراءة مخطط فن.

- أ) النسبة المئوية للطلاب الذين يهتمون فقط بالرياضة = 35%
ب) احتمال ألا يهتم الطالب بالرياضة = $27\% + 35\% = 62\%$ أو 38%
• حل آخر: $1 - 62 = 38\%$

حاول أن تحل

٤) يقرأ ٨٤٪ من طلاب الصف العاشر كتب مطالعة باللغة العربية، ويقرأ ١٨٪ من طلاب هذا الصف كتباً باللغة الإنكليزية، ويقرأ ١٥٪ من الطلاب كتباً باللغتين. اختير طالب عشوائياً من طلاب هذا الفصل،

- أ) ما احتمال أن يكون ممن يقرأون كتباً باللغة الإنكليزية فقط؟
ب) ما احتمال أن يكون هذا الطالب ممن لا يقرأون كتباً باللغتين معاً؟

العمليات على الأحداث واحتمالاتها:

تقاطع حدثين A ، B هو الحدث الذي يتألف من النواتج الموجودة في A ، B في آن معاً ويرمز إليه بـ $A \cap B$.
اتحاد حدثين A ، B هو الحدث الذي يتألف من النواتج الموجودة في A أو B ويرمز إليه بـ $A \cup B$.
الحدثان A ، B هما متنافيان (Incompatible) إذا لم يشتركا في أي عنصر أي $A \cap B = \emptyset$.
متمم الحدث A هو \bar{A} (complement) الذي يتألف من كل النواتج الموجودة في فضاء العينة وغير الموجودة في A .

قاعدة الاحتمال لاتحاد حدثين:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

قاعدة الاحتمال لمتمم الحدث A :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

قاعدة الاحتمال لحدثين متنافيين:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ إذا كان } A, B \text{ حدثين متنافيين من فضاء العينة ف فإن } P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

مثال (٥)

إذا كان A ، B حدثان في فضاء العينة S وكان:

$$P(A) = 0.7, P(B) = 0.4, P(A \cap B) = 0.2, \text{ أوجد كلاً من:}$$

$$1 \quad P(A \cup B) \quad 2 \quad P(\bar{A})$$

الحل:

$$1 \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0.7 + 0.4 - 0.2 = 0.9$$

$$2 \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$1 - 0.7 = 0.3$$

حاول أن تحل

٥ إذا كان A ، B حدثان في فضاء العينة، وكان $P(A) = 0.3, P(B) = 0.5, P(A \cup B) = 0.6$ أوجد كلاً من:

$$1 \quad P(A \cap B)$$

$$2 \quad P(\bar{B})$$

مثال (٦)

إذا كان A ، B حدثان في فضاء العينة S وكان:

$$P(\bar{A}) = 0,2, P(A \cup B) = 0,9, P(A \cap B) = 0,4, \text{ أوجد } P(\bar{B}).$$

الحل:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \therefore P(A) = 1 - 0,2 = 0,8$$

$$\therefore P(A) = 0,8 = 0,2 - 1 = (P(\bar{A}) - 1) \therefore P(A) = 0,8$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0,9 = 0,8 + P(B) - 0,4$$

$$P(B) = 0,9 - 0,8 + 0,4 = 0,5$$

$$P(B) = 0,5$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,5 = 0,5$$

$$P(\bar{B}) = 0,5 = 1 - 0,5 = 0,5$$

حاول أن تحل

٦ إذا كان A ، B حدثان في فضاء العينة، وكان $P(A) = 0,5, P(B) = 0,6, P(A \cap B) = 0,2$ أوجد احتمال عدم وقوع الحدث A أو الحدث B .

مثال (٧)

يبين الجدول المزدوج التالي توزيعاً للأشخاص العاملين في إحدى المستشفيات:

المهنة \ الجنس	رجل	امرأة	المجموع
طبيب	٢٨	١٤	٤٢
ممرض	٢٠	٢٣٢	٢٥٢
تقني-إداري	٢٢	٣٤	٥٦
المجموع	٧٠	٢٨٠	٣٥٠

تم اختيار شخص عشوائياً من بين ٣٥٠ شخصاً عاملاً في المستشفى .

١ أوجد احتمال كل حدث من الأحداث التالية:

أ: «الشخص ممرض» ب: «الشخص امرأة» ج: «الشخص طبيب»

٢ أوجد ل(ف).

