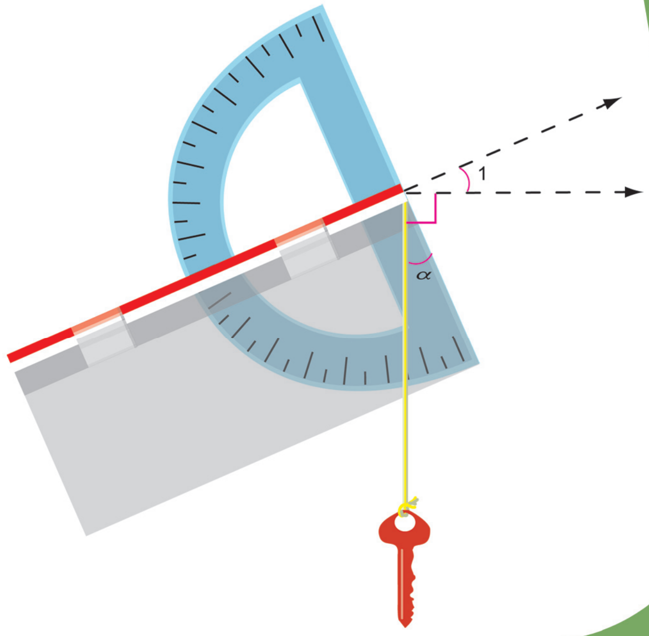
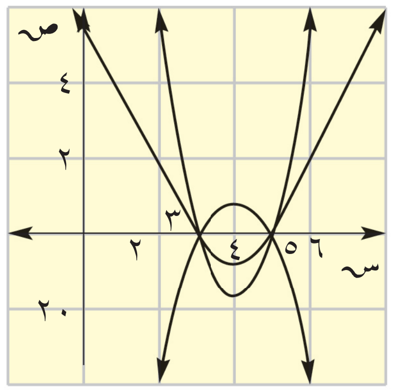
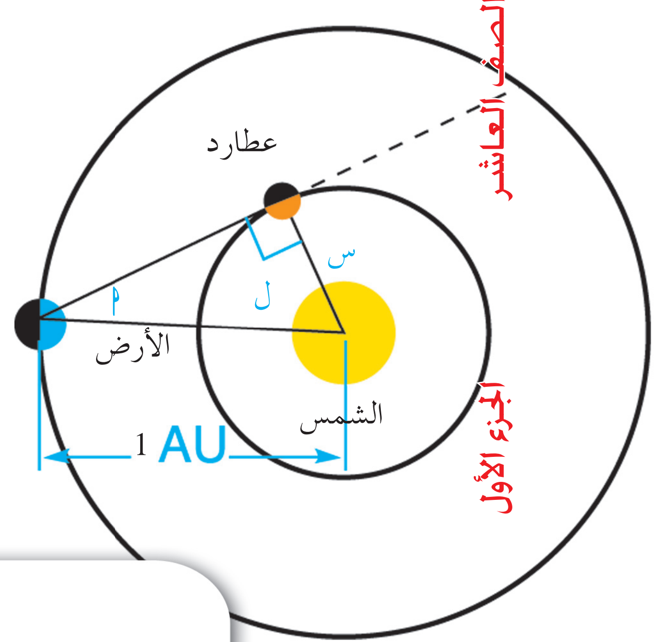
وزارة التربية







كتاب الطالب

الصــفّ العــاشــر ١٠

الفصل الدراسي الأوّل

الرياضيات

الرياضيات

كتاب الطالب

الصف العاشر

الجزء الأول

الطبعة الأولى

تطرح سلسلة الرّياضيّات مواقف حياتيّة يوميّة، وتؤمّن فرص تعلّم كثيرة. فهي تعزّز المهارات الأساسيّة، والحسّ العدديّ، وحلّ المسائل، والجهوزيّة لدراسة الجبر، والهندسة، وتنمّي مهارتَي التّعبير الشّفهيّ والكتابيّ ومهارات التفكير في الرّياضيّات. وهي تتكامل مع الموادّ الدراسيّة الأخرى فتكون جزءًا من ثقافة شاملة متماسكة تحفّز الطلّاب على اختلاف قدراتهم وتشجّعهم على حبّ المعرفة.

تتكوّن السلسلة من:

- كتاب الطالب
- كتاب المعلّم
- كرّاسة التمارين
- كرّاسة التمارين مع الإجابات

PEARSON Scott Foresman

مركز البحوث التربويّة

الرياضيات

الصفّ العاشر
الفصل الدراسي الأول

كتاب الطالب

اللجنة الإشرافية لدراسة ومواءمة سلسلة كتب الرياضيات

الطبعة الأولى

١٤٣٢ - ١٤٣٣ هـ

٢٠١١ - ٢٠١٢ م

فريق عمل دراسة ومواءمة كتب الرياضيات للصف العاشر

دار التَّربَويّون House of Education ش.م.م. وبيرسون إديوكيشن ٢٠١١

الطبعة الأولى ٢٠١١

صاحب السمو الشيخ صباح الأحمد الجابر الصباح

أمير دولة الكويت

سمو الشيخ نواف الأحمد الجابر الصباح

ولي عهد دولة الكويت

مقدمـــــة

في ضوء ما شهدته السنوات الأخيرة من طفرة هائلة في المستحدثات التكنولوجية المرتبطة بمجال التعليم، كان على منظومة التعليم بمستوياتها وعناصرها المختلفة بدولة الكويت أن تتأثر بهذا التطور، فحرصت وزارة التربية على تطوير مناهج العلوم والرياضيات لتصبح قادرة على استيعاب المتغيرات التربوية والعلمية الحديثة.

ولما كان من الضروري أن يعايش المتعلم المعلومات المتدفقة من مصادر تعز عن الحصر، وأن يستعد لأداء دور فاعل في أي موقع من مواقع العمل الوطني، ويصنع مع أقرانه حياة الأمن والعزة والنماء، فيتحقق للوطن المكانة التي يرجوها بين دول العالم.

وكان على النظم التعليمية أن تعيد النظر في المناهج لإعداد الأبناء بالكفايات اللازمة والمهارات المتنوعة المستجيبة لكل تغيير في هذه الحياة.

عندئذ كفل المنهج الجديد تغيير دور المتعلم نتيجة لهذه المستحدثات، ليخرج من حيز المتلقي إلى دائرة المتفاعل الناشط، والمشارك في المواقف التعليمية، عندما يبحث ويقارن ويستنبط ويتعامل بنفسه مع المواد التعليمية، حتى يسهم في تحقيق الاكتفاء الذاتي لوطنه اقتصاديًّا واجتماعيًّا وثقافيًّا، وسد حاجاته من العمالة الوطنية في مختلف المجالات.

لقد أتاح المنهج الجديد للعلوم والرياضيات للمتعلم الارتباط بالبيئة من خلال طبيعة الأنشطة التعليمية، واكتساب الطلاب مهارات التعلم الذاتي وغرس حب المعرفة وتحصيلها استجابة لأهداف المنهج الرئيسية.

ولقد انتظم التغيير أهداف المنهج ومحتواه وأنشطته، وطرائق عرضها وتقديمها وأساليب تقويمها، ضمن مشروع التطوير.

وكان اختيار هذه السلسلة من المناهج بصورة تتماشى مع الاتجاهات التربوية الحديثة في التعليم والتعلم، وتراعي المعايير الدولية في تعليم العلوم والرياضيات.

وإذا كانت هذه السلسلة لم تغفل دور ولي الأمر في عملية التعليم، فإنها ركزت على دور المعلم، حيث يسهّل عملية التعليم، لطلابه ويصمم بيئة التعليم، ويشخص مستويات طلابه، وييسر لهم صعوبات المادة العلمية، فتزداد معايير الجودة التعليمية.

والآن نطرح بين أيديكم هذه المجموعة من كتب العلوم والرياضيات الجديدة التي تتضمن كتابًا للمتعلم وآخر للمعلم، وكراسة للأنشطة، من إعداد ذوي الكفايات العالمية والخبرات المتطورة، أملًا في الوصول إلى الغايات المرجوة من أقرب طريق إن شاء الله.

الوكيل المساعد لقطاع البحوث التربوية والمناهج

أ. مريم محمد الوتيد

المحتَويات

الوحدة الأولى

الأعداد والعمليات عليها
Numbers and Operations

مشروع الوحدة: شراء الأسهم

١ **مقدمة المشروع:** أثناء العمل على هذا المشروع سوف تجمع بيانات عن إحدى الشركات. وتستخدم الصيغ لتحليل البيانات. ثم عليك أن تقرر كيفية تنظيم النتائج وعرضها باستخدام الرسوم البيانية وجداول البرمجة.

٢ **الهدف:** فهم كيف يدرس المحللون الاقتصاديون حركة الأسهم المالية لتحديد أي أسهم يشترون.

٣ **اللوازم:** آلة حاسبة - صحيفة محلية - أوراق رسم بياني.

٤ **أسئلة حول التطبيق:**

أ اختر شركة للبحث. اجمع المعلومات حول المنتجات التي تبيعها الشركة أو الاستشارات التي تقدمها، وتاريخ الشركة والممارسات الإدارية.

ب اطلع على صفحة الأوراق المالية في الصحيفة. اختر أحد الأسهم المتداولة في الأسواق المالية.

ما كان سعر الإغلاق لهذا السهم؟

ما كان أعلى سعر لهذا السهم خلال العام الماضي؟

أنشئ جدولًا يعرض أعلى سعر وأدنى سعر للسهم الواحد لعدة أيّام.

جـ افترض أن لديك ٥٠٠٠ دينار استثمرتها في الأسهم المالية التي اخترتها. يشمل سعر الشراء ثمن السهم زائد ٩,٩٥ دنانير كرسوم في ختام هذا المشروع، بعت الأسهم الخاصة بك. هل حققت ربحًا أم تكبدت خسارة؟ اشرح.

٥ **التقرير:** ضعْ تقريرًا مفصلًا تبين فيه كيف استفدت من خواص نظام الأعداد الحقيقية لتنفيذ المشروع وللإجابة عن الأسئلة.

دروس الوحدة

خواص نظام الأعداد الحقيقية	استخدام الآلة الحاسبة	تقدير الجذر التربيعي	حل المتباينات	القيمة المطلقة
١-١	١-٢	١-٣	١-٤	١-٥
دالة القيمة المطلقة	المستقيمات المتوازية والمتعامدة	حل نظام معادلتين خطيتين	حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد	
١-٦	١-٧	١-٨	١-٩	

الوحدة الأولى

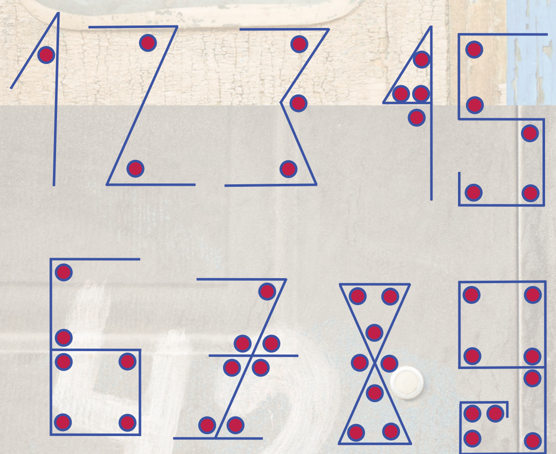
أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعرفت الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية.
- قارنت الأعداد الحقيقية ورتبتها.
- تعرفت القيمة المطلقة.
- استخدمت الأسس للتعبير عن الأعداد الكبيرة والصغيرة.
- تعرفت الجذور التربيعية.
- مثلت الفترات على خط الأعداد.

أضف إلى معلوماتك

يعتمد الغرب الأرقام 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، في كتابة الأعداد وهي تدعى «الأرقام العربية».

يرتبط كل رقم منها بعدد من الزوايا. يبيّن الرسم أدناه هذه العلاقة.



ماذا سوف تتعلم؟

- سوف تتعرف خاصية الكثافة والترتيب والفترات.
- سوف تحل متباينات مستخدمًا الجمع والطرح والضرب والقسمة.
- سوف تحل معادلات ومتباينات تتضمن قيمًا مطلقة.
- سوف ترسم بيانيًّا دوال القيمة المطلقة.
- سوف تتعرف على خصائص المستقيمات المتوازية والمتعامدة.
- سوف تحل أنظمة معادلات خطية.
- سوف تحل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد.

المصطلحات الأساسية

الأعداد النسبية - الأعداد غير النسبية - الخاصية الإبدالية - خاصية التجميع - خاصية التوزيع - المحايد - المعكوس - الفترات - المتباينات - القيمة المطلقة - الانسحاب - الحذف - التعويض - المميز.

١ – ١

خواص نظام الأعداد الحقيقية
Real Numbers System Properties

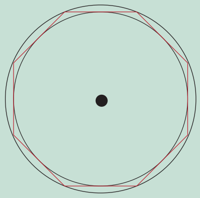
سوف تتعلم
- خاصية الكثافة
- الترتيب
- القيمة المطلقة
- الفترات

يعد أرخميدس (القرن السادس قبل الميلاد) من أعظم علماء الرياضيات وأبو الهندسة، ومن أشهر اكتشافاته طرق حساب المساحات والأحجام.
حدّد قيمة π بدقة عالية $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$

دعنا نفكر ونتناقش

شغل العدد π (النسبة بين طول الدائرة وطول قطرها) الباحثين في الرياضيات لآلاف السنين.

اعتمد أرخميدس على الدائرة المحوطة (الداخلية) والدائرة المحيطة (الخارجية) بمضلع منتظم من ٩٦ ضلعًا للوصول إلى $\frac{٢٢}{٧} > \pi > \frac{٢٢٣}{٧١}$ وتسمى متباينة أرخميدس.



واستخدم الصينيون الكسر $\frac{٣٥٥}{١١٣}$ كقيمة تقريبية لِـ π.

في بداية القرن الثامن عشر اعتمد الرمز اليوناني π.

استخدم آلتك الحاسبة:

١ أوجد ٣ قيم لِـ π مستخدمًا متباينة أرخميدس.

٢ استخدم $\pi = \frac{٤}{١} - \frac{٤}{٣} + \frac{٤}{٥} - \frac{٤}{٧} + \frac{٤}{٩} - \frac{٤}{١١} + \dots$ لإيجاد ٣ قيم لِـ π.

٣ π هو عدد غير نسبي. تنحصر قيمته بين ٣,١٤ ، ٣,١٥.

إعطاء مثال لإحدى القيم: مثلًا: $\pi \simeq$ ٣,١٤١٥٩٢٦.

هل يمكن تحديد عدد القيم التقريبية لِـ π ؟

١ – الأعداد الحقيقية Real Numbers

تعلم أن الأعداد النسبية (ن) يمكن كتابتها في صورة أعداد عشرية أو (كسور عشرية) منتهية مثل ٣,٢٥ ، ٠,٤٨٧ أو بصورة أعداد عشرية دورية (أو كسور عشرية دورية) مثل $\overline{٢,١٦}$ ، $\overline{٣,٠}$ ، ...) وهناك مجموعة أخرى من الأعداد تسمى أعدادًا غير نسبية لا يمكن كتابتها على الصورة $\frac{أ}{ب}$ حيث أ، ب $\in$ ص، ب $\neq$ ٠ مثل $\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٢}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٧}}$ ، ...

وكما الأعداد العشرية التي أرقامها العشرية لا تنتهي ولا تتكرر مثل

$\pi \simeq$ ...٣,١٤١٥٩٢٦٥٣٥٩ فالأرقام العشرية في π لا تنتهي ولا تتكرر.

والأعداد غير النسبية ($\overline{ن}$) من الممكن أن تتضمن كسورًا عشرية ذات نمط في كتابة أرقامها مثل ... ٠,٣٠٣٣٠٣٣٣

اتحاد مجموعتي الأعداد النسبية وغير النسبية يشكل مجموعة تسمى مجموعة الأعداد الحقيقية أي أن ن $\cup$ $\overline{ن}$ = ح.

القراءة في الرياضيات:

$\sqrt{٢}$ هو الجذر التربيعي الموجب للعدد ٢.

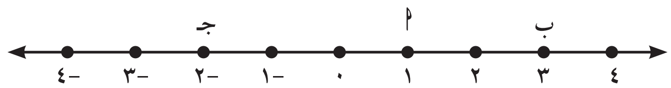
$-\sqrt{٢}$ هو الجذر التربيعي السالب للعدد ٢.

يوضّح المخطط التالي العلاقات بين مجموعات الأعداد.

الأعداد الحقيقية	
الأعداد النسبية	**الأعداد غير النسبية**
أمثلة: $\frac{١}{٣}$ ، ١٤,٠ ، $-٢\frac{١}{٣}$	أمثلة:
الأعداد الصحيحة .... −٢، −١، ٠، ١، ٢، ... **الأعداد الطبيعية (الكلية):** ٠، ١، ٢، ٣، ...	$\sqrt{٣}$ π $\sqrt[٣]{٥}$ ١,٣٤٣٣٤...

تمثّل مجموعة الأعداد الحقيقية بخط الأعداد.

كل عدد حقيقي يمثل بنقطة على هذا الخط.



مثال (١)

سمّ المجموعات التي ينتمي إليها كل من الأعداد:

أ $-\frac{١٨}{٥}$ ب $\sqrt{٤١}$

جـ ٠,٣٣٣... د ١,٠١٠٠١٠٠٠١ ...

الحل:

أ $-\frac{١٨}{٥}$ هو عدد نسبي − عدد حقيقي.

ب $\sqrt{٤١}$ هو عدد غير نسبي − عدد حقيقي.

جـ ٠,٣٣٣... = $٠,\overline{٣}$ = $\frac{١}{٣}$ هو عدد نسبي − عدد حقيقي.

د ١,٠١٠٠١٠٠٠١ ... هو عدد غير نسبي − عدد حقيقي.

حاول أن تحل

١ سم مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل من: $\frac{\sqrt{٤}}{٣}$ ، $١,\overline{٤}$ ، $\pi \times ٥$.

٢ – خواص عمليتي الجمع والضرب على الأعداد الحقيقية

Properties of Addition and Multiplication of Real Numbers

لكل أ، ب، جـ ∈ ح فإن:

الخاصية	الجمع	الضرب
الإبدالية	أ + ب = ب + أ	أ × ب = ب × أ
التجميع	(أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ)	(أ × ب) × جـ = أ × (ب × جـ)
المحايد	أ + ٠ = ٠ + أ = أ	أ × ١ = ١ × أ = أ
المعكوس (النظير)	أ + (–أ) = (–أ) + أ = ٠	أ × $\frac{١}{أ}$ = $\frac{١}{أ}$ × أ = ١ (أ ≠ ٠)
التوزيعية	أ × (ب + جـ) = أ × ب + أ × جـ (ن + جـ) × أ = ن × أ + جـ × أ	

٣ – ترتيب الأعداد الحقيقية

Order of Real Numbers

مجموعة الأعداد الحقيقية هي مجموعة مرتبة، هذا يعني أننا نستطيع مقارنة أي عددين حقيقيين باستخدام رموز علاقات الترتيب (< أو > أو =). والقول أن عددًا ما هو «أصغر من» أو «أكبر من» أو «يساوي» الآخر.

الترتيب وخواصه

Properties of Order

ترتيب الأعداد الحقيقية

ليكن أ، ب عددين حقيقيين

الكتابة بالرموز	التعريف	القراءة
أ > ب	أ – ب موجب	أ أكبر من ب
أ < ب	أ – ب سالب	أ أصغر من ب
أ ≥ ب	أ – ب موجب أو صفر	أ أكبر من أو يساوي ب
أ ≤ ب	أ – ب سالب أو صفر	أ أصغر من أو يساوي ب

حقيقة هامة

لأي عددين حقيقيين أ، ب. تعبير واحد فقط مما يلي هو صحيح:

أ > ب أو أ = ب أو أ < ب

ليكن أ، ب، جـ أعداد حقيقية.

الخاصية	القاعدة	ملاحظة
التعدي	إذا كان أ ≥ ب، ب ≥ جـ فإن أ ≥ جـ	
الجمع	إذا كان أ ≥ ب، فإن أ + جـ ≥ ب + جـ	
الطرح	إذا كان أ ≥ ب، فإن أ − جـ ≥ ب − جـ	
الضرب	إذا كان أ ≥ ب، جـ > ٠، فإن أجـ ≥ ب جـ	
	إذا كان أ ≥ ب، جـ < ٠، فإن أجـ ≤ ب جـ	لاحظ أن علاقة الترتيب تنعكس عندما يكون العدد جـ سالبًا.
القسمة	إذا كان أ ≥ ب، جـ > ٠، فإن $\frac{أ}{جـ} \geq \frac{ب}{جـ}$	
	إذا كان أ ≥ ب، جـ < ٠، فإن $\frac{أ}{جـ} \leq \frac{ب}{جـ}$	لاحظ أن علاقة الترتيب تنعكس عندما يكون العدد جـ سالبًا.

٤ – خاصية الكثافة Density Property

يتسع وعاء لعدد محدد من الحجارة (تبقى فراغات كبيرة). كما أنّه يتسع لعدد أكبر من الحصى الصغيرة (تقل الفراغات) ويمكن ملؤه كذلك بعدد أكبر بكثير من الرمل (تصبح الفراغات نادرة).

وماذا إذا مُلئ الوعاء بأجسام أصغر حجمًا من الرمل؟

كلما صغر الحجم زادت الكثافة.

يمكن تشبيه سعة الوعاء بطول فترة على خط الأعداد.

يوجد بين أي نقطتين مختلفتين على خط الأعداد عدد لا نهائي من النقاط، وبالتالي بين أي عددين حقيقيين مختلفين يوجد عدد لانهائي من الأعداد الحقيقية.

مثال (٢)

أعط خمسة أعداد حقيقية بين ٣,١٤، ٣,١٥.

الحل: تعلم أن ٣,١٤ = ٣,١٤٠، ٣,١٥ = ٣,١٥٠

∴ الأعداد الحقيقية مثل: ٣,١٤١، ٣,١٤٢، ٣,١٤٥٦، ٣,١٤٤٤٨، π.

حاول أن تحل

٢ أعط ستة أعداد حقيقية بين ١,٤١٤، ١,٤١٥.

٥ – الفترات Intervals

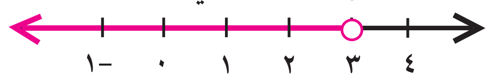
الفترة هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحيقيقية.

لاحظ أن ليس كل مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية تمثل فترة. لماذا؟

يمكن استخدام المتباينات للتعبير عن الفترات في مجموعة الأعداد الحقيقية، وكذلك يمكن تمثيل الفترات على خط الأعداد.

مثلًا: يعبّر عن الفترة: (−∞، ٣) بالمتباينة، س < ٣.

وهي مجموعة الأعداد الحقيقية الأصغر من ٣، وتمثّل بيانيًّا كما يلي:



سوف نميز بين نوعين من الفترات: **الفترات المحدودة والفترات غير المحدودة.**

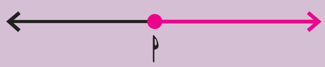
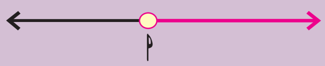
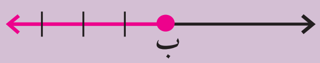
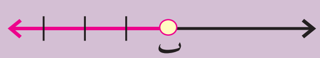
أولًا: الفترات المحدودة

الجدول التالي يوضح أنواع الفترات المحدودة: لتكن أ، ب، أعدادًا حقيقية.

رمز الفترة	نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني
[أ، ب]	مغلقة	أ ≤ س ≤ ب	أ ب
(أ، ب)	مفتوحة	أ < س < ب	أ ب
[أ، ب)	نصف مفتوحة أو نصف مغلقة	أ ≤ س < ب	أ ب
(أ، ب]	نصف مفتوحة أو نصف مغلقة	أ < س ≤ ب	أ ب
الأعداد أ، ب هما نقطتا الحدود لكل فترة حيث أ الحد الأدنى للفترة، ب الحد الأعلى للفترة.			

ثانيا: الفترات غير المحدودة

الجدول التالي يوضح بعض الفترات غير المحدودة: ليكن أ، ب ∋ ح.

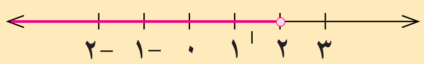
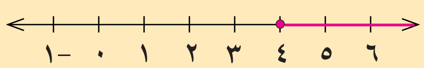
رمز الفترة	نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني
[أ، ∞)	نصف مغلقة وغير محدودة من الأعلى	س ⩾ أ	
(أ، ∞)	مفتوحة وغير محدودة	س > أ	
(−∞، ب]	نصف مغلقة وغير محدودة من الأسفل	س ⩽ ب	
(−∞، ب)	مفتوحة وغير محدودة من الأسفل	س < ب	

مثال (٣)

اكتب نوع الفترة ورمز المتباينة والتمثيل البياني لكل من الفترات التالية:

أ (−١، ٣] ب [٤، ٥] جـ (−∞، ٢) د [٤، +∞)

الحل:

نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني
أ فترة نصف مفتوحة (أو نصف مغلقة)	−١ < س ≤ ٣	
ب فترة مغلقة	٤ ≤ س ≤ ٥	
جـ فترة مفتوحة وغير محدودة من أسفل	س < ٢	
د فترة نصف مغلقة وغير محدودة من أعلى	س ≥ ٤	

حاول أن تحل

٣ حدّد نوع الفترة ورمز المتباينة والتمثيل البياني لكل من الفترات التالية:

أ (−٢، ١) ب (−∞، ٣]

٤ مثل كلًّا مما يلي على خط الأعداد:

أ [٢، ∞) ∪ (−∞، −٣) ب [−١، ∞) ∪ (−∞، −٥]

١ – ٢

استخدام الآلة الحاسبة
Using Calculator

سوف تتعلم

- استخدام الآلة الحاسبة

معلومة رياضية:

البايت = ٨ بت

دعنا نفكر ونتناقش

هناك العديد من الآلات الحاسبة، منها العادية البسيطة للاستخدامات اليومية، ومنها العلمية التي ترسم بيانيًّا الدوال، ومنها الأكثر تطورًا والقابلة للبرمجة. تختلف طرائق استخدام الآلات الحاسبة بين آلة وأخرى وفق البرمجة المعتمدة.

تستخدم الآلة الحاسبة الرقمين ٠، ١ (رقمي نظام العد الثنائي) ويدعى كل منهما «بت» Bit.

تخصص في معظم الآلات الحاسبة شفرة من ٨ أرقام لكل رمز يستخدم وتدعى «بايت» Byte.

يمكن تمثيل $٢^{٨}$ = ٢٥٦ حالة باستخدام هذا النظام.

الرقم ١	١	٠	٠	٠	١	١	١	١
الرقم ٢	٠	١	٠	٠	١	١	١	١
الرقم ٣	١	١	٠	٠	١	١	١	١
الرقم ٤	٠	٠	١	٠	١	١	١	١
الحرف A	١	٠	٠	٠	٠	٠	١	١

عند إدخال رقم أو حرف أو رمز إلى الآلة الحاسبة يترجم فورًا إلى شفرة خاصة به. تجرى العمليات على الشفرات، وبعد الانتهاء تترجم الشفرة إلى الرمز الذي يعبّر عن الناتج ويظهر على شاشة الآلة الحاسبة في الصورة التي نعرفها.

رموز بعض التعليمات	
الرمز	المدلول
CL أو AC	إزالة كل العمليات والنتائج
CE أو C	إزالة آخر عملية
RCL أو MR	استدعاء العدد المخزن في الذاكرة
M^+ أو M^-	إضافة/ طرح من الذاكرة
CN أو MC	إزالة العدد المخزن في الذاكرة
MODE	وضع التشغيل
° ' "	التحويل إلى درجات ودقائق وثواني
S ⇔ D	التحويل بين كسر وكسر عشري

١ – استخدام الآلة الحاسبة

Using Calculator

مثال (١)

أوجد الناتج: $٧٤٣,١٣ + ٩٤١,٠٨ - ٦٤٨,٥٥$.

الحل:

أدخل: $\boxed{743.13}\ \boxed{+}\ \boxed{941.08}\ \boxed{-}\ \boxed{648.55}\ \boxed{=}$ يظهر على الشاشة: $\boxed{1035.66}$

أي أن الناتج = ١٠٣٥,٦٦

حاول أن تحل

١ أوجد ناتج: $٣٤٤٥,١٤ - ٢٣٦٧,٣٢$.

مثال (٢)

أوجد ناتج: $٧\frac{٣}{٤} + ١٣\frac{٥}{٩} - ٢٨\frac{٣}{٨}$.

الحل:

أدخل: $\boxed{7}\ \boxed{a\frac{b}{c}}\ \boxed{3}\ \boxed{a\frac{b}{c}}\ \boxed{4}\ \boxed{+}\ \boxed{13}\ \boxed{a\frac{b}{c}}\ \boxed{5}\ \boxed{a\frac{b}{c}}\ \boxed{9}\ \boxed{-}\ \boxed{28}\ \boxed{a\frac{b}{c}}\ \boxed{3}\ \boxed{a\frac{b}{c}}\ \boxed{8}\ \boxed{=}$

يظهر على الشاشة $\boxed{-7 \lrcorner 5 \lrcorner 72}$ أي أن الناتج = $-٧\frac{٥}{٧٢}$.

حاول أن تحل

٢ أوجد ناتج: $٢٧\frac{٤}{٧} - ١٣\frac{٣}{٨} + ٥\frac{٩}{١٣}$.

مثال (٣)

أوجد ناتج: $٣,٥٤ \times ١٠^{٧} + ٨,٣١ \times ١٠^{٨}$.

الحل:

أدخل: $\boxed{3.54}\ \boxed{\times}\ \boxed{10}\ \boxed{\wedge}\ \boxed{7}\ \boxed{+}\ \boxed{8.31}\ \boxed{\times}\ \boxed{10}\ \boxed{\wedge}\ \boxed{8}\ \boxed{=}$

يظهر على الشاشة: $\boxed{866\ 400\ 000}$ اضغط $\boxed{ENG}$ فيظهر $\boxed{866.4 \times 10^{6}}$

أي $٨٦٦,٤ \times ١٠^{٦}$

حاول أن تحل

٣ أوجد ناتج: $٣,٦٧ \times ١٠^{٥} - ٤,٣٣٨ \times ١٠^{٤}$.

مثال (٤)

أوجد ناتج:

أ $\sqrt[5]{٣٢}$

ب $\frac{٥٦,٤ + ٢}{٣١,٣ \times ٠,٨}$

الحل:

أ اضغط: $\boxed{=}$ $\boxed{32}$ $\boxed{\sqrt[x]{\ }}$ $\boxed{5}$ يظهر على الشاشة $\boxed{2}$ وبالتالي $\sqrt[5]{٣٢} = ٢$

ب اضغط: $\boxed{=}$ $\boxed{)}$ $\boxed{0.8}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{31.3}$ $\boxed{(}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{)}$ $\boxed{2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{56.4}$ $\boxed{(}$

يظهر على الشاشة $\boxed{2.332\ 268\ 371}$ الإجابة: ٢,٣٣٢ تقريبًا

حاول أن تحل

٤ أوجد: أ $\sqrt[4]{٢٤٠١}$ ب $١٣,٨ + \frac{٤}{١,٢ \times ٨,١}$

٢- إيجاد قيمة تقريبية للجذر النوني باستخدام الآلة الحاسبة:

Estimating nth Root Using Calculator

مثال (٥)

أوجد: $\sqrt[5]{٢٢٥}$، مقربًا الناتج إلى أقرب عدد كلي.

الحل:

اضغط: $\boxed{=}$ $\boxed{225}$ $\boxed{\sqrt[x]{\ }}$ $\boxed{5}$

يظهر على الشاشة $\boxed{2.954\ 176\ 939}$ أي أن الناتج = ٣ تقريبًا.

حاول أن تحل

٥ أوجد الناتج مقربًا إلى أقرب عدد كلي: أ $\sqrt[7]{١٢٤٦}$ ب $\sqrt[4]{٥٤٦,١}$

مثال (٦)

أوجد: $\sqrt[3]{\frac{٢١٤}{٢٣}}$ مقربًا الناتج إلى أقرب عدد كلي.

الحل:

اضغط: $\boxed{=}$ $\boxed{)}$ $\boxed{23}$ $\boxed{a\frac{b}{c}}$ $\boxed{214}$ $\boxed{(}$ $\boxed{\sqrt[3]{\ }}$. يظهر على الشاشة $\boxed{2.103\ 271\ 381}$ أي أن الناتج = ٢ تقريبًا.

حاول أن تحل

٦ أوجد: $\sqrt[3]{\frac{٤\ ١٢٤}{٥٧}}$ مقربًا الناتج إلى أقرب عدد كلي.

١ – ٣

تقدير الجذر التربيعي
Estimating Square Root

سوف تتعلم
- تقدير الجذر التربيعي
- استخدام الجذر التربيعي في حل المسائل

دعنا نفكر ونتناقش

لكل عدد حقيقي موجب جذران تربيعيان أحدهما موجب والآخر سالب.

٣ × ٣ = ٩	الجذران التربيعيان للعدد ٩	٣ الجذر الموجب
(−٣) × (−٣) = ٩		−٣ الجذر السالب

٣ هو الجذر الأساس.

العدد ٧,٢٩ هو موجب إذًا له جذران تربيعيان. لكن نجد صعوبة في إيجاد هذين الجذرين.

يعتمد الرمز $\sqrt{\ }$ للإشارة إلى الجذر التربيعي الموجب فنكتب $\sqrt{٧,٢٩}$.

باستخدام الآلة الحاسبة نحصل على: $\sqrt{٧,٢٩} = ٢,٧$. كذلك $-\sqrt{٧,٢٩} = -٢,٧$.

الجذر التربيعي **Square Root**

العدد ٲ هو جذر تربيعي للعدد ب عندما $ٲ^٢ = ب$

خصائص الجذور التربيعية Properties of Square Roots

خاصية الضرب: لأي عددين حقيقيّين موجبين ٲ، ب: $\sqrt{ٲب} = \sqrt{ٲ} \times \sqrt{ب}$

خاصية القسمة: لأي عددين حقيقيّين موجبين ٲ، ب: $\sqrt{\frac{ٲ}{ب}} = \frac{\sqrt{ٲ}}{\sqrt{ب}}$

مثال (١)

بسِّط كل تعبير.

أ) $\sqrt{٤٩} = ٧$ جذر تربيعي موجب.

ب) $-\sqrt{١٤٤} = -١٢$ جذر تربيعي سالب.

جـ) $\pm\sqrt{\frac{٩}{٢٥}} = \frac{\pm\sqrt{٩}}{\sqrt{٢٥}} = \pm\frac{٣}{٥}$ الجذران التربيعيان هما $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{-٣}{٥}$.

د) $\sqrt{٠} = ٠$ للصفر جذر تربيعي واحد هو صفر.

هـ) $\sqrt{-٣٦}$ غير معرّف في ح.

في مجموعة الأعداد الحقيقية الجذر التربيعي لعدد سالب هو غير معرّف.

معلومة رياضية:

$\sqrt{س^٢} = |س|$

$(\sqrt{س})^٢ = س$ (حيث س ≥ ٠)

حاول أن تحل

١ بسِّط كل تعبير.

أ) $\sqrt{٨١}$ ب) $-\sqrt{١٦٩}$ جـ) $\pm\sqrt{٢٥}$ د) $\sqrt{\frac{٩}{٢٥}}$

بعض الجذور التربيعية هي أعداد نسبية، وبعضها الآخر أعداد غير نسبية.

فمثلًا من الجذور النسبية: $\sqrt{١٢١} = ١١$، $-\sqrt{١,٢١} = -١,١$، $\pm\sqrt{\frac{٨١}{١٠٠}} = \pm\frac{٩}{١٠}$

من الجذور غير النسبية: $\sqrt{٥} \simeq ٢,٢٣٦$، $\sqrt{\frac{٣}{٧}} \simeq ٠,٦٥٤٧$

مثال (٢)

حدّد ما إذا كان كل عدد مما يلي عددًا نسبيًّا أو غير نسبي.

أ) $\pm\sqrt{٦٤} = \pm٨$ عدد نسبي

ب) باستخدام الآلة الحاسبة $-\sqrt{٤,٩} \simeq -٢,٢١٣٥٩٤٣...$ عدد غير نسبي

ج) باستخدام الآلة الحاسبة $\sqrt{\frac{١}{٧}} \simeq ٠,٣٧٧٩٦٤٤٧٣$ عدد غير نسبي

مصطلح رياضي:

في الصيغة العشرية:

العدد النسبي هو عدد منته أو متكرر (دوري).

العدد غير النسبي هو عدد غير منته دون تكرار.

حاول أن تحل

٢ حدّد ما إن كان كل عدد مما يلي عددًا نسبيًّا أو غير نسبي.

أ) $\sqrt{١٣}$

ب) $-\sqrt{٦٢٥}$

ج) $-\sqrt{١٠٠٠}$

د) $\sqrt{\frac{٢}{١٥}}$

١ – تقدير الجذور التربيعية Estimating Square Roots

مربعات الأعداد الطبيعية تسمى مربعات كاملة Perfect Squares.

العدد الطبيعي	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
المربع الكامل	١	٤	٩	١٦	٢٥	٣٦	٤٩	٦٤	٨١	١٠٠	١٢١	١٤٤

يمكن استخدام المربعات الكاملة لتقدير قيمة بعض الجذور التربيعية دون استخدام الآلة الحاسبة.

مثال (٣)

حدّد بين أي عددين طبيعيين (كليين) متتاليين يوجد $\sqrt{١٥,٤١}$، ثم قدّر قيمته.

معلومة رياضية:

لأي أعداد موجبة وجذورها التربيعية الموجبة الترتيب نفسه.

الحل:

$٩ < ١٥,٤١ < ١٦$ ١٥,٤١ هو بين المربعين الكاملين المتتاليين ٩، ١٦.

$\sqrt{٩} < \sqrt{١٥,٤١} < \sqrt{١٦}$ باستخراج الجذر التربيعي لكل عدد

$٣ < \sqrt{١٥,٤١} < ٤$ تبسيط

إذًا $\sqrt{١٥,٤١}$ هو بين ٣، ٤. وحيث إن العدد ١٥,٤١ أقرب إلى ١٦ فإن $\sqrt{١٥,٤١}$ يكون قريبًا من ٤ وهو يساوي تقريبًا ٣,٨ أو ٣,٩.

حاول أن تحل

٣ حدّد بين أي عددين صحيحين يوجد العدد $-\sqrt{٣٠,٨}$، ثم قدّر قيمته.

يمكن إيجاد قيمة تقريبية للجذور التربيعية باستخدام الآلة الحاسبة.

مثال (٤)

حدّد بين أي عددين كليين متتاليين يقع $\sqrt{٢٨,٦٣}$، ثم أوجد قيمته لأقرب جزء من عشرة مستخدمًا الآلة الحاسبة.

الحل:

$٢٥ < ٢٨,٦٣ < ٣٦$ ٢٨,٦٣ هو بين المربعين الكاملين المتتاليين ٢٥، ٣٦.

$\sqrt{٢٥} < \sqrt{٢٨,٦٣} < \sqrt{٣٦}$ باستخراج الجذر التربيعي لكل عدد

$٥ < \sqrt{٢٨,٣٦} < ٦$ تبسيط

إذًا $\sqrt{٢٨,٣٦}$ هو بين ٥، ٦.

باستخدام الآلة الحاسبة: $\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{28,63}$ $\boxed{=}$ $\boxed{5.350\ 700\ 889}$

أي أن $\sqrt{٢٨,٣٦}$ يساوي تقريبًا ٥,٤.

حاول أن تحل

٤ حدّد بين أي عددين كليين متتاليين يقع $\sqrt{١٣,٧}$، ثم أوجد قيمته لأقرب جزء من عشرة مستخدمًا الآلة الحاسبة.

مثال (٥) تطبيقات حياتية

يساعد تقدير الجذور التربيعية على إيجاد طول وتر مثلث قائم الزاوية. أوجد طول وتر مثلث، طولا ضلعي زاويته القائمة هما ٥ سم، ٧ سم.

الحل:

$٥^٢ + ٧^٢ = ٢٥ + ٤٩ = ٧٤$ نظرية فيثاغورث

٧٤ يقع بين المربعين الكاملين المتتاليين ٦٤، ٨١. إذًا، طول وتر المثلث هو بين ٨، ٩ سم.

باستخدام الآلة الحاسبة $\sqrt{٥^٢ + ٧^٢} \simeq ٨,٦٠٢٣$

طول وتر المثلث $\simeq ٨,٦$ سم.

تذكر:

في المثلث قائم الزاوية، مربع الوتر = مجموع مربعي طولي ضلعي الزاوية القائمة.

حاول أن تحل

٥ أوجد طول وتر مثلث قائم الزاوية، طولا ضلعي زاويته القائمة هما ٩ سم، ١٣ سم.

مثال (٦)

يسقط جسم من ارتفاع ٩ أمتار. تبين المعادلة ع = ٤,٩ ن^٢ العلاقة بين الارتفاع ع والزمن ن المستغرق للوصول إلى سطح الأرض. ما الوقت اللازم ليصل إلى الأرض؟

الحل:

$ع = ٤,٩ ن^٢$

$ن^٢ = \frac{٩}{٤,٩}$

$ن = \sqrt{\frac{٩}{٤,٩}}$ أو $ن = -\sqrt{\frac{٩}{٤,٩}}$ مرفوضة

ن $\simeq ١,٣٥٥$ باستخدام الآلة الحاسبة.

أي يلزم حوالي ثانية ونصف ليصل الجسم إلى الأرض.

حاول أن تحل

٦ من مثال (٦)، ما الوقت اللازم لوصول جسم إلى الأرض إذا سقط عن ارتفاع ١٤ مترًا؟

١ – ٤

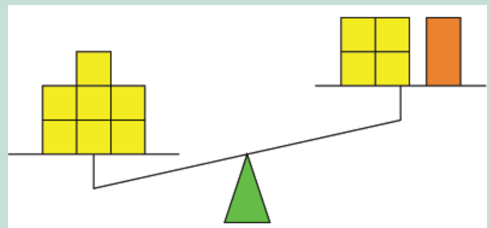
حل المتباينات
Solving Inequalities

سوف تتعلم
- حل المتباينات باستخدام الخواص
- نمذجة متباينات من الدرجة الأولى
- حل متباينات ذات متغيرين في أحد الطرفين أو كليهما

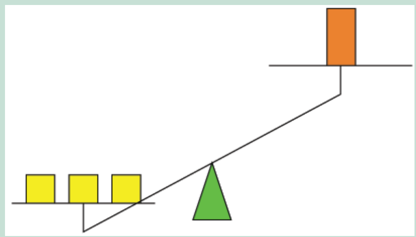
دعنا نفكر ونتناقش

المتباينات المتكافئة هي متباينات لها مجموعة الحل نفسها.

استخدم الميزان لتبين أن المتباينتين س + ٤ < ٧ ، س < ٣ متباينتان متكافئتان.



س + ٤ < ٧



س < ٣

مصطلحات مساعدة:

تعني كلمة "لانهائي" أن عدد الحلول غير محدد ولا يمكن حصره.

حل المتباينات Solving Inequalities

أنت تحلّ متباينة تتضمّن جمعًا أو طرحًا باستخدام العمليّات العكسيّة، لكي تضع المتغيّر في طرف واحد. أحيانًا يكون لمتباينة عدد لانهائيّ من الحلول ممّا يستحيل معه التحقّق منها جميعًا. بدلًا من ذلك، تحقّق من صحّة حساباتك واتّجاه علاقة الترتيب.

مثال (١) استخدام خاصية المعكوس الجمعي في حل المتباينات

أوجد مجموعة حل المتباينة س − ٧ < −٢ ومثل الحلول بيانيًّا على خط الأعداد، ثم تحقق من صحة الحل.

الحل: س − ٧ < −٢

س − ٧ + ٧ < −٢ + ٧ ضع المتغير في طرف واحد، وذلك بإضافة المعكوس الجمعي للعدد (−٧) إلى الطرفين

س < ٥ بسِّط

مجموعة الحل: (−∞، ٥)

تحقق:

الخطوة ١ : تحقق مما إذا كانت الإجابة حلًّا للمعادلة المرتبطة.

س − ٧ = −٢ اكتب المعادلة المرتبطة

٥ − ٧ ≟ −٢ عوض بـ ٥ عن س

−٢ = −٢ ✓

الخطوة ٢: تحقق من صحة علاقة الترتيب بالتعويض في المتباينة.

س − ٧ < −٢

٤ − ٧ < −٢ عوض بعدد أصغر من ٥ عن س

−٣ < −٢ ✓

كل من الخطوتين ١، ٢ تتحقق، لذلك س < ٥ هو حل المتباينةِ س − ٧ < −٢

تذكر:

الدائرة المفتوحة على تمثيل بياني، تعني أن العدد ليس متضمَّنًا في الحل.

الدائرة المغلقة على تمثيل بياني، تعني أن العدد متضمَّن في الحل.

حاول أن تحل

١ أوجد مجموعة حل المتباينة ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد لكل مما يلي:

أ ص − ٤ ≤ ١ ب ١٢ ≥ س − ٥

مثال (٢)

الأمتعة (الحقائب): تشترط إحدى شركات الطيران ألّا يزيد وزن الأمتعة عن ٤٥ كيلوجرامًا للراكب. إذا كان وزن إحدى حقيبتيك ١٧ كيلوجرامًا، فما الوزن الممكن للحقيبة الثانية؟

الحل:

الألفاظ	وزن الحقيبة الأولى	زائد	وزن الحقيبة الثانية	لا يزيد عن ٤٥ كجم

ليكن ز = وزن الحقيبة الثانية

المتباينة	١٧	+	ز	≤ ٤٥

−١٧ + ١٧ + ز ≤ −١٧ + ٤٥ ← ضع المتغير في طرف واحد وذلك بإضافة المعكوس الجمعي (−١٧)

ز ≤ ٢٨ ← بسط

يمكن أن يصل وزن حقيبتك الثانية إلى ٢٨ كجم.

حاول أن تحل

٢ تتسع القاعة الرئيسة في إحدى المدارس لـ ٣٠٠ مقعد. في عرض لإحدى المسرحيات كان عدد الحضور من الفصل العاشر ٨٩ طالبًا، فكم عدد الطلاب الذين يمكن حضورهم من بقية فصول المدرسة؟

استخدام خاصية المعكوس الضربي في حل المتباينات.

عندما تضرب طرفي متباينة في عدد سالب أو تقسم طرفي متباينة على عدد سالب، اعكس اتجاه علاقة الترتيب.

مثال (٣)

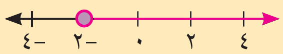
أوجد مجموعة حل المتباينة $\frac{س}{-٢} > ١$، ومثل الحلول بيانيًّا على خط الأعداد.

الحل: $\frac{س}{-٢} > ١$

$-٢ \times \left(\frac{س}{-٢}\right) < ١ \times (-٢)$ اضرب كلًّا من الطرفين في المعكوس الضربي (-٢) واعكس اتجاه علاقة الترتيب

س < -٢ بسط

مثل بيانيًّا



مجموعة الحل = (-٢، ∞)

معلومة مفيدة:

إذا كان أ > ب، جـ > ٠، فإن

أجـ > ب جـ، $\frac{أ}{جـ} > \frac{ب}{جـ}$.

إذا كان أ > ب، جـ < ٠، فإن

أجـ < ب جـ، $\frac{أ}{جـ} < \frac{ب}{جـ}$.

حاول أن تحل

٣ أوجد مجموعة حل المتباينة $\frac{ب}{٤} \leq ١$، ومثل الحلول بيانيًّا على خط الأعداد.

مثال (٤)

عمل تجاري: تعلن شركة لتوصيل خدمات الإنترنت عن الفرصة التالية الموضحة. هدف الشركة هو تحقيق مبلغ إضافي على الأقل ٤٥٠٠ دينار شهريًّا. كم مشتركًا جديدًا يلزم أن تجتذبهم الشركة؟

الحل:

الألفاظ: عدد المشتركين الجدد مضروبًا بـ ٥ دنانير يكون على الأقل ٤٥٠٠ دينار.

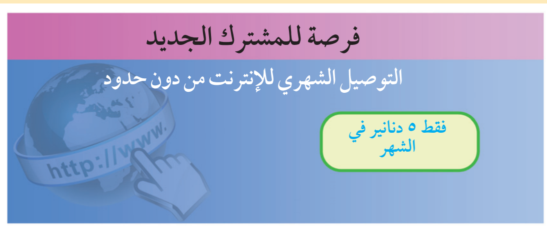
ليكن ن = عدد المشتركين الجدد

المتباينة $ن \times ٥ \geq ٤٥٠٠$

$٥ن \geq ٤٥٠٠$

$\frac{٥ن}{٥} \geq \frac{٤٥٠٠}{٥}$ اقسم طرفي المتباينة على ٥

$ن \geq ٩٠٠$ بسط



يلزم أن تجتذب ٩٠٠ مشترك جديد على الأقل.

التحقق من معقولية الإجابة: الإجابة معقولة لأن ٥ × ٩٠٠ هو ٤٥٠٠، وأي عدد أكبر من ٩٠٠ مضروبًا بـ ٥ ينتج عددًا أكبر من ٤٥٠٠.

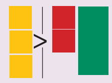
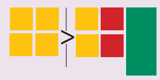
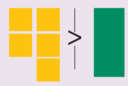
حاول أن تحل

٤ الحد الأقصى لحمولة مصعد في فندق ١٠٠٠ كجم. افرض أن متوسط وزن النزيل ٨٠ كجم، فكم نزيلًا يمكن للمصعد أن يحملهم بأمان؟

٢ – حل متباينات متعددة الخطوات:

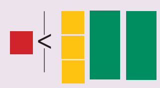
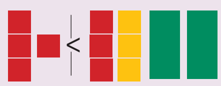
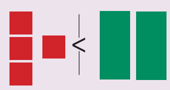
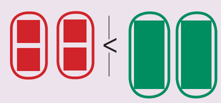
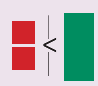
يتطلب حل المتباينات أحيانًا استخدام أكثر من خطوة. وسنستخدم بلاطات الجبر في نمذجة متباينات من الدرجة الأولى حتى نفهم حلها. اعتبر أن ▮ تمثل المجهول س، البلاطة الحمراء ■ تمثل −١، البلاطة الصفراء ■ تمثل +١

أ حل المتباينة س − ٢ < ٣.

س − ٢ < ٣		نمذجة المتباينة باستخدام البلاطات
س − ٢ + ٢ < ٣ + ٢		إضافة +٢ إلى طرفي المتباينة
س < ٥		التبسيط بحذف أزواج البلاطات الصفرية

كل بلاطة خضراء هي أصغر من ٥ بلاطات صفراء، إذًا س < ٥.

ب حل المتباينة ٢س + ٣ > −١.

٢س + ٣ > − ١		نمذجة المتباينة باستخدام البلاطات
٢س + ٣ − ٣ > −١ − ٣		إضافة −٣ إلى طرفي المتباينة
٢س > −٤		التبسيط بحذف أزواج البلاطات الصفرية
٢س/٢ > −٤/٢		قسم كل طرف إلى مجموعتين متساويتين
س > −٢		

كل بلاطة خضراء هي أكبر من بلاطتين حمراوين. إذًا س > −٢

مثال (٥)

أوجد مجموعة حل المتباينة ٢(م + ٢) − ٣م ≤ ١ ومثّل مجموعة الحل على خط الأعداد.

الحل:

٢(م + ٢) − ٣م ≤ ١	
٢م + ٤ − ٣م ≤ ١	خاصيّة التوزيع
٢م − ٣م + ٤ ≤ ١	خاصيّة الإبدال
−م + ٤ ≤ ١	تبسيط
−م + ٤ − ٤ ≤ ١ − ٤	طرح ٤ من طرفي المتباينة
−م ≤ −٣	
م ≥ ٣	تنعكس علاقة الترتيب

مجموعة الحل = (−∞، ٣].

حاول أن تحل

٥ أوجد مجموعة حل المتباينة ٣(س + ٤) + ٥ س ≥ ٢.

مثال (٦) تطبيقات حياتية

يشتري أحد المخازن أكثر من ٣٠ عبوة شامبو في الشهر. يدفع ٣ دنانير ثمن العبوة الواحدة، ٢٥ دينارًا كلفة تسليم البضاعة. عرضت شركة منافسة على صاحب المخزن عبوات بسعر ٤ دنانير للواحدة، ٥ دنانير فقط كلفة تسليم البضاعة، مدعية أن أسعارها هي الأرخص. هل هذا صحيح؟

الحل:

ليكن س عدد العبوات التي يشتريها المخزن في الشهر.

تبلغ كلفة الشراء: ٣س + ٢٥

تبلغ كلفة الشراء من الشركة المنافسة: ٤س + ٥

للتحقق، نحل المتباينة ٤س + ٥ ≥ ٣س + ٢٥.

٤س + ٥ − ٣س ≥ ٣س + ٢٥ − ٣س	طرح ٣س من طرفي المتباينة
س + ٥ ≥ ٢٥	تبسيط
س + ٥ − ٥ ≥ ٢٥ − ٥	طرح ٥ من طرفي المتباينة
س ≥ ٢٠	

أي أن الشركة المنافسة تكون أفضل عندما يكون عدد العبوات أقل من أو يساوي ٢٠ عبوة بينما يشتري المخزن أكثر من ٣٠ عبوة في الشهر.
إذًا، إن ما تعرضه الشركة المنافسة ليس أفضل عرض، لذا على صاحب المخزن أن يُبقي تعامله مع الشركة الأولى.

حاول أن تحل

٦ في مثال (٦)، هل يصبح عرض الشركة المنافسة أفضل إذا لم تقبض أموالًا كلفة تسليم البضاعة؟

مثال (٧)

أوجد مجموعة حل المتباينة ٦س − ١٥ > ٤س + ١ ومثّل الحلّ على خط الأعداد.

الحل:

٦س − ١٥ > ٤س + ١	
٦س − ١٥ − ٤س > ٤س + ١ − ٤س	طرح ٤س من طرفي المتباينة
٢س − ١٥ > ١	تبسيط
٢س − ١٥ + ١٥ > ١ + ١٥	إضافة ١٥ إلى طرفي المتباينة
٢س > ١٦	تبسيط
س > ٨	

مجموعة الحل = (٨، ∞).

حاول أن تحل

٧ أوجد مجموعة حل المتباينات التالية، ومثلها على خط الأعداد إن أمكن.

أ ٢(٢س − ٨) > ٤س + ٢

ب ٣س + ٧ > ٣(س − ٣)

٨ هل المتباينات ٢س > ٢س − ١ ، ٢س < ٢س − ١ لهما مجموعة الحل نفسها؟ فسّر إجابتك.

١ ـ ٥

القِيمة المطلقة
Absolute Value

سوف تتعلم

- حل معادلات تتضمن قيمة مطلقة
- حل متباينات تتضمن قيمة مطلقة

دعنا نفكر ونتناقش

عرفت سابقًا أن القيمة المطلقة لعدد حقيقي هي **بُعد هذا العدد عن الصفر على خط أعداد.**
ولمّا كان البعد عددًا موجبًا، فالقيمة المطلقة لعدد حقيقي سالب هي معكوسه الجمعي.
الرمز المستخدم للقيمة المطلقة للعدد س هو |س|.

تعريف:

لكل عدد حقيقي س يكون:

$$|س| = \begin{cases} س & \text{إذا كان } س > ٠ \\ ٠ & \text{إذا كان } س = ٠ \\ -س & \text{إذا كان } س < ٠ \end{cases}$$

معلومة:

(−س) ليس بالضرورة عددًا سالبًا. (−س) هو المعكوس الجمعي للعدد س.

نلاحظ أن العدد إذا كان موجبًا أو صفرًا فإن قيمته المطلقة تساويه، أما إذا كان العدد سالبًا فإن قيمته المطلقة تساوي معكوسه الجمعي.

بعض خواص القيمة المطلقة للأعداد الحقيقية

ليكن ﺃ، ب ∈ ح

١ $|ﺃ| \geq ٠$

٢ $|-ﺃ| = |ﺃ|$

٣ $|ﺃ \times ب| = |ﺃ| \times |ب|$

٤ $\left|\frac{ﺃ}{ب}\right| = \frac{|ﺃ|}{|ب|}$، حيث ب ≠ ٠

٥ $|ﺃ| \geq ﺃ$

٦ $|ﺃ - ب| = |ب - ﺃ|$

مثال (١)

أعد تعريف |س − ٤| دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

الحل:

$$|س - ٤| = \begin{cases} س - ٤ & \text{حيث } س - ٤ > ٠ \\ ٠ & \text{حيث } س - ٤ = ٠ \\ -(س - ٤) & \text{حيث } س - ٤ < ٠ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} س - ٤ : & س \geq ٤ \\ ٤ - س : & س < ٤ \end{cases}$$

حاول أن تحل

١ أعد تعريف كلّ مما يلي دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

أ |س + ٣|

ب |٤ − ٢س|

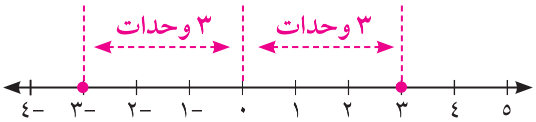
حل معادلات تتضمن قيمة مطلقة

يمكن استخدام خط أعداد لحل معادلات تتضمن قيمة مطلقة.

يبيّن التمثيل البياني المقابل حلول المعادلة |س| = ٣.

حيث المسافة بين س، صفر تساوي ٣ وحدات

إذًا الحل: س = ٣ أو س = −٣



نتيجة

١ إذا كان أ عددًا حقيقيًّا موجبًا فإن حل المعادلة |س| = أ هو: س = أ أو س = −أ وتكون مجموعة الحل {−أ، أ}.

٢ إذا كان أ عددًا حقيقيًّا سالبًا فإن المعادلة |س| = أ مجموعة حلها ∅

معلومة مفيدة:

المجموعة الخالية نعبر عنها بأحد الرمزين { } أو ∅

مثال (٢)

أوجد مجموعة حل المعادلة: |٢ص − ٣| = ٧، ثم تحقق من صحة الحل.

الحل: |٢ص − ٣| = ٧

٢ص − ٣ = ٧	أو	٢ص − ٣ = −٧	قيمة ٢ص − ٣ يمكن أن تكون ٧ أو −٧.
٢ص = ١٠		٢ص = −٤	إضافة +٣ إلى طرفي المعادلة.
ص = ٥		ص = −٢	قسمة كل طرف على ٢.

مجموعة الحل = {−٢، ٥}

تحقق: عندما ص = ٥	وعندما ص = −٢
|٢ص − ٣| = ٧	|٢ص − ٣| = ٧
|٢(٥) − ٣| = ٧	|٢(−٢) − ٣| = ٧
|٧| = ٧ ✓	|−٧| = ٧ ✓

حاول أن تحل

٢ أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلتين، ثم تحقق من صحة الحل.

أ |٥س + ٣| = ٨

ب |٢س − ١| = ٠

مثال (٣)

أوجد مجموعة حل المعادلة: |٢س + ١| + ٣ = ٠

الحل: |٢س + ١| + ٣ = ٠

|٢س + ١| = −٣

وحيث إن −٣ < ٠ (عدد سالب)

∴ مجموعة الحل = ∅

حاول أن تحل

٣ أوجد مجموعة حل المعادلة: ٥ + |−٢س + ٤| = ٠

عند حل مسائل متعددة الخطوات، ابدأ بوضع التعبير الذي يتضمن القيمة المطلقة في طرف واحد.

مثال (٤)

أوجد مجموعة حل المعادلة ٤|٢س + ٣| − ٥ = ١١

الحل: ٤|٢س + ٣| − ٥ = ١١

٤|٢س + ٣| = ١٦ إضافة ٥ إلى طرفي المعادلة

|٢س + ٣| = ٤ قسمة كل طرف على ٤

٢س + ٣ = ٤ أو ٢س + ٣ = −٤

٢س = ١ | ٢س = −٧ إضافة −٣ إلى طرفي المعادلة

س = $\frac{١}{٢}$ | س = $\frac{-٧}{٢}$ قسمة كل طرف على ٢

مجموعة الحل = $\left\{\frac{١}{٢}، \frac{-٧}{٢}\right\}$

حاول أن تحل

٤ أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلتين:

أ ٣|٢س + ٤| −٦ = ٠

ب |٥س − ٤| + ٣ = ٠

عند حل المعادلة |س| = |ص| نستخدم طريقة المساواة، نضع س = ص أو س = −ص. ونحل المعادلات أو نستخدم طريقة تربيع الطرفين ثم نحل المعادلة الناتجة ونتحقق من القيم بالتعويض عن المجهول لتحديد مجموعة الحل.

مثال (٥)

أوجد مجموعة حل المعادلة: |٢م − ٣| = |م + ١|

الحل:

أولًا: طريقة المساواة

لاحظ أن للمقدارين القيمة المطلقة نفسها إذًا هما متساويان، أو كل منهما هو المعكوس الجمعي للآخر.

٢م − ٣ = م + ١

٢م − م = ١ + ٣

م = ٤

أو

٢م − ٣ = −م − ١

٢م + م = −١ + ٣

٣م = ٢

م = $\frac{٢}{٣}$

مجموع الحل = $\left\{٤ ؛ \frac{٢}{٣}\right\}$

ثانيًا: طريقة تربيع الطرفين

$(|٢م − ٣|)^{٢} = (|م + ١|)^{٢}$

$(٢م − ٣)^{٢} = (م + ١)^{٢}$ $\qquad |م|^{٢} = م^{٢}$

$٤م^{٢} − ١٢م + ٩ = م^{٢} + ٢م + ١$

$٣م^{٢} − ١٤م + ٨ = ٠$

(م − ٤)(٣م − ٢) = ٠

م = ٤ أو م = $\frac{٢}{٣}$

تحقق: |٢م − ٣| = |م + ١|

عندما م = ٤

|٢ × ٤ − ٣| = |٤ + ١|

|٥| = |٥| ✓

عندما م = $\frac{٢}{٣}$

|٢ × $\frac{٢}{٣}$ − ٣| = |$\frac{٢}{٣}$ + ١|

|−$\frac{٥}{٣}$| = |$\frac{٥}{٣}$| ✓ الحلّان مقبولان

مجموعة الحل = $\left\{\frac{٢}{٣} ؛ ٤\right\}$

معلومة رياضية:

إذا كان |س| = |ص| فإن

- س = ص أو س = −ص.
- $(|س|)^{٢} = (|ص|)^{٢}$

حاول أن تحل

٥ أوجد مجموعة حل كل من المعادلتين التاليتين:

أ $|ص - ٥| = |٢ص + ٣|$ ب $|س - ٥| = |س - ٧|$

استخدم طريقة المساواة ثم طريقة التربيع.

يمكننا كذلك حل معادلات تتضمن قيمة مطلقة في أحد طرفيها على النحو التالي:

مثال (٦)

حل المعادلة: $|٢س + ٣| = ٣س - ٢$

الحل: $|٢س + ٣| = ٣س - ٢$

نعلم أن الطرف الأيمن للمعادلة غير سالب نتيجة وجود القيمة المطلقة، إذًا يجب أن يكون الطرف الأيسر للمعادلة غير سالب. لذلك نضيف الشرط:

$٣س - ٢ \geq ٠$ أي $س \geq \frac{٢}{٣}$ (تقبل كل قيم س أكبر من أو تساوي $\frac{٢}{٣}$)

أي أن مجموعة التعويض هي $\left[\frac{٢}{٣} ، \infty\right)$

$٢س + ٣ = ٣س - ٢$

$٢س - ٣س = -٢ - ٣$

$-س = -٥$

$س = ٥$

$\because ٥ \in \left[\frac{٢}{٣} ، \infty\right)$

$\therefore$ الحل $س = ٥$ مقبول

أو

$٢س + ٣ = -٣س + ٢$

$٢س + ٣س = ٢ - ٣$

$٥س = -١$

$س = \frac{-١}{٥}$

$\because -\frac{١}{٥} \notin \left[\frac{٢}{٣} ، \infty\right)$

$\therefore$ الحل $س = -\frac{١}{٥}$ مرفوض

مجموعة الحل = $\{٥\}$

أضف إلى معلوماتك:

$\sqrt{س^٢} = |س|$

معلومة مفيدة:

مجموعة الحل هي مجموعة جزئية من مجموعة التعويض

حاول أن تحل

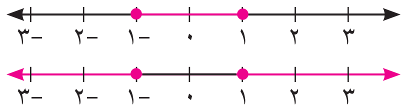
٦ حل المعادلة: $|٤س - ١| = س + ٢$.

حل متباينات تتضمن قيمة مطلقة

يمكن أيضًا حل متباينات تتضمن قيمًا مطلقة باستخدام خط أعداد.

يبيّن التمثيل البياني الأول حلول المتباينة |س| ≤ ١ .

يبيّن التمثيل البياني الثاني حلول المتباينة |س| ≥ ١ .



تذكر:

|س| ≤ ١ تعني أن بعد س عن الصفر هو أصغر من أو يساوي ١ .

تعميم

ليكن ﻡ عددًا حقيقيًا موجبًا.

① |س| ≤ ﻡ تكافئ -ﻡ ≤ س ≤ ﻡ

② |س| ≥ ﻡ تكافئ س ≤ - ﻡ أو س ≥ ﻡ

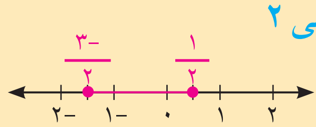
مثال (٧)

أوجد مجموعة حل المتباينة ٤|٢س + ١| + ٤ ≤ ١٢، ومثّل مجموعة الحل على خط أعداد.

الحل: ٤|٢س + ١| + ٤ ≤ ١٢

٤|٢س + ١| ≤ ٨	إضافة (-٤) إلى طرفي المعادلة
|٢س + ١| ≤ ٢	قسمة كل طرف على ٤
-٢ ≤ ٢س + ١ ≤ ٢	كتابة المتباينة المكافئة
-٣ ≤ ٢س ≤ ١	إضافة (-١)
$\frac{-٣}{٢}$ ≤ س ≤ $\frac{١}{٢}$	القسمة على ٢

مجموعة الحل = $[-\frac{٣}{٢} ، \frac{١}{٢}]$



حاول أن تحل

⑦ أوجد مجموعة حل المتباينة |$\frac{١}{٢}$ س - $\frac{٤}{٥}$| > ٦ , ٠ ومثّل مجموعة الحل على خط أعداد.

مثال (٨)

أوجد مجموعة حل المتباينة: ٢|٣م − ٤| − ١ > ٥، ومثّل الحل على خط أعداد.

الحل: ٢|٣م − ٤| − ١ > ٥

٢|٣م − ٤| > ٦ إضافة ١ إلى طرفي المتباينة

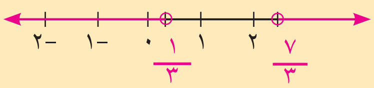
|٣م − ٤| > ٣ قسمة كل طرف على ٢

٣م − ٤ > ٣ أو ٣م − ٤ < −٣ كتابة المتباينة المكافئة

٣م > ٧ | ٣م < ١ بسّط

م > $\frac{٧}{٣}$ | م < $\frac{١}{٣}$ قسمة كل طرف على ٣

مجموعة الحل = ($\frac{٧}{٣}$ ، ∞) ∪ (−∞، $\frac{١}{٣}$)



حاول أن تحل

٨ أوجد مجموعة حل المتباينة: |$\frac{٣}{٤}$ − س| ≥ $\frac{٧}{٨}$ ومثّل الحل على خط أعداد.

مثال (٩) تطبيقات حياتية

رياضة: يبلغ قطر دائرة مرمى كرة السلة ٤٥ سم مع هامش خطأ لا يزيد على ١ سم.

أ اكتب متباينة تتضمن قيمة مطلقة تعبر عن قطر دائرة مرمى تحقق هذا الشرط.

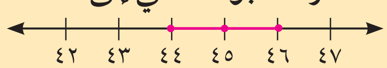
ب أوجد قيم طول القطر المقبولة ومثّلها على خط أعداد.

الحل:

ليكن س قطر دائرة مرمى كرة سلة، وحيث إن س لا يزيد أو ينقص على ٤٥ سم بأكثر من ١ سم، فإن قيم س تحقق |س − ٤٥| ≤ ١.

−١ ≤ ٤٥ − س ≤ ١ ٤٤ ≤ س ≤ ٤٦

مجموعة الحل = [٤٤، ٤٦] أي أن قيم طول القطر المقبولة تنتمي إلى [٤٤، ٤٦]



حاول أن تحل

٩ درجة حموضة عصير الطماطم هي ٤ مع هامش سماح ٢,٠. اكتب متباينة تتضمن قيمة مطلقة تعبر عن درجات الحموضة المقبولة. وحلها ثم بيّن الحل على خط أعداد.

مثال (١٠) تطبيقات حياتية

يبلغ وزن عبوة رقائق الذرة ٤٥٠ جرامًا. يختار مراقب الجودة بعض العبوات للتحقق من زنتها.
تلغى كل علبة يزيد الفرق بين وزنها ووزن عبوة الذرة على ٥ جم.
اكتب متباينة تبيّن أوزان العبوات غير المقبولة ومثّل الحل على خط أعداد.

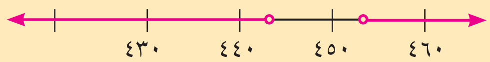
الحل:

لتكن س وزن العبوة. العبوات غير المقبولة هي التي يزيد وزنها أو يقل عن الوزن المبين بأكثر من ٥ جم.

أي |س − ٤٥٠| > ٥

س − ٤٥٠ > ٥ أو س − ٤٥٠ < −٥

س > ٤٥٥ أو س < ٤٤٥



حاول أن تحل

١٠ يعرض أحد المخازن المثلجات في عبوات تزن ٧٥٠ جرامًا. عند التحقق من الوزن تقبل العبوات التي لا يزيد أو لا يقل وزنها ٤٠ جرامًا على الوزن المعتمد.
اكتب متباينة تتضمن قيمة مطلقة تبيّن أوزان العبوات المقبولة ومثّل الحل على خط أعداد.

١ـ٦ دالة القيمة المطلقة

Absolute Value Function

سوف تتعلم

- الرسم البياني لدالة القيمة المطلقة
- استخدام هندسة التحويلات في رسم بعض دوال القيمة المطلقة

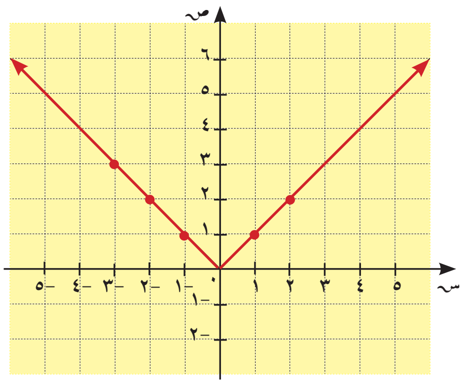
دعنا نفكر ونتناقش

المعادلات على الشكل ص = |أس + ب| + جـ تمثل دوال قيمة مطلقة بمتغيرين.

يمثل الرأس أكبر قيمة أو أصغر قيمة للدالة والتمثيل البياني لهذه الدوال يكون على شكل زاوية.

لرسم الدالة ص = |س| بيانيًّا يمكن استخدام جدول قيم.

س	٢	١	٠	١–	٢–	٣–
ص = |س|	٢	١	٠	١	٢	٣



يمكن أيضًا كتابة ص = |س| دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

ص = { س : س > ٠ ، ٠ : س = ٠ ، –س : س < ٠ }

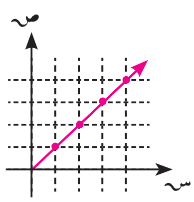
تعميم

رأس منحنى الدالة ص = |أس + ب| + جـ هو النقطة $\left(-\frac{ب}{أ}، جـ\right)$

ملاحظة: رأس منحنى الدالة ص = |أس + ب| هو النقطة $\left(-\frac{ب}{أ}، ٠\right)$

معلومة رياضية:

الرسم البياني للدالة ص = س مع س ≥ ٠ هو:



مثال (١)

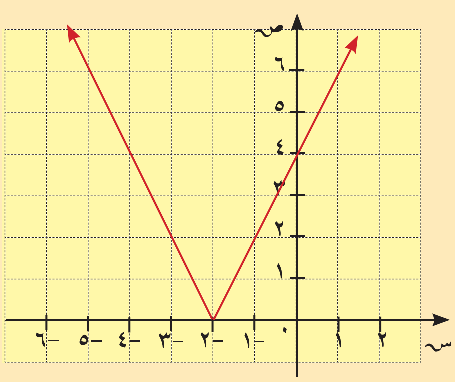
ارسم بيانيًّا الدالة: ص = |٢س + ٤|.

الحل: رأس منحنى الدالة هو $\left(-\frac{ب}{أ}، ٠\right)$

$\frac{-ب}{أ} = \frac{-٤}{٢} = -٢$ أي أن رأس المنحنى (–٢، ٠).

نضع جدول قيم للأزواج المرتبة (س، ص) يتضمن رأس المنحنى.

س	٠	١–	٢–	٣–	٤–
ص	٤	٢	٠	٢	٤



حاول أن تحل

١ ارسم بيانيًّا الدلة: ص = –|٢س + ٣|.

مثال (٢)

ارسم بيانيًّا الدالة ص = |س − ٣| + ٢ بعد كتابتها دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

الحل:

نعيد الكتابة دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

ص = |س − ٣| + ٢

ص = { س − ٣ + ٢ : س − ٣ ≥ ٠
−(س − ٣) + ٢ : س − ٣ < ٠ }

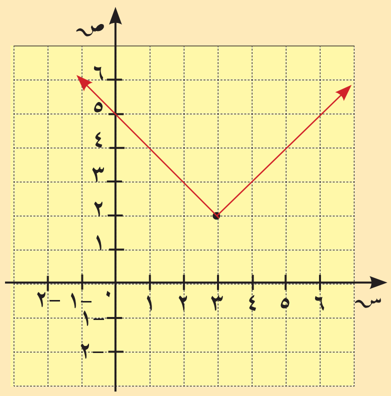
ص = { س − ١ : س ≥ ٣
− س + ٥ : س < ٣ }

نرسم بيانيًّا كلًّا من الشعاعين ص = س − ١ حيث س ≥ ٣،

ص = −س + ٥ حيث س < ٣.

س	٣	٤	٥
ص	٢	٣	٤

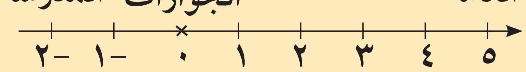
س	٣	٢	١
ص	٢	٣	٤



حاول أن تحل

٢ ارسم بيانيًّا الدالة: ص = $\left|\frac{١}{٢}\right.$س + ١$\left.\right|$ − ٣ بعد كتابتها دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

مثال (٣)



يقع منزل إبراهيم بين مدرسته والمكتبة العامة، وتوجد هذه المواقع الثلاثة على خط مستقيم يمر بدوار الجوازات.

تبعد المدرسة عن الدوار ٢ كم وتبعد المكتبة العامة عنه ٥ كم في الاتجاه المعاكس. كم يبعد منزل إبراهيم عن الدوّار إذا كان البعد بين المنزل والمكتبة العامة مثلي البعد بين المنزل والمدرسة؟

الحل:

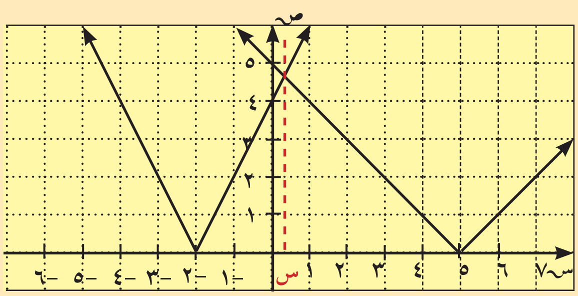
ليكن س البعد بين المنزل والدوّار.

∴ |س + ٢| البعد بين المنزل والمدرسة، |س − ٥| البعد بين المنزل والمكتبة.

نرسم بيانيًّا كلًّا من الدالتين ص = ٢|س + ٢| ، ص = |س − ٥|.

تكون قيمة س الإحداثي السيني لنقطة التقاطع.

س = $\frac{١}{٣}$



تحقق

ص = ٢ |س + ٢|	ص = |س − ٥|
$= ٢ \left\lvert \frac{١}{٣} + ٢ \right\rvert$	$= \left\lvert \frac{١}{٣} - ٥ \right\rvert$
$= \frac{١٤}{٣}$ ✓	$= \frac{١٤}{٣}$ ✓

يبعد منزل إبراهيم $\frac{١}{٣}$ كم عن الدوّار لجهة المكتبة العامة.

حاول أن تحل

٣ في مثال (٣)، حل المسألة إذا كانت المكتبة العامة تبعد ٤ كم عن الدوّار.

رسم بيان دوال المطلق باستخدام بعض التحويلات الهندسية
Graph of Absolute Value Functions Using some Geometric Transformations

سوف نستخدم الإزاحة (الانسحاب) أفقيًّا أو رأسيًّا أو الاثنين معًا في رسم بعض دوال القيمة المطلقة.