٣ ا) ليكن ه الحدث: «الشخص يكون امرأة وطبيب»، احسب ل(ه) باستخدام الجدول.

ب) اكتب مستخدمًا الحدثين ب، ج الحدث «و»: «الشخص يكون امرأة أو طبيب»، ثم احسب ل(و).

٤ احسب ل(ب ∪ ج).

الحل:

١ اختيار الشخص عشوائيًا يعني أن نواتج التجربة لها فرصة الظهور نفسها ومنها:

$$ل(ف) = \frac{252}{350} = 0,72, ل(ب) = \frac{280}{350} = 0,8, ل(ج) = \frac{42}{350} = 0,12$$

$$٢ ل(\bar{ف}) = 1 - ل(ف) = 1 - 0,72 = 0,28$$

٣ ا) نحسب احتمال الحدث ب ∩ ج، بحسب الجدول الحدث ه = ب ∩ ج لديه ١٤ ناتجًا

$$\text{وبالتالي: ل(ه)} = ل(ب ∩ ج) = \frac{14}{350} = 0,04$$

ب) نحسب احتمال الحدث ب ∪ ج، حيث إن ب، ج ليسا حدثين متنافيين

$$ل(و) = ل(ب ∪ ج) = ل(ب) + ل(ج) - ل(ب ∩ ج)$$

$$= 0,80 + 0,12 - 0,04 = 0,88$$

٤ ا) ج هما حدثان متنافيان إذًا: ل(ب ∪ ج) = ل(ب) + ل(ج) = 0,72 + 0,12 = 0,84

حاول أن تحل

٧ في فضاء عينة ف لدينا حدثان ف، ب متنافيان حيث ل(ف) = 0,4، ل(ب) = 0,5.

ا) احسب ل(ب ∪ ف).

ب) احسب ل(ب ∪ ف).

Independent Events

الأحداث المستقلة

يكون الحدثان مستقلين إذا كان حدوث أحدهما ليس له أي تأثير على حدوث الآخر. فمثلاً، في تجربة عشوائية عند رمي عملة معدنية مرتين وملاحظة الوجه العلوي فإن الحدث «ظهور صورة في الرمية الأولى» لا يؤثر على وقوع الحدث «ظهور صورة في الرمية الثانية»، لأن أي من الرميّتين لا تؤثر على الأخرى بأي طريقة، ولذلك فالحدثان مستقلان. إذا كنا نعلم الاحتمالات الفردية لحدثين مستقلين فإنه يمكننا إيجاد احتمال وقوع الحدثين معاً باستخدام القاعدة التالية:

Multiplication principle of Independent Events

قاعدة الضرب للأحداث المستقلة

إذا كان A ، B حدثان مستقلان فإن احتمال وقوع الحدثين معاً هو:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

معظم الآلات الحاسبة يمكنها إنتاج أعداد عشوائية تقع بين ٠،١. كل عدد عشوائي ينتج يكون مستقلاً عن العدد الآخر السابق له.

مثال (٨)

قام أحد بتطوير قاعدة باستخدام الآلة الحاسبة البيانية لإنتاج أرقام عشوائية من ٠ إلى ٩ (انظر إلى الشكل المقابل). فما احتمال أن يكون الرقم الأول الذي حصل عليه زوجياً وأن يكون الرقم الثاني مضاعفاً لـ ٣؟

الحل:

بما أن الأرقام عشوائية، فإن الناتج الأول لا يؤثر على الناتج الثاني. أي أن الحدثين مستقلين وهما:

ر: «الرقم الناتج يكون زوجياً» $R = \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

م: «الرقم الناتج يكون مضاعفاً لـ ٣» $M = \{3, 6, 9\}$.

ولأن الحدثين مستقلين، لذلك يمكن تطبيق قاعدة الضرب:

$$P(R \cap M) = P(R) \times P(M) = \frac{5}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{15}{100} = 0,15$$

وبالتالي: احتمال أن يكون الرقم الأول زوجياً والرقم الثاني من مضاعفات ٣ هو ٠,١٥.

حاول أن تحل

٨ في تجربة عشوائية عند رمي قطعة نقود ثلاث مرات وملاحظة الوجه العلوي.

ما احتمال أن يكون الناتج (ص، ك، ص)؟

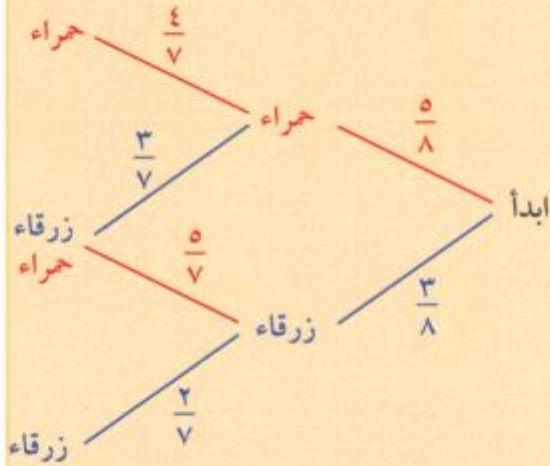
- «int» هي أكبر دالة أعداد صحيحة
 - «rand» هي منتج الأعداد العشوائية بين صفر، ١.
 - «int (١٠ * rand)» تعطي أعداداً بين صفر، ٩.
- مثال: $\text{rand} = 0,817$
 $10 * \text{rand} = 8,17$
 $\text{int}(10 * \text{rand}) = 8$

Dependant Event

الحدث التابع

يكون الحدث تابعاً عندما يتأثر ظهوره بحدث سابق.

مثال (٩) الشجرة البيانية



لدينا ٥ كرات حمراء و٣ كرات زرقاء في كيس. في تجربة عشوائية

سحبت كرتين على التوالي بدون إرجاع.

ما احتمال الحصول على كرتين حمراوتين؟

الحل:

ليكن الحدثان أ: «سحب كرة حمراء أولاً»،

ب: «سحب كرة حمراء ثانياً».

$$ل(أ) = \frac{٥}{٨}$$

دون إعادة الكرة الأولى يصبح لدينا في الكيس ٤ كرات حمراء فقط وفي الكيس هناك ٧ كرات وبالتالي ل(ب) = $\frac{٤}{٧}$.

$$ل(\text{كرتان حمراوتان}) = ل(أ) \times ل(ب) = \frac{٥}{٨} \times \frac{٤}{٧} = \frac{٥}{١٤}$$

حاول أن تحل

٩ تحتوي علبة حلوى على ١٢ قطعة، ٤ منها بنكهة شوكولاتة والباقي بنكهة الحليب.

فما احتمال أخذ قطعة بنكهة شوكولاتة وأكلها، ثم أخذ قطعة بنكهة الحليب؟

Conditional Probability

الاحتمال المشروط

في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة الوجه العلوي له فإن فضاء العينة $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

ليكن الحدث A (ظهور عدد أكبر من 3) فإن $A = \{4, 5, 6\}$ ويكون $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

وليكن الحدث B (ظهور عدد زوجي) فيكون $B = \{2, 4, 6\}$

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

لنسأل الآن: إذا علمنا أن الحدث A قد وقع، فما هو احتمال وقوع الحدث B بشرط وقوع الحدث A . بمعنى آخر ما هو احتمال الحصول على عدد زوجي بشرط أن يكون أكبر من 3؟

نلاحظ أن الشرط المعطى يجعل فضاء العينة الجديد هو $A = \{4, 5, 6\}$ وللحصول على عدد زوجي أكبر من 3 نوجد:

$$P(B \cap A) = \{4, 6\}$$

وبالتالي احتمال الحصول على عدد زوجي بشرط أن يكون أكبر من 3 $P(B|A) = \frac{2}{3}$

احتمال حدوث الحدث B بشرط حدوث الحدث A يسمى بالاحتمال المشروط (الشرطي) ويكتب $P(B|A)$ ويُقرأ احتمال الحدث B بشرط A . ويمكن إيجاد $P(B|A)$ باستخدام القاعدة التالية:

قاعدة الاحتمال المشروط

إذا كان وقوع الحدث B مشروطاً بوقوع الحدث A فإن:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \quad \text{حيث } P(A) \neq 0$$

$$P(B \cap A) = P(A) \times P(B|A)$$

مثال (١٠)