مثال (٤)

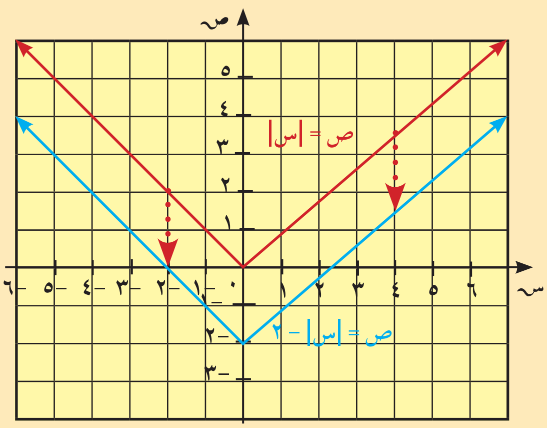
ارسم بيان كل من الدالتين: ص = |س|، ص = |س| − ٢.

صف كيف يرتبط الرسم البياني للدالة ص = |س| − ٢ بالرسم البياني للدالة ص = |س|.

الحل:

اصنع جدول قيم، ثم ارسم بيانيًّا.

س	ص = |س|	ص = |س| − ٢
−٤	٤	٢
−٢	٢	٠
٠	٠	−٢
٢	٢	٠
٤	٤	٢



لكل قيمة للمتغير س، تكون قيمة ص = |س| − ٢ أصغر بـ ٢ من قيمة ص = |س|.

الرسم البياني لِـ ص = |س| − ٢ هو صورة للرسم البياني لِـ ص = |س| بعد إزاحته وحدتين إلى أسفل.

حاول أن تحل

٤ لكل زوج من الدوال، قارن بين الرسمين البيانيين. صف كيف يتم الانتقال من الرسم البياني الأول إلى الثاني.

أ ص = |س|، ص = |س| − ٤

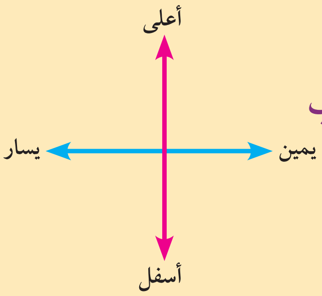
ب ص = −|س|، ص = −|س| + ٣

دالة المرجع هي دالة نستخدم بيانها للحصول على بيان دوال أخرى بإجراء بعض التحويلات الهندسية.

بعض دوال المرجع هي: ص = أس ، ص = س^{٢} ، ص = |س|...

الرسم البياني للدالة ص = س + ك (ك عدد حقيقي موجب) ينتج من انسحاب الرسم البياني للدالة ص = س إلى الأعلى ك وحدة.
كذلك ينتج الرسم البياني للدالة ص = س − ك من انسحاب الرسم البياني للدالة ص = س إلى الأسفل ك وحدة.
التمثيل البياني للدالة ص = |س| ± ك ينتج من انسحاب التمثيل البياني للدالة ص = |س| إلى الأعلى (أو إلى الأسفل) ك وحدة.

مثال (٥)

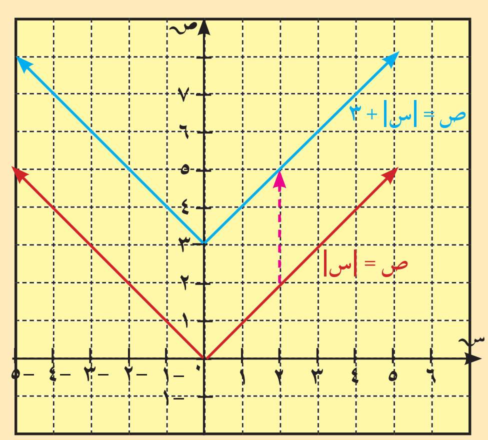


لكل من الدالتين، حدّد دالة المرجع وارسم بيانها، ثم ارسم كل من الدالتين بيانيًّا مستخدمًا الانسحاب بعد تحديد مسافة الانسحاب واتجاهه.

أ ص = |س| + ٣

الحل:

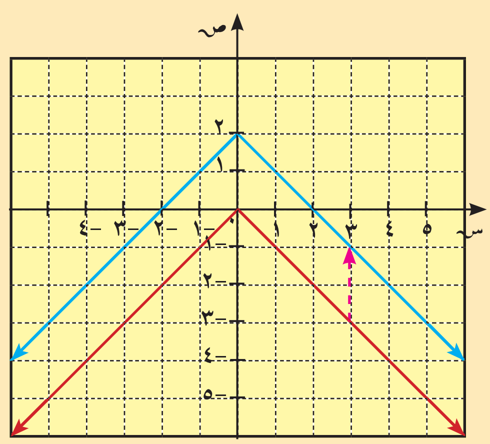
أ دالة المرجع هي ص = |س|، ك = ٣
أزح الرسم البياني للدالة ص = |س| ٣ وحدات إلى الأعلى.



ب ص = −|س| + ٢

الحل:

ب دالة المرجع هي ص = −|س|، ك = ٢
أزح الرسم البياني للدالة ص = −|س| وحدتين إلى الأعلى.



حاول أن تحل

٥ استخدم دالة المرجع والانسحاب لرسم الدالة ص = |س| + ٥.

ملاحظة: يمكنك عمل جدول للقيم وتحديد بعض النقاط للتحقق من صحة الرسم.

يتشارك الانسحاب الأفقي مع الانسحاب الرأسي ببعض الخصائص.

الرسم البياني للدالة ص = |س + ل| (حيث ل عدد حقيقي موجب) هو انسحاب للرسم البياني للدالة ص = |س|، ل وحدة إلى جهة اليسار. كذلك الرسم البياني للدالة ص = |س − ل| هو انسحاب لدالة المرجع ص = |س| ل وحدة إلى جهة اليمين.

مثال (٦)

لكل من الدالتين، حدّد دالة المرجع وقيمة مسافة الانسحاب ل ثم ارسم بيانيًّا كل دالة مستخدمًا الإزاحة.

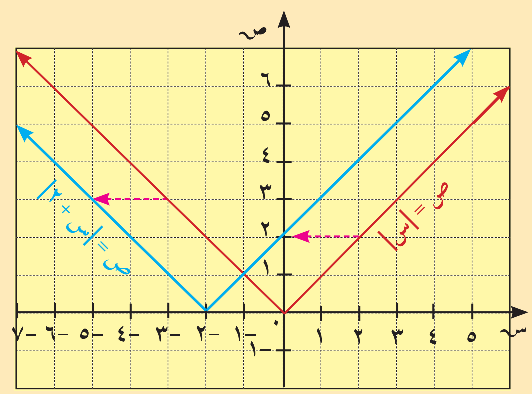
أ ص = |س + ٢|

الحل:

دالة المرجع هي ص = |س|، ل = ٢

الإشارة (+) تعني الإزاحة إلى اليسار.

أزح رسم ص = |س| وحدتين إلى اليسار.



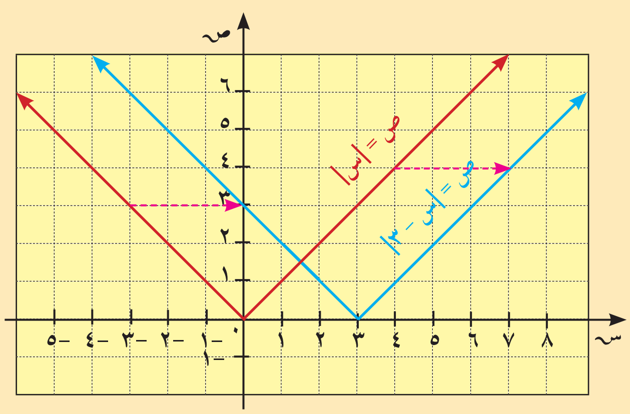
ب ص = |س − ٣|

الحل:

دالة المرجع هي ص = |س|، ل = ٣

الإشارة (−) تعني الإزاحة إلى اليمين.

أزح رسم ص = |س| ثلاث وحدات إلى اليمين.



حاول أن تحل

٦ استخدم دالة المرجع والانسحاب لرسم الدالة ص = − |س + $\frac{٥}{٢}$|.

الرسم البيانيّ للدالة: ص = − |س + ل| حيث ل ∈ ح+ هو انسحاب للرسم البياني للدالة ص = −|س|، ل وحدة إلى جهة اليسار.
كذلك الرسم البياني للدالة ص = − |س − ل| هو انسحاب لدالة المرجع ص = − |س|، ل وحدة إلى جهة اليمين.

مثال (٧)

لكلّ من الدالتين، حدد دالة المرجع وقيمة مسافة الانسحاب ل، ثم ارسم بيانيًّا كل دالة مستخدمًا الإزاحة.

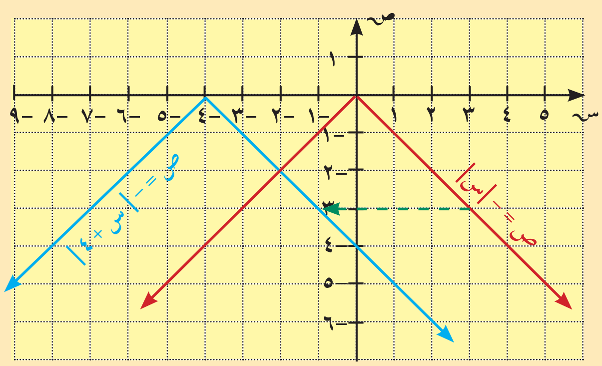
أ ص = − |س + ٤|

الحل:

دالة المرجع ص = − |س|، ل = ٤

(+٤) تعني الانسحاب أربعة وحدات إلى جهة اليسار.

ضع الرأس ( ) ثم ارسم بيانيًّا الدالة.



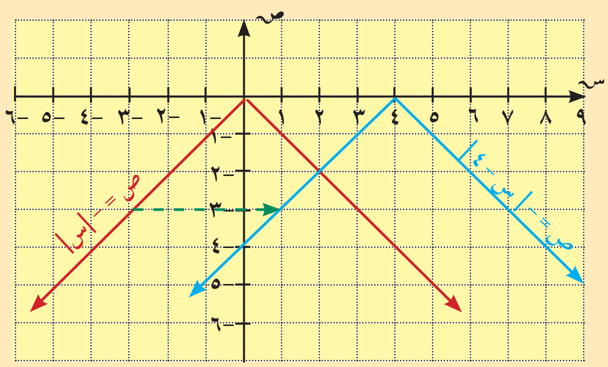
ب ص = −|س − ٤|.

الحل:

دالة المرجع: ص = −|س|، ل = ٤

(+٤) تعني الانسحاب أربعة وحدات إلى جهة اليمين.

ضع الرأس ( ) ثم ارسم بيانيًّا الدالة.



حاول أن تحل

٧ لكلّ من الدالتين، حدد دالة المرجع وقيمة مسافة الانسحاب ل، ثم ارسم بيانيًّا كل دالة مستخدمًا الانسحاب.

أ ص = − |س − ٢| .

ب ص = −|س + ٣| .

تعرفت كيفية استخدام الانسحاب الأفقي أو الرأسي لدوال المرجع للحصول على رسم بياني لبعض دوال القيمة المطلقة. يمكن أيضًا استخدام الانسحابين الأفقي والرأسي معًا للحصول على بعض الرسوم البيانيّة للدوال: ص = |س + ل| − ك

مثال (٨)

ارسم بيانيًّا كلًّا من الدالتين:

أ ص = |س − ٢| + ١

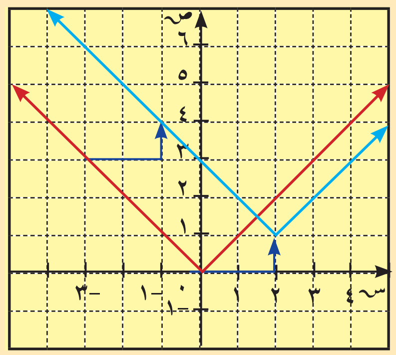
الحل:

دالة المرجع ص = |س|، ل = ٢، ك = ١

(−٢) تعني الانسحاب وحدتين إلى جهة اليمين.

(+١) تعني الانسحاب وحدة واحدة إلى الأعلى.

ضع الرأس (٢، ١) ثم ارسم بيانيًّا الدالة.



ب ص = −|س + ٣| − ٢

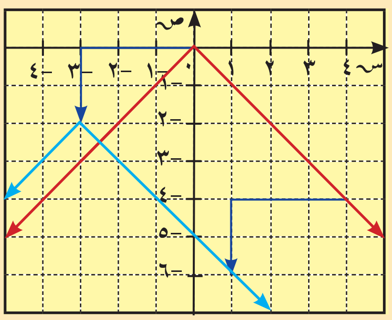
الحل:

دالة المرجع هي ص = −|س|، ل = ٣، ك = ٢

(+٣) تعني الانسحاب ٣ وحدات إلى جهة اليسار.

(−٢) تعني الانسحاب وحدتين إلى أسفل.

ضع الرأس (−٣، −٢) ثم ارسم بيانيًّا الدالة.



حاول أن تحل

٨ استخدم دالة المرجع والانسحاب لرسم الدالة:

أ ص = |س + ٤| + ٣

ب ص = −|س − ٥| − ٣

يمكنك رسم بيان الدالتين في مثال (٨) بتحديد رأس منحنى الدالة، وتحديد بعض النقاط.

١–٧ المستقيمات المتوازية والمتعامدة

Parallel and Perpendicular Lines

فلنعمل معًا

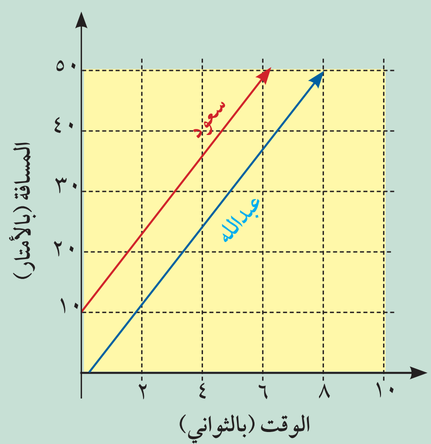
١ طابق كل قصة مع رسمها البياني. علّل اختيارك.

يتسابق عبدالله مع أخويه فيصل وسعود في الركض.

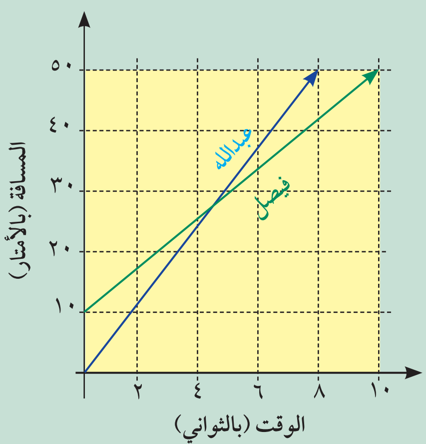
أ قطع سعود بعض الأمتار قبل أن يبدأ عبدالله بالركض لكنهما ركضا بالسرعة نفسها.

ب عند انطلاق عبدالله كان فيصل قد قطع عدة أمتار لكن عبدالله ركض أسرع من أخيه.

أ



ب



٢ أ في الرسم أ كيف يبدو البعد بين سعود وعبد الله بعد ثانيتين؟ ٤ ثوانٍ؟ ٦ ثوانٍ؟

ب أفرض أن طول السباق هو أكبر، هل يلتقي المستقيمان في الرسم أ ؟

جـ ما ميل كل مستقيم في الرسم أ ؟

٣ أ في الرسم ب كيف يبدو البعد بين فيصل وعبد الله بعد ثانيتين؟ ٤ ثوانٍ؟ ٦ ثوانٍ؟

ب كيف تعرف من وصل قبل الآخر إلى خط النهاية؟

سوف تتعلم

- معرفة ما إذا كان مستقيمان متوازيين
- معرفة ما إذا كان مستقيمان متعامدين
- استخدام الميل لمعرفة توازي أو تعامد أو تقاطع مستقيمين

ملاحظة:

في الرسمين البيانيين: الميل يمثل السرعة لأن السرعة هي ناتج قسمة المسافة المقطوعة على الزمن المستغرق. أي كلما زادت سرعة الركض كبر ميل المستقيم.

معلومة رياضية:

يعتبر المستقيمان المنطبقان متوازيين

المستقيمات المتوازية Parallele Lines

يكون المستقيمان غير الرأسيين متوازيين إذا كان لهما الميل نفسه.

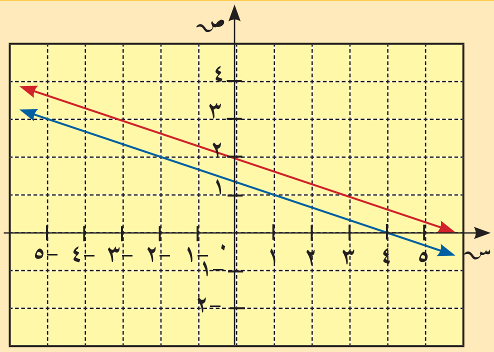
كل مستقيمان رأسيان متوازيان.

فمثلًا: ميل كل من ص = ٢س + ٣، ص = ٢س − ٥ هو ٢.

الرسمان البيانيان لهاتين المعادلتين هما مستقيمان متوازيان.

ملاحظة: يكون المستقيمان المتوازيان منطبقين إذا كان كل منهما يقطع المحور الصادي عند النقطة نفسها.

مثال (١)



يوضّح الشكل المقابل التمثيل البياني للمستقيمين:

ص = $-\frac{1}{3}$ س + ٢ ، ٢س + ٦ص = ٨

هل المستقيمان متوازيان؟

هل المستقيمان منطبقان؟ فسّر إجابتك.

الحل:

نكتب المعادلتين على الشكل ص = م س + ن (معادلة الميل والجزء المقطوع)

في المعادلة ص = $-\frac{1}{3}$ س + ٢

الميل = $-\frac{1}{3}$ والجزء المقطوع من المحور الصادي = ٢

في المعادلة ٢س + ٦ص = ٨

٦ص = −٢س + ٨

ص = $-\frac{1}{3}$ س + $\frac{4}{3}$

الميل = $-\frac{1}{3}$ والجزء المقطوع من المحور الصادي = $\frac{4}{3}$

∵ للمستقيمين الميل نفسه $-\frac{1}{3}$

∴ المستقيمان متوازيان.

∵ الجزء المقطوع من المحور الصادي مختلف

∴ المستقيمان غير منطبقين (مختلفان)

حاول أن تحل

١ هل المستقيمان ص = $\frac{3}{4}$ س − ١ ، −٦س + ٨ص = ١٢ متوازيان؟ فسّر إجابتك.

يمكنك استخدام حقيقة أن لمستقيمين متوازيين الميل نفسه لكتابة معادلة مستقيم موازٍ لمستقيم معطى بمعادلته ويمر بنقطة ما.

مثال (٢)

أوجد معادلة المستقيم (ل$_1$) الذي يمر بالنقطة (١ ، ٠) وموازٍ للمستقيم (ل$_2$) الذي معادلته ص = ٢س + ١ .

الحل:

ميل المستقيم (ل$_2$): ص = ٢س + ١ هو ٢.

تكتب معادلة المستقيم (ل$_1$) على الصورة ص = ٢س + ب

لإيجاد قيمة ب عوّض عن (س، ص) بـ (١ ، ٠)

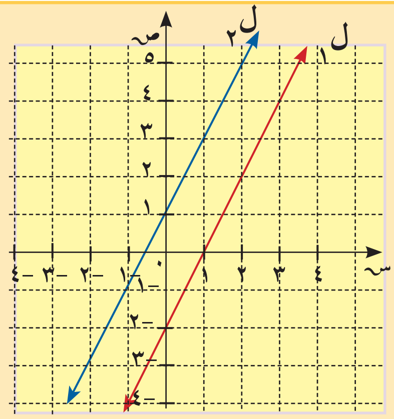
$ص = ٢س + ب$

$٠ = ٢(١) + ب$

$٠ = ٢ + ب$

$ب = -٢$

معادلة المستقيم ($ل_١$): $ص = ٢س - ٢$



حاول أن تحل

٢ أوجد معادلة المستقيم ($ل_١$) الموازي للمستقيم ($ل_٢$) الذي معادلته $ص = -\frac{٣}{٤}س + ١$ ويمر بالنقطة (٢، ٣).

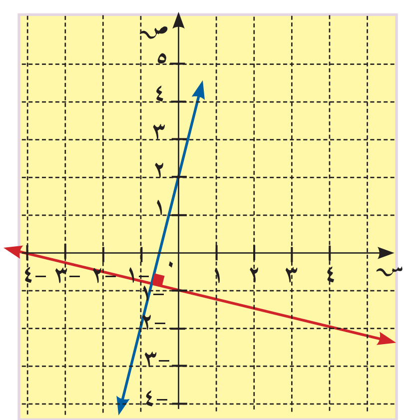
المستقيمات المتعامدة Perpendicular Lines

المستقيمان في الرسم المقابل هما متعامدان.

يكون مستقيمان متعامدين إذا كانت الزاوية المحددة بهما زاوية قائمة.

معادلة المستقيم باللون الأحمر: $ص = -\frac{١}{٤}س - ١$.

معادلة المستقيم باللون الأزرق: $ص = ٤س + ٢$.



خاصيّة:

يكون مستقيمان متعامدين إذا كان ناتج ضرب ميليهما يساوي -١.

كل مستقيم رأسي يكون عموديًّا على أي مستقيم أفقي.

مثلاً: ميل المستقيم $ص = \frac{٣}{٤}س + ١$ هو $\frac{٣}{٤}$. ميل المستقيم $ص = \frac{-٤}{٣}س - ٢$ هو $\frac{-٤}{٣}$.

لمّا كان $\frac{٣}{٤} \times \left(-\frac{٤}{٣}\right) = -١$، إذًا فالرسمان البيانيان للمعادلتين متعامدان.

إذا كان ميل مستقيم هو $\frac{أ}{ب}$ فإن ميل المستقيم المتعامد معه هو $-\frac{ب}{أ}$ حيث $أ \times ب \neq ٠$

يمكن استخدام هذه الخاصيّة لإيجاد معادلة مستقيم يمر بنقطة ما ومتعامد مع مستقيم آخر معطى بمعادلته.

مثال (٣)

أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٤، ١) والعمودي على المستقيم الذي معادلته ص = ٢س + ٥.

الحل:

ميل المستقيم المعطى هو ٢.

ميل المستقيم العمودي عليه هو $\left(-\frac{١}{٢}\right)$.

معادلة هذا المستقيم هي على الصورة:

ص = $-\frac{١}{٢}$ س + ب

عوّض عن (س، ص) بالزوج المرتب (٤، ١).

١ = $-\frac{١}{٢}$ (٤) + ب

١ = −٢ + ب

ب = ٣

∴ ص = $-\frac{١}{٢}$ س + ٣ وهي المعادلة المطلوبة.

إرشاد:

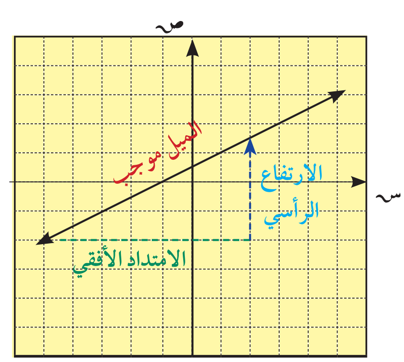
بعد إيجاد ميل المستقيم المتعامد، أوجد ناتج ضرب الميلين وتحقق أنه يساوي −١.

حاول أن تحل

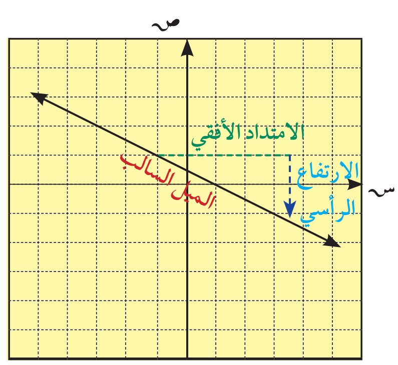
٣ أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٣، ٤) والعمودي على المستقيم الذي معادلته ص = $\frac{٣}{٥}$ س + ٦.

درست فيما سبق أن الرياضيين يستخدمون مصطلح الميل ليصفوا انحدار الخط. هذا يربط التغيّر الرأسي بالتغيّر الأفقي. ويسميّان غالبًا الارتفاع الرأسيّ the rise والامتداد الأفقي the run.

- المستقيم الذي يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات يكون ميله موجبًا.
- المستقيم الذي يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات يكون ميله سالبًا.
- المستقيم الرأسي ليس له ميل.
- المستقيم الأفقي ميله يساوي صفرًا.



الميل = $\frac{\text{الارتفاع الرأسي}}{\text{الامتداد الأفقي}}$



الميل = $\frac{\text{الارتفاع الرأسي}}{\text{الامتداد الأفقي}}$

مثال (٤) تطبيقات حياتية

قررت إدارة الحديقة العامة في السالمية إنشاء طريق للدراجات الهوائية يبدأ من مدخل الحديقة ويكون متعامدًا مع الطريق الرئيسي للمشاة داخل الحديقة. أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمثل طريق الدراجات. (انظر الشكل).

الحل:

ميل خط المشاة = $\frac{٢}{١}$ = ٢

ميل خط الدراجات = $-\frac{١}{٢}$

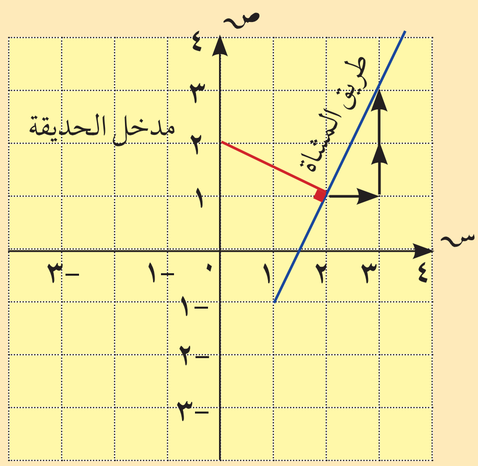
معادلة خط الدراجات هي على الصورة ص = $-\frac{١}{٢}$ س + ب

يمر هذا الخط بالنقطة (٠، ٢) إذًا

٢ = $-\frac{٢}{١}$ (٠) + ب

٢ = ب

معادلة خط الدراجات هي ص = $-\frac{١}{٢}$ س + ٢



مثال (٥)

يمر جدول ماء بالقرب من حديقة جاسم. يريد جاسم مد خرطوم ماء لري الحديقة بحيث يكون طوله أقصر ما يمكن. ساعد جاسم على تحقيق ذلك.

الحل:

يبيّن الرسم جدول الماء (باللون الأزرق) وحديقة جاسم (باللون الأحمر).

ميل جدول الماء = $\frac{٢}{-٢}$ = −١

إذًا ميل المستقيم من حديقة جاسم إلى الجدول هو: $\frac{-١}{-١}$ = ١

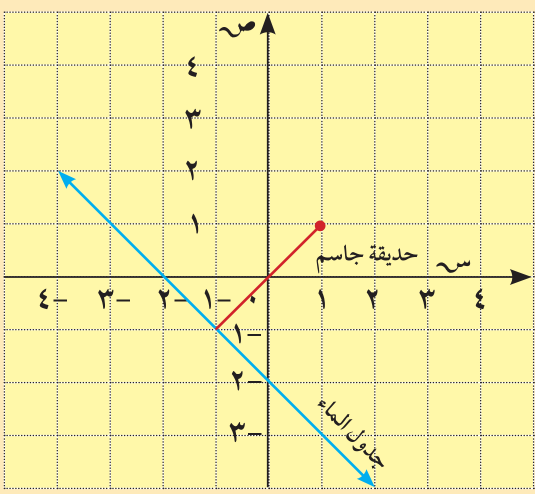
ومعادلته: ص = ١ س + ب

نعوّض عن (س، ص) بإحداثيات الحديقة (١، ١)

١ = ١(١) + ب أي ب = ٠ ومنه ص = س.

نرسم بيانيًّا المستقيم الذي معادلته ص = س.

يمثل هذا المستقيم الخط حيث يمر خرطوم المياه.



١–٨

حل نظام معادلتَين خطيتَين

Solving a System of Two Linear Equations

سوف تتعلم

- حل نظام معادلتين خطيتين بيانيًّا
- حل نظام معادلتين خطيتين باستخدام طريقة الحذف
- حل نظام معادلتين خطيتين بيانيًّا باستخدام طريقة التعويض

معلومة مفيدة (تكنولوجيا)

لإدخال البيانات في الآلة الحاسبة، نعتمد الصيغة:

١ MODE EQN $a_n x + b_n y = c_n$

أو

٢ MODE MODE EQN 2 Unknowns

يظهر على الشاشة

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} ١ \\ ٢ \end{array} & \left[\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right] \end{array}$$

ملاحظة: ١ معظم الآلات الحاسبة تعتمد الصيغة

أس + ب ص = جـ ، $ax + by = c$

٢ تختلف صيغة إدخال البيانات من آلة حاسبة إلى أخرى لذلك ينصح بمراجعة الدليل المرفق بكل آلة حاسبة.

معلومة رياضية:

نستخدم الأقواس الكبيرة } قبل كتابة نظام المعادلات.

استكشاف: تحليل الرسوم البيانية

١ أ $\begin{cases} \text{ص} = ٢\text{س} + ٣ \\ \text{ص} = -\text{س} + ١ \end{cases}$ ب $\begin{cases} \text{ص} = ٢\text{س} + ١ \\ \text{ص} = ٢\text{س} \end{cases}$ جـ $\begin{cases} \text{ص} = ٢\text{س} + ٢ \\ ٤\text{س} - ٢\text{ص} + ٤ = ٠ \end{cases}$

٢ لكل زوج من المعادلات أجب عن الأسئلة التالية:

أ هل للرسوم البيانية نقاط مشتركة؟ ما عددها؟

ب قارن بين ميلي كل زوج من المعادلات الخطية. ما العلاقة بين عدد النقاط المشتركة والميلين؟

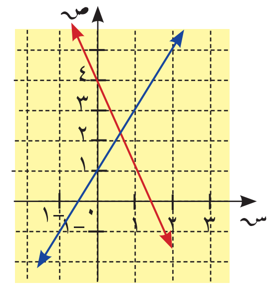
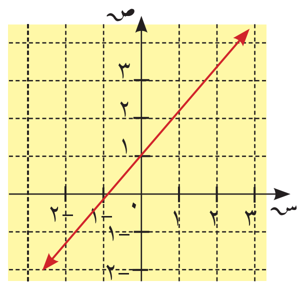
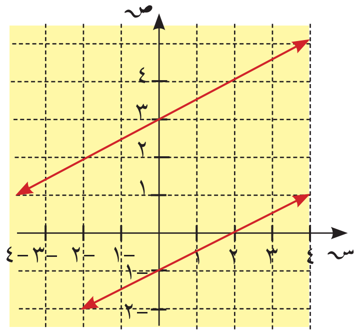
نظام معادلات هو مجموعة من معادلتين أو أكثر تستخدم المتغيرات نفسها. إذا كان الرسم البياني لكل معادلة في نظام من معادلتين هو خط مستقيم، فإن النظام يدعى نظامًا خطيًّا.

فمثلًا $\begin{cases} ٢\text{س} + ٣\text{ص} = ٤ \\ -\text{س} + ٢\text{ص} = ٣ \end{cases}$ هو نظام خطي

حل نظام معادلات هو إيجاد قيم المتغيرات التي تحقق كل معادلات النظام.

يمكن حل نظام معادلتين خطيتين هندسيًّا بتمثيل معادلاتهما بيانيًّا.

يمكن لنظام معادلتين خطيتين أن يكون له حل واحد أو لا حل، أو عدد لانهائي من الحلول.

		
المستقيمان متقاطعان للنظام حل واحد	المستقيمان منطبقان للنظام عدد لانهائي من الحلول	المستقيمان متوازيان لا حل للنظام

مثال (١)

أوجد مجموعة حل النظام { ٢س – ٣ص = ١ ، ٣س + ٤ص = ١٠ } بيانيًّا وتحقق من الحل.

الحل:

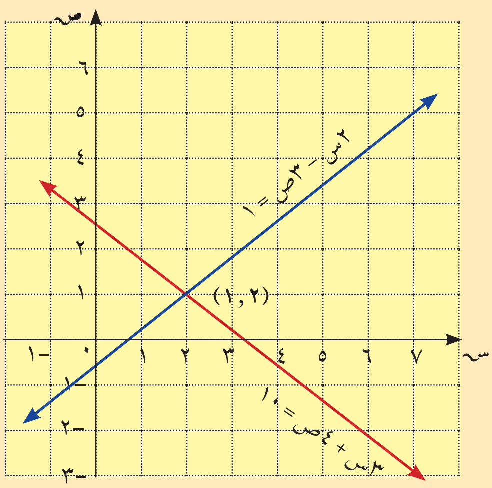
ارسم بيانيًّا المستقيم الذي يمثل كل معادلة، وأوجد نقطة تقاطع المستقيمين. يبدو أن الحل هو (٢، ١).

تحقق:

تحقق ما إن كان الزوج المرتب (٢، ١) يحقق كلتا المعادلتين.

٢س – ٣ص = ١	٣س + ٤ص = ١٠
٢(٢) – ٣(١) ؟= ١	٣(٢) + ٤(١) ؟= ١٠
٤ – ٣ ؟= ١	٦ + ٤ ؟= ١٠
١ ؟= ١ ✓	١٠ = ١٠ ✓

∴ مجموعة حل النظام = {(٢، ١)}



حاول أن تحل

١ أوجد مجموعة حل النظام { ٢س + ص = ٥ ، –س + ص = –١ } بيانيًّا وتحقق من الحل.

يمكن حل نظام معادلتين خطيتين جبريًّا **بطريقة الحذف**. نستخدم خاصية الجمع والضرب في المعادلات.

مثال (٢)

استخدم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حل النظام $\begin{cases} ٢س - ص = ٣ \\ ٣س + ص = ٧ \end{cases}$

الحل:

$\begin{cases} ٢س - ص = ٣ \\ ٣س + ص = ٧ \end{cases}$ ① معامل ص في المعادلة الثانية هو المعكوس الجمعي ② لمعامل ص في المعادلة الأولى لذلك نجمع المعادلتين

٥س = ١٠

س = ٢

٣س + ص = ٧ اختر إحدى المعادلتين

٣(٢) + ص = ٧ عوّض عن س بـ ٢ في المعادلة ②

٦ + ص = ٧ بسِّط

ص = ١

مجموعة الحل = {(٢، ١)}.

ملاحظة:
يمكن معرفة ما إذا كان للنظام حل واحد بمقارنة ميلي المستقيمين: إذا اختلف ميلا المستقيمين، فيكون للنظام حل واحد.

حاول أن تحل

② استخدم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حل النظام $\begin{cases} ٢س + ٣ص = ١١ \\ -٢س + ٤ص = ١٠ \end{cases}$

يمكن أن تحوّل صيغ معادلتي النظام بحيث يصبح معاملا ص (أو س) كل منهما المعكوس الجمعي للآخر باستخدام خاصيّة الضرب في المعادلات.

مثال (٣)

استخدم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حل النظام $\begin{cases} ٢س + ٣ص = ٣ \\ ٣س - ٥ص = ١٤ \end{cases}$

الحل: ٢س + ٣ص = ٣ ①

٣س - ٥ص = ١٤ ②

٢س + ٣ص = ٣... اضرب المعادلة ① في ٥ ⟵ ١٠س + ١٥ص = ١٥

٣س - ٥ص = ١٤... اضرب المعادلة ② في ٣ ⟵ ٩س - ١٥ص = ٤٢ اجمع

١٩س = ٥٧

س = ٣

٢س + ٣ص = ٣ اختر إحدى المعادلتين

٢(٣) + ٣ص = ٣ عوّض عن س بـ ٣ في المعادلة ١

٦ + ٣ص = ٣

٣ص = -٣

ص = -١

مجموعة الحل = {(٣، -١)}

حاول أن تحل

٣ استخدم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حل النظام $\left\{\begin{array}{l} ٢م + ٣ل = ١٢ \\ ٥م - ل = ١٣ \end{array}\right.$

يمكن أيضًا حل نظام معادلتين جبريًا **بطريقة التعويض.**

حدّد قيمة أحد المتغيرين بدلالة الآخر في إحدى المعادلتين، وعوّض عنه بقيمته في المعادلة الثانية.

مثال (٤)

استخدم طريقة التعويض لإيجاد مجموعة حل النظام $\left\{\begin{array}{l} ٣س - ص = ١ \\ ٣س - ٢ص = ٥ \end{array}\right.$.

الحل: في المعادلة الأولى (تم اختيارها لأنها أسهل)، حدّد قيمة ص بدلالة س.

٣س - ص = ١

ص = ٣س - ١

في المعادلة الثانية عوّض عن ص بقيمتها:

٣س - ٢(٣س - ١) = ٥

٣س - ٦س + ٢ = ٥ بسِّط

-٣س = ٣

س = -١

عوّض عن س بـ (-١) في ص = ٣س - ١

ص = ٣(-١) - ١

ص = -٤

مجموعة الحل: {(-١؛ -٤)}

حاول أن تحل

٤ أوجد مجموعة حل النظام $\left\{\begin{array}{l} ت = ٢ر + ٣ \\ ٥ر - ٤ت = ٦ \end{array}\right.$ مستخدمًا طريقة التعويض.

مثال (٥) تطبيقات حياتية

دفع محمد ٢,٨٠٠ دينار ثمن ٦ أكواب شاي وقطعتي حلوى، ودفع سالم في المكان نفسه ٥,٢٠٠ دنانير ثمن كوبين من الشاي و٦ قطع حلوى. ما سعر كوب الشاي وما سعر قطعة الحلوى؟

الحل:

ليكن ش سعر كوب الشاي وحـ سعر قطعة الحلوى

محمد	٦ أكواب شاي ٦ × ش	و +	قطعتا حلوى ٢ × حـ	دفع =	٢,٨٠٠ دينار = ٢,٨٠٠
سالم	كوبان من الشاي ٢ × ش	و +	٦ قطع حلوى ٦ × حـ	دفع =	٥,٢٠٠ دنانير = ٥,٢٠٠

لمعرفة الأسعار نحل النظام: $\left\{ \begin{array}{l} \text{٦ش + ٢حـ = ٢,٨٠٠} \\ \text{٢ش + ٦حـ = ٥,٢٠٠} \end{array} \right.$

باستخدام أي من الطرائق التي سبق عرضها نحصل على: ش = ٠,٢٠٠، حـ = ٠,٨٠٠.

أي أن سعر كوب الشاي = ٠,٢٠٠ دينار، وسعر قطعة الحلوى = ٠,٨٠٠ دينار.