في تجربة عشوائية Ω ، ب حدثان حيث $L(\Omega) = \{0, 3, 6\}$ ، $L(B) = \{0, 2, 6\}$ ، $L(B \cap \Omega) = \{0, 2, 6\}$.
أوجد احتمال كل من الأحداث التالية: **أ** $L(\Omega/B)$ **ب** $L(\Omega/B)$

الحل:

$$\begin{aligned} \text{أ} \quad L(\Omega/B) &= \frac{L(B \cap \Omega)}{L(\Omega)} = \frac{0, 2, 6}{0, 3} = \frac{2}{3} \\ \text{ب} \quad L(\Omega/B) &= \frac{L(B \cap \Omega)}{L(B)} = \frac{0, 2, 6}{0, 2, 6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

حاول أن تحل

١٠ في تجربة عشوائية، إذا كان $L(\Omega) = \{0, 3, 6\}$ ، $L(B) = \{0, 2, 6\}$. أوجد $L(B \cap \Omega)$.

مثال (١١)

رمى جاسم حجر نرد منتظم ولاحظ الوجه العلوي له.
نسمي الحدث ب: «الحصول على عدد أكبر من أو يساوي ٥»، الحدث Ω : «الحصول على عدد فردي».
احسب $L(\Omega/B)$ (احتمال ظهور عدد أكبر من أو يساوي ٥ بشرط أن يكون عددًا فرديًا)

الحل:

$$\begin{aligned} \Omega &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ B &= \{5, 3, 1\} \\ B \cap \Omega &= \{6, 5\} \\ B \cap \Omega &= \{5\} \\ \Omega &= \{6\} \\ \Omega &= \{3\} \\ \Omega &= \{2\} \\ \Omega &= \{1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(\Omega) &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ L(B \cap \Omega) &= \frac{1}{6} \\ L(\Omega/B) &= \frac{L(B \cap \Omega)}{L(\Omega)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

حاول أن تحل

١١ في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم، إذا كان الحدث ب «الحصول على عدد زوجي»، والحدث Ω «الحصول على عدد أولي». فاحسب $L(\Omega/B)$.

ملاحظة: في أي تجربة عشوائية إذا كانت الأحداث متساوية الفرص فإن:

$$L(A/B) = \frac{L(A \cap B)}{L(A)} = \frac{N(A \cap B)}{N(A)}$$

وعليه يمكن حل مثال ١١ السابق كالتالي:

$$L(A/B) = \frac{N(A \cap B)}{N(A)} = \frac{1}{3}$$

مثال (١٢)

يحتوي كيس على أقراص بأشكال أو جهها مختلفة وألوان مختلفة كما هو موضح في الجدول التالي:

المجموع	خضراء	صفراء	حمراء	لون أقراص
١٠٠	٢٠	٣٠	٥٠	دائرية
١٠٠	٣٠	٤٠	٣٠	مربعة
٢٠٠	٥٠	٧٠	٨٠	المجموع

سحب قرص عشوائياً من الكيس ما احتمال أن يكون مربع الشكل إذا علمنا أن لونه أصفر؟

الحل:

ليكن الحدث أ (سحب قرص أصفر اللون)

الحدث ب (سحب قرص مربع الشكل)

$$L(A/B) = \frac{N(A \cap B)}{N(B)} = \frac{40}{70} = \frac{4}{7} = 57\%$$

حاول أن تحل

١٢ سئل طلاب الصف العاشر حول تفضيلهم لإحدى المواد الثلاث:

الرياضيات أو الفيزياء أو الأحياء

يبين الجدول التالي توزيع الإجابات.

المجموع	الأحياء	الفيزياء	الرياضيات	
٥٠	٢٧	١١	١٢	الصف العاشر ١
٥٠	٢٠	١٤	١٦	الصف العاشر ٢
١٠٠	٤٧	٢٥	٢٨	مجموع

اختير طالب عشوائياً من طلاب الصف العاشر. ما احتمال أن يفضل الرياضيات إذا علمنا أنه في الصف العاشر ١؟

المرشد لحل المسائل

مثال (١)

(١) نأخذ البيانات التالية:

(أ): ١٥٠، ١٢٠، ١٠٠، ٩٠، ٨٠، ٧٠، ٥٠، ٤٠، ٢٠، ١٠

(ب): ١٥، ١٢، ١٠، ٩، ٨، ٧، ٥، ٤، ٢، ١

أ كيف نستنتج القيم في بيانات المجموعة (ب) من قيم البيانات في المجموعة (أ)؟

ب أوجد التباين مع لقيم المجموعة (أ) والتباين مع لقيم المجموعة (ب).

ج استنتج العلاقة بين مع ١، مع ٢، مع ٣.

ما الذي أعرفه؟ قيم مجموعتين من البيانات.

ما الذي أريد معرفته؟

الربط بين قيم المجموعة (أ) وقيم المجموعة (ب).

العلاقة بين تباين قيم المجموعة (أ) وتباين قيم المجموعة (ب).

كيف سأحل المسألة؟

(أ) بالنظر إلى قيم البيانات في المجموعة (أ) وقيم البيانات في المجموعة (ب) نلاحظ أن جميع قيم المجموعة (ب) هي قيم

المجموعة (أ) مقسومة على ١٠.

(ب) نكوّن جدولاً لكل من قيم المجموعتين:

جدول (أ)

القيمة s_r	$s_r - \bar{s}$	$(s_r - \bar{s})^2$
١٠	-٦٣	٣٩٦٩
٢٠	-٥٣	٢٨٠٩
٤٠	-٣٣	١٠٨٩
٥٠	-٢٣	٥٢٩
٧٠	-٣	٩
٨٠	٧	٤٩
٩٠	١٧	٢٨٩
١٠٠	٢٧	٧٢٩
١٢٠	٤٧	٢٢٠٩
١٥٠	٧٧	٥٩٢٩
المجموع = ١٧٦١٠		

المتوسط الحسابي $\bar{s} = ٧٣$

$$\bar{s} = \frac{\sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})^2}{n}$$

$$\bar{s} = \frac{١٧٦١٠}{١٠}$$

$$\bar{s} = ١٧٦١$$

القيمة \bar{v}_r	$\bar{v}_r - \bar{v}$	$(\bar{v}_r - \bar{v})^2$
١	-٦,٣	٣٩,٦٩
٢	-٥,٣	٢٨,٠٩
٤	-٣,٣	١٠,٨٩
٥	-٢,٣	٥,٢٩
٧	-٠,٣	٠,٠٩
٨	٠,٧	٠,٤٩
٩	١,٧	٢,٨٩
١٠	٢,٧	٧,٢٩
١٢	٤,٧	٢٢,٠٩
١٥	٧,٧	٥٩,٢٩
المجموع = ١٧٦,١		

جدول (ب)
المتوسط الحسابي $\bar{v} = ٧,٣$

$$\bar{v} = \frac{\sum_{r=1}^n (\bar{v}_r - \bar{v})}{n}$$

$$\bar{v} = \frac{١٧٦,١}{١٠}$$

$$\bar{v} = ١٧,٦١$$

وبالتالي $\bar{v} = ١٠٠ = \bar{v}$ أي $\bar{v} = (١٠) = \bar{v}$
(ج) نستنتج أن $\bar{v} = ١٠ = \bar{v}$

مثال (٢)

بيّنت دراسة إحصائية أن ٢٪ من القطع التي تصنعها إحدى الشركات فيها خلل تقني. لإلغاء هذه القطع وضع اختبار للجودة وكانت نتائجه كالتالي:

يلغي الاختبار إذا كان ٩٨٪ من القطع التي فيها خلل.

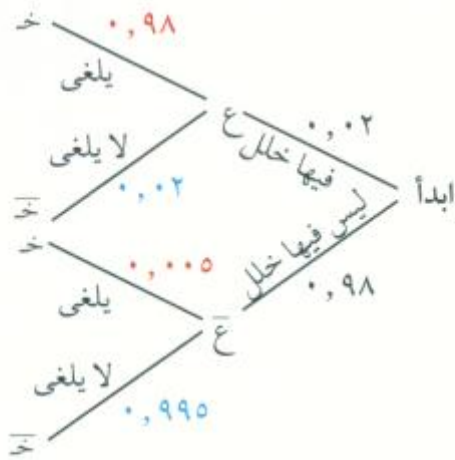
يلغي الاختبار إذا كان ٥,٠٪ من القطع التي ليس فيها خلل.

أخذت عشوائياً قطعة مصنعة في هذه الشركة.