حاول أن تحل

٥ وزعت ٦ كجم من المربيات في ١٤ عبوة، بعض العبوات يحتوي على ٥٠٠ جم وبعضها الآخر على ٣٧٥ جم. ما عدد العبوات من كل نوع؟

١ – ٩ حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد
Solving Quadratic Equations in One Variable

سوف تتعلم

- قانون حل المعادلات من الدرجة الثانية
- استخدام المميز Δ
- المقارنة بين المعادلة والشكل البياني للدالة من الدرجة الثانية باستخدام Δ
- مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة
- إيجاد معادلة من الدرجة الثانية إذا علم جذراها

دعنا نفكر ونتناقش

سبق أن قمت بحلّ بعض معادلات الدرجة الثانية بالتحليل، كما في المثال التالي:

حلّ المعادلة: س^{٢} – ٧س + ١٠ = ٠

الحل:

س^{٢} – ٧س + ١٠ = ٠

(س – ٢)(س – ٥) = ٠

∴ س – ٢ = ٠ أو س – ٥ = ٠

أي س = ٢ أو س = ٥

إذًا حلّ المعادلة هو س = ٢ أو س = ٥

لكن بعض المعادلات يصعب (أو لا يمكن) حلها بالتحليل.

لذلك نبحث عن طريقة أخرى هي بإكمال المربع، كما في المثال التالي:

حلّ المعادلة: س^{٢} + ٦س – ٥ = ٠

الحل: نأخذ المربع الكامل: (س + ص)^{٢} = س^{٢} + ٢س ص + ص^{٢}

وبالمقارنة مع المعادلة ٢س ص = ٦س

نحصل على ص = ٣، ص^{٢} = ٩

وعليه، لحل المعادلة نضيف للطرفين ص^{٢} = ٩ لنحصل على مربع كامل.

س^{٢} + ٦س = ٥

س^{٢} + ٦س + ٩ = ٥ + ٩ بإكمال المربع للمقدار س^{٢} + ٦س

(س + ٣)^{٢} = ١٤

س + ٣ = $\pm\sqrt{١٤}$

س = –٣ + $\sqrt{١٤}$ أو س = –٣ – $\sqrt{١٤}$

إن طريقة إكمال المربع تصلح لحل أي معادلة من الدرجة الثانية.

١ – حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد بإكمال المربع:
Solving Quadratic Equation by Completing the Square

مثال (١)

أوجد مجموعة حلّ المعادلة: س^{٢} + ١٠س = –١٦ بإكمال المربع.

الحل:

نكمل س^{٢} + ١٠س لتصبح مربعًا كاملًا،

إرشاد:

لإكمال المربع نضيف إلى الطرفين $\left(\frac{١}{٢}\right.$ معامل س$\left.\right)^{٢}$

بإضافة ٢٥ إلى طرفي المعادلة نجد أن:

$$س^{٢} + ١٠س + ٢٥ = -١٦ + ٢٥$$

$$(س + ٥)^{٢} = ٢٥ - ١٦$$

$$(س + ٥)^{٢} = ٩$$

$$س + ٥ = \pm ٣$$

$س = -٥ \pm ٣$ أي $س = -٢$ أو $س = -٨$

حاول أن تحل

١ حلّ المعادلة: $س^{٢} - ٨س = -١٥$ بإكمال المربع.

٢- استخدام القانون لحل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد

Solving Quadratic Equations by Using the Quadratic Formula

تستخدم طريقة إكمال المربع لاستنتاج قانون عام لحل أي معادلة من الدرجة الثانية على الصورة: $أس^{٢} + ب س + جـ = ٠$،
وذلك بأخذ مثال عددي: حلّ المعادلة: $٢س^{٢} + ٦س + ١ = ٠$

المثال العددي:

$$٢س^{٢} + ٦س + ١ = ٠$$

$س^{٢} + \frac{٦}{٢}س + \frac{١}{٢} = ٠$ بالقسمة على ٢. لماذا؟

$$س^{٢} + ٣س = -\frac{١}{٢}$$

$$س^{٢} + ٢\left(\frac{٣}{٢}\right)س + \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢} = \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢} - \frac{١}{٢}$$

$$\left(س + \frac{٣}{٢}\right)^{٢} = \frac{٩}{٤} - \frac{١}{٢}$$

$$\left(س + \frac{٣}{٢}\right)^{٢} = \frac{٧}{٤}$$

$$س + \frac{٣}{٢} = \pm\sqrt{\frac{٧}{٤}}$$

$$س = \frac{-٣ \pm \sqrt{٧}}{٢}$$

الصورة العامة:

$$أس^{٢} + ب س + جـ = ٠$$

$س^{٢} + \frac{ب}{أ}س + \frac{جـ}{أ} = ٠$ بالقسمة على أ حيث $أ \neq ٠$

$$س^{٢} + \frac{ب}{أ}س = -\frac{جـ}{أ}$$

$$س^{٢} + ٢\left(\frac{ب}{٢أ}\right)س + \left(\frac{ب}{٢أ}\right)^{٢} = \left(\frac{ب}{٢أ}\right)^{٢} - \frac{جـ}{أ}$$

$$\left(س + \frac{ب}{٢أ}\right)^{٢} = \frac{ب^{٢}}{(٢أ)^{٢}} - \frac{جـ}{أ}$$

$$\left(س + \frac{ب}{٢أ}\right)^{٢} = \frac{ب^{٢} - ٤أجـ}{٤أ^{٢}}$$

$$س + \frac{ب}{٢أ} = \pm\sqrt{\frac{ب^{٢} - ٤أجـ}{٤أ^{٢}}}$$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

من ذلك نستنتج أن:

القانون العام لحل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد:
حلّ المعادلة: $أس^{٢} + ب س + جـ = ٠$، حيث $أ \neq ٠$ هو: $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$

٣- حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد باستخدام القانون:

Solving Quadratic Equation in one Variable Using Formula

مثال (٢)

حلّ المعادلة: س^{٢} + ١٠ س = −١٦ باستخدام القانون.

ثم تحقق من صحة الناتج باستخدام التحليل.

الحل:

س^{٢} + ١٠ س + ١٦ = ٠ بوضع المعادلة على الصورة العامة

بمقارنة ذلك بالصورة العامة

أس^{٢} + ب س + جـ = ٠

أ = ١، ب = ١٠، جـ = ١٦

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ} \qquad (١)$$

ب^{٢} − ٤أجـ = (١٠)^{٢} − ٤ × ١ × ١٦ = ٣٦

$\sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}$ = ٦

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ} = \frac{-١٠ \pm ٦}{٢ \times ١}$$ بالتعويض في القانون

س = $\frac{-١٠ + ٦}{٢}$ أو س = $\frac{-١٠ - ٦}{٢}$

س = $\frac{-٤}{٢}$ أو س = $\frac{-١٦}{٢}$

س = −٢ أو س = −٨

وهو ما حصلنا عليه في المثال (١) باستخدام إكمال المربع.

وإذا استخدمنا التحليل نصل إلى النتيجة نفسها (حاول ذلك بنفسك).

حاول أن تحل

٢ باستخدام القانون، أوجد مجموعة حل المعادلة:

أ س^{٢} − ٦س + ٥ = ٠ ب س(س − ٢) = ٧

مثال (٣)

حلّ المعادلة: ٢س^{٢} + ٤س − ٧ = ٠

الحل: أ = ٢ ، ب = ٤ ، جـ = −٧

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$ حيث $ب^٢ - ٤أجـ = ٤^٢ - ٤(٢)(-٧) = ١٦ + ٥٦ = ٧٢$

$س = \frac{-٤ \pm \sqrt{٧٢}}{٤} = \frac{-٤ \pm ٦\sqrt{٢}}{٤} = \frac{-٢ \pm ٣\sqrt{٢}}{٢}$

$س = \frac{-٢ + ٣\sqrt{٢}}{٢} \simeq ١,١٢١٣$ أو $س = \frac{-٢ - ٣\sqrt{٢}}{٢} \simeq -٣,١٢١٣$

حاول أن تحل

٣ أوجد مجموعة حلّ المعادلة: $٤س^٢ = ١٣س - ٩$

مثال (٤) **تطبيقات حياتية**

حركة الصواريخ: قامت جمعية للعلوم بصنع نموذج صاروخ، وتم إطلاقه من سطح الأرض بسرعة ٣٠ مترًا/ ثانية. بعد كم ثانية يصل الصاروخ إلى ارتفاع ٤٠ مترًا؟ علمًا بأن العلاقة بين الارتفاع (ف) بالمتر، والزمن (ن) بالثانية، وسرعة الإطلاق (س) بالمتر/ ثانية، والارتفاع ($ف_٠$) الذي أطلق منه بالمتر تعطى بالعلاقة:

$ف = -٥ن^٢ + س ن + ف_٠$ (١)

الحل:

بالتعويض في (١) عن ف، س،

حيث $ف_٠ = ٠$ (لأنه أطلق من سطح الأرض) نجد أن:

$-٥ن^٢ + ٣٠ن = ٤٠$ (٢)

$-٥ن^٢ + ٣٠ن - ٤٠ = ٠$

$أ = -٥،\ ب = ٣٠،\ جـ = -٤٠$

$ن = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$ حيث $ب^٢ - ٤أجـ = (٣٠)^٢ - ٤(-٥)(-٤٠)$

$= ٩٠٠ - ٨٠٠ = ١٠٠$

$\sqrt{ب^٢ - ٤أجـ} = ١٠$

$ن = \frac{-٣٠ \pm ١٠}{٢(-٥)}$

$ن = \frac{-٣٠ + ١٠}{-١٠} = ٢$ أو $ن = \frac{-٣٠ - ١٠}{-١٠} = ٤$

يكون الصاروخ على ارتفاع ٤٠ مترًا من نقطة إطلاقه بعد ثانيتين (٢ ثانية) أو ٤ ثوانٍ.

حاول أن تحل

٤ قذفت رصاصة عموديًّا إلى أعلى بسرعة ٤٠ مترًا/ ثانية. أوجد الزمن (ن ثانية) الذي تستغرقه الرصاصة كي تصل إلى ارتفاع ٨٠ مترًا علمًا أن العلاقة بين الزمن (ن) والارتفاع (ف) والسرعة (ع) هي:

ف = −٥ن^{٢} + ع ن، ع = السرعة بالمتر/ ث.

٤- استخدام المميز Δ: Using the Discriminant

من القانون العام لحل المعادلة: أب^{٢} + ب س + جـ = ٠ حيث أ ≠ ٠

تكون الصورة العامة لجذري المعادلة كالتالي:

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} + \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}}}{٢\text{أ}} \text{ ، س} = \frac{-\text{ب} - \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}}}{٢\text{أ}}$$

يسمى Δ = ب^{٢} − ٤أجـ **المميز**، وقد يكون الناتج عددًا موجبًا أو صفرًا أو عددًا سالبًا لأنه يميّز لنا **نوع جذري** المعادلة من حيث كونهما: **عددين حقيقيين مختلفين، إذا كان المميز موجبًا**

أو عددين حقيقيين متساويين، إذا كان المميز يساوي صفرًا

أو عددين غير حقيقيين، إذا كان المميز سالبًا.

ويتضح ذلك من الأمثلة التالية:

مثال (٥)

أوجد نوع جذري المعادلة: س^{٢} + ٢س − ٣ = ٠ وتحقق من نوع الجذرين جبريًّا وبيانيًّا.

الحل:

أ = ١ ، ب = ٢ ، جـ = −٣

المميز: Δ = ب^{٢} − ٤أجـ = (٢)^{٢} − ٤(١)(−٣) = ٤ + ١٢ = ١٦

وحيث إنه عدد موجب، إذًا الجذران هما عددان حقيقيان مختلفان.

- يمكن التحقق من ذلك بحل المعادلة جبريًّا:

س^{٢} + ٢س − ٣ = ٠

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\Delta}}{٢\text{أ}}$$

$$\text{س} = \frac{-٢ \pm \sqrt{١٦}}{٢} = \frac{-٢ \pm ٤}{٢}$$

س = +١ أو س = −٣

ومن الواضح أن الجذرين عددان حقيقيان مختلفان.

معلومة مفيدة:

عند رسم بيان

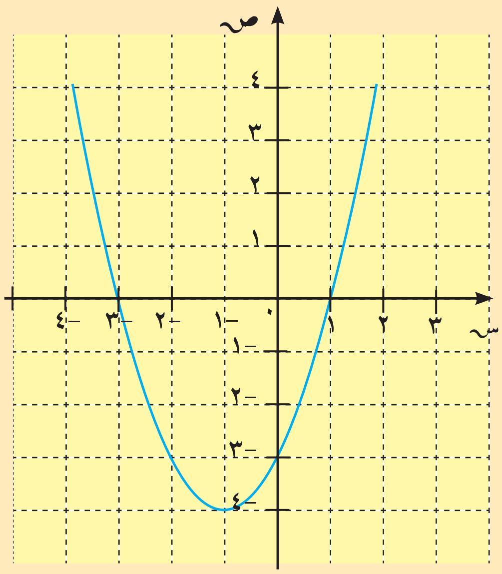
ص = أس^{٢} + ب س + جـ

حيث أ ≠ ٠، يكون رأس المنحنى

عند س = $\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}}$

التحقق **بيانيًّا**:

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢
ص	٠	-٣	-٤	-٣	٠	٤



يبيّن الرسم البياني نقطتي تقاطع مع محور السينات.

تكتب المعادلة $س^٢ + ٢س - ٣ = ٠$ على الصورة $(س + ١)^٢ - ٤ = ٠$

$\therefore$ بيان الدالة $ص = س^٢ + ٢س - ٣$ هو انسحاب لدالة المرجع $ص = س^٢$ وحدة واحدة جهة اليسار، ٤ وحدات إلى الأسفل.

حاول أن تحل

٥ أوجد نوع جذري المعادلة: $٢س^٢ - ٥س + ٢ = ٠$، تحقق من الحل جبريًّا وبيانيًّا.

مثال (٦)

أوجد نوع جذري المعادلة: $٤س^٢ + ٤س + ١ = ٠$. وتحقق من نوع الجذرين جبريًّا وبيانيًّا.

الحل: $أ = ٤$، $ب = ٤$، $جـ = ١$

المميز: $\Delta = ب^٢ - ٤أجـ = (٤)^٢ - ٤ \times ٤ \times ١ = ١٦ - ١٦ = ٠$

وحيث إن المميز يساوي صفرًا، فالجذران حقيقيان ومتساويان

وللتحقق من ذلك **جبريًّا**:

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$$

$$س = \frac{-٤ \pm ٠}{٢ \times ٤}$$

$$س = \frac{-٤ + ٠}{٨} = -\frac{١}{٢}$$

$$س = \frac{-٤ - ٠}{٨} = -\frac{١}{٢}$$

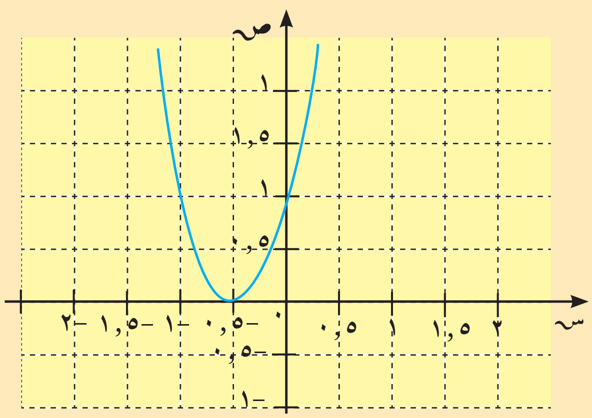
أي أن الجذرين متساويان وكل منهما يساوي $-\frac{١}{٢}$

معلومة مفيدة:

لحل معادلة تربيعية باستخدام الحاسبة نضغط على MODE ، EQN ثم QUAD أو $ax^2 + bx + c = 0$. يظهر على الشاشة $[\ \overset{a}{\square}\ \overset{b}{\square}\ \overset{c}{\square}\ ]$ نعوّض بقيم أ، ب، جـ متبوعة كل مرة بالضغط على = فيظهر الجذران تباعًا.

التحقق **بيانيًّا**:

س	١	٠	-٥	-١	-٢
ص	٤	١	٠	١	٩



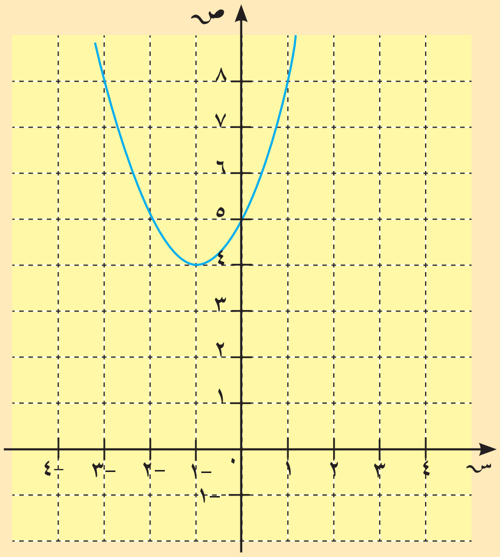
يبيّن الرسم البياني نقطة تقاطع واحدة مع محور السينات.

حاول أن تحل

٦ أوجد نوع جذري المعادلة: $س^٢ + ١٠س + ٢٥ = ٠$، تحقق من الحل بيانيًّا.

مثال (٧)

أوجد نوع جذري المعادلة: س^{٢} + ٢س + ٥ = ٠، وتحقق من الحل بيانيًّا.



الحل:

أ = ١، ب = ٢، جـ = ٥

المميز: Δ = ب^{٢} − ٤أجـ = (٢)^{٢} − ٤(١)(٥)

= ٤ − ٢٠ = −١٦ وهذا عدد سالب

إذًا الجذران تخيليان (أي غير حقيقيين) لأن $\sqrt{-١٦}$ ليس عددًا حقيقيًّا.

التحقق بيانيًّا:

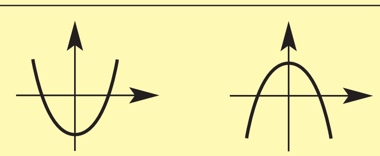
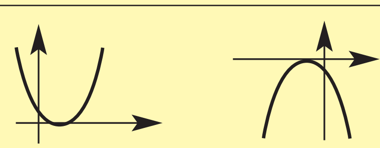
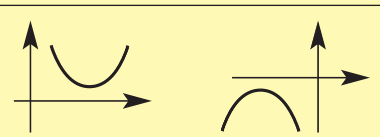
س	١	٠	−١	−٢	−٣
ص	٨	٥	٤	٥	٨

يبيّن الرسم البياني أنه لا يوجد نقاط تقاطع مع محور السينات.

حاول أن تحل

٧ أوجد نوع جذري المعادلة: س^{٢} − ٥س + ٧ = ٠، وتحقق من الحل بيانيًّا.

تعميم

المميز	نوع جذري المعادلة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠، أ ≠ ٠	التمثيل البياني للدالة ص = أس^{٢} + ب س + جـ حيث أ ≠ ٠
ب^{٢} − ٤أجـ > ٠ (عدد موجب)	الجذران حقيقيان	
ب^{٢} − ٤أجـ = ٠	الجذران حقيقيان متساويان	
ب^{٢} − ٤أجـ < ٠ (عدد سالب)	جذران غير حقيقيين (تخيليان)	

اكتب أمثلة من عندك عن معادلات من الدرجة الثانية توضح الأنواع الثلاثة للمعادلات (من حيث جذرا المعادلة) المبيّنة في الجدول المجاور.

١ إذا كانت إشارة معامل س^{٢} موجبة يكون المنحنى بالشكل ∪. (مقعرًا)

٢ إذا كانت إشارة معامل س^{٢} سالبة يكون المنحنى بالشكل ∩. (محدبًا)

٥- مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة التربيعية:

Sum and Product of Roots of a Quadratic Equation

اعتبر المعادلة: $أ$س^٢ + ب س + جـ = ٠، $أ \neq ٠$

جذرا المعادلة هما: س = $\frac{-ب + \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$ أو س = $\frac{-ب - \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$

مجموع جذري المعادلة: $\frac{-ب + \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ} + \frac{-ب - \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$

$= \frac{-ب + \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ} + (-ب - \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ})}{٢أ} = \frac{-٢ب}{٢أ} = \frac{-ب}{أ}$

ناتج ضرب الجذرين: $\left(\frac{-ب - \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}\right) \times \left(\frac{-ب + \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}\right) = \frac{ب^٢ - (ب^٢ - ٤أجـ)}{٤أ^٢} = \frac{٤أجـ}{٤أ^٢} = \frac{جـ}{أ}$

أي أن:

إذا كان جذرا المعادلة: $أ$س^٢ + ب س + جـ = ٠ هما م، ن

فإن: م + ن = $-\frac{ب}{أ}$ ، م × ن = $\frac{جـ}{أ}$

تنبيه:

المعادلة التربيعية هي معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد.

٦- إيجاد مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة:

Finding Sum and Product of Roots of a Quadratic Equation

مثال (٨)

بدون حل المعادلة، أوجد مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة: ٣س^٢ + ٢س − ٣ = ٠ إذا وجدا.

الحل: $أ$ = ٣، ب = ٢، جـ = −٣

Δ = ب^٢ − ٤$أ$جـ = ٤٠ > ٠

لمّا كان المميز موجبًا إذًا يوجد جذران حقيقيان

مجموع الجذرين: م + ن = $-\frac{ب}{أ} = -\frac{٢}{٣}$

ناتج ضرب الجذرين: م ن = $\frac{جـ}{أ} = \frac{-٣}{٣} = -١$

ويمكن التحقق من صحة النتائج بحل المعادلة.

حاول أن تحل

٨ بدون حلّ المعادلة، أوجد مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة: ٤س^٢ − ٩س + ٣ = ٠ إذا وجدا.

مثال (٩)

إذا كان مجموع جذري المعادلة: $٢س^٢ + ب س - ٥ = ٠$ يساوي ١ . فأوجد قيمة ب، ثم حلّ المعادلة.

الحل:

مجموع جذري المعادلة: $م + ن = -\frac{ب}{أ} = -\frac{ب}{٢} = ١$ ، $ب = -٢$

المعادلة: $٢س^٢ + ب س - ٥ = ٠$ تصبح: $٢س^٢ - ٢س - ٥ = ٠$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢أ}$$

$$\Delta = ب^٢ - ٤أجـ = ٤ - ٤(٢)(-٥) = ٤٤$$

$$س = \frac{-(-٢) \pm ٢\sqrt{١١}}{٢ \times ٢}$$

$$س = \frac{١ \pm \sqrt{١١}}{٢}$$

إذًا الجذران هما: $\frac{١ - \sqrt{١١}}{٢}$ أو $\frac{١ + \sqrt{١١}}{٢}$

فكر معي:

إذا كان أ، جـ مختلفي الإشارة في المعادلة: $أس^٢ + ب س + جـ = ٠$ فإن للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان.

حاول أن تحل

٩ إذا كان ناتج ضرب جذري المعادلة: $أس^٢ - ٥س + ٢ = ٠$ يساوي $\frac{٢}{٣}$. فأوجد أ، ثم حلّ المعادلة.

٧- إيجاد المعادلة التربيعية إذا علم جذراها:

Finding the Quadratic Equation Knowing its Roots

لتكن المعادلة: $أس^٢ + ب س + جـ = ٠$ ، $أ \neq ٠$ وليكن جذراها م ، ن

$$س^٢ + \frac{ب}{أ} س + \frac{جـ}{أ} = ٠$$

وحيث إن $م + ن = -\frac{ب}{أ}$ ، $م ن = \frac{جـ}{أ}$

إذًا **المعادلة على الصورة:** $س^٢ - (م + ن)س + م ن = ٠$

هي معادلة بمعلومية مجموع الجذرين وناتج ضربهما.

حلّ آخر:

ليكن م، ن جذري المعادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد

∴ المعادلة تكون على الصورة: $(س - م)(س - ن) = ٠$

∴ $س^٢ - (م + ن) س + م ن = ٠$

مثال (١٠)

أوجد المعادلة التربيعية التي جذراها ٣، ٥.

الحل:

بما أن الجذرين هما: ٣، ٥.

∴ المعادلة التربيعية على الصورة: س^{٢} − (مجموع الجذرين) س + (ناتج ضرب الجذرين) = ٠

أي س^{٢} − ٨س + ١٥ = ٠

أو حلّ آخر: المعادلة على الصورة: (س − ٣)(س − ٥) = ٠

أي س^{٢} − ٨س + ١٥ = ٠

حاول أن تحل

١٠ إذا كان جذرا المعادلة س^{٢} − ٥س + ٦ = ٠ هما ل، م فكوّن معادلة تربيعية جذراها ٢ل، ٢م.

حالة عامة: General Case

يوجد عدد لا نهائي من المعادلات يكون جذرا كلّ منها م، ن
وكلّ منها على الصورة: ك[س^{٢} − (م + ن)س + م ن] = ٠
حيث (ك) أي عدد حقيقي ≠ صفرًا.

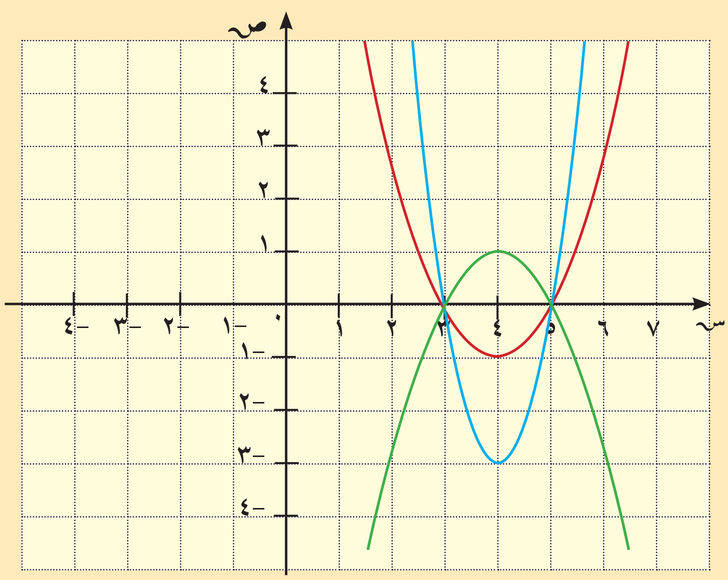
مثال (١١)

إذا كان الجذران هما ٣، ٥ فإن كلًّا من المعادلات التالية له هذان الجذران نفسهما.

س^{٢} − ٨س + ١٥ = ٠

٣(س^{٢} − ٨س + ١٥) = ٠

−(س^{٢} − ٨س + ١٥) = ٠ وهكذا (انظر الشكل المقابل).

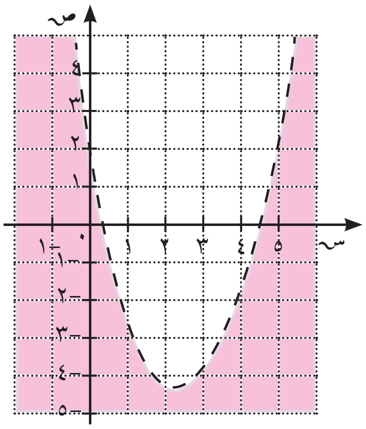


حاول أن تحل

١١ أوجد معادلتين تربيعيتين جذرا كل منهما: −٤، −٣.

حل متباينات من الدرجة الثانية بيانيا:

Solving Inequalities Using Graphs



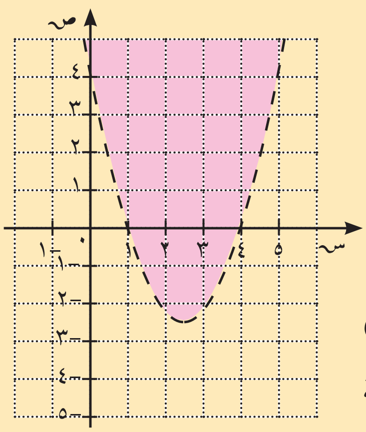
يشبه الرسم البياني لمتباينة تربيعية الرسم البياني لمتباينة خطية. يكون المنحنى **متقطعًا** إذا تضمنت المتباينة إحدى الإشارتين <، > . ويكون المنحنى خطًا غير **متقطع** إذا تضمنت المتباينة إحدى الإشارتين ≥، ≤.

عند حل متباينات من الدرجة الثانية مثل ص < س^{٢} − ٥س + ٢، مثّل منحنى الدالة المناظرة ص = س^{٢} − ٥س + ٢ وهذا المنحنى يفصل مستوى الإحداثيات إلى نقاط تكون حلولًا للمتباينة ونقاط لا تكون حلولًا لها.

المنطقة المظللة باللون الوردي هي منطقة الحل ونرسم المنحنى متقطعًا لتوضيح أنه ليس جزءًا من الحل. كذلك يمكننا إيجاد منطقة الحل باستخدام الآلة الحاسبة البيانية.

مثال (١٢)

أوجد بيانيًا حل المتباينة: ص > س^{٢} − ٥س + ٤.



الحل:

نرسم منحنى الدالة المناظرة: ص = س^{٢} − ٥س + ٤.

س	٥	٤	٣	٢,٥	١	٠
ص	٤	٠	−٢	−٢,٢٥	٠	٤

اختر أي نقطة ليست على المنحنى لنرى إذا كانت حلًّا للمتباينة ولتكن نقطة الأصل (٠، ٠) عادة هي المتاحة، إذا كانت حلًّا فتكون كل النقاط على هذا الجانب التي تقع فيه نقطة الأصل حلًّا.

أما إذا لم تكن النقطة (٠، ٠) حلًّا للمتباينة، فإن جميع النقاط التي على الجانب الآخر من المنحنى هي حلول للمتباينة.

هل ٠ > (٠)^{٢} − ٥(٠) + ٤؟   ٠ > ٤ عبارة خطأ

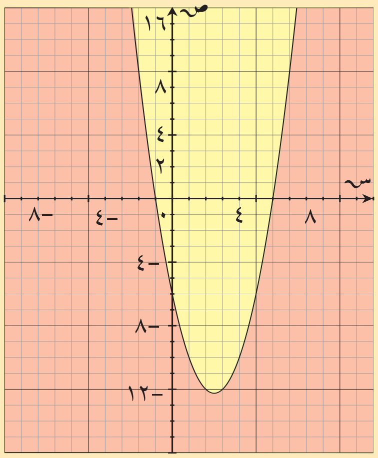
لذلك ظلل الجانب الآخر من الرسم.

حاول أن تحل

١٢ حل بيانيًّا المتباينة: ص > ٢س^{٢} + ٥س − ٣.

مثال (١٣)

أوجد بيانيًّا حل المتباينة: ص ≥ س^{٢} – ٥س – ٦.



الحل: ص ≥ س^{٢} – ٥س – ٦

نرسم منحنى الدالة المناظرة: ص = س^{٢} – ٥س – ٦.

نقطة الأصل (٠، ٠) لا تحقق المتباينة: ٠ ≥ ٠ – ٠ – ٦ أي أن ٠ ≥ –٦ عبارة خطأ

إذًا المنطقة التي تنتمي إليها نقطة الأصل ليست منطقة الحل.

حل المتباينة هو مجموعة النقاط في المنطقة الملونة بالوردي.

كذلك إحداثيات النقاط التي تشكل الرسم البياني للدالة:

ص = س^{٢} – ٥س – ٦ هي أيضًا ضمن الحل.

حاول أن تحل

١٣ حل بيانيًّا المتباينة: ص ≤ س^{٢} – ٤.

المرشد لحل المسائل

عرض مدير أحد المنتجعات الأسعار التالية خلال الموسم.

العرض أ: يدفع الشخص ٦,٥٠٠ دنانير كل مرة يدخل المنتجع.

العرض ب: يدفع الشخص ٢٨ دينارًا ثم ٣ دنانير كل مرة يدخل المنتجع.

يحاول يوسف معرفة أي من العرضين أفضل.

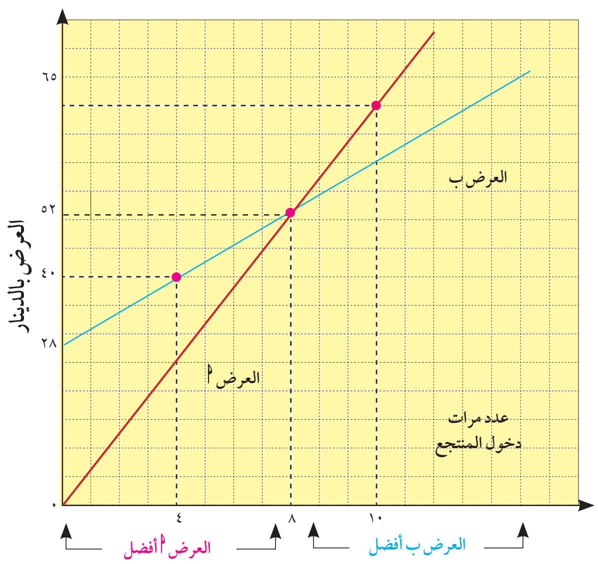
بدأ يوسف بنمذجة العرضين.

العرض أ: ص = ٦,٥٠٠ س حيث س عدد مرات دخول المنتجع، ص مجموع ما سيدفعه.

العرض ب: ص = ٢٨ + ٣س.

فكّر يوسف: إذا حللت نظام المعادلتين { ص = ٦,٥٠٠ س ، ص = ٢٨ + ٣س } أحصل على س = ٨، ص = ٥٢ أي أن العرضين يتساويان إذا دخلت ٨ مرات إلى المنتجع.

لكن يوسف لم يكتف بهذه النتيجة لأنه يريد أن يعرف بشكل عام ودون تحديد عدد مرات الدخول أي العرضين أفضل. لذلك استخدم حاسوبه ومثل بيانيًّا المعادلتين.



ما استنتجه يوسف:

١ لمن يريد الدخول أقل من ٨ مرات إلى المنتجع العرض أ هو أفضل.

٢ لمن يريد الدخول أكثر من ٨ مرات إلى المنتجع العرض ب هو أفضل.

٣ يتساوى العرضان بالدخول ٨ مرّات.

مسألة إضافية

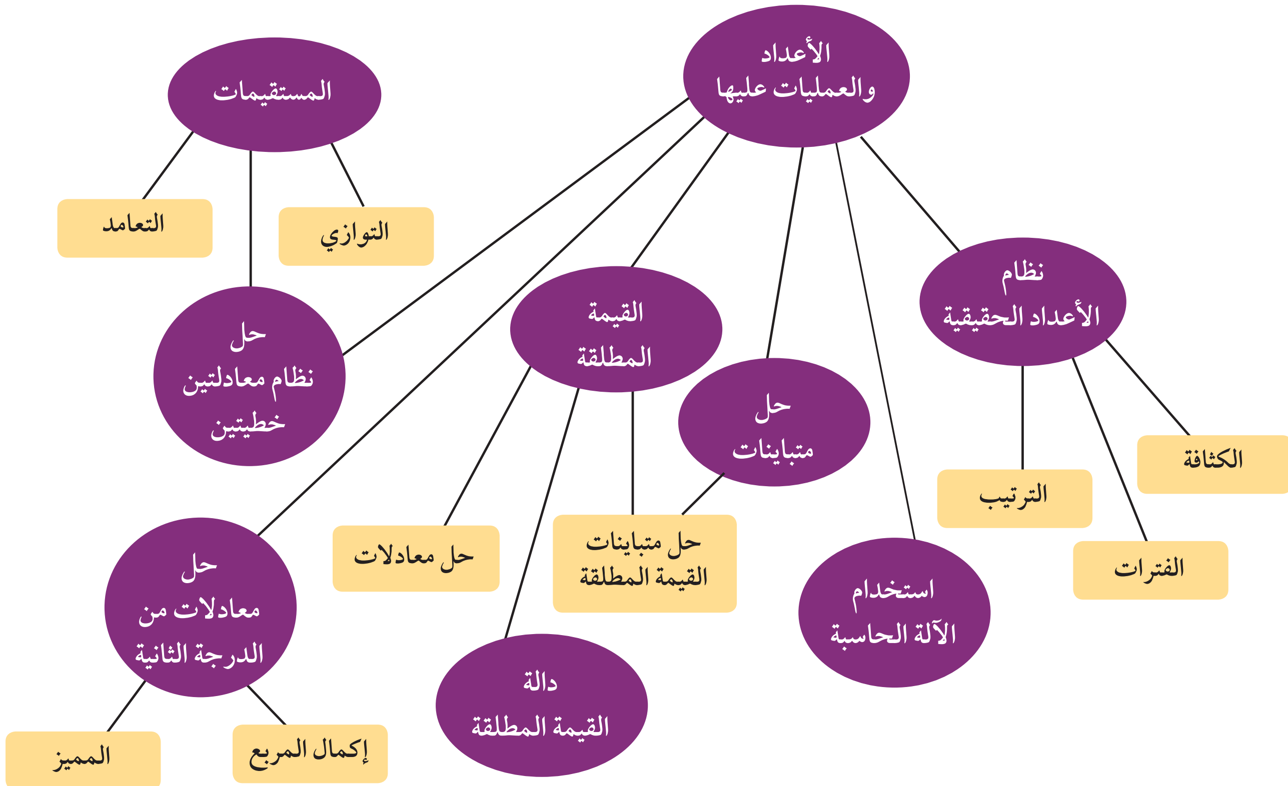
يعرض على أحد المسارح للجمهور ١٢ عملًا فنيًّا. يختار الجمهور أحد العرضين:

أ ١٠ دنانير لحضور كل عمل فني.

ب ٢٠ دينارًا ثم ٦ دنانير كل مرة يحضر عملًا فنيًّا.

وضّح أي العرضين أفضل لمن يريد حضور ٤، ٦ أعمال فنية.

مخطط تنظيمي للوحدة الأولى



ملخص

يوجد بين أي عددين حقيقيين مختلفين عدد لانهائي من الأعداد الحقيقية.

مجموعة الأعداد الحقيقية هي مجموعة مرتبة.

يمكن مقارنة أي عددين حقيقيين باستخدام المتباينات.

لأي عددين حقيقيين أ، ب تعبير واحد فقط مما يلي هو صحيح: أ > ب أو أ = ب أو أ < ب.

القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي س هي:

|س| = { س إذا كان س > ٠ ، −س إذا كان س < ٠ ، ٠ إذا كان س = ٠

|أ| ≥ ٠، |−أ| = |أ| لأي عدد حقيقي أ.

|أ × ب| = |أ| × |ب|، $\left|\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right| = \frac{|\text{أ}|}{|\text{ب}|}$ حيث ب ≠ ٠ (أ، ب عددان حقيقيان).

الفترات هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

الفترات المحدودة: [أ، ب]، [أ، ب)، (أ، ب]، (أ، ب) (أ، ب عددان حقيقيان).

الرسم البياني للدالة ص = |س + ل| حيث ل ∈ ح_+ هو انسحاب للرسم البياني للدالة ص = |س|، ل وحدة إلى جهة اليسار .

الرسم البياني للدالة ص = |س − ل| حيث ل ∈ ح_+ هو انسحاب للرسم البياني للدالة ص = |س|، ل وحدة إلى جهة اليمين .

الرسم البياني للدالة ص = |س + ل| − ك هو انسحاب أفقي ورأسي معًا لرسم الدالة ص = |س|.

يكون مستقيمان غير رأسيين متوازيين إذا كان لهما الميل نفسه.

يكون مستقيمان متعامدين إذا كان ناتج ضرب ميليهما يساوي −١ .

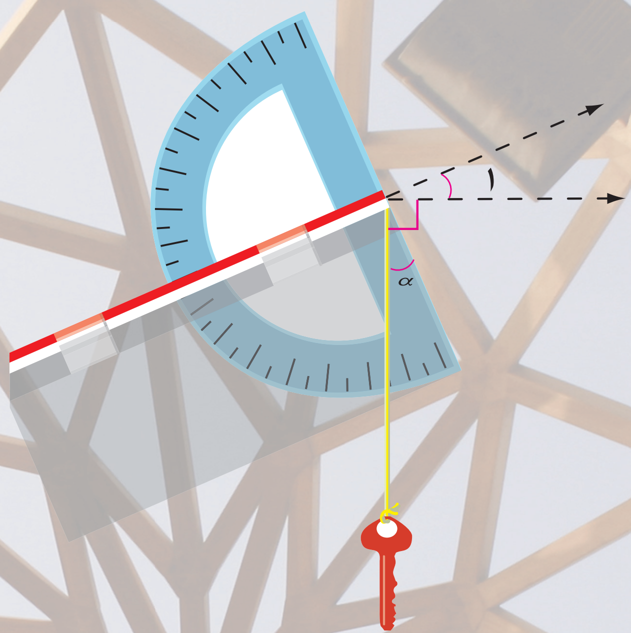
المميز: Δ = $\text{ب}^{٢}$ − ٤أجـ

حل المعادلة أ$\text{س}^{٢}$ + ب س +جـ = ٠ هو س = $\frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}}}{٢\text{أ}}$

إذا كان م، ن جذري المعادلة التربيعية، فإن م + ن = $-\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$، م × ن =

الوحدة الثانية

وحدة حساب المثلثات



مشروع الوحدة: صنع الميال (Clinometer) واستخدامه.

١ مقدمة المشروع: كيف لنا أن نعرف كم تبعد الشمس عنا من دون أن نمد أشرطة القياس لملايين الكيلومترات؟
كيف نعرف كتلة إلكترون عندما لا نستطيع أن نراه؟
أوجد الإنسان منذ القدم طرقًا للقياس غير المباشر عندما عجز عن القياس المباشر.

٢ الهدف: صنع آلة مشابهة للآلات التي استخدمها علماء الفلك الأقدمون والرحّالة لقياس ارتفاعات لا يمكن بلوغها.

٣ اللوازم: منقلة، سلك، شريط لاصق، قطعة من الورق المقوّى، مصّاصة شرب.

٤ أسئلة حول التطبيق:

أ انظر من خلال مصّاصة الشرب إلى الهدف الذي تريد قياسه (رأس برج مثلًا).
واطلب إلى أحد طلاب مجموعتك قراءة الزاوية بين المنقلة والخيط المتدلي عموديًّا مع المفتاح.
لماذا تساوي هذه الزاوية زاوية المصّاصة مع خطّ الأفق؟
(الزاوية ١ في الرسم).

ب استخدم آلة الميال لقياس حساب زاوية ارتفاع بناء مدرستك مثلًا؛ وأوجد المسافة الأفقية بينك وبين البناء ثم احسب ارتفاع البناء.

ج تختار المجموعة بعض المباني أو الأشياء الأخرى الموجودة في المدرسة أو في جوارها ثم يصار إلى قياس ارتفاعات هذه الأشياء من مسافات مختلفة.

٥ التقرير: تضع كل مجموعة تقريرًا مفصلًا حول كيفية صنع الميال وكيفية استخدامه للإجابة عن الأسئلة (أ)، (ب)، (ج).

دروس الوحدة

الزوايا وقياساتها	النسب المثلثية: الجيب وجيب التمام ومقلوباهما	ظل الزاوية ومقلوبه	زوايا الارتفاع والانخفاض	القطاع الدائري والقطعة الدائرية
٢-١	٢-٢	٢-٣	٢-٤	٢-٥

الوحدة الثانية

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت كيفية استخدام نظرية فيثاغورث لإيجاد أطوال أحد أضلاع مثلث قائم الزاوية وإيجاد علاقة بين أطوال أضلاع مثلثات قائمة الزاوية في حالات خاصة، وتطبيق نظرية فيثاغورث على مسائل حياتية.
- تعلمت كيفية إثبات تشابه مثلثات واستنتاج أطوال الأضلاع المتناسبة والزوايا المتساوية القياس.
- استخدمت تشابه المثلثات في حل مسائل حياتية.
- تعلمت تطابق المثلثات واستنتجت تطابق الأضلاع المتناظرة والزوايا المتساوية القياس.

ماذا سوف تتعلم؟

- سوف تتعرف الزاوية الموجهة لتستنتج الزاوية الموجبة والزاوية السالبة والزاوية في الوضع القياسي.
- سوف تتعرف القياس الستيني والقياس الدائري والعلاقة بينهما.
- سوف تستخدم تشابه المثلثات القائمة لتعريف النسب المثلثية.
- سوف تستخدم النسب المثلثية لتحل مسائل حياتية تتضمن إيجاد ارتفاعات ومسافات وزوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض.
- سوف تستخدم النسب المثلثية لإيجاد مساحة المثلث بدلالة ضلعين والزاوية المحصورة بينهما وإيجاد مساحة القطاع الدائري ومساحة القطعة الدائرية.

المصطلحات الأساسية

زاوية موجهة - زاوية موجبة - زاوية سالبة - زاوية في الوضع القياسي - قياس ستيني - قياس دائري - جيب الزاوية - جيب تمام الزاوية - قاطع الزاوية - قاطع تمام الزاوية - ظل الزاوية - ظل تمام الزاوية - زاوية الارتفاع - زاوية الانخفاض - القطاع الدائري - القطعة الدائرية.

أضف إلى معلوماتك

يذكر بعض المؤرخين أن الرياضي العربي نصير الدين الطوسي هو أول من فصل حساب المثلثات عن الفلك، كما يذكر المؤرخون أن طاليس (٦٠٠ قبل الميلاد) تطرق إلى حساب المثلثات، عندما تمكن من قياس ارتفاع الهرم عن طريق المقارنة بين طول عصًا عمودية وطول ظلها وبين ارتفاع الهرم وطول ظله في الوقت نفسه.

ولقد كان لحساب المثلثات نصيبه من اهتمامات العرب. ويذكر أن اصطلاح «الظل» قد وصفه العالم العربي أبو الوفا البوزجاني في القرن العاشر الميلادي. وهذا الاصطلاح مأخوذ من ظلال الأجسام، التي تتكون نتيجة سير الضوء المنبعث من الشمس في خطوط مستقيمة.

كما أن للعرب إضافات عديدة في حساب المثلثات المستوي والكري أو الكروي (نسبة إلى سطح الكرة)، وعنهم أخذ الغربيون المعلومات المهمة وأضافوا أيضًا الكثير، حتى أصبح حساب المثلثات متضمنًا في الكثير من الأبحاث الرياضية، وأصبحت تطبيقاته في شتى المناحي العلمية والعملية.

٢ – ١ الزوايا وقياساتها

Angles and their Measurement

سوف تتعلم

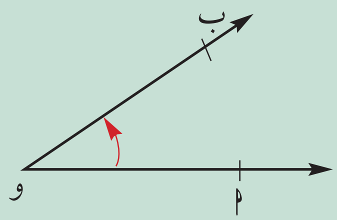
- الزاوية الموجهة
- الزاوية الموجهة الموجبة
- الزاوية الموجهة السالبة
- الزاوية في الوضع القياسي
- أنظمة قياس الزاوية
- القياس الستيني
  - أجزاء الدرجة
- القياس الدائري
  - طول القوس
  - الزاوية النصف قطرية
- العلاقة بين القياسين الدائري والستيني

دعنا نفكر ونتناقش

١ – الزاوية: Angle

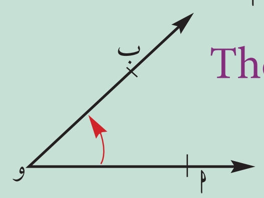
تعلمنا سابقًا أن الزاوية هي **اتحاد شعاعين لهما نقطة بداية واحدة تسمى «رأس الزاوية»، والشعاعان هما ضلعا الزاوية.**

الزاوية الموجهة Oriented Angle



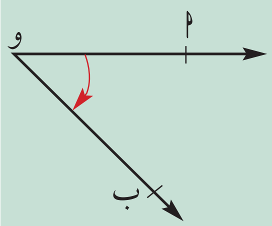
في الشكل المقابل، رأس الزاوية هو نقطة و، وضلعا الزاوية هما وأ، وب ونرمز للزاوية بالرمز: أوب وتسمى الزاوية في هذه الحالة بالزاوية الموجهة ويرمز لها أيضًا (وأ، وب) ويسمى وأ الضلع الأساسي أو الضلع الابتدائي، وب الضلع النهائي لها.

الزاوية الموجهة الموجبة: The Positive Oriented Angle



إذا كان الضلع الابتدائي هو وأ والضلع النهائي لها هو وب كما في الشكل المقابل، فإن قياس الزاوية في هذه الحالة يكون موجبًا.

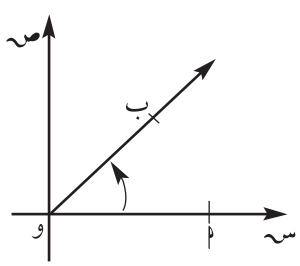
الزاوية الموجهة السالبة: The Negative Oriented Angle



إذا كان الضلع الابتدائي هو وأ والضلع النهائي هو وب كما في الشكل المقابل، فإن قياس الزاوية في هذه الحالة يكون سالبًا.

تكون الزاوية الموجهة موجبة إذا كان الانتقال من الضلع الابتدائي وأ إلى الضلع النهائي وب عكس اتجاه دوران عقارب الساعة، وتكون سالبة إذا كان الانتقال من وأ إلى وب مع اتجاه دوران عقارب الساعة.

الزاوية الموجهة في الوضع القياسي: The Angle in the Standard Position

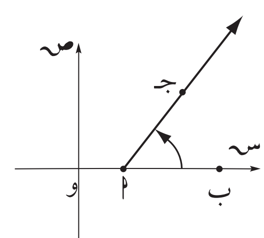


تكون الزاوية الموجهة في الوضع القياسي إذا كان الضلع الابتدائي لها على الجزء الموجب من محور السينات ورأسها نقطة الأصل كما في الشكل المقابل.

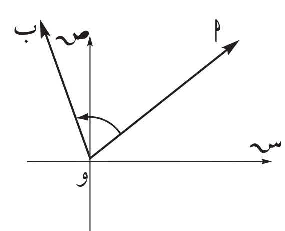
في الأشكال التالية:

أ سمّ الضلع الابتدائي والضلع النهائي، واذكر إذا كان قياس الزاوية سالبًا أو موجبًا.

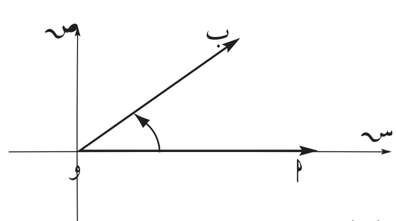
ب حدّد الزوايا الموجهة التي في وضع قياسي.



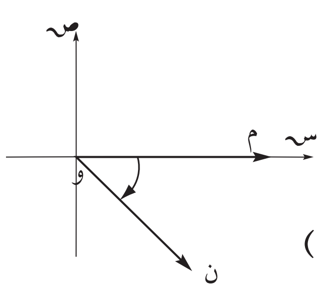
(١)



(٢)



(٣)

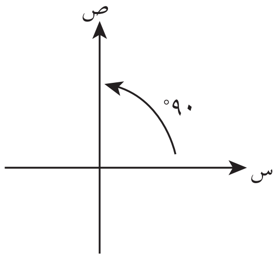


(٤)

الزاوية الربعية

Quarter Angel

هي زاوية موجهة في الوضع القياسي ينطبق ضلعها النهائي على أحد محوري الإحداثيات مثل الزوايا °٠، °٩٠، °١٨٠، °٢٧٠، °٣٦٠.



باستخدام الحاسبة يمكنك إيجاد كل من الجيب، جيب التمام والظل لكل زاوية ربعية. والجدول التالي يبيّن النسب المثلثية للزوايا الخاصة والربعية.

الزاوية هـ		جاهـ	جتاهـ	ظاهـ
القياس الستيني	القياس الدائري			
°٠	٠ د	٠	١	٠
°٣٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$
°٤٥	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	١
°٦٠	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\sqrt{٣}$
°٩٠	$\frac{\pi}{٢}$	١	٠	غير معرّف
°١٨٠	π	٠	١–	٠
°٢٧٠	$\frac{٣\pi}{٢}$	١–	٠	غير معرّف
°٣٦٠	٢π	٠	١	٠

مثال (١)

ارسم كلًّا من الزوايا الموجهة التالية في الوضع القياسي، ثم حدّد الزوايا الربعية منها.

أ °١٥٠

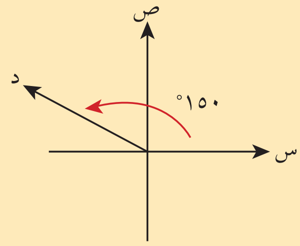
ب °٢٧٠–

جـ $\frac{٣\pi}{٤}$

د $\frac{٣\pi}{٢}$

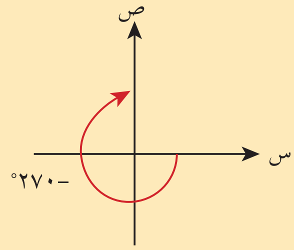
الحل:

أ



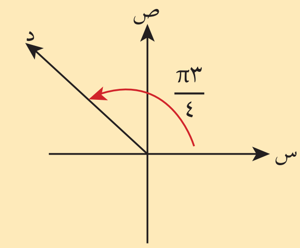
ليست زاوية ربعية

ب



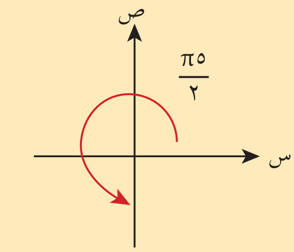
زاوية ربعية

ج



ليست زاوية ربعية

د



زاوية ربعية

حاول أن تحل

١ حدّد الزوايا الربعية من بين الزوايا التالية:

٣π، ٢٥٠°، $\frac{٥\pi}{٧}$ ، $-\frac{\pi}{٢}$، ٣٣٠°.

ملاحظة:

الدرجة = ٦٠ دقيقة

١° = ٦٠′

الدقيقة = ٦٠ ثانية

١′ = ٦٠″

٢- أنظمة قياس الزاوية: Angle Measurement Systems

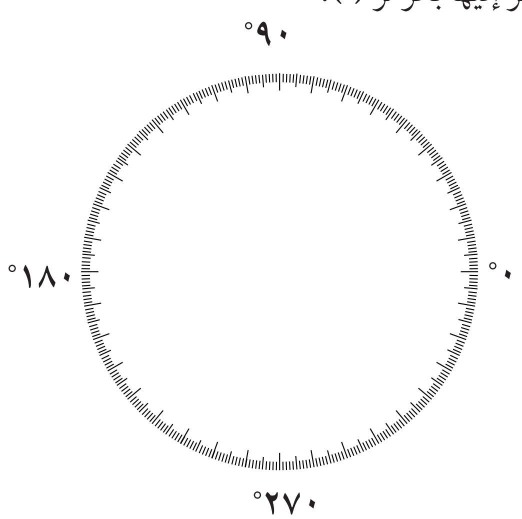
توجد أنظمة مختلفة لقياس الزاوية، أهمها القياس الستيني والقياس الدائري.

أولًا: القياس الستيني: The Degree Measure

في هذا القياس تقسم الزاوية التي تمثل دورة كاملة إلى ٣٦٠ قسمًا متساويًا، قياس كل منها يسمى درجة. وقد اتخذت هذه الدرجة وحدة لقياس الزوايا في هذا القياس ويرمز إليها بالرمز (°). قياس الزاوية القائمة يساوي ٩٠°. وقياس الزاوية المستقيمة يساوي ١٨٠°.

أجزاء الدرجة: الدقيقة minute وتساوي $\frac{١}{٦٠}$ من الدرجة ويرمز إليها بالرمز (′).

والثانية second وتساوي $\frac{١}{٦٠}$ من الدقيقة ويرمز إليها بالرمز (″).



فمثلًا سنكتب الزاوية التي قياسها ٧٥ درجة، ٤٥ دقيقة، ١٥ ثانية على الصورة التالية:

١٥″ ٤٥′ ٧٥°.

مثال (٢)

أوجد $\frac{٧}{٨}$ الزاوية القائمة بالقياس الستيني. (بالدرجات والدقائق)

الحل:

$\frac{٧}{٨}$ القائمة = $\frac{٧}{٨}$ × ٩٠° = $\left(٧٨\ \frac{٣}{٤}\right)^\circ$

لإيجاد $\frac{٣}{٤}$ الدرجة بالدقائق.

$\frac{٣}{٤}$ × درجة = $\frac{٣}{٤}$ × ٦٠′ = ٤٥′

أي أن $\frac{٧}{٨}$ القائمة = ٤٥′ ٧٨°

حاول أن تحل

٢ اكتب كلًّا مما يلي بالقياس الستيني.

أ $\frac{٧}{٣٢}$ الزاوية القائمة

ب ٠,٦٢٥ الزاوية القائمة

مثال (٣)

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد $\frac{٥}{١١}$ الزاوية المستقيمة بالقياس الستيني (بالدرجات والدقائق والثواني والأجزاء من مئة من الثانية).

الحل:

$\frac{٥}{١١}$ الزاوية المستقيمة = $\frac{٥}{١١}$ × ١٨٠°

باستخدام الآلة الحاسبة:

$\boxed{5}\ \boxed{\div}\ \boxed{11}\ \boxed{\times}\ \boxed{180}\ \boxed{{}^\circ{}'{}''}\ \boxed{=}$

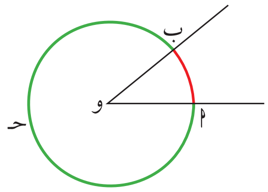
فيظهر على الشاشة $\boxed{81^\circ}\ \boxed{49'}\ \boxed{5.45''}$

أي ٨١ درجة و٤٩ دقيقة و٥ ثوانٍ و٤٥ جزءًا من مئة من الثانية.

حاول أن تحل

٣ استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد $\frac{٣}{٧}$ الزاوية المستقيمة بالقياس الستيني.

ثانيا: القياس الدائري (الراديان): The Radian Measure



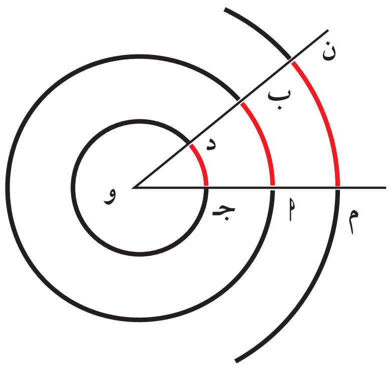
الزاوية المركزية زاوية مركزها مركز الدائرة.

ضلعا هذه الزاوية المركزية يقطعان الدائرة في نقطتين م، ب.

طول القوس $\overset{\frown}{\text{م ب}}$ هو المسافة على الدائرة بين النقطتين م، ب.

ملاحظة: يتشكل من تقاطع ضلعي الزاوية المركزية مع الدائرة قوسان: القوس الأصغر $\overset{\frown}{\text{م ب}}$ (باللون الأحمر)، القوس الأكبر ($\overset{\frown}{\text{م ب}}$) (باللون الأخضر) ويمكن التعبير عنه بـ ($\overset{\frown}{\text{م ﺟ ب}}$). يعتمد القياس الدائري على طول القوس في الدائرة الذي تحصره الزاوية المركزية وعلى طول نصف قطر الدائرة.

حقيقة هندسية: في الدوائر المتحدة المركز، النسبة بين طول قوس أي زاوية مركزية وطول نصف قطر دائرتها المناظرة تساوي مقدارًا ثابتًا يتوقف على قياس الزاوية التي تحصر هذا القوس.



في الشكل المجاور: $\frac{\overset{\frown}{\text{م ن}}}{\text{و م}} = \frac{\overset{\frown}{\text{م ب}}}{\text{و م}} = \frac{\overset{\frown}{\text{ﺟ د}}}{\text{و ﺟ}}$

أي أن $\frac{\text{طول القوس من الدائرة الذي تحصره زاوية مركزية}}{\text{طول نصف قطر هذه الدائرة}}$ = مقدارًا ثابتًا

وهذا يعد نظامًا آخر لقياس الزاوية يسمى بالقياس الدائري للزاوية.

تعريف:

القياس الدائري لزاوية مركزية في دائرة = $\frac{\text{طول القوس الذي تحصره هذه الزاوية}}{\text{طول نصف قطر هذه الدائرة}}$

ويرمز إليه بالرمز هـ ْ.

ملاحظة:

- في بعض الأنظمة، تقسم الزاوية القائمة إلى ١٠٠ جزء متساوٍ، كل منها يسمى "جراد" **Grad**.
- كل ١ جراد يعادل $\frac{٩}{١٠}$ من الدرجة.

فإذا رمزنا إلى طول القوس بالرمز (ل) وإلى طول نصف القطر بالرمز نق

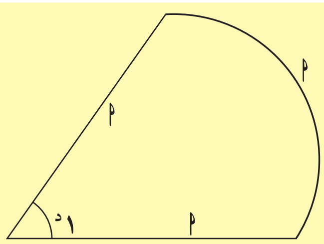
فإن $\text{هـ}^{\circ} = \frac{\text{ل}}{\text{نق}}$ ومنها $\text{ل} = \text{هـ}^{\circ}\,\text{نق}$

وحدة قياس الزوايا لهذا النوع من القياس تسمى **الراديان** ويرمز لها بالرمز (١ ْ)

تعريف الزاوية النصف قطرية: Radial Angle

هي زاوية مركزية في دائرة تحصر قوسًا طوله يساوي طول نصف قطر هذه الدائرة.

وقياس الزاوية نصف القطرية يساوي ١ راديان (١ ْ).



وعلى هذا فإن الزاوية التي قياسها ٥ ْ هي زاوية مركزية في دائرة تحصر قوسًا من هذه الدائرة طوله يساوي خمسة أمثال طول نصف قطر هذه الدائرة.

مثال (٤)

$\widehat{ع و د}$ زاوية مركزية في دائرة طول نصف قطرها ٤ سم. أوجد طول القوس مسافة $\overset{\frown}{ع د}$ الذي تحصره هذه الزاوية إذا كان:

أ $ق(\widehat{ع و د}) = \left(\frac{٣}{٤}\right)^{د}$ ب $ق(\widehat{ع و د}) = (٣,١٤)^{د}$

الحل:

أ نفرض طول القوس = ل فيكون ل = $هـ^{د}$ نق

$\therefore$ ل = $\overset{\frown}{ع د} = \left(\frac{٣}{٤}\right) \times ٤$ سم = ٣ سم

ب ل = $\overset{\frown}{ع د} = ٣,١٤ \times ٤ = ١٢,٥٦$ سم.

حاول أن تحل

٤ دائرة طول نصف قطرها ٦ سم. أوجد طول القوس الذي تحصره زاوية مركزية قياسها

أ $١,٢^{د}$ ب $(١,٥٧)^{د}$

٣- العلاقة بين القياسين الدائري والستيني: Degree-Radian Relation

إذا كان طول نصف قطر الدائرة يساوي الوحدة (تسمى الدائرة هنا **دائرة الوحدة**) فإن:

١ قياس الزاوية المركزية (بالقياس الدائري) يساوي طول قوسها.

٢ الزاوية المركزية التي قياسها الستيني يساوي ٣٦٠°، يكون طول قوسها ٢π نق أي قياسها الدائري يساوي ٢π.

٣٦٠° يعادل ٢$\pi^{د}$ ومنها ١٨٠° يعادل $\pi^{د}$.

$١^{د} = \frac{١٨٠°}{\pi} \simeq ٥٧,٢٩٥٧° \simeq ٥٧° ١٧' ٤٥''$

$١° = \frac{\pi}{١٨٠°} \simeq ٠,٠١٧٥^{د}$

ملاحظة:
عند عدم ذكر وحدة القياس، يعتبر الراديان هو الوحدة.

قانون: إذا كان لدينا زاوية قياسها الدائري $هـ^{د}$ وقياسها الستيني س° فإن:

$\frac{هـ^{د}}{\pi} = \frac{س°}{١٨٠°}$ ومنها س° = $هـ^{د} \times \frac{١٨٠°}{\pi}$ $هـ^{د} = س° \times \frac{\pi}{١٨٠°}$

أمثلة

٥ زاوية قياسها $٥^{د}$، أوجد القياس الستيني لهذه الزاوية لأقرب دقيقة.

الحل:

س° = $هـ^{د} \times \frac{١٨٠°}{\pi}$

$\therefore$ س° = $٥^{د} \times \frac{١٨٠°}{\pi} \simeq ٢٨٦,٤٨° \simeq ٢٨٦° ٢٩'$

٦ زاوية قياسها ٧٥°، أوجد القياس الدائري لها.

الحل:

$\text{هـ}^{\text{د}} = \frac{\pi}{\text{١٨٠}^\circ} \times \text{س}^\circ$ $\quad$ $\text{هـ}^{\text{د}} = \frac{\pi}{\text{١٨٠}^\circ} \times \text{٧٥}^\circ \simeq \text{١,٣٠٩}^{\text{د}}$

٧ أوجد القياس الستيني للزاوية $\frac{\text{٣}\pi}{\text{٤}}$.

الحل:

$\text{س}^\circ = \text{هـ}^{\text{د}} \times \frac{\text{١٨٠}^\circ}{\pi}$ $\quad$ $\therefore \text{س}^\circ = \frac{\text{٣}\pi}{\text{٤}} \times \frac{\text{١٨٠}^\circ}{\pi} = \text{١٣٥}^\circ.$

حاول أن تحل

٥ أوجد بدلالة π القياس الدائري للزوايا التي قياساتها:

أ ٤٥° $\quad$ ب ٣٠٠° $\quad$ جـ ٢٢٥° $\quad$ د ١٥٠°

٦ أوجد القياس الستيني للزوايا التالية:

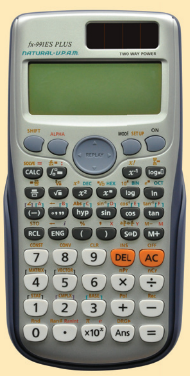
أ $\frac{\text{٥}}{\text{٨}} \times \pi$ $\quad$ ب ٠,٧٥د $\quad$ جـ ٣,٣٥د $\quad$ د $\frac{\pi}{\text{٥}}$

٧ أوجد القياس الستيني للزوايا التالية:

أ $\frac{\pi}{\text{٢}}$ $\quad$ ب $\frac{\pi}{\text{٣}}$ $\quad$ جـ $\frac{\pi}{\text{٦}}$ $\quad$ د $\frac{\pi}{\text{٤}}$

أمثلة

٨ زاوية قياسها ٢٣″ ١٨′ ٨٥°، أوجد القياس الدائري لهذه الزاوية مقربًا الناتج إلى رقمين عشريين.



الحل:

إذا كان هـد هو القياس الدائري فإن: $\text{هـ}^{\text{د}} = \frac{\pi}{\text{١٨٠}^\circ} \times \text{س}^\circ$

تضغط على المفاتيح بالترتيب التالي من جهة اليسار

π ÷ 180 °''' × 85 °''' 18 °''' 23 °''' =

يظهر على الشاشة 1.488877359 ∴ القياس الدائري ≈ ١,٤٩

٩ مثال من الفضاء: قمر صناعي للبث التلفزيوني يدور في شكل دائري حول الأرض في زمن قدره ٣ ساعات. إذا علمت أن طول نصف قطر الأرض حوالى ٦٤٠٠ كم، وكان ارتفاع القمر ٢٦٠٠ كم عن سطح الأرض، فأوجد المسافة التي يقطعها القمر خلال ساعة واحدة.

الحل:

نفرض ف المسافة التي قطعها القمر في ساعة.

بعد القمر عن مركز الأرض = ب م = ب س + س م

٦٤٠٠ + ٢٦٠٠ = ٩٠٠٠ كم

الزاوية بالقياس الدائري المعادل لـ $\frac{١}{٣}$ الدورة هي θ حيث:

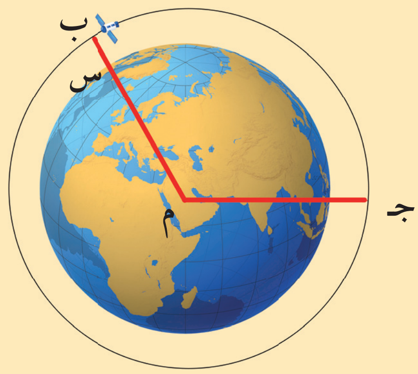
$\theta = ٢\pi \times \frac{١}{٣} = \frac{٢}{٣}\pi$

المسافة التي قطعها القمر:

طول $\overset{\frown}{جب}$ الأصغر = نقθ = ٩٠٠٠ × $\frac{٢}{٣}\pi$

≃ ١٨٨٤٩٫٥٥٥٩

فيكون القمر قد قطع مسافة ١٩٠٠٠ كم تقريبًا في زمن قدره ساعة.



حاول أن تحل

٨ زاوية مركزية في دائرة طول نصف قطرها نق، تحصر قوسًا طوله ل. أوجد طول القوس في الحالتين:

أ هـ^د = $\frac{١}{٤}\pi$ ، نق = ٧ سم

ب س° = ١٢٠°، نق = ٢٤ سم

مثال (١٠) **تطبيقات حياتية**

١٠ ترسم الكرة الأرضية على شكل كرة مركزها و، طول نصف قطرها ٦٤٠٠ كم تقريبًا. بالنسبة إلى مراقب موجود في القطب الشمالي، تدور الأرض حول نفسها بسرعة منتظمة حول المحور (شمال – جنوب) دورة كاملة كل ٢٤ ساعة.

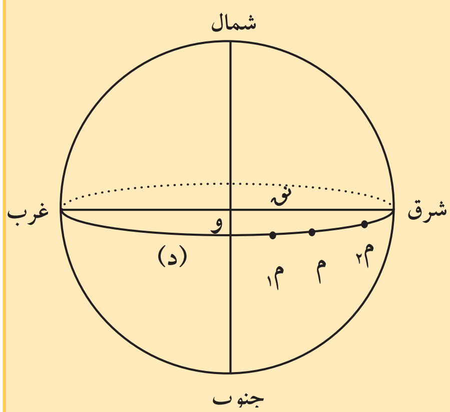
م نقطة موجودة على دائرة الخط الاستوائي (د).

تتحرك النقطة م على الدائرة (د) بسرعة منتظمة.

أ ما المسافة التي تقطعها النقطة م في ساعة واحدة؟

ب لنفرض أن النقطة م قطعت مسافة ٣٠٠٠ كم بانتقالها من الوضعية $م_١$ إلى الوضعية $م_٢$.

ما قياس الزاوية $م_١$و$م_٢$ بالقياس الدائري؟ ما قياس هذه الزاوية بالقياس الستيني؟



الحل:

أ طول دائرة الخط الاستوائي = (المحيط) = ٢π نق = ٦٤٠٠ × ٢π

تقطع النقطة م في ساعة واحدة: $\frac{٦٤٠٠ \times ٢\pi}{٢٤}$ ≃ ١٦٧٥٫٥ كم

ب هـ^د = $\frac{ل}{نق}$ = $\frac{٣٠٠٠}{٦٤٠٠}$ = $\frac{١٥}{٣٢}$ = ≃ ٠٫٤٦٨٧٥^د

٠٫٤٦٨٧٥^د يعادل ٢٧″ ٥١′ ٢٦° تقريبًا

حاول أن تحل

٩ في مثال (١٠) ما قياس الزاوية $م_١$و$م_٢$ بالقياس الدائري وبالقياس الستيني إذا قطعت النقطة م مسافة ٤٥٠٠ كم؟

النسب المثلثية: الجيب وجيب التمام ومقلوباهما

Trigonometric Ratios and their Reciprocals
Sine, Cosine, Secant and Cosecant

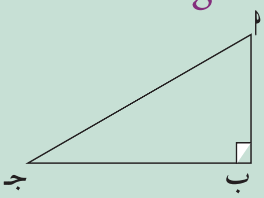
سوف تتعلم

- جيب الزاوية
- جيب تمام الزاوية
- قاطع الزاوية
- قاطع تمام الزاوية
- إيجاد مقياس زاوية علم جيبها أوجيب تمامها

دعنا نفكر ونتناقش

١ - المقابل والمجاور لزاوية حادة في مثلث قائم الزاوية:
The Opposite and Adjacent of an Acute Angle in a Right Triangle

في المثلث ٲ ب جـ الموضح بالشكل:



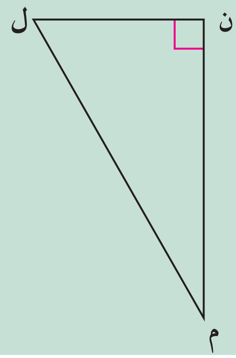
$\overline{\text{ٲب}}$ يسمى **الضلع المقابل** للزاوية جـ، $\overline{\text{ب جـ}}$ يسمى **الضلع المجاور** للزاوية جـ، $\overline{\text{ٲجـ}}$ يسمى الوتر.

وعلى هذا الأساس أكمل ما يلي:

.... هو مقابل ٲ̂

.... هو مجاور ٲ̂

في المثلث ل ن م الموضح بالشكل المقابل:



الضلع المقابل لـ مˆ هو ...

الضلع المجاور لـ لˆ هو ...

$\overline{\text{ن ل}}$ هو مجاور الزاوية ...

$\overline{\text{م ن}}$ هو مجاور الزاوية ...

ملاحظة:
للاختصار سنستخدم المقابل للدلالة على طول الضلع المقابل لزاوية. والمجاور للدلالة على طول الضلع المجاور لزاوية. والوتر للدلالة على طول الوتر.

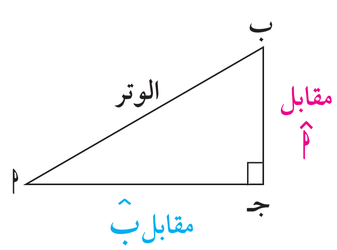
٢- جيب الزاوية: Sine of the Angle

في المثلث قائم الزاوية: نسبة طول الضلع المقابل للزاوية الحادة إلى طول الوتر تسمى جيب الزاوية، ويرمز لها بالرمز (جا) بالإنكليزية (sin).

أي أن

$$\text{جيب الزاوية} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

في الشكل المقابل:



جيب الزاوية ٲ:

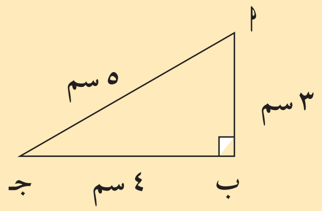
$$\text{جاٲ} = \frac{\text{مقابل ٲ̂}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ٲب}}$$

بالمثل جيب الزاوية ب:

$$\text{جاب} = \frac{\text{مقابل بˆ}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ٲجـ}}{\text{ٲب}}$$

مثال (١)

في الشكل المقابل:



أثبت أن المثلث أب جـ قائم الزاوية في ب، ثم أوجد جاأ، جاجـ.

الحل:

$\text{أب}^{٢} + \text{ب جـ}^{٢} = ٣^{٢} + ٤^{٢} = ٢٥$ نظرية فيثاغورث

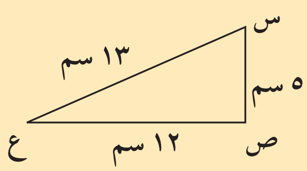
$\text{أجـ}^{٢} = ٥^{٢} = ٢٥$

إذًا المثلث أب جـ قائم الزاوية في ب.

$\text{جاأ} = \frac{\text{مقابل } \hat{\text{أ}}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أجـ}} = \frac{٤}{٥}$

$\text{جاجـ} = \frac{\text{مقابل } \hat{\text{جـ}}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{أب}}{\text{أجـ}} = \frac{٣}{٥}$

حاول أن تحل



١ أ أثبت أن المثلث س ص ع قائم في صَ.

ب أوجد جاس، جاع.

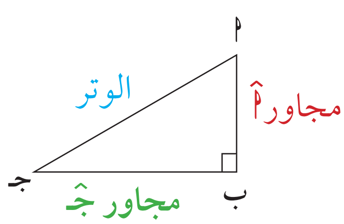
٣- جيب تمام الزاوية: Cosine of the Angle

في المثلث قائم الزاوية: نسبة طول الضلع المجاور للزاوية الحادة، إلى طول الوتر تسمى جيب تمام الزاوية، ويرمز لها بالرمز (جتا) وبالإنكليزية (cos).

$\text{جيب تمام الزاوية} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

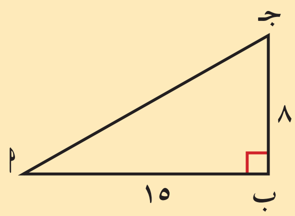
جيب تمام الزاوية جـ: $\text{جتاجـ} = \frac{\text{مجاور } \hat{\text{جـ}}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أجـ}}$

جيب تمام الزاوية أ: $\text{جتاأ} = \frac{\text{مجاور } \hat{\text{أ}}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}$



مثال (٢)

∆أب جـ قائم في بْ، أوجد كلًّا من: أجـ، جاأ، جتاأ، جاجـ، جتاجـ.ماذا تستنتج؟



الحل: بتطبيق نظرية فيثاغورث

(أجـ)^2 = (ب جـ)^2 + (أب)^2

(أجـ)^2 = (٨)^2 + (١٥)^2

أجـ = ١٧ سم

جاأ = $\frac{\text{مقابل أ}}{\text{الوتر}} = \frac{٨}{١٧}$

جتاأ = $\frac{\text{مجاور أ}}{\text{الوتر}} = \frac{١٥}{١٧}$

جاجـ = $\frac{\text{مقابل جـ}}{\text{الوتر}} = \frac{١٥}{١٧}$

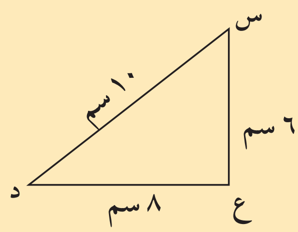
جتاجـ = $\frac{\text{مجاور جـ}}{\text{الوتر}} = \frac{٨}{١٧}$

ماذا تستنتج؟

جاأ = جتاجـ = $\frac{٨}{١٧}$، جتاأ = جاجـ = $\frac{١٥}{١٧}$ ،لأن مقابل أْ مجاور جْ .

هل تعلم؟
في الإنكليزية كلمة **cosine** مشتقة من كلمتي **complement´s** متمم و**sine** جيب ومنه جتا زاوية يساوي جا الزاوية المتممة.

حاول أن تحل



٢ (أ) أثبت أن المثلث س ع د قائم الزاوية في ع.

(ب) أوجد كلًّا من: جا(سْ)، جتا(سْ)، جا(دْ)، جتا(دْ).

(جـ) أكمل: جاس = ... ، جتاس = ...

٤- مقلوبات الجيب وجيب التمام: Cosec and Sec

مقلوب جاأ هو $\frac{١}{\text{جاأ}}$ ويسمى **قاطع تمام الزاوية أ** ويرمز إليه بالرمز **قتاأ** وبالإنكليزية Cosecant (cosec).

قتاأ = $\frac{١}{\text{جاأ}}$: جاأ ≠ ٠

قتاأ = $\frac{١}{\text{جاأ}}$ ⇐ قتاأ × جاأ = ١

ومقلوب جتاأ هو $\frac{١}{\text{جتاأ}}$ ويسمى قاطع زاوية أ ويرمز إليه بالرمز **قاأ** وبالإنكليزية Secant (sec).

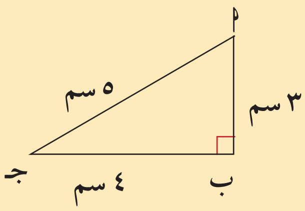
هل تعلم؟
وضعت جداول النسب المثلثية منذ أكثر من ٢٠٠٠ عام لتستخدم في علم الفلك.

$\text{قاأ} = \dfrac{١}{\text{جاأ}}$: $\text{جا}\hat{أ} \neq ٠$

$\text{قاأ} = \dfrac{١}{\text{جتاأ}} \Leftarrow$ $\text{قاأ} \times \text{جتاأ} = ١$

مثال (٣)

في الشكل المقابل أوجد جاجـ، جتاجـ، قاجـ، قتاجـ.



الحل:

$\text{جاجـ} = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \dfrac{٣}{٥}$

$\text{جتاجـ} = \dfrac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \dfrac{٤}{٥}$

$\text{قاجـ} = \dfrac{١}{\text{جتاجـ}} = \dfrac{١}{\frac{٤}{٥}} = \dfrac{٥}{٤}$

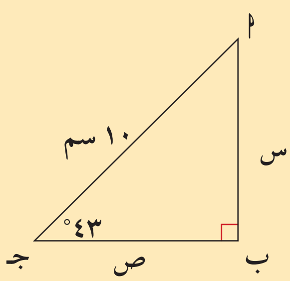
$\text{قتاجـ} = \dfrac{١}{\text{جا}(\hat{\text{جـ}})} = \dfrac{١}{\frac{٣}{٥}} = \dfrac{٥}{٣}$

حاول أن تحل

٣ أب جـ مثلث فيه: أب = ٧ سم، ب جـ = ٢٤ سم، أجـ = ٢٥ سم.
أثبت أن Δأب جـ قائم الزاوية، ثم أوجد جاأ، جتاأ، قاأ، قتاأ، جاجـ، جتاجـ، قاجـ، قتاجـ.

مثال (٤) استخدام الآلة الحاسبة

في الشكل المجاور، أوجد س.



الحل:

$\text{جا}(٤٣°) = \dfrac{\text{س}}{١٠}$

$\text{س} = ١٠ \times \text{جا}(٤٣°)$

تستخدم الآلة الحاسبة بالضغط على المفاتيح على الشكل التالي:

10 × sin 43 =

يظهر 6.819983 ويساوي تقريبًا ٦,٨.

حاول أن تحل

٤ أوجد ص في المثال (٤).

كان نيكولاي كوبرنيك **Nicolaus Copernicus** (١٤٧٣م - ١٥٤٣م) عالمًا رياضيًّا وفلكيًّا، درس الطب وألمّ بمعظم العلوم في عصره. يعتبر أول من صاغ نظرية مركزية الشمس وأن الأرض جرم يدور في فلكها.

يعتبر كوبرنيك مؤسس الفلك الحديث.

وحدة الفلك (و.ف أو **AU**) تمثل متوسط المسافة بين الأرض والشمس وهي تساوي تقريبًا ١٤٩٦٠٠٠٠٠ كم.

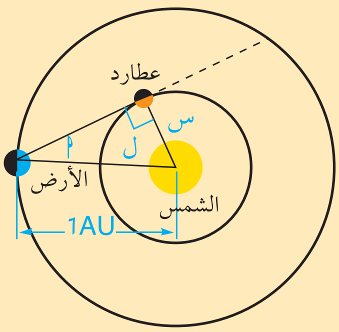
هل تعلم؟

١ ميل ≃ ١,٦٠٩ كم

مثال (٥) **تطبيقات حياتية**

في الشكل المقابل، إذا كان ق(أ̂) = ٢٢,٣°،

أوجد بعد كوكب عطارد عن الشمس علمًا بأن بعد الأرض عن الشمس يساوي ١ وحدة الفلك ١ **AU**.



الحل:

بفرض أن : س = بعد كوكب عطارد عن الشمس.

ل = بعد الأرض عن الشمس

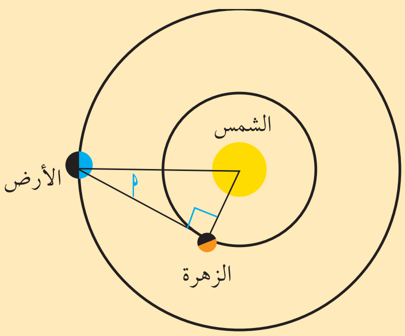
فيكون:

جا (٢٢,٣°) = $\frac{\text{س}}{\text{ل}}$.

∴ بعد عطارد عن الشمس = س = ل × جا (٢٢,٣°) .

≈ ١ × ٠,٣٨ ≈ ٠,٣٨ **AU**

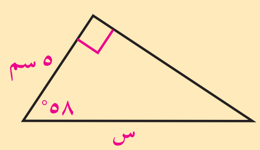
حاول أن تحل



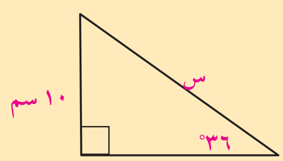
٤ أ كما في التطبيق السابق، أوجد بعد كوكب الزهرة عن الشمس علمًا بأن ق(أ̂) = ٤٦,١°

ب أوجد قيمة س لأقرب جزء من عشرة.

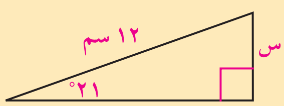
أ



ب



جـ



٥ إيجاد قياس زاوية علم جيبها او جيب تمامها

قد تعلّم جيب زاوية أو جيب تمامها وتريد معرفة قياس هذه الزاوية. تستخدم لذلك النسب العكسية ويرمز إليها بـ جا$^{-1}$ أو جتا$^{-1}$.

تبيّن العلاقة التالية الترابط بين النسب المثلثية والنسب العكسيّة:

إذا كان جاد = س فإن جا$^{-1}$ س = د

جتاد = س فإن جتا$^{-1}$ س = د

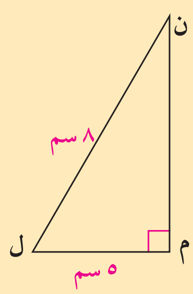
غالبًا ما تستخدم الآلة الحاسبة في إيجاد قياسات هذه الزوايا.

ننقر على Sin shift للتعبير عن جا$^{-1}$

وننقر على Cos shift للتعبير عن جتا$^{-1}$.

مثال (٦)

في الشكل المقابل، احسب ق(لَ) لأقرب درجة.



الحل:

جتا ل = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$.

جتا ل = $\frac{٥}{٨}$ باستخدام النسب المثلثية لجيب التمام

ق(لَ) = جتا$^{-1}$ $\frac{٥}{٨}$ جتا$^{-1}$ تسمى النسبة العكسية لـ جتا

shift Cos (5 ÷ 8) =

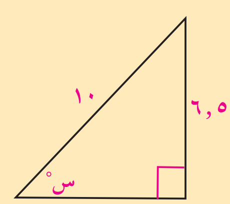
يظهر 51.317813

وبالتالي ق(لَ) ≃ ٥١°

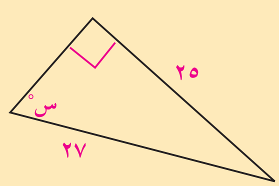
حاول أن تحل

٦ أوجد قيمة س لأقرب درجة.

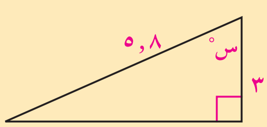
أ



ب



ج



٢ ـ ٣

ظل الزاوية ومقلوبه

Tangent and Cotangent of an Angle

سوف تتعلم

- ما هو ظل الزاوية
- إيجاد قياس الزاوية إذا علم ظلها
- مقلوب ظل الزاوية
- حل المثلث قائم الزاوية

عمل تعاوني

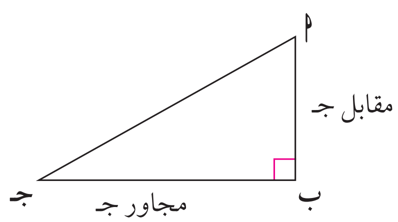
سنعمل في مجموعات صغيرة، نختار مجموعة قياسات الزوايا
(١٠°، ٢٠°، ٣٠°، ...، ٨٠°)
كل طالب في مجموعته يرسم مثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب، ويختار إحدى الزوايا من المثلث بحيث تنتمي إلى مجموعة قياسات الزوايا. يحسب كل طالب أطوال أضلاع المثلث باستخدام المسطرة لأقرب ملليمتر، ويستخدم الآلة الحاسبة في حساب النسب:

$\dfrac{\text{مقابل الزاوية جـ}}{\text{المجاور للزاوية جـ}}$ لأقرب رقمين عشريين

في المثلث قائم الزاوية نسبة طول الضلع المقابل لزاوية حادة إلى طول الضلع المجاور للزاوية نفسها تسمى ظل الزاوية ونرمز إليها بالرمز ظاجـ وبالإنكليزية Tangent (tan).

أي أن ظل الزاوية = $\dfrac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

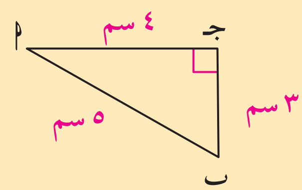
مثلًا في الشكل المقابل ظاجـ = $\dfrac{\text{أب}}{\text{ب جـ}}$



قارن بين ظا ١٠°، ظا ٢٠°، ظا ٣٠°، ظا ٤٠°، ... ماذا تستنتج؟
من العمل التعاوني السابق، يتبيّن أن قيمة ظاجـ تزداد كلما زاد قياس الزاوية جـ بين ٠°، ٩٠°.

مثال (١)

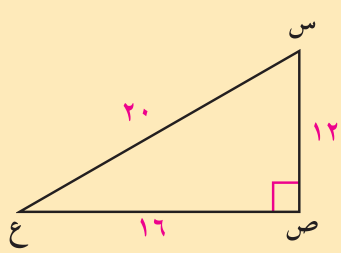
في الشكل المقابل أوجد ظل الزاوية أ، ظل الزاوية ب.

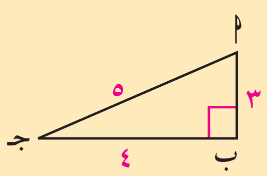


الحل: ظاأ = $\dfrac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \dfrac{\text{ب جـ}}{\text{أجـ}} = \dfrac{٣}{٤}$

ظاب = $\dfrac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \dfrac{\text{أجـ}}{\text{ب جـ}} = \dfrac{٤}{٣}$

حاول أن تحل





١ أ استعن بالمثلثين المجاورين في إيجاد:
$\dfrac{\text{أب}}{\text{س ص}}$ ، $\dfrac{\text{أجـ}}{\text{س ع}}$ ، $\dfrac{\text{جـ ب}}{\text{ع ص}}$. ماذا تستنتج؟

ب هل ظاس = ظاأ، ظاع = ظاجـ؟ ماذا تستنتج؟

جـ هل هذا صحيح بالنسبة إلى النسب: جاس، جاأ وكذلك جتاس، جتاأ؟ ماذا تستنتج؟

مثال (٢) تطبيقات حياتية

أراد أحد أعضاء فريق الكشافة قياس المسافة بين قمتي جبلين، فوقف على قمة أحد الجبلين عند النقطة ؁ وحدّد علامة مميزة أمامه على قمة الجبل الآخر ولتكن ب، ثم اتبع التالي:

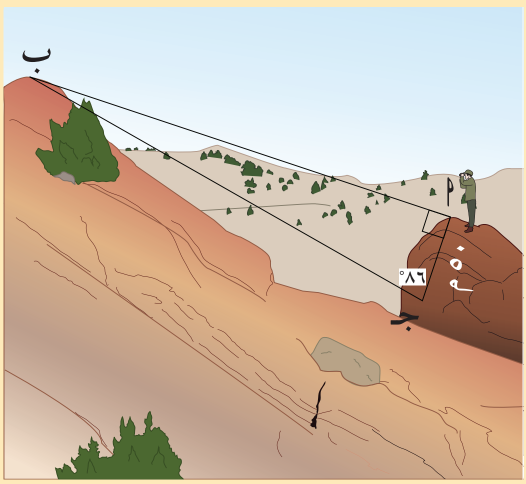
١ وضع مؤشر البوصلة باتجاه العلامة المميزة ب وحدّد قراءة المؤشر.

٢ سار مسافة ٥٠ مترًا على خط مستقيم عمودي على الخط المستقيم الواصل بين القمتين.

٣ وضع مؤشر البوصلة مرة ثانية في اتجاه العلامة المميزة وحدّد قراءة المؤشر.

٤ باستخدام قراءتي المؤشر وجد أن: ٯ(جـ^) = ٨٦°.

استخدم ظل الزاوية في حساب المسافة بين قمتي الجبلين عند النقطة التي بدأ منها القياس.



الحل: باستخدام ظل الزاوية

ظا(٨٦°) = $\frac{\text{؁ب}}{٥٠}$

؁ب = ٥٠ × ظا (٨٦°)

تستخدم الآلة الحاسبة

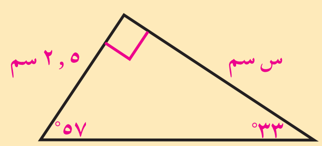
50 × TAN 86 =

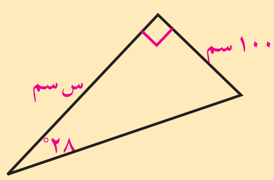
يظهر 715.03331

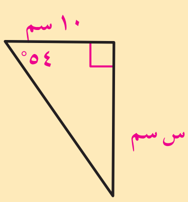
إذًا، المسافة بين قمتي الجبلين هي ٧١٥ مترًا تقريبًا.

حاول أن تحل

٢ أوجد قيمة س لأقرب جزء من عشرة.

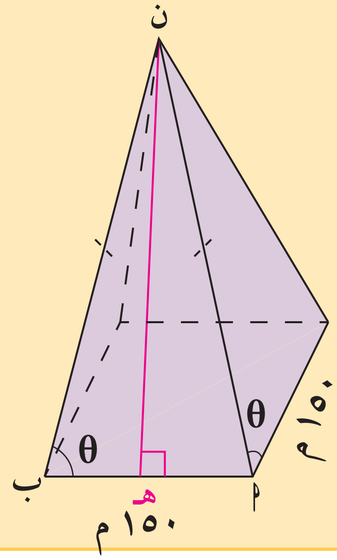
أ


ب


جـ


مثال (٣)

الهرم المقابل قاعدته مربعة الشكل. أوجد طول ارتفاعه المائل ل إذا كان قياس الزاوية θ يساوي ٦٠°.



تذكر:
الارتفاع المائل:
هو العمود المرسوم من رأس الهرم إلى أحد أضلاع قاعدته.

الحل:

في Δن أب المتطابق الضلعين

$\overline{\text{ن هـ}} \perp \overline{\text{أب}}$

∴ هـ أ = هـ ب = ٧٥ م

في Δن هـ ب القائم الزاوية هـ

$\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{ل}}{\text{٧٥}}$

$\text{ظا}\,٦٠° = \frac{\text{ل}}{\text{٧٥}}$

ل = ٧٥ × ظا ٦٠° ≃ ١٣٠ مترًا.

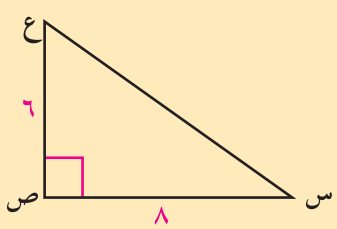
طول الارتفاع المائل ≃ ١٣٠ مترًا.

١ – إيجاد قياس زاوية إذا علم ظلها: Finding the Measure of an Angle Knowing its Tangent

قد تعلم ظل الزاوية وتريد معرفة قياس هذه الزاوية. تستخدم لذلك النسبة العكسية ويرمز لها بالرمز ظا$^{-1}$ والعلاقة التالية تبين الترابط بين النسبة المثلثية والنسبة العكسية. إذا كان ظا θ = س فإن ظا$^{-1}$س = θ.

مثال (٤)

في الشكل المقابل أوجد ق(سَ) في Δس ص ع.



الحل:

$\text{ظاس} = \frac{٦}{٨} = ٠,٧٥$ ∴ ق(سَ) = ظا$^{-1}$ (٠,٧٥)

حيث ظا$^{-1}$ تعني معكوس الظل.

لإيجاد ق(سَ) تستخدم الآلة الحاسبة.

Shift | TAN | 0.75 | =

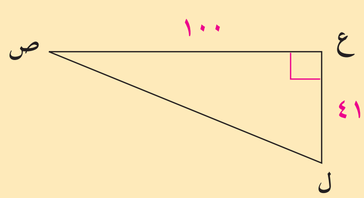
يظهر 36.86989765 | °''' | يظهر 36° 52′ 11.63″

إذًا ق(سَ) ≃ ١٢″ ٥٢′ ٣٦°.

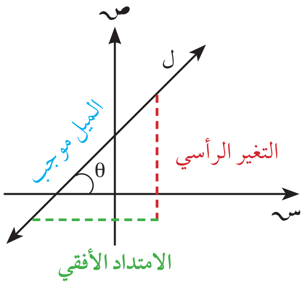
حاول أن تحل

٣ أوجد ق(سَ) حيث ظاس = ٠,٥

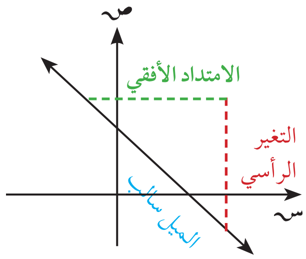
٤ في الشكل المقابل، أوجد ق(لَ) لأقرب درجة.



إذا كان المستقيم ل يصنع زاوية θ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن θ تسمى زاوية ميل المستقيم ويكون ظاθ = ميل المستقيم = $\frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{الامتداد الأفقي}}$

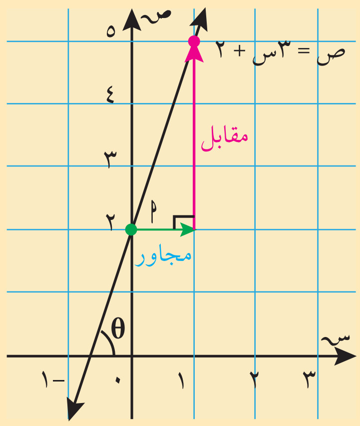


إذا كانت معادلة المستقيم: ص = م س + ب فإن ميل المستقيم = م.



مثال (٥)

في الشكل المقابل: احسب قياس الزاوية الحادة الموجبة θ التي يصنعها المستقيم ص = ٣س + ٢ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.



الحل:

من الشكل ق($\hat{\theta}$) = ق($\hat{أ}$) . زاويتان متناظرتان.

ظاأ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{٣}{١}$ = ٣ ق($\hat{أ}$) = ظا$^{-١}$ ٣

Shift TAN 3 =

يظهر 71.565051 °,,, يظهر 71° 33′ 54.18″

ق($\hat{أ}$) ≃ ٥٤″ ٣٣′ ٧١°

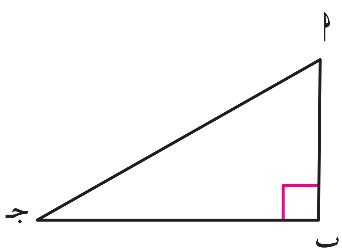
حاول أن تحل

٥ احسب قياس الزاوية الحادة الموجبة التي يصنعها المستقيم ص = $\frac{١}{٤}$ س + ٦ مع الاتجاه الموجب للمحور السيني.

٢- مقلوب ظل الزاوية (ظتا): Cotangent (cot)

مقلوب ظل الزاوية = $\frac{١}{\text{ظاأ}}$ ويسمى ظل تمام الزاوية ويرمز إليه بالرمز ظتاأ وبالإنكليزية Cotangent (cot).

ظتاأ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$ = $\frac{\text{أب}}{\text{ب جـ}}$

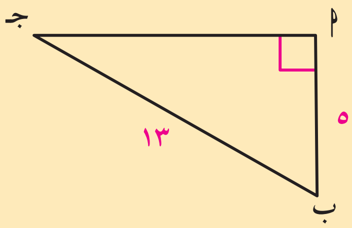


ويكون ظتاأ = $\frac{١}{\text{ظاأ}}$: ظاأ ≠ ٠

∴ ظاأ × ظتاأ = ١

مثال (٦)

في الشكل المقابل أوجد ظاجـ، ظتاجـ.



الحل:

من نظرية فيتاغورث (أجـ)^٢ = (١٣)^٢ − (٥)^٢= ١٤٤،

أجـ = ١٢

$$\text{ظاجـ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{٥}{١٢}،$$

$$\text{ظتاجـ} = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{١٢}{٥}$$

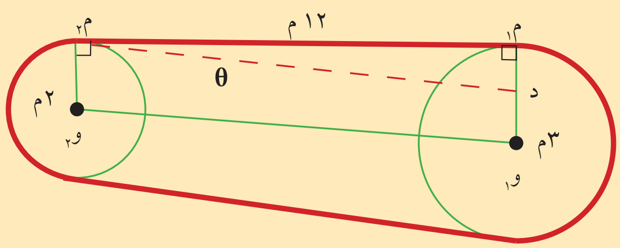
حاول أن تحل

٦ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه أب = ٧ سم، أ جـ = ٢٥ سم. أوجد: ظاجـ، ظتاجـ.

مثال (٧)

يلتف حزام حول بكرتين أسطوانتي الشكل. طول نصف قطر البكرة الكبرى ٣ م وطول نصف قطر الصغرى ٢ م.

نريد معرفة قياس الزاوية θ التي يصنعها الحزام مع المستقيم المار بمركزي الدائرتين.



الحل:

و$_١$د = دم$_١$ − دم$_١$

= ٣ − ١ = ٢

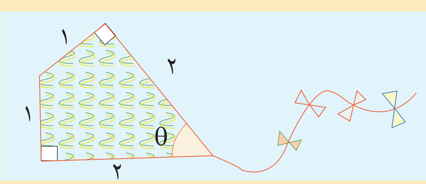
في المثلث دم$_١$م$_٢$ قائم الزاوية م$_١$:

$$\text{ظا}\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{١}{١٢}$$

ق(θ) = ظا$^{-١}$ $\left(\frac{١}{١٢}\right)$ = $\boxed{4°45'49.11''}$

قياس الزاوية θ يساوي ٤٥″٤٥′٤° تقريبًا.

حاول أن تحل



٧ بيّن الشكل المقابل طائرة ورقية. أوجد قياس الزاوية θ.

٢ ـ ٤

النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

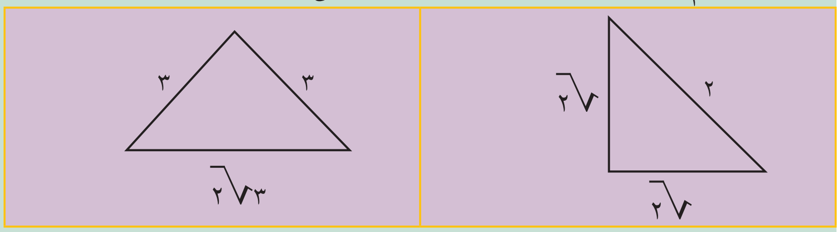
Trigonometric Ratios for Some particular Angles

سوف تتعلم

- النسب المثلثية للزوايا ٣٠°، ٤٥°، ٦٠°.
- متطابقات مثلثية
- الزاوية الربعية

دعنا نفكر ونتناقش

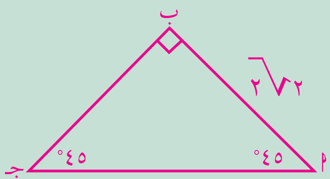
❶ استخدم المنقلة لإيجاد قياسات زوايا كل مثلث.



❷ قارن بين أطوال الأضلاع.

❸ استخدم نظرية فيثاغورث لإثبات ما حصلت عليه في ❷.

المثلث ٤٥°، ٤٥°، ٩٠°.



في المثلث أب جـ، قياس كل من الزاويتين الحادتين يساوي ٤٥°.

المثلث أب جـ قائم الزاوية بَ متطابق الضلعين، ويسمى أحيانًا **المثلث ٤٥°، ٤٥°، ٩٠°.**

إذا كان طول أحد ضلعي الزاوية القائمة يساوي س، فإن طول الوتر = س $\sqrt{٢}$

في هذا المثلث جا٤٥° = $\frac{\text{المقابل}}{\text{طول الوتر}} = \frac{\text{س}}{\text{س}\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

كذلك جتا٤٥° = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{س}}{\text{س}\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

ظا٤٥° = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{س}}{\text{س}} = ١$

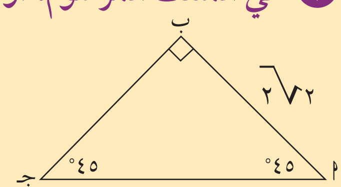
جا٤٥° = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

جتا٤٥° = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

ظا٤٥° = ١

مثال (١)

أ في المثلث المرسوم، أوجد طول الوتر $\overline{\text{أجـ}}$.



الحل:

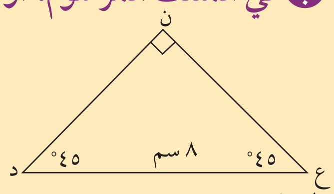
جتا أ = $\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}$

جتا٤٥° = $\frac{٢\sqrt{٢}}{\text{أجـ}}$

أجـ = $\frac{٢\sqrt{٢}}{\text{جتا٤٥°}} = \frac{٢\sqrt{٢}}{\frac{\sqrt{٢}}{٢}} = ٤$

طول الوتر $\overline{\text{أجـ}}$ = ٤ سم.

ب في المثلث المرسوم، أوجد طول الضلع $\overline{\text{ع ن}}$.



الحل:

جتاع = $\frac{\text{ع ن}}{\text{ع د}}$

جتا٤٥° = $\frac{\text{ع ن}}{٨}$

ع ن = ٨ × جتا ٤٥° = ٨ × $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ = ٤$\sqrt{٢}$

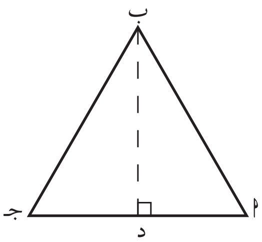
طول الضلع $\overline{\text{ع ن}}$ ≃ ٥,٦٥٦ سم.

حاول أن تحل

١ (أ) أ ب جـ مثلث ٤٥°، ٤٥°، ٩٠°. أوجد طول الوتر إذا كان طول أحد ضلعي الزاوية القائمة = ٥ سم.

(ب) الحساب الذهني: إذا كان ظا جـ = ١ فكيف توجد ق (جـ^) دون استخدام الآلة الحاسبة؟

المثلث ثلاثيني ستيني 30° – 60° triangle



أ ب جـ مثلث متطابق الأضلاع.

ب د ⊥ أ جـ.

لما كان المثلث أ ب جـ متطابق الأضلاع، إذًا ب د هي منصف الزاوية أ ب^ جـ.

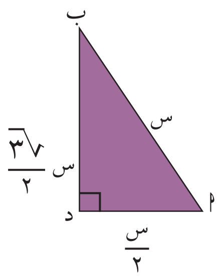
ومنه ق(أ ب^ د) = $\frac{٦٠°}{٢}$ = ٣٠°، ق(أ^) = ٦٠°

يسمى هذا المثلث: **مثلث ثلاثيني ستيني** (٣٠°، ٦٠°، ٩٠°).

إذا كان طول الضلع أ جـ يساوي س   فإن أ د = $\frac{س}{٢}$

وباستخدام نظرية فيثاغورث في المثلث أ ب د نحصل على ب د = $\frac{س\sqrt{٣}}{٢}$.

كذلك ب د هي المنصف العمودي للقطعة أ جـ.



في هذا المثلث: جا أ^ = جا ٦٠° = $\frac{ب د}{أ ب}$ = $\frac{\frac{س\sqrt{٣}}{٢}}{س}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جتا أ^ = جتا ٦٠° = $\frac{أ د}{أ ب}$ = $\frac{\frac{س}{٢}}{س}$ = $\frac{١}{٢}$

ظا أ^ = ظا ٦٠° = $\frac{ب د}{أ د}$ = $\frac{\frac{س\sqrt{٣}}{٢}}{\frac{س}{٢}}$ = $\sqrt{٣}$

كذلك جا ب^ = $\frac{أ د}{أ ب}$ = $\frac{\frac{س}{٢}}{س}$ = $\frac{١}{٢}$

جتا ب^ = جتا ٣٠° = $\frac{ب د}{أ ب}$ = $\frac{\frac{س\sqrt{٣}}{٢}}{س}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ظا ب^ = ظا ٣٠° = $\frac{\frac{س}{٢}}{\frac{س\sqrt{٣}}{٢}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

لاحظ أن جا ٦٠° = جتا ٣٠°

جتا ٦٠° = جا ٣٠°

جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

ظا ٦٠° = $\sqrt{٣}$

جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

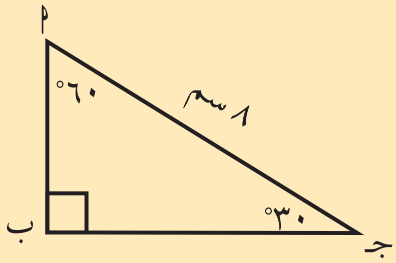
جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ظا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

مثال (٢)

أ ب جـ مثلث ثلاثيني ستيني. طول الوتر = ٨ سم.

أوجد طول كل من الضلعين $\overline{\text{أب}}$، $\overline{\text{ب جـ}}$.



الحل:

في Δ أ ب جـ ، جاجـ = جا ٣٠° = $\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}$

$\frac{١}{٢} = \frac{\text{أب}}{٨}$

أب = ٤

جتاجـ = جتا(٣٠°) = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أجـ}}$

$\frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{\text{ب جـ}}{٨}$

ب جـ = ٤$\sqrt{٣}$

طول الضلع $\overline{\text{أب}}$ = ٤ سم وطول الضلع $\overline{\text{ب جـ}}$ = ٤$\sqrt{٣}$ $\simeq$ ٦,٩ سم.

حاول أن تحل

٢ في مثلث ثلاثيني ستيني إذا كان طول الضلع الأصغر = $\sqrt{٦}$ سم، فأوجد طول الضلعين الباقيين.

مثال (٣) تطبيق لوحة إرشادية لمدرسة

تشير إحدى لوحات السير على وجود مدرسة. اللوحة على شكل مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه ٦٠ سم. أوجد مساحة هذه اللوحة.

الحل:

طول العمود النازل من رأس مثلث متطابق الأضلاع إلى القاعدة = طول الضلع × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (أي ارتفاع المثلث)

= ٦٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ $\simeq$ ٥٢ سم.

مساحة الإشارة = $\frac{\text{طول القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{٢}$ = $\frac{٦٠ \times ٥٢}{٢}$ = ١ ٥٦٠ سم^{٢}.

مساحة الإشارة تساوي حوالى ١ ٥٦٠ سم^{٢}.

حاول أن تحل

٣ معيّن يتكوّن من مثلثين متطابقي الأضلاع. أوجد مساحة المعين إذا كان طول ضلع المثلث = ٨ سم.

مثال (٤) **تطبيقات حياتية**

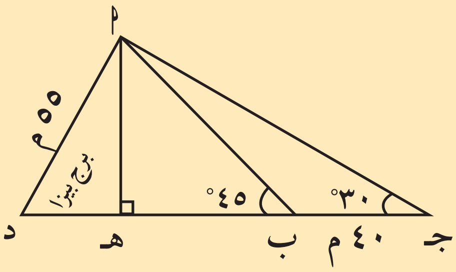
برج بيزا معلم أثري مشهور في إيطاليا. كان ارتفاع البرج ٥٥ مترًا قبل ميله نحو الجنوب. ($\overline{\text{أد}}$ في الرسم).

شاهد مراقبان موجودان في النقطتين ب، جـ قمة البرج بزاويتين قياساهما ٤٥°، ٣٠° على الترتيب.

أ عبّر عن طول كل من $\overline{\text{هـ ب}}$، $\overline{\text{هـ جـ}}$ بدلالة طول $\overline{\text{أهـ}}$.

ب أوجد أهـ علمًا أن المسافة بين النقطتين ب، جـ تساوي ٤٠ مترًا.

جـ نتيجة للأشغال المهمة على البرج بين العامين ١٩٩٣ - ٢٠٠١ تقلص البعد بين النقطتين هـ، د من ٤,٥ مترًا إلى ٤ أمتار. ما قياس ($\widehat{\text{أدهـ}}$) التي يصنعها البرج مع الأرض قبل الأشغال؟ وبعد الأشغال؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.



الحل:

أ في المثلث أهـ ب: ظا ٤٥° $= \frac{\text{هـ أ}}{\text{هـ ب}} = ١$ ومنه هـ ب = هـ أ

في المثلث أهـ جـ: ظا ٣٠° $= \frac{\text{هـ أ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ ومنه هـ جـ = $\sqrt{٣}$ هـ أ

ب هـ جـ = هـ ب + ب جـ

$\sqrt{٣}$ أهـ = هـ أ + ٤٠ أي ($\sqrt{٣} - ١$) أهـ = ٤٠

أهـ = $\frac{٤٠}{\sqrt{٣} - ١} \simeq ٥٤,٦٤$

جـ قبل الأشغال: جتا($\widehat{\text{أدهـ}}$) = $\frac{٤,٥}{٥٥}$ ، ق($\widehat{\text{أدجـ}}$) = جتا$^{-١}$ $\left(\frac{٤,٥}{٥٥}\right) \simeq$ ٥٦″ ٢١′ ٨٤°

بعد الأشغال: جتا($\widehat{\text{أدهـ}}$) = $\frac{٤}{٥٥}$ ، ق($\widehat{\text{أدجـ}}$) = جتا$^{-١}$ $\left(\frac{٤}{٥٥}\right) \simeq$ ٤٦″ ٤٩′ ٨٥°

٢ – ٥

حل المثلث قائم الزاوية

Solving Right Triangle

سوف تتعلم

- إيجاد قياسات زوايا مثلث قائم.
- إيجاد أطوال أضلاع مثلث قائم.

عمل تعاوني

استخدم برنامج رسم هندسي على الحاسوب.

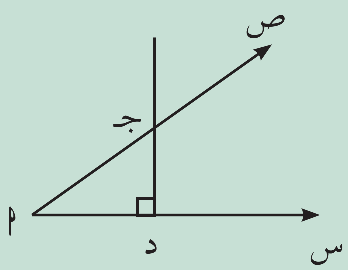
ارسم شعاعين $\overrightarrow{\text{أس}}$ ، $\overrightarrow{\text{أص}}$ يشكلان زاوية حادة س $\hat{\text{أ}}$ ص.

من نقطة د على $\overrightarrow{\text{أس}}$ ارسم شعاعًا متعامدًا مع $\overrightarrow{\text{أس}}$ يقطع $\overrightarrow{\text{أص}}$ في جـ.

بتحريك النقطة د تتحرك تبعًا لها النقطة جـ، يكبر المثلث أ د جـ أو يصغر. وبتحريك النقطة ص يكبر أو يصغر قياس الزاوية $\hat{\text{أ}}$.

١ – أوجد قياس الزاوية $\hat{\text{أ}}$.

٢ – أوجد أطوال أضلاع المثلث أدجـ.



احسب النسبة $\frac{\text{دجـ}}{\text{أجـ}}$ $\left(\frac{\text{الضلع المقابل للزاوية } \hat{\text{أ}}}{\text{الوتر}}\right)$

حرّك $\overrightarrow{\text{أص}}$ بحيث يتغيّر قياس الزاوية $\hat{\text{أ}}$.

ما الذي تلاحظه حول النسبة $\frac{\text{دجـ}}{\text{أجـ}}$ عندما يتغيّر قياس الزاوية $\hat{\text{أ}}$.

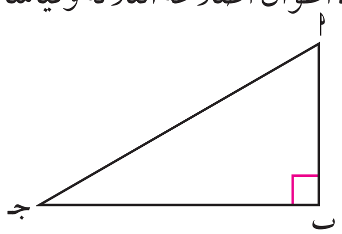
من أي قيمة تقترب هذه النسبة عندما يقترب قياس $\hat{\text{أ}}$ من ٠°؟ ومن ٩٠°؟

٣ – اصنع جدولًا يبيّن قيم الزاوية $\hat{\text{أ}}$ والنسبة $\left(\frac{\text{الضلع المقابل للزاوية } \hat{\text{أ}}}{\text{الوتر}}\right)$ يتضمن القياسات ١٠°، ٢٠°، ٣٠°، ... ٨٠ للزاوية $\hat{\text{أ}}$.

٣ – حل المثلث قائم الزاوية Solving Right Triangle

نعلم أن للمثلث ستة عناصر هي أضلاعه الثلاثة وزواياه الثلاث. حلّ المثلث يعني إيجاد أطوال أضلاعه الثلاثة وقياسات زواياه الثلاث. سيقتصر عملنا في هذا البند على المثلث قائم الزاوية.

في الشكل المقابل المثلث أب جـ قائم الزاوية في ب.



الأضلاع: $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$

الزوايا: $\hat{\text{أ}}$ ، $\hat{\text{ب}}$ ، $\hat{\text{جـ}}$

غالبًا ما تعطى ثلاثة عناصر في المثلث أحدها على الأقل طول أحد الأضلاع ويتعين علينا إيجاد الباقي.

مثال (١)

حلّ المثلث أب جـ القائم في $\hat{\text{ب}}$ إذا علم أن: أب = ٤ سم، ب جـ = ٣ سم

الحل:

بتطبيق نظرية فيتاغورث

(أجـ)^{٢} = (أب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

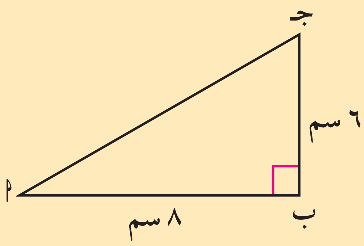
أجـ = ٥ سم

ظا أ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤} = ٠,٧٥$

استخدم حاسبة الجيب لإيجاد ق(أ̂).

Shift | TAN | 0.75 | = | 36.869897

ق(أ̂) ≃ ٣٧°.   ق(جـ̂) = ٩٠° − ٣٧° = ٥٣°



حاول أن تحل

١ حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في جـ̂ حيث: ب جـ = ١٥ سم، أ جـ = ١٢ سم

مثال (٢)

حلّ المثلث أ ب جـ القائم في (جـ̂) إذا علم أن: أ ب = ٤٠ سم، ق(ب̂) = ٢٥°

الحل:

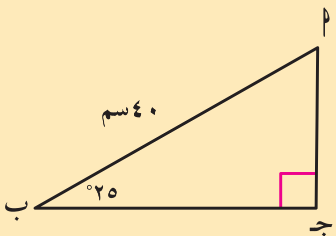
ق(أ̂) = ٩٠° − ٢٥° = ٦٥°

جتا(ب̂) = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$ ، جتا (٢٥°) = $\frac{\text{ب جـ}}{٤٠}$

ب جـ = ٤٠ × جتا(٢٥°) ≃ ٣٦,٢٥ سم

جاب = $\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ب}}$ ، جا (٢٥°) = $\frac{\text{أ جـ}}{٤٠}$

أ جـ = ٤٠ جا (٢٥°) ≃ ١٧ سم



حاول أن تحل

٢ حل المثلث أ ب جـ القائم في جـ حيث: أ جـ = ٢٠ سم، ق(ب̂) = ٧٥°

مثال (٣)

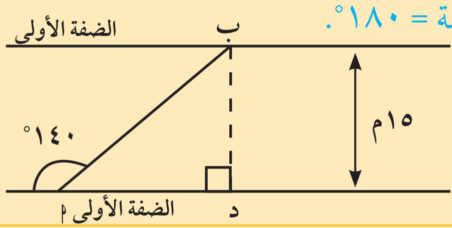
حاول أحد السباحين عبور النهر انطلاقًا من النقطة أ الموضحة بالشكل المرسوم جرفه التيار ووصل إلى النقطة ب.

ما المسافة التي قطعها السباح؟

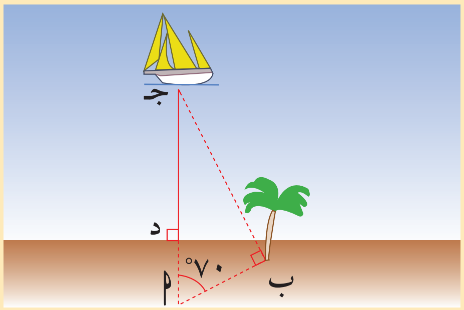
الحل: ليكن ب د البعد العمودي يبيّن الضفتين

في المثلث أ ب د، ق(د أ ب) = ١٨٠° − ١٤٠° = ٤٠° قياس الزاوية المستقيمة = ١٨٠°.

جا(أ) = $\frac{\text{ب د}}{\text{أ ب}}$ جا(٤٠°) = $\frac{١٥}{\text{أ ب}}$ بالتعويض



أب = $\frac{١٥}{\text{جا}(٤٠°)}$ ≃ ٢٣,٣ أي أن السباح قطع حوالى ٢٣,٣ مترًا.



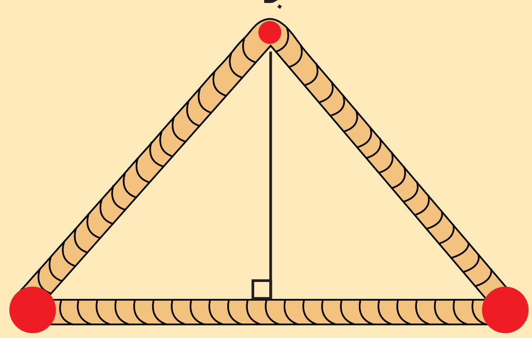
حاول أن تحل

٣ ما البعد بين الزورق (النقطة جـ) والشاطئ إذا كان

أد = ١٠٠ متر، أب = ١٥٠ متر.

مثال (٤)

حبل طوله ١٠ أمتار مثبت في مسمارين عند النقطتين أ، ب. حبل آخر طوله ١١ مترًا مثبت في نفس النقطتين، شُدّ من وسطه (النقطة جـ) إلى أعلى.



أ أوجد ق(دأجـ)   ب أوجد $\overline{\text{دجـ}}$

الحل:

أد = $\frac{\text{أب}}{٢}$ = ٥ أمتار.

أد = $\frac{١١}{٢}$ = ٥,٥ أمتار.

جتاأ = $\frac{\text{أد}}{\text{أجـ}}$ = $\frac{٥}{٥,٥}$ ≃ ٠,٩١

∴ ق(أ) ≃ جتا$^{-١}$ (٠,٩١)

ق(دأجـ) ≃ ٢٤° ٢٩′ ٤١″ .   باستخدام الحاسبة

ب باستخدام نظرية فيثاغورث (جـد)^٢ + (أد)^٢ = (جـأ)^٢

أي (جـد)^٢ = (جـأ)^٢ − (أد)^٢

(جـد)^٢ = ٥,٥^٢ − ٥^٢ = ٥,٢٥

∴ جـد = $\sqrt{٥,٢٥}$ ≃ ٢,٣

طول القطعة $\overline{\text{جـد}}$ يساوي حوالي ٢,٣ متر.

حاول أن تحل

٤ أوجد (أ) إذا كان طول الحبل من أ إلى ب والمار بالنقطة جـ يساوي ١٢ مترًا.

زوايا الارتفاع والانخفاض
Angles of Elevation and Depression

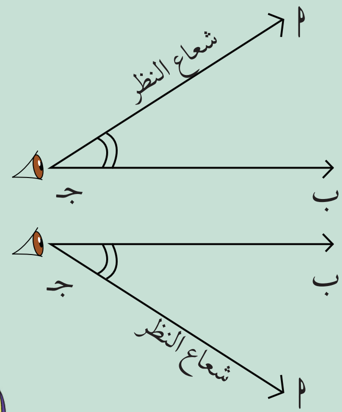
سوف تتعلم

- زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض
- استخدام زوايا الارتفاع والانخفاض في حل مسائل حياتية

دعنا نفكر ونتناقش

١ - إذا رصد شخص (جـ) نقطة ٱ أعلى من مستوى نظره الأفقيّ جـ ب فإن الزاوية التي يحددها جـ ٱ ، جـ ب تسمى **زاوية ارتفاع ٱ** عن المستوى الأفقي لنظر الشخص جـ.

٢ - وإذا رصد الشخص جـ نقطة د أدنى من مستوى نظره الأفقي جـ ب فإن الزاوية التي يحددها جـ د ، جـ ب تسمّى **زاوية انخفاض د** عن المستوى الأفقي لنظر الشخص جـ.



ملاحظة:

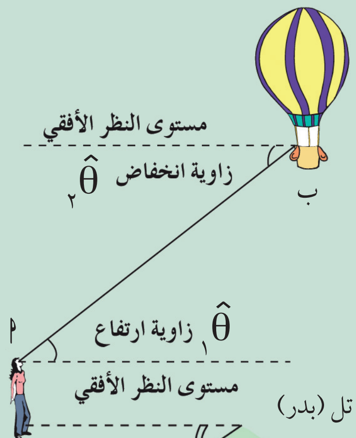
إذا كان ٱ شخصًا موجودًا على سطح الأرض، وكان ب شخصًا موجودًا في منطاد مرتفع عن سطح الأرض، ونظر كلّ منهما إلى الآخر فإنّ:

$\hat{\theta}_1$ هي زاوية ارتفاع ب عن المستوى الأفقيّ لنظر (ٱ).

$\hat{\theta}_2$ هي زاوية انخفاض (ٱ) عن المستوى الأفقيّ لنظر (ب)

ونلاحظ في هذه الحالة أنّ:

زاوية الارتفاع ($\hat{\theta}_1$) = زاوية الانخفاض ($\hat{\theta}_2$).



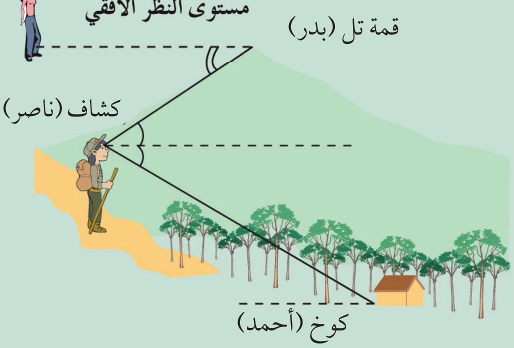
٣ - يقف بدر عند قمة التل ويقف ناصر عند الكشاف ويقف أحمد عند الكوخ.

صف كلّ زاوية في الشكل عندما ينظر:

(أ) بدر إلى ناصر

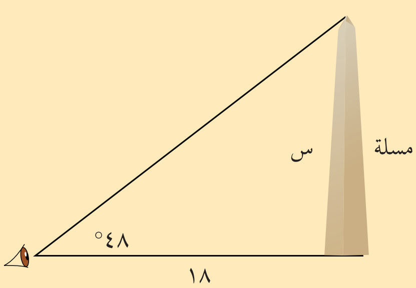
(ب) ناصر إلى أحمد

(جـ) ناصر إلى بدر



مثال (١)

لقياس طول إحدى المسلات قام مرشد سياحيّ برصد قمة المسلة فوجد أنّ قياس زاوية الارتفاع ٤٨°. إذا كان المرشد يبعد عن قاعدة المسلة مسافة ١٨ م فاحسب ارتفاع المسلة.



الحل:

ظا(٤٨)° = $\frac{\text{س}}{١٨}$

س = ١٨ × ظا (٤٨)° ≃ ٢٠

ارتفاع المسلة: ٢٠ م تقريبًا

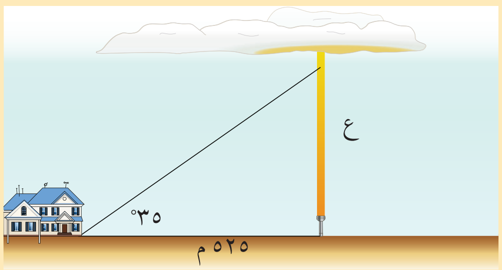
حاول أن تحل

١ إذا كنت تسكن بالقرب من مطار الكويت الدوليّ وشاهدت طائرة وقمت بتقدير زاوية الارتفاع فكانت ٣٢° تقريبًا. وإذا كان ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض عندئذ ١٠٠٠ م فاحسب المسافة بينك وبين الطائرة.

مثال (٢)

علم الأرصاد الجوية: لمعرفة ارتفاع طبقة من الغيوم عن سطح الأرض يستخدم علماء الفلك قياس زاوية الارتفاع في اللحظة التي يصل فيها البرق إلى الأرض. (يمكن نمذجة المسألة كما في الصورة).

أوجد قيمة تقريبية لارتفاع طبقة الغيوم عن سطح الأرض.



الحل:

$$\text{ظا}\,(٣٥°) = \frac{\text{ع}}{٥٢٥}$$

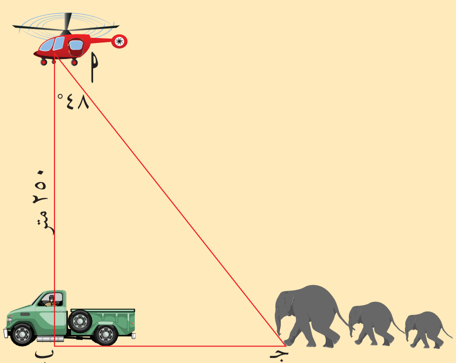
$$\text{ع} = ٥٢٥ \times \text{ظا}\,(٣٥°)$$

$$\text{ع} \simeq ٣٦٧,٦ \text{ مترًا}$$

مثال (٣)

تحلق مروحية فوق محمية طبيعية على ارتفاع ٢٥٠ مترًا وتواكبها على الأرض سيارة حرس المحمية. شاهد ربان المروحية قطيعًا من الفيلة بزاوية انخفاض قياسها ٤٨°. ما المسافة بين سيارة الحرس والقطيع إذا كانت السيارة مباشرة تحت المروحية؟

الحل:



لتكن أ موقع المروحية، ب موقع السيارة، جـ موقع القطيع.

$$\text{جاأ} = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$$

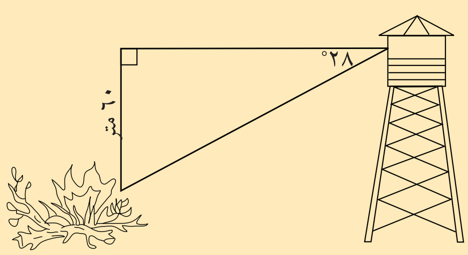
$$\text{جا}٤٨° = \frac{٢٥٠}{\text{ب جـ}}$$

$$\text{ب جـ} = \frac{٢٥}{\text{جا}٤٨°} \simeq ٢٢٥$$

يبعد قطيع الفيلة حوالى ٢٢٥ مترًا عن سيارة الحرس.

حاول أن تحل

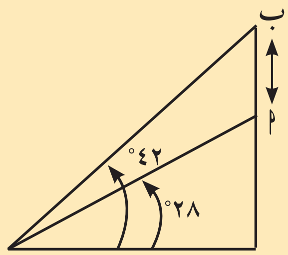
٣ يقف مراقب فوق برج ارتفاعه ٦٠ مترًا. شاهد حريقًا بزاوية انخفاض قياسها ٢٨°. ما المسافة بين قاعدة برج المراقبة وموقع الحريق؟

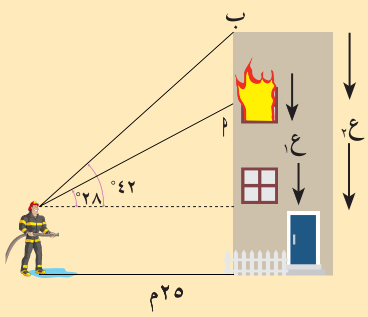


مثال (٤)

شاهد رجل إطفاء وهو يقف على سطح الأرض ألسنة النيران تنبعث من إحدى النوافذ القريبة من سطح البناء. وجد أن قياس زاوية الارتفاع من مستوى نظره إلى القاعدة السفلية للنافذة (أ) حيث تندلع النيران هي ٢٨°، وزاوية الارتفاع من مستوى نظره إلى سطح البناء (ب) قياسها ٤٢°. علمًا أن رجل إطفاء يقف على مسافة ٢٥ مترًا من قاعدة البناء.

ما المسافة بين قاعدة النافذة (حيث ألسنة النيران) وسطح البناء؟





الحل:

بفرض أن $ع_1$ هي البعد بين القاعدة السفلية للنافذة أ ومستوى النظر الأفقي.

ظا٢٨° = $\frac{ع_1}{٢٥}$ ؛ $ع_1$ = ٢٥ ظا٢٨°.

بفرض أن $ع_2$ هي البعد بين سطح البناء والمستوى الأفقي للنظر.

ظا٤٢° = $\frac{ع_2}{٢٥}$ ؛ $ع_2$ = ٢٥ ظا٤٢°

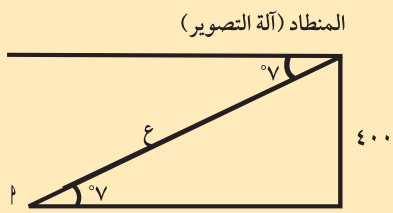
ع = $ع_2$ − $ع_1$ = ٢٥(ظا ٤٢° − ظا ٢٨°)

≃ ٩,٢٢ أمتار ∴ المسافة المطلوبة ≃ ٩,٢٢ أمتار

حاول أن تحل

٤ زُوِّد منطاد بهوائي تلفزيون لنقل مباراة كرة القدم، حيث تراقب آلة التصوير الملعب بزاوية انخفاض ٧°. يبلغ ارتفاع المنطاد عن سطح الأرض ٤٠٠ مترًا.

ما طول خط الضوء المرسل من آلة التصوير إلى الملعب؟



٢ – ٧

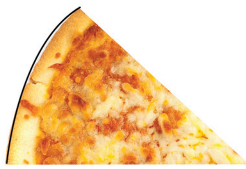
القطاع الدائري والقطعة الدائرية

Circular Sector and Circular Segment

تعريف:
القطاع الدائري هو جزء من سطح الدائرة محدود بنصفي قطرين وقوس.

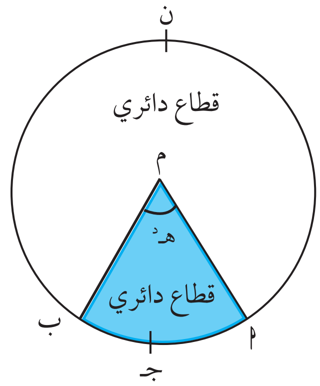
سوف تتعلم
- القطاع الدائري
- إيجاد مساحة القطاع الدائري
- القطعة الدائرية
- إيجاد مساحة القطعة الدائرية

تمثل قطعة الشطيرة قطاعًا دائريًا
في الشكل المرسوم:



نصفا القطرين مأ، مب يقسمان الدائرة إلى قطاعين دائريين.

القطاع الأصغر مأجـب زاويته المركزية هـ، والقطاع الأكبر مأنب زاويته المركزية ٢π – هـ.



معلومة رياضية:
قياس القوس = قياس الزاوية المركزية التي تحصر القوس بين ضلعيها.

١ – مساحة القطاع الدائري:

Area of Circular Sector

لإيجاد مساحة القطاع الدائري نستخدم التناسب:

نسبة مساحة القطاع الدائري إلى مساحة الدائرة هي نسبة طول القوس إلى طول الدائرة. (محيط الدائرة)

$$\frac{\text{طول القوس}}{\text{طول الدائرة}} = \frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\text{مساحة الدائرة}}$$

$$\frac{\text{ل}}{٢\pi\,\text{نق}} = \frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\pi\,\text{نق}^{٢}}$$

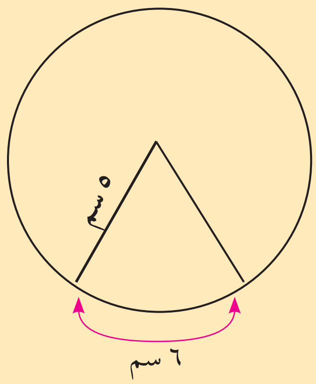
$$\text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{\text{ل}}{٢\pi\,\text{نق}} \times \pi\,\text{نق}^{٢}$$

تذكر:
مساحة الدائرة = π نق^{٢}
طول القوس ل = هـ × نق

$$\textbf{مساحة القطاع الدائري} = \frac{١}{٢}\,\text{ل نق}$$

مثال (١)

أوجد مساحة القطاع الأصغر في الشكل المقابل:



الحل:

(أ) مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ ل نق = $\frac{١}{٢} \times ٦ \times ٥$

= ١٥ سم^{٢}

مساحة القطاع الدائري تساوي ١٥ سم^{٢}

حاول أن تحل

(١) (أ) أوجد مساحة القطاع الدائري الذي طول نصف قطر دائرته ١٠ سم وطول قوسه ٤ سم.

تعرّفت في بداية الوحدة الثانية أن طول القوس ل يساوي قياس الزاوية المركزية بالراديان مضروبًا في طول نصف القطر:

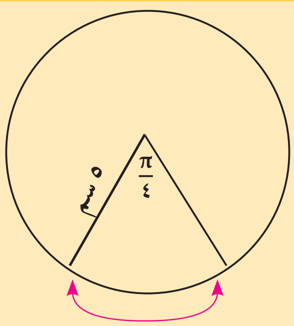
ل = هـ^{د} × نق

إذا عوّضنا عن ل بـ هـ^{د} × نق نحصل على:

مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ هـ^{د} × نق × نق = $\frac{١}{٢}$ هـ^{د} نق^{٢}

مثال (٢)

أوجد مساحة القطاع الدائري الأصغر في الشكل المقابل:



الحل:

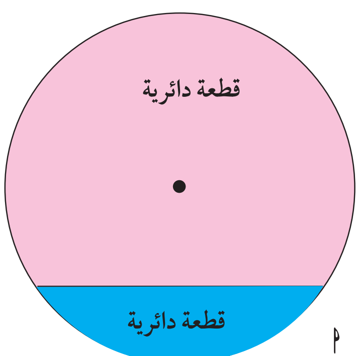
مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ هـ^{د} نق^{٢} = $\frac{١}{٢} \times \frac{\pi}{٤} \times (٥)^{٢}$

= $\frac{٢٥\pi}{٨} \simeq ٩,٨$ سم^{٢}

مساحة القطاع الدائري تساوي حوالى ٩,٨ سم^{٢}

٢- القطعة الدائرية: Circular Segment

القطعة الدائرية هي جزء من سطح الدائرة محدود بقوس فيها ووتر.

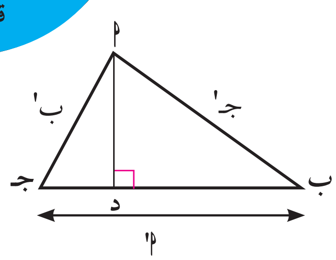


٣- مساحة المثلث: Area of a Triangle

مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ × أد

لكن جاب = $\frac{\text{أد}}{\text{أب}}$ إذًا أد = أب × جاب

مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ × ب أ × جاب.



مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ × ب أ × جا ب

= $\frac{١}{٢}$ ب جـ × أ جـ × جا جـ

= $\frac{١}{٢}$ أ ب × أ جـ × جا أ

أي أن مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولي أي ضلعين × جيب الزاوية المحددة بها

وباختصار نكتب مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ أَ جَ جاب

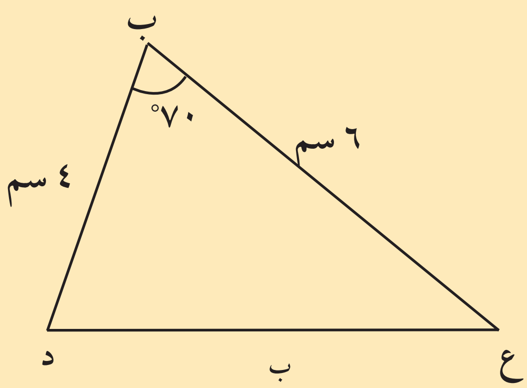
= $\frac{١}{٢}$ أَ بَ × جاجـ

= $\frac{١}{٢}$ بَ جَ جاأ

مثال (٣)

ب ع د حيث ب ع = ٦ سم، ب د = ٤ سم، ق($\hat{ب}$) = ٧٠°

أوجد مساحة هذا المثلث.



الحل:

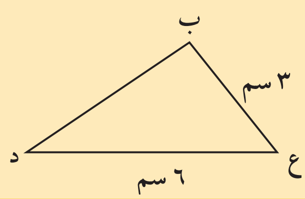
مساحة المثلث ب ع د = $\frac{١}{٢}$ ب ع × ب د × جا($\hat{ب}$)

= $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٤ × جا(٧٠°) ≃ ١١,٢٧٦

مساحة المثلث ب ع د هي حوالى ١١,٢٧٦ سم^٢.

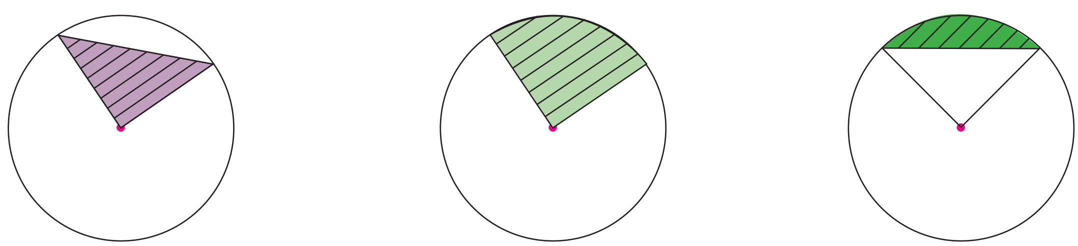
حاول أن تحل

٢ في المثلث المقابل إذا كانت مساحته = ٧ سم^٢. فأوجد ق($\hat{ع}$).



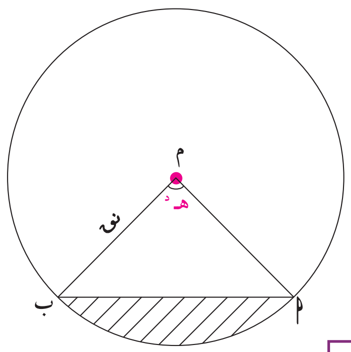
٤- مساحة القطعة الدائرية: Area of a Circular Segment

مساحة القطعة الدائرية تساوي مساحة القطاع الدائري مطروحًا منه مساحة المثلث.



مساحة القطعة الدائرية = مساحة القطاع الدائري − مساحة المثلث

إيجاد مساحة القطعة الدائرية:



مساحة القطاع الأصغر = $\frac{١}{٢}$ هـ د × نق^٢

مساحة المثلث م أ ب $= \frac{١}{٢}$ م أ × م ب × جا(هـ د)

$= \frac{١}{٢}$ نق^٢ × جا(هـ د)

مساحة القطعة الدائرية = مساحة القطاع الأصغر − مساحة المثلث م أ ب

$= \frac{١}{٢}$ هـ د × نق^٢ − $\frac{١}{٢}$ نق^٢ × جا(هـ د)

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^٢ (هـ د − جاهـ د)

تذكر:

هـ د هو قياس الزاوية بالراديان.

انتبه لوضع الآلة الحاسبة.

مثال (٤)

احسب مساحة قطعة دائرية زاويتها المركزية ٦٠° وطول نصف قطر دائرتها ١٠ سم.

الحل:

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^٢ [هـ د − جاهـ د]

نحول ٦٠° إلى القياس الدائري

هـ د = ٦٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ ≃ ١,٠٤٧٢

نوجد جا (٦٠°) بالآلة الحاسبة

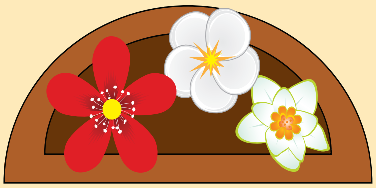
جا (٦٠°) ≃ ٠,٨٦٦ (لاحظ أن جا ١,٠٤٧٢ ≃ ٠,٨٦٦ أيضًا)

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^٢ [هـ د − جاهـ د]

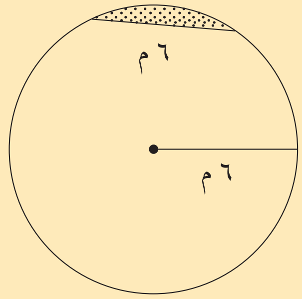
≃ $\frac{١}{٢}$ × ١٠٠ [١,٠٤٧٢ − ٠,٨٦٦]

≃ ٩,٠٦ سم^٢

حاول أن تحل



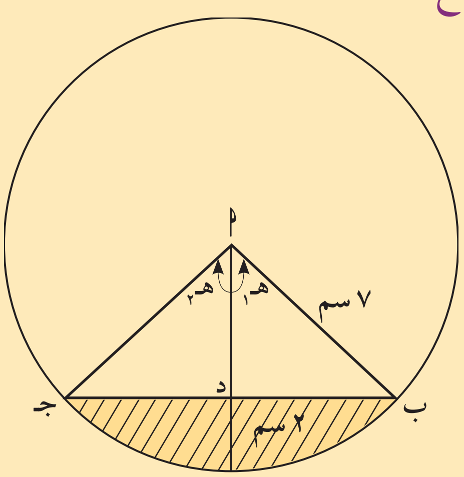
٣ **أ** حوض زهور دائري طول نصف قطره ٦ م (انظر الشكل المقابل)، وفي هذا الحوض وتر طوله ٦ م. احسب مساحة القطعة الدائرية الصغرى.



ب أوجد مساحة قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم وقياس زاويتها المركزية ٧٠°.

مثال (٥)

يبيّن الشكل المقابل مقطعًا في أنبوب أسطواني الشكل، ومياهًا متجمعة في القاع.
إذا كان أقصى عمق الماء هو ٢ سم وطول نصف قطر الأنبوب ٧ سم،
فأوجد مساحة الجزء المظلل بالأصفر.



الحل: أد = ٥ سم

$هـ_١ = جتا^{-١}\left(\frac{٥}{٧}\right) \simeq ٠,٧٧٥^{د} = هـ_٢$

$هـ = هـ_١ + هـ_٢ \simeq ١,٥٥^{د}$

مساحة القطاع الأصغر $= \frac{١}{٢} \times هـ^{د} \times نق^{٢}$

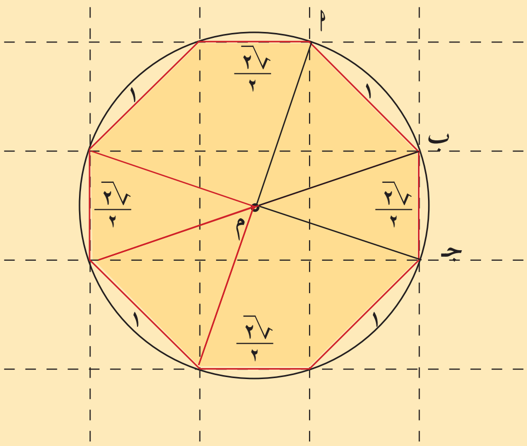
$= \frac{١}{٢} \times ١,٥٥ \times ٧^{٢} \simeq ٣٧,٩٧٥$ سم^{٢}

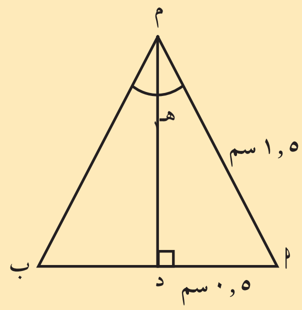
مساحة المثلث أ ب جـ $= \frac{١}{٢} \times$ أجـ $\times$ أب $\times$ جا$(١,٥٥^{د}) \simeq \frac{١}{٢} \times ٤٩ \times$ جا$(١,٥٥^{د}) \simeq ٢٤,٤٩٤٧$ سم^{٢}

مساحة الجزء المظلل $= ٣٧,٩٧٥ - ٢٤,٤٩٤٧ \simeq ١٣,٤٨$ سم^{٢}

مثال (٦)

الشكل المقابل يوضح مقطعًا لطبق بتري وضع فيه قالب معدني للأجبان له شكل مضلع ثماني وذلك للتحقق من خلوه من البكتيريا. إذا كانت زوايا المضلع متساوية القياس وطول نصف قطر الدائرة ١,٥ سم، فأوجد المساحة بين طبق بتري وقالب الأجبان.





الحل:

نفرض أن $هـ_١$ زاوية مركزية تقابل وترًا طول ١ سم،

$هـ_٢$ زاوية مركزية تقابل وترًا طوله $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

في Δ أم ب المتطابق الضلعين $\overline{م د} \perp \overline{أ ب}$

$\therefore \text{جا} \frac{هـ_١}{٢} = \frac{٠,٥}{١,٥}$

$\therefore ق\left(\frac{هـ_١}{٢}\right) = \text{جا}^{-١} \frac{٠,٥}{١,٥}$

$ق(هـ_١) = ٢ \times \text{جا}^{-١} \frac{٠,٥}{١,٥} \simeq ٠,٦٧٩^{\text{د}}$

مساحة القطعة الدائرية المرتبطة بالوتر طوله ١ = $\frac{١}{٢}$ نق^٢ $(٠,٦٧٩ - \text{جا } ٠,٦٧٩) \simeq ٠,٠٥٧٥$ سم^٢ (١)

وبالمثل في المثلث جـ م ب:

$ق(هـ_٢) = ٢ \times \text{جا}^{-١} \frac{\sqrt{٢}}{٤ \times ١,٥} \simeq ٠,٤٧٥٩^{\text{د}}$

مساحة القطعة الدائرية المرتبطة بالوتر طوله $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ =

$\frac{١}{٢}$ نق^٢ $(٠,٤٧٥٩ - \text{جا } ٠,٤٧٥٩) \simeq ٠,٠١٩١٩$ سم^٢ (٢)

من (١)، (٢) المساحة بين طبق بتري والقالب المعدني

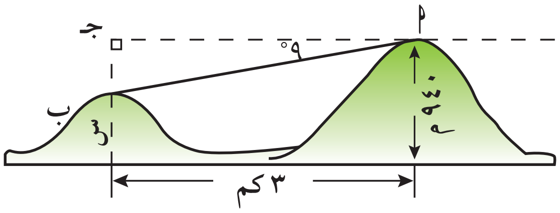
$\simeq ٤ \times (٠,٠٥٧٥ + ٠,٠١٩٩) \simeq ٠,٣٠٩٦$ سم^٢

المرشد لحل المسائل

خلال بحثه على أحد المواقع الإنترنت وجد سلطان المسألة التالية:

يبعد تلان عن بعضهما ٣ كم. يبلغ ارتفاع القمة «ﻫ» ٩٤٠ مترًا وقياس زاوية الانخفاض من القمة «ﻫ» إلى القمة «ب» ٩°. أوجد ارتفاع القمة «ب».

كيف فكر سلطان لإيجاد ارتفاع القمة ب.



قياسات الرسم غير صحيحة

بداية، سوف أرسم مخططًا للمسألة.

البعد بين التلين = ٣ كم.

قياس زاوية الانخفاض = ٩°.

ارتفاع القمة «ﻫ» = ٩٤٠ مترًا.

عليّ إيجاد ارتفاع القمة «ب». ليكن س هذا الارتفاع.

لإيجاد قيمة س، سوف أستخدم النسب المثلثية في المثلث ﻫ ب جـ. طول أحد ضلعي القائمة البعد بين القمتين وقياس إحدى زواياه الحادة ٩°. سوف أستخدم ظل هذه الزاوية أو مقلوبه إذا استطعت إيجاد طول أحد أضلاع الزاوية القائمة. إذا تمعنت في الرسم أجد أن:

ﻫجـ = ٣ كم = ٣٠٠٠ متر.

∵ كانت الزاوية هي زاوية انخفاض، فارتفاع القمة: «ب» سوف يكون أصغر من ارتفاع القمة «ﻫ».

سأكتب معادلة $\text{ظا}٩° = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{ب جـ}}{٣٠٠٠}$

سأحل المعادلة $\text{ب جـ} = ٣٠٠٠ \times \text{ظا}٩°$

سأستخدم آلة حاسبة وأقربّ $\text{ب جـ} = ٤٧٥$ متر تقريبًا

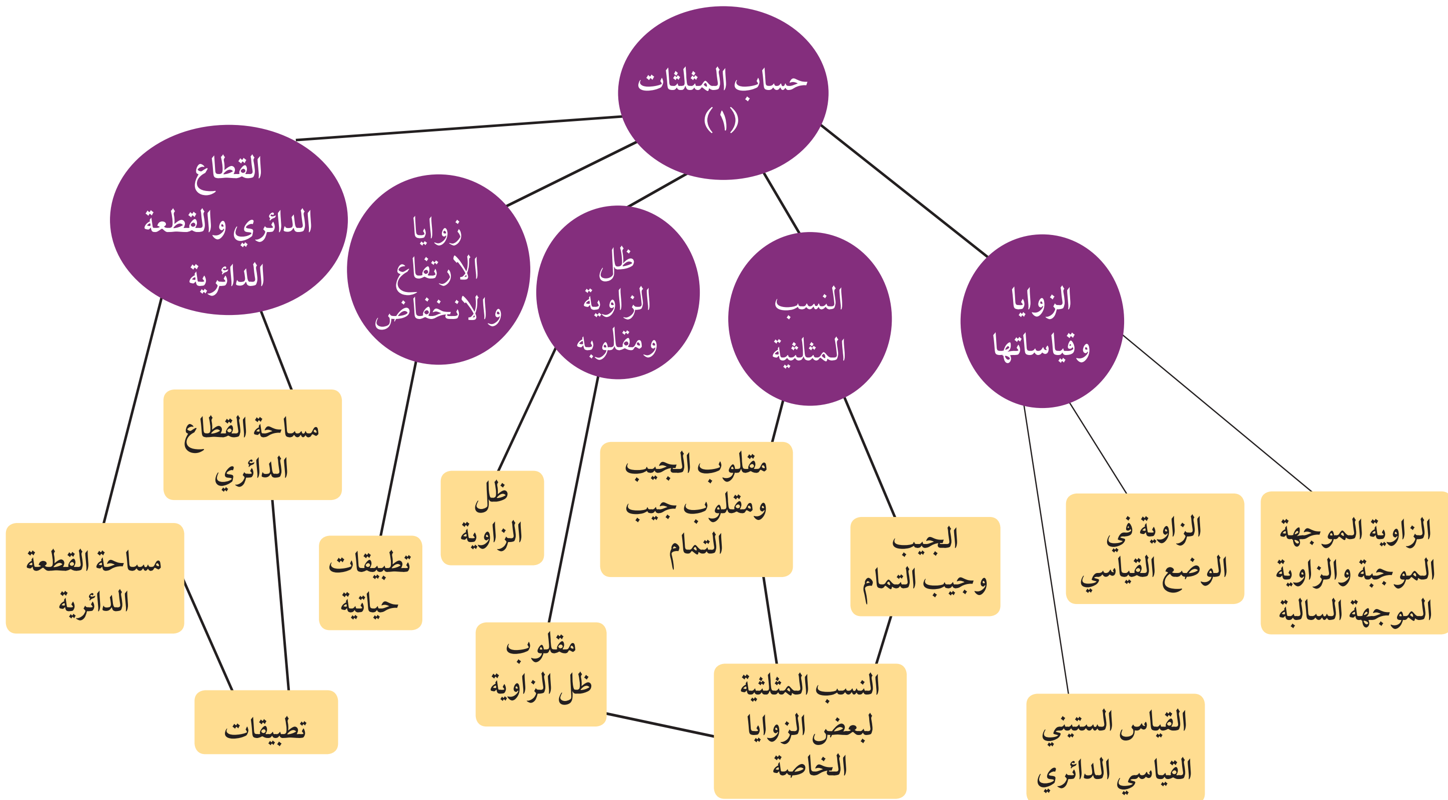
يبقى عليّ طرح هذه القيمة من ارتفاع القمة «ﻫ» $\text{س} = ٩٤٠ - ٤٧٥ = ٤٦٥$

لذا يكون ارتفاع القمة (ب) ٤٦٥ مترًا.

مسألة إضافية

في صف الطيران المظلي، وقف الطلاب على تل ارتفاعه ٤٧٠ مترًا يراقبون رفيقًا لهم يهبط بالمظلة. عندما وصل إلى الأرض كانت زاوية الانخفاض ٧٢°. ما بعد هذا المظلي عن قاعدة التل؟

مخطط تنظيمي للوحدة الثانية



ملخص

- تكون الزاوية الموجهة موجبة إذا كان الاتجاه من الضلع الابتدائي إلى الضلع النهائي عكس دوران عقارب الساعة.
- تكون الزاوية الموجهة سالبة إذا كان الاتجاه من الضلع الابتدائي إلى الضلع النهائي مع دوران عقارب الساعة.
- تكون الزاوية الموجهة في الوضع القياسي إذا كان ضلعها الابتدائي على الجزء الموجب من محور السينات ورأسها في نقطة الأصل لمحاور الإحداثيات.
- تقاس الزاوية بالدرجات أو بالراديان.
- الزاوية نصف القطرية هي زاوية مركزية في دائرة تحصر قوسًا طوله يساوي طول نصف قطر هذه الدائرة وقياسها يساوي ١ راديان.
- العلاقة: $\frac{\text{هـ}^{د}}{\pi} = \frac{\text{س}^{\circ}}{١٨٠^{\circ}}$ تربط بين القياس الستيني والقياس الدائري لزاوية.
- في المثلث قائم الزاوية جيب الزاوية هو نسبة الضلع المقابل إلى الوتر ويرمز إليه بـ جا أو sin.
- جيب التمام للزاوية هو نسبة الضلع المجاور إلى الوتر ويرمز إليه بـ جتا أو cos.
- قاطع الزاوية هو مقلوب جيب تمام الزاوية قاθ = $\frac{١}{\text{جتا}\theta}$ حيث جتا$\theta \neq$ ٠.
- قاطع تمام الزاوية هو مقلوب جيب الزاوية قتاθ = $\frac{١}{\text{جتا}\theta}$ حيث جتا$\theta \neq$ ٠.
- ظل الزاوية هو نسبة الضلع المقابل إلى الضلع المجاور ويرمز إليه ظا أو tan.
- ظل تمام الزاوية هو نسبة طول الضلع المجاور إلى طول الضلع المقابل ويرمز إليه ظتا أو cotan.

- جا ٤٥° = جتا ٤٥° = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ؛ ظا ٤٥° = ١

جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ظا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$ ظا ٦٠° = $\sqrt{٣}$

- زاوية الارتفاع: إذا كانت نقطة ما أعلى من مستوى النظر الأفقي.
- زاوية الانخفاض: إذا كانت نقطة ما أدنى من مستوى النظر الأفقي.
- القطاع الدائري هو جزء من الدائرة محدود بنصفي قطرين وقوس على الدائرة.
- مساحة القطاع الدائري تساوي $\frac{١}{٢}$ هـ^{د} نق^{٢} حيث هـ^{د} قياس الزاوية المركزية للقطاع الدائري بالراديان، نق هو نصف قطر الدائرة.
- القطعة الدائرية هي جزء من الدائرة محدودة بوتر وقوس على الدائرة.
- مساحة القطعة الدائرية تساوي $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} (هـ^{د} − جاهـ^{د}).

الوحدة الثالثة

الهندسة المستوية
Plane Geometry

مشروع الوحدة: هندسة الكسريات CTALS

١ مقدمة المشروع: كثير من الأشكال تحتوي على أنماط تتكرر بمقاييس مختلفة مثل زهرة القرنبيط، حيث تهتم هندسة الكسريات بهذه الأشكال. ويعتبر عالم الرياضيات فون كوش (Von Kosh) من أهم الباحثين في هذا المجال.

٢ الهدف: دراسة الأشكال ذاتية التماثل التي تتغير.

٣ اللوازم: أوراق رسم بياني ؛ حاسبة علمية أو حاسوب.

٤ أسئلة حول التطبيق:

أ ابحث عن الخصائص الثلاث المهمة للكسريات.

ب ابحث عن العالم الرياضي فون كوش واعرض لبعض أعماله في مجال الكسريات وخاصة «رقعة كوش» Koch snow flake

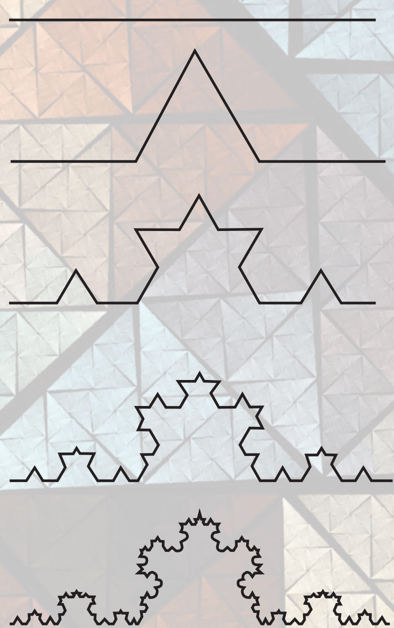
ج طول القطعة المقابلة وحدة واحدة وتشكل المرحلة صفر من «منحنى كوش».
نفذ المراحل من ١ إلى ٤. في كل مرحلة، قسّم القطعة إلى ٣ قطع متطابقة واستبدل قطعة الوسط بقطعتين لهما القياس نفسه.

د ارسم مثلثًا متطابق الأضلاع. عيّن نقطة المنتصف لكل ضلع. صل بين النقاط الثلاث. كرّر ذلك عدة مرات.

٥ التقرير: ضعْ تقريرًا تبيّن فيه كيف نفذت المشروع وتجيب عن الأسئلة.

أضف إلى معلوماتك

خلال السنوات العشرين الأخيرة، تزايدت كثيرًا أهمية هندسة الكسريات fractal geometry كطريقة لوصف بعض ظواهر الحياة اليومية. استخدمت بعض الكسريات لوصف التكوينات الطبيعية مثل سلاسل الجبال والغيوم. في العام ١٩٠٤، وضع السويدي فون كوش منحنى استخدم لنمذجة السواحل.



المرحلة ٠
المرحلة ١
المرحلة ٢
المرحلة ٣
المرحلة ٤

دروس الوحدة

طرائق البرهان الهندسي	التشابه	تشابه المثلثات	التشابه في المثلثات قائمة الزاوية	التناسبات والمثلثات المتشابهة	العلاقة بين محيطي شكلين متشابهين ومساحتيهما
٣-١	٣-٢	٣-٣	٣-٤	٣-٥	٣-٦

الوحدة الثالثة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت نظرية فيتاغورث وتطبيقاتها في المثلثات قائمة الزاوية.
- تعرفت على منصف الزاوية والمنصف العمودي للقطعة المستقيمة والقطعة المتوسطة في المثلث والعمود المرسوم من الرأس إلى الضلع المقابل في المثلث.
- تعلمت الحلول للمعادلات من الدرجة الأولى في متغيرين.
- تعلمت الحلول للمعادلات من الدرجة الثانية في متغير.
- تعرفت حلول المتباينات.
- تعرفت النسبة والتناسب.

ماذا سوف تتعلم؟

- طرائق البرهان الهندسي: المنطق الاستقرائي - المنطق الاستنتاجي.
- التشابه: مفهوم التشابه بين الأشكال الهندسية المستوية وإيجاد مقاييس رسم معين باستخدام التشابه وإيجاد النسبة الذهبية.
- حالات تشابه المثلثات والتطبيق في مواقف حياتية.
- تطبيق التشابه على المثلث قائم الزاوية والخصائص الناتجة من العمود المرسوم من رأس القائمة إلى الوتر المقابل.
- نظرية طاليس.
- خصائص منصف الزاوية الداخلي في المثلث.
- إدراك العلاقة بين محيطي شكلين متشابهين ومساحتيهما.

المصطلحات الأساسية

نمط - قانون الاستطلاع - التشابه - مستطيل ذهبي - نظرية طاليس - عمود في المثلث - مساحة - المنطق الاستقرائي - قانون التعليل الاستدلالي - مقياس رسم - نسبة ذهبية - منصف زاوية - محيط.

٣-١ طرائق البرهان الهندسي
Geometry Proof Methods

أولا – التبرير الاستقرائي Inductive Reasoning

سوف تتعلم
- إيجاد نمط
- استخدام التبرير الاستقرائي للتوقع
- قانون الاستطلاع
- قانون التعليل الاستدلالي

دعنا نفكر ونتناقش

الأنماط هي إحدى الظواهر الملفتة في الطبيعة: الفصول الأربعة، الليل والنهار، أوراق الشجر...إن **التبرير الاستقرائي** هو استخلاص معلومات يرتكز على الأنماط التي نلاحظها. إذا لاحظت نمطًا في متسلسلة، فيمكنك استخدام التبرير الاستقرائي لمعرفة الحدود التي تلي هذه المتسلسلة.

مثال (١)

أوجد نمطًا. استخدم هذا النمط لإيجاد الحدود الثلاثة التالية:

أ ٣، ٦، ١٢، ٢٤، ....

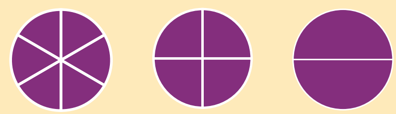
الحل:

٣ ٦ ١٢ ٢٤

×٢ ×٢ ×٢

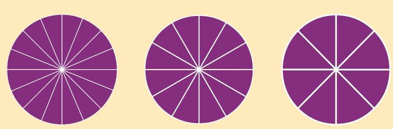
كل حد من هذا النمط يساوي الحد الذي يسبقه مضروبًا بالعدد ٢. لذا نستنتج الحدود الثلاثة التالية:

٢٤ × ٢ = ٤٨، ٤٨ × ٢ = ٩٦، ٩٦ × ٢ = ١٩٢

ب 

الحل:

كل دائرة رسم فيها قطر واحد إضافيّ عن الدائرة التي سبقتها، ويقسمها إلى قطاعات دائرية متساوية المساحة لذا تكون الحدود الثلاثة التالية:



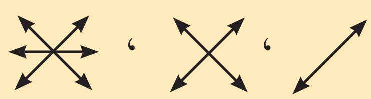
معلومة رياضية:
قطر الدائرة هو وتر يمر في مركزها.

حاول أن تحل

١ اكتب الحدود الثلاثة التي تأتي في كل نمط.

أ ١، ٢، ٤، ٧، ١١، ١٦، ٢٢، ....، ....، ....

ب الجمعة، السبت، الأحد، ....، ....، ....

ج 

هل تعلم؟
الوتر في الدائرة هو قطعة مستقيمة تربط بين نقطتين على الدائرة.

مثال (٢)

أوجد ناتج جمع أول ٣٠ عددًا فرديًا.

الحل: ابدأ أولًا بإيجاد ناتج جمع بعض أوائل الأعداد الفردية:

١ = ١ = $١^{٢}$

١ + ٣ = ٤ = $٢^{٢}$

١ + ٣ + ٥ = ٩ = $٣^{٢}$

١ + ٣ + ٥ + ٧ = ١٦ = $٤^{٢}$

المربعات الكاملة تشكل نمطًا

وباستخدام التبرير الاستقرائي، يمكن استنتاج ناتج جمع أول ٣٠ عددًا فرديًا على أنه $٣٠^{٢}$ أو ٩٠٠.

حاول أن تحل

أوجد الناتج:

٢ أ) ١ + ٢ + ١

ب) ١ + ٢ + ٣ + ٢ + ١

ج) ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٣ + ٢ + ١

د) ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٤ + ٣ + ٢ + ١

هـ) ١ + ٢ + ٣ + ... ٩٩ + ١٠٠ + ٩٩ + ... + ٣ + ٢ + ١

في بعض الأحيان، لا يكون التخمين دائمًا صحيحًا. يمكن إثبات أن تخمينًا ما خطأ باستخدام **مثال مضاد**.
يكون المثال المضاد لتخمين معين طريقة لإثبات أن هذا التخمين هو خطأ.
يكفي إيجاد مثال مضاد واحد لإثبات أن تخمينًا ما خطأ. فالقول أن الأعداد الأولية هي أعداد فردية صحيح لعدد لامتناهٍ من الأعداد. العدد ٢ هو أولي وزوجي (ليس عددًا فرديًا) وهذا كافٍ لإثبات خطأ التخمين.

مثال (٣)

أوجد مثالًا مضادًا لكلّ تخمين.

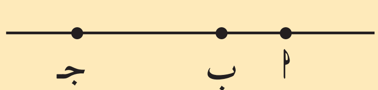
أ) مربع أي عدد هو أكبر من العدد الأساسي.

الحل: العدد $\frac{١}{٢}$ هو مثال مضاد لما ورد حيث إن $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} = \frac{١}{٤}$

$\frac{١}{٤} < \frac{١}{٢}$ لذا يكون التخمين غير صحيح.

ب) يمكن ربط ثلاث نقاط ببعضها فنحصل على مثلث.

الحل: ثلاث نقاط على خط مستقيم ترتبط مع بعضها ولكنها لا تشكل مثلثًا.



معلومة رياضية:

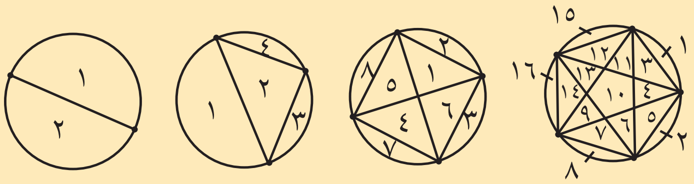
لكل عدد طبيعي ن > ١

إذا كان ٠ < س < ١ فإن $س^{ن}$ < س

إذا كان س = ١ فإن فإن $س^{ن}$ = س

إذا كان س > ١ فإن فإن $س^{ن}$ > س

ج) عندما تصل نقاطًا على دائرة ببعضها بكل القطع الممكنة تتشكل مناطق غير متداخلة داخل الدائرة كما هو مبيّن.



يبيّن الجدول المقابل عدد النقط وعدد المناطق.

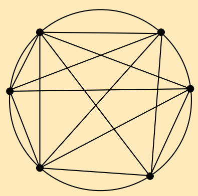
ارتكازًا على قيم هذا الجدول قد تضع التخمين التالي:

عدد النقط	عدد المناطق
٢	٢
٣	٤
٤	٨
٥	١٦

«عدد مناطق كل مرحلة هو مثلا عدد مناطق المرحلة السابقة».

الحل:

في المخطط المقابل ٦ نقاط على دائرة. يبيّن هذا المخطط أن عدد المناطق ٣١ وليس ٣٢. ولذا التخمين غير صحيح.

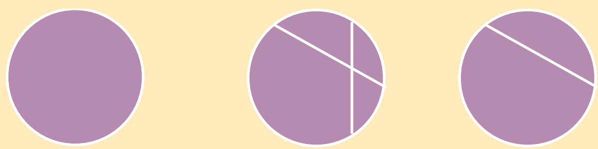


حاول أن تحل

٣ وضع سامي التخمين التالي:

إذا قطعت دائرة بعدد من الأوتار المتقاطعة داخلها، فإن عدد القطاعات الدائرية يساوي مثلي عدد الأوتار.

ارسم عددًا من الأوتار المتقاطعة داخل الدائرة لتثبت خطأ هذا التخمين.



وتر واحد
قطاعان
(صح)

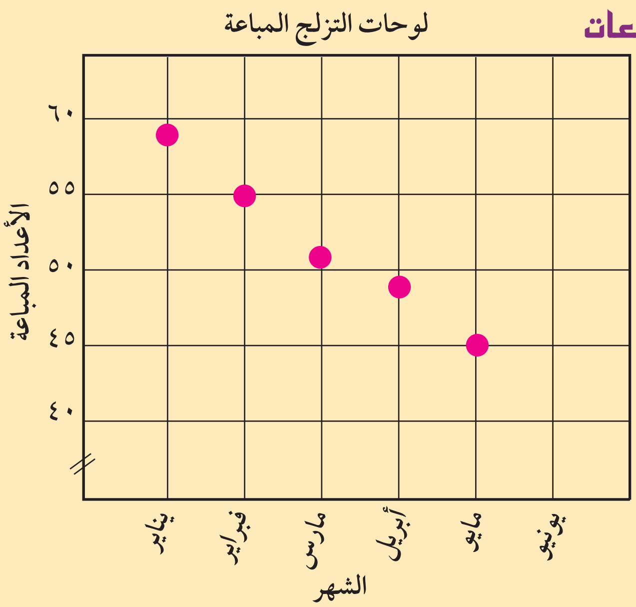
وتران متقاطعان
٤ قطاعات
(صح)

٣ أوتار متقاطعة
ما عدد القطاعات الدائرية؟

مثال (٤) استخدام التبرير الاستقرائي لتوقع المبيعات

لاحظ صاحب محل لبيع لوحات التزلج أن خلال خمسة أشهر متتالية كان مبيع لوحات التزلج تناقصيًّا. يبيّن التمثيل البياني هذا التناقص خلال الأشهر الخمسة.

استخدم التبرير الاستقرائي لتضع تخمينًا عن عدد لوحات التزلج التي يمكن بيعها في شهر يونيو.



الحل:

يبيّن التمثيل البياني أن مبيع لوحات التزلج يتناقص بمعدل ٣ لوحات تقريبًا شهريًّا، وباستخدام التبرير الاستقرائي يمكن تخمين أن المحل سوف يبيع في شهر يونيو ٤٢ لوحة تزلج تقريبًا.

حاول أن تحل

٤ ضع تخمينًا عما يلي:

أ عدد لوحات التزلج التي يمكن بيعها في يوليو.

ب تفكير نقدي: هل يمكن أن يساعدك التمثيل البياني بشكل موثوق على توقع عدد لوحات التزلج التي يمكن بيعها في شهر ديسمبر؟

ثانيا: التبرير الاستنتاجي Deductive Reasoning

دعنا نفكر ونتناقش

تعلمت التبرير الاستقرائي المرتكز على ملاحظة ما حدث ووضع تخمين حول ما سيحدث. سوف تتعلم الآن **التبرير الاستنتاجي**.

التبرير الاستنتاجي (أو المنطق الاستنتاجي) هو عملية تبرير منطقي لمعطيات معينة للوصول إلى استنتاج.

إذا كان المعطى صحيحًا فما ينتج عن التبرير الاستنتاجي هو استنتاج صحيح.

عندما تنوي القيام بأي عمل وتريد الوصول إلى نتائج مضمونة، فإنك بحاجة إلى معطيات واضحة ومحددة. فالطبيب يشخّص حالة المريض مستندًا إلى فحوصات مخبرية والنجار يستخدم التبرير الاستنتاجي ليحدّد نوعية الأدوات التي سوف يحتاج إليها في عمل معين...

مثال (٥)

يعرف العامل الفني في تصليح السيارات أن بطارية السيارة إن كانت ميتة (لا تعطي كهرباء)، فإن السيارة لن يدور محركها. بدأ الفني عمله بالكشف على بطارية السيارة ووجدها ميتة. ما الاستنتاج الذي يضعه؟

الحل:

يستطيع العامل الفني استنتاج أن السيارة لن تسير لأن المحرك لن تصله الكهرباء.

حاول أن تحل

٥ على افتراض أن العامل الفني بدأ الكشف على السيارة ووجد أن السيارة لن تتحرك. هل يستنتج أن بطارية السيارة غير صالحة للعمل؟ اشرح إجابتك.

في المثال (٤) استخدم العامل الفني التبرير الاستنتاجي والذي يسمى «قانون الفرز».

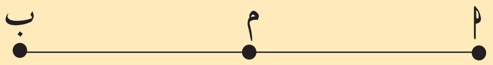
خاصية «قانون الفرز» Law Of Detachment

إذا كان الشرط صحيحًا ومعطياته أيضًا صحيحة، فتكون نتيجته صحيحة.

أي أن: إذا ب ← د هي عبارة صحيحة مع ب صحيحة، فإن د تكون صحيحة.

مثال (٦)

مع المعطيات الصحيحة التالية، ماذا يمكنك أن تستنتج؟



المعطيات: إذا كانت م منتصف قطعة مستقيمة لذا فإنها تقسم هذه القطعة المستقيمة إلى قطعتين متطابقتين. م منتصف القطعة المستقيمة $\overline{أب}$.

الحل:

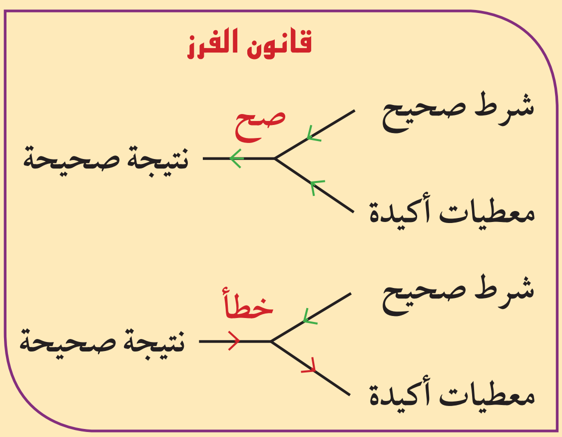
لقد قدمت شرطًا ومعطيات صحيحة وبالتالي من قانون الفرز يمكن استنتاج أن م تقسم $\overline{أب}$ إلى قطعتين متطابقتين ونكتب:

$\overline{أم} \cong \overline{مب}$.

حاول أن تحل

٦ منصور هو لاعب ارتكاز في فريق كرة السلة. يجب أن لا يخوض لاعب الارتكاز مباراتين كاملتين في يومين متتاليين.
لعب منصور طيلة وقت مباراة يوم الاثنين. ماذا يمكنك أن تستنتج؟

مثال (٧)



هل المعطيات التالية توضّح قانون الفرز؟

المعطيات: إذا تساقطت الثلوج تكون الحرارة أقل من أو تساوي صفر درجة مئوية.

إذا كانت درجة الحرارة الآن -7° مئوية.

هل أستنتج أن الثلوج تتساقط الآن؟

الحل:

لقد عرضت معطيات تتضمن شرطًا صحيحًا ونتيجة صحيحة.

ولكن لا يمكن تطبيق قانون الاستطلاع واستنتاج أن المعطيات صحيحة.

لا تستطيع الوصول إلى أي نتيجة حول تساقط الثلوج من المعطيات.

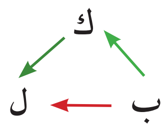
حاول أن تحل

٧ إذا أمكن، استخدم قانون الفرز لتصل إلى نتيجة، إذا كان من غير الممكن استخدام القانون، اشرح لماذا؟
معطيات: إذا كانت الطريق مغطاة بالجليد فإن قيادة السيارة تشكل خطرًا.
هل صحيح أن قيادة السيارة تشكل خطرًا؟

يوجد قانون آخر من التبرير الاستنتاجي هو قانون «**القياس المنطقي**». يسمح لك هذا القانون بوضع نتيجة من بيانين شرطيين صحيحين عندما تكون نتيجة البيان الأول هي معطى البيان الثاني.

خاصية «القياس المنطقي» Law Of Sillogism

إذا ب ← ك، ك ← ل هي بيانات صحيحة إذًا ب ← ل هي بيانات صحيحة.



مثال (٨) الجبر

استخدم قانون «القياس المنطقي» لتحصل على نتيجة من المعطيات التالية:

إذا كان عدد ما أوليًّا، إذًا فليس له عوامل متكررة. إذا لم يكن لعددٍ ما عوامل متكررة، إذاً فهو ليس مربعًا كاملًا.

الحل:

لدينا شرطان صحيحان حيث إن نتيجة الأول هي معطيات للآخر أي يمكن كتابة ما يلي باستخدام قانون «القياس المنطقي».

إذا كان عدد ما أوليًّا، إذا فهو ليس مربعًا كاملًا.

حاول أن تحل

٨ إذا أمكن أوجد نتيجة مستخدمًا قانون «القياس المنطقي»، وإذا لم يكن بالإمكان استخدام هذا القانون، اشرح لماذا؟

أ إذا كان رقم آحاد عدد صفرًا إذًا يمكن قسمته على ١٠.
إذا كان عدد يقسم على ١٠، إذًا يمكن قسمته على ٥.

ب إذا كان رقم آحاد عدد ٦، إذًا يمكن قسمته على ٢.
إذا كان عدد رقم آحاده ٤، إذًا يمكن قسمته على ٢.

يمكن استخدام قانون الفرز وقانون التبرير الاستنتاجي معًا للحصول على نتائج.

مثال (٩)

استخدم قانون الاستطلاع وقانون المنطق الاستدلالي للحصول على نتائج من المعطيات الصحيحة التالية:

إذا كان طول أحد الأنهر أكبر من ٦٣٤٠ كم، إذًا يكون أطول من نهر الأمازون.

إذا كان طول أحد الأنهر أكبر من طول نهر الأمازون، إذًا هو أطول نهر في العالم.

طول نهر النيل ٦٦٤٨ كم.

الحل: يمكن استخدام البيانيين الأول والثاني وقانون «التبرير الاستنتاجي» لاستنتاج ما يلي:

إذا كان طول أحد الأنهر أكبر من ٦٣٤٠ كم، إذا هو أطول نهر في العالم.

ولما كان طول نهر النيل ٦٦٤٨ كم وباستخدام «قانون الفرز» يمكن الاستنتاج أن نهر النيل هو أطول نهر في العالم.

حاول أن تحل

٩ استخدم قانون الفرز وقانون التبرير الاستنتاجي للحصول على نتائج من المعطيات التالية:

«فولكا» هو نهر في أوروبا. إذا كان طول نهر ما أقل من ٣٧٠٠ كم، إذًا فهو ليس واحدًا من أطول عشرة أنهر في العالم.

إذا كان نهرًا ما في أوروبا، إذًا فإن طوله أقل من ٣٧٠٠ كم.

٣–٢

المضلعات المتشابهة
Similar Polygons

سوف تتعلم
- تحديد مفهوم التشابه بين الأشكال الهندسية المستوية
- تشابه مثلثين
- مقياس رسم معين

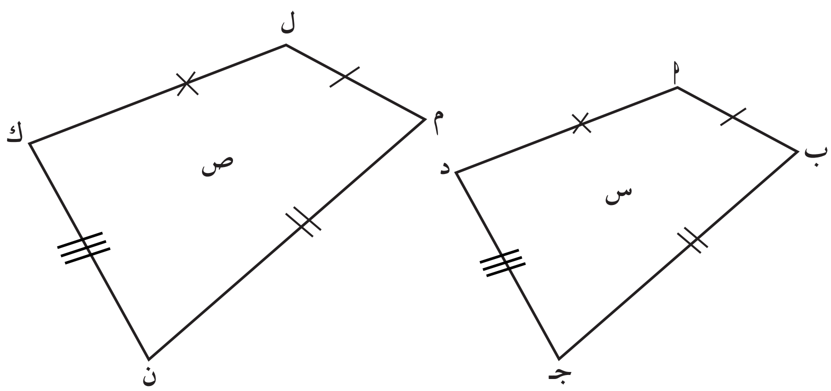
دعنا نفكر ونتناقش

درسنا في ما سبق مفهوم **تطابق المثلثات**. بالنسبة إلى المضلعات، يكون المضلعان متطابقين إذا كانت:

- أطوال أضلاعهما المتناظرة متساوية.
- قياسات زواياهما المتناظرة متساوية.

في الشكل المرسوم:

المضلعان أب جـ د، ل م ن ك متطابقان.



١ – التشابه Similarity

يقال لشكلين هندسيين إنهما **متشابهان** إذا كان لهما **الشكل العام نفسه** وكان **أحدهما تكبيرًا أو تصغيرًا للآخر أو مطابقًا له.**

فكر معي: في ما يلي أجب بنعم أو لا. وإذا كانت الإجابة (لا) أعط مثالًا مضادًّا.

هل:

- كل مربعين متشابهان؟
- كل مثلثين متطابقي الأضلاع متشابهان؟
- كل مثلثين متطابقي الضلعين متشابهان؟
- كل دائرتين متشابهتان؟
- كل المثلثات قائمة الزاوية متشابهة؟

تعميم (١)

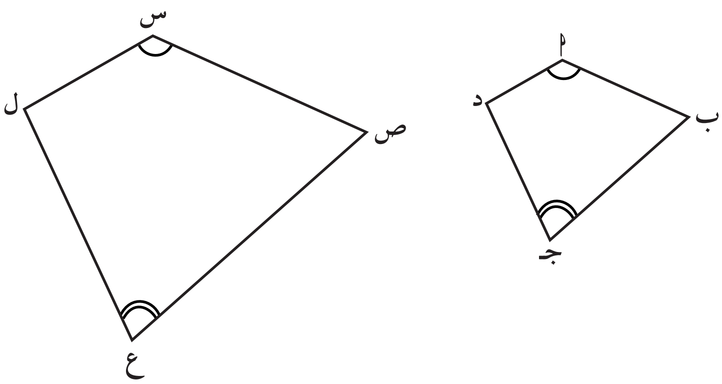
يقال لمضلعين (لهما العدد نفسه من الأضلاع) إنهما متشابهان إذا تحقق الشرطان التاليان معًا:
– قياسات زواياهما المتناظرة متساوية.
– أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة.
والعكس صحيح.

وتسمى النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين **نسبة التشابه**.

تدريب (١)

أكمل:

إذا كان المضلعان أ ب جـ د، س ص ع ل متشابهين فإن:



١ ق(سَ^) = ...، ق(عَ^) = ...

ق(صَ^) = ...، ق(لَ^) = ...

٢ $\frac{\text{س ص}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ص ع}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ع ل}}{\text{...}} = \frac{\text{...}}{\text{د أ}}$

تدريب (٢)

أجب عن الأسئلة التالية (أعط مثالًا مضادًا إذا كانت الإجابة لا):

٣ هل جميع المضلعات المنتظمة والتي لها العدد نفسه من الأضلاع متشابهة؟

---

٤ إذا نظرت إلى صورتك (الفوتوغرافية) هل النسبة بين طول ذراعك إلى طول جسمك في الصورة تساوي النسبة بينهما في الحقيقة؟

---

٥ هل النسبة بين طولي أي ضلعين متجاورين في مستطيل تساوي النسبة بين طولي ضلعين متجاورين في مستطيل آخر؟

تعميم (٢)

المضلعان المتطابقان يكونان متشابهين.

تذكر:

الرمز ≅ يعني تطابق

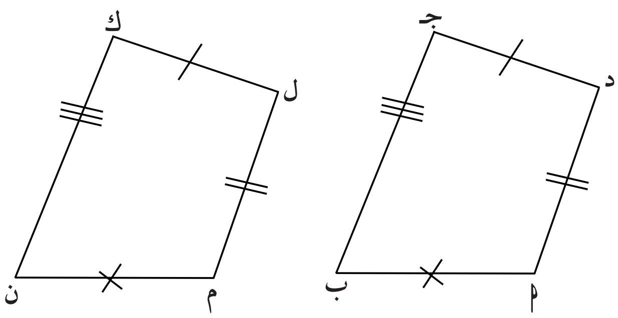
فمثلًا:

إذا كان المضلع ﺃب جـ د ≅ المضلع م ن ك ل فإن:

١ ق($\hat{ﺃ}$) = ق($\hat{م}$)،

ق($\hat{ب}$) = ق($\hat{ن}$)، ....

٢ $\frac{ﺃب}{م ن} = \frac{ب جـ}{ن ك} = \frac{جـ د}{ك ل} = \frac{دﺃ}{ل م} = ١$



إذًا المضلع ﺃب جـ د ~ المضلع م ن ك ل

ومنه إذا كان:

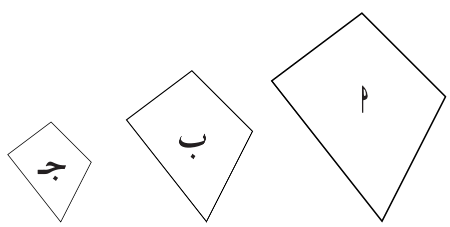
Δﺃب جـ ≅ Δم ن ك

فإن المثلثين ﺃب جـ، م ن ك يكونان متشابهين.

إذا كان المضلع ﺃ يشابه المضلع ب وكان المضلع ب يشابه المضلع جـ ، فإن المضلع ﺃ يشابه المضلع جـ.

إذا كان: ﺃ ~ ب، ب ~ جـ

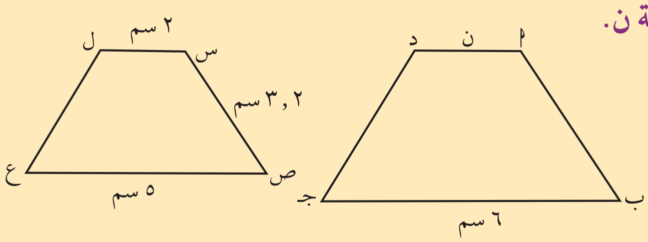
فإن ﺃ ~ جـ



ملاحظة مهمة: إن نسبة التشابه تقارن بين قياسين بالوحدات نفسها، فمثلًا أطوال أضلاع المثلثين في المثال (١) هي بالسنتيمتر.

مثال (١)

في الشكل المقابل: إذا كان أب جـ د ~ س ص ع ل ، أوجد قيمة ن.



الحل:

المضلع أب جـ د ~ س ص ع ل.

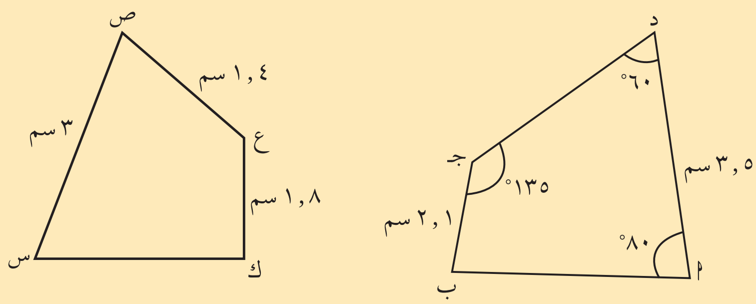
إذًا: $\frac{\text{أد}}{\text{س ل}} = \frac{\text{د جـ}}{\text{ل ع}} = \frac{\text{جـ ب}}{\text{ع ص}} = \frac{\text{أب}}{\text{ص س}}$

ومنه: $\frac{\text{٥}}{\text{٢}} = \frac{\text{د جـ}}{\text{ل ع}} = \frac{\text{٦}}{\text{٥}} = \frac{\text{أب}}{\text{٣,٢}}$

$\frac{\text{ن}}{\text{٢}} = \frac{\text{٦}}{\text{٥}}$

ن= ٢,٤ سم

حاول أن تحل



١ في الشكل المقابل، المضلعان أب جـ د، س ص ع ل متشابهان.

أوجد قياسات الزوايا المجهولة وأطوال الأضلاع المجهولة في كلا الضلعين.

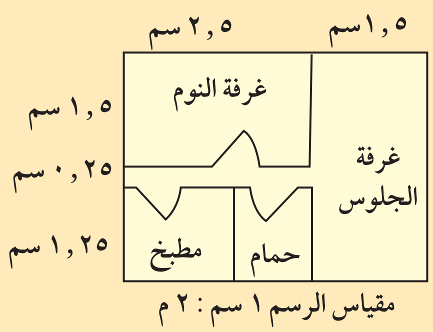
يستخدم التناسب في تطبيقات حياتية، ومن أهمها **مقياس الرسم** الذي يستخدم في عمل الخرائط والرسوم الهندسية بمقاييس مصغرة للأشكال الحقيقية، وذلك **بنسبة ثابتة** بين الأبعاد في الشكل والأبعاد في الحقيقة.

مقياس الرسم = $\frac{\text{الطول في الرسم}}{\text{الطول الحقيقي}}$

وإذا كانت نسبة التشابه تقارن بين أبعاد لها الوحدة نفسها، فإن **مقياس الرسم يمكن أن يكون بوحدات مختلفة**، فمثلًا يمكن أن يكون ١ سم لكل ١٠٠ م أو ١ سم لكل كيلومتر وهكذا دواليك.

مثال (٢)

ما الأبعاد الحقيقية لغرفة النوم المبينة في الرسم الهندسي لإحدى الشقق السكنية؟



مقياس الرسم ١ سم : ٢م

الحلّ:

استخدم المسطرة لقياس الأبعاد في الشكل المرسوم، وبفرض أن:

طول غرفة النوم في الرسم = ٢,٥ سم، عرض الغرفة في الرسم = ١,٥ سم.

لإيجاد الطول الحقيقي لغرفة النوم: $\frac{\text{الطول في الرسم}}{\text{الطول الحقيقي}} = \frac{\text{١}}{\text{٢٠٠}}$

$$\frac{٢,٥}{س} = \frac{١}{٢٠٠}$$

س = ٢,٥ × ٢٠٠ — باستخدام الضرب التقاطعي

س = ٥٠٠ سم، س = ٥ م — طول غرفة النوم ٥ م.

ولإيجاد عرض الغرفة الحقيقي:

$$\frac{١,٥}{ص} = \frac{١}{٢٠٠}$$

ص = ١,٥ × ٢٠٠ = ٣٠٠ سم = ٣ م.

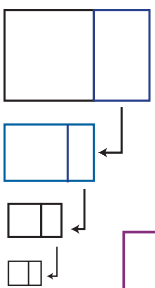
عرض الغرفة ٣ أمتار.

حاول أن تحل

٢ احسب أبعاد كل من غرفة الجلوس والشقة كلها بحسب القياسات المبينة في الشكل السابق.

المستطيل الذهبي

هو مستطيل يمكن قسمته إلى مربع ومستطيل مشابه للمستطيل الأول.



يبيّن الشكل المقابل نمطًا من المستطيلات الذهبية. ينسخ كل مستطيل ذهبي ويقسم من جديد.

كل مستطيل ذهبي هو مشابه للمستطيل الأول.

في كل مستطيل ذهبي، نسبة طول الضلع الكبير إلى طول الضلع الصغير هي النسبة الذهبية وتساوي حوالى ١,٦١٨ إلى ١.

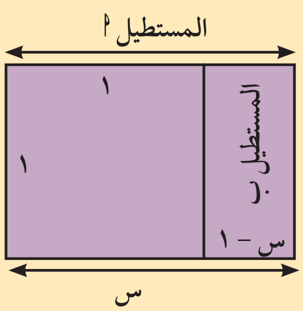