ما احتمال أن يكون فيها خلل علماً أنه لم يلغها اختبار الجودة؟

الحل:

ليكن ع الحدث: «القطعة فيها خلل»، خ الحدث: «اختبار الجودة يلغي القطعة».



أولاً: نرسم شجرة بيانية لتمثيل المعطيات

٢٪ من القطع فيها خلل

∴ ٩٨٪ لا خلل فيها.

يلغى الاختبار ٩٨٪ من القطع فيها خلل

∴ ٢٪ من القطع فيها خلل لا يلغىها.

يلغى الاختبار ٥٪ من القطع التي لا خلل فيها

∴ ٩٩,٥٪ من القطع التي لا خلل فيها لا يلغىها الاختبار.

$$\text{ثانياً: } L(\bar{E} / \bar{X}) = \frac{L(\bar{E} \cap \bar{X})}{L(\bar{X})}$$

تحضيراً للحل نوجد ل(خ)، ثم ل(ع). بالنظر إلى الشجرة البيانية، يلغى الاختبار قطعة ما في حالتين.

$$\therefore L(\bar{X}) = L(\bar{E} \cap \bar{X}) + L(E \cap \bar{X})$$

$$0,0245 = 0,005 \times 0,98 + 0,98 \times 0,02 =$$

$$\therefore L(\bar{X}) = 0,0245 - 0,0049 = 0,9755$$

$$L(\bar{E} \cap \bar{X}) = 0,02 \times 0,98 = 0,0196$$

$$L(\bar{E} / \bar{X}) = \frac{L(\bar{E} \cap \bar{X})}{L(\bar{X})} = \frac{0,0196}{0,9755} = 0,0201$$

احتمال أن يكون في القطعة خلل علماً أنه لم يلغى اختبار الجودة يساوي ٠,٠٢٠١ تقريباً.

مسألة إضافية

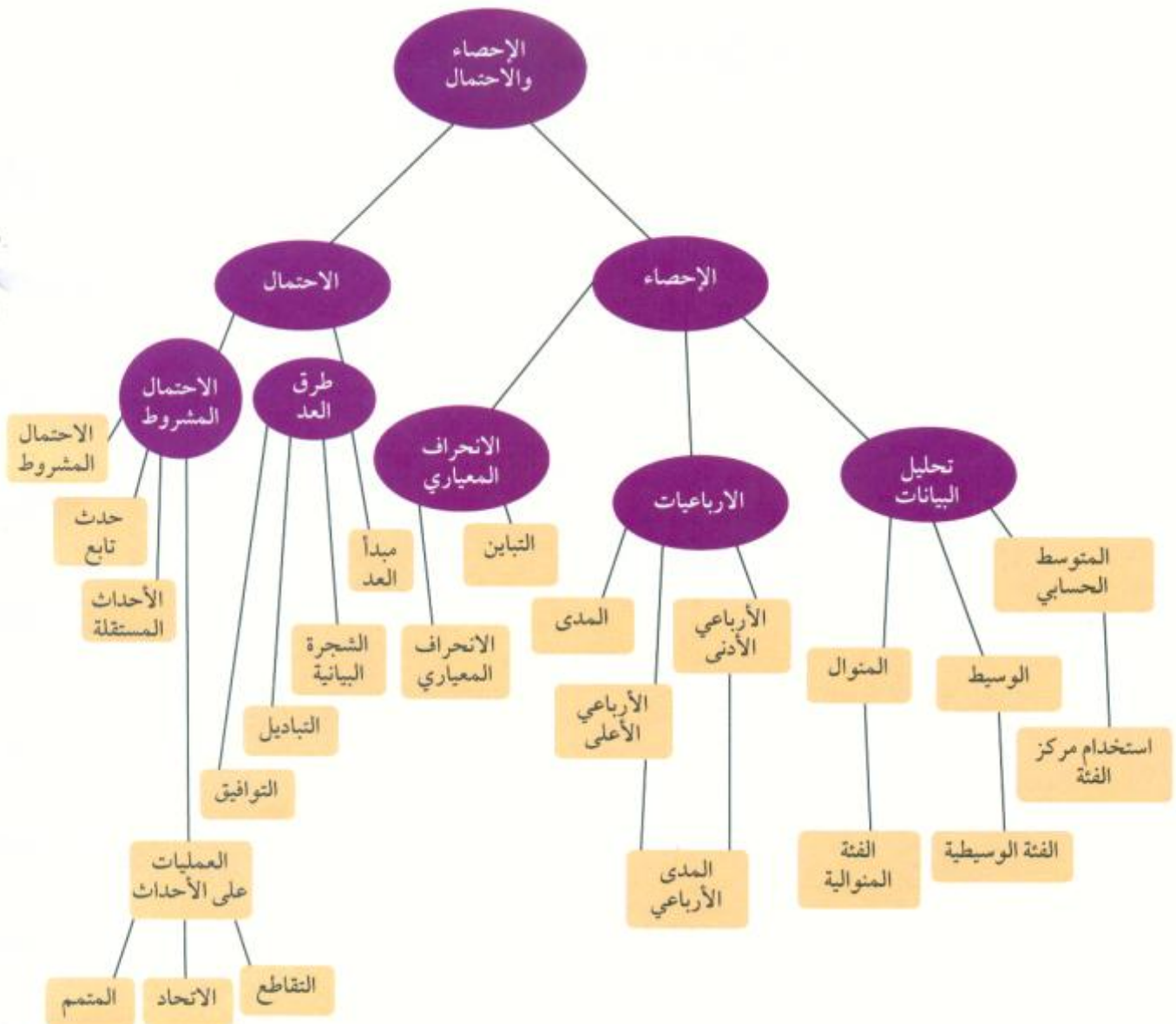
١ آلة مجهزة لتعبئة عبوات بالصابون السائل تحتوي كل منها على ٣١٠ ملييلترات. اظهرت نتائج الكشف على ١٦ عبوة كما يلي:

٢٩٧، ٣١٨، ٣٠٦، ٣٠٠، ٣١١، ٣٠٣، ٢٩١، ٢٩٨، ٣٢٢، ٣٠٧، ٤١٢، ٣٠٠، ٣١٥، ٢٩٦، ٣٠٩، ٣١١.

أ أوجد المتوسط الحسابي لمحتويات هذه العبوات بالملييلتر.

ب أوجد الانحراف المعياري. ماذا تستنتج؟

مخطط تنظيمي للوحدة العاشرة



ملخص

- تستخدم قيم النزعة المركزية لوصف البيانات الإحصائية:

* المتوسط الحسابي هو ناتج قسمة مجموع قيم البيانات على عدد هذه القيم: $\bar{س} = \frac{س_1 + س_2 + \dots + س_n}{ن}$

* الوسيط هو القيمة التي تأتي في المنتصف بعد ترتيب هذه القيم تصاعدياً أو تنازلياً.

* المنوال هو القيمة (القيم) الأكثر تكراراً في البيانات.

* في البيانات حيث التوزيع التكراري على فئات نستخدم مركز الفئة لإيجاد المتوسط الحسابي.

* في البيانات حيث التوزيع التكراري على فئات نستخدم قانون الرافعة:

$$\text{المنوال} = \frac{\text{الحد الأدنى للفئة المنوالية} + \frac{ك_1}{ك_1 + ك_2} \times ف}{ك_1 + ك_2}$$

حيث إن ف = طول الفئة المنوالية،

$ك_1$ = تكرار الفئة السابقة مباشرة للفئة المنوالية،

$ك_2$ = تكرار الفئة اللاحقة مباشرة للفئة المنوالية

* يمكن إيجاد الوسيط باستخدام الرسم البياني حيث تقاطع منحنى المتجمع الصاعد مع منحنى المتجمع النازل.

* يمكن إيجاد المنوال باستخدام المدرج التكراري.

- نستخدم الأرباعيات والمدى والتباين والانحراف المعياري لدراسة تشتت البيانات.

* المدى = القيمة العظمى من البيانات - القيمة الصغرى من البيانات.

* الأرباعي الأدنى = وسيط القيم الأدنى للبيانات أصغر من الوسيط ويعرف بالرمز $ر_1$.

* الأرباعي الأعلى = وسيط القيم الأعلى للبيانات أكبر من الوسيط ويعرف بالرمز $ر_3$.

* يعرف الوسيط للبيانات بالرمز $ر_2$.

* الأعداد الخمسة في البيانات هي: القيمة الصغرى، $ر_1$ ، $ر_2$ ، $ر_3$ ، القيمة العظمى.

* يوضح مخطط الصندوق ذي العارضتين كيفية توزيع القيم الخمس والعلاقة فيما بينها وتشتت قيم البيانات.

$$\text{* التباين هو القيمة من البيانات الناتجة من حساب القاعدة: } ع^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (س_i - \bar{س})^2}{\sum_{i=1}^n ن}$$

* الانحراف المعياري يبين تشتت البيانات عن المتوسط الحسابي لهذه البيانات ويعطى بالقاعدة:

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (س_i - \bar{س})^2}{\sum_{i=1}^n ن}}$$

إذا كبر الانحراف المعياري يكون التشتت كبيراً وبعيداً عن المتوسط الحسابي وإذا صغر الانحراف المعياري يكون التشتت قريباً من المتوسط الحسابي.

* المدى الأرباعي = الأرباعي الأعلى ($ر_3$) - الأرباعي الأدنى ($ر_1$)

- الشجرة البيانية: إذا كان عدد الإمكانيات صغيراً بما يكفي، فإن الشجرة البيانية يمكن أن تساعد في تنظيم مهمة العد.
- التباديل: عندما يكون الترتيب مهماً ومعتمداً يسمى بالتباديل، عامة عدد تباديل من الأشياء هو $n!$ (مضروب n).
- قانون التباديل: إذا كان n ، r عدداً صحيحان غير سالبين بحيث $r \geq n$ ، فإن عدد التباديل المكوّن من أشياء عددها r

$$\frac{n!}{(r-n)!} = {}_r P_n$$

- التوافيق: عندما تريد إيجاد عدد المجموعات الجزئية والمكوّن كل منها من r عنصر، والتي يمكن اختيارها من مجموعة مكوّنة من n عنصر دون اعتماد النظر عن الترتيب فنحن نحسب التوافيق.

- قانون التوافيق: إذا كان n ، r عدداً صحيحان غير سالبين، حيث $r \geq n$ فإن عدد التوافيق المكوّنة كل منها من r من الأشياء والمختارة من بين n من العناصر في الوقت نفسه هو: ${}^n C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

$$\text{احتمال الحدث } A \text{ هو: } P(A) = \frac{\text{عدد النواتج في الحدث}}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة}}$$

- خواص الاحتمال لحدث ما:

ليكن A حدث في فضاء عينة منته وغير خالٍ ف فإن:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- إذا كان $A = \{\}$ إذاً $P(A) = 0$ ، A يسمى الحدث المستحيل.

- إذا كان $A = \Omega$ ف إذاً $P(A) = 1$ ، A يسمى الحدث الأكبر.

- مجموع احتمالات النواتج في فضاء العينة يساوي 1.

- تقاطع حدثين A ، B هو الحدث الذي يتألف من النواتج الموجودة في A وفي B في آن معاً ويرمز إليه بـ $A \cap B$.

- اتحاد حدثين A ، B هو الحدث الذي يتألف من النواتج الموجودة في A أو في B ويرمز إليه بـ $A \cup B$.

- الحدثان A ، B هما متنافيان إذا لم يكن لدهما ناتج مشترك أي $A \cap B = \emptyset$.

- متمم حدث A يرمز إليه بـ A^c وهو الحدث الذي يتألف من كل النواتج الموجودة في فضاء العينة وغير موجودة في A .

- الأحداث المستقلة: يكون حدثان مستقلان إذا كان حدوث أحدهما ليس له تأثير على احتمال حدوث الآخر.

- قاعدة الضرب للأحداث المستقلة:

$$\text{إذا كان } A, B \text{ حدثان مستقلان فإن احتمال وقوع الحدثين معاً هو: } P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

- الحدث التابع: يكون الحدث تابعاً عندما يتأثر ظهور هذا الحدث بحدث سابق.

- الاحتمال المشروط:

ليكن لدينا حدثين A ، B ونفترض أن $P(A) \neq 0$.

احتمال حدوث الحدث B بشرط حدوث الحدث A يسمى الاحتمال المشروط ويكتب $P(B|A)$ ويقرأ

«احتمال الحدث B بشرط A ».

- قاعدة الاحتمال المشروط:

إذا كان حدوث الحدث B مشروطاً بحدوث الحدث A ($P(A) \neq 0$)

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$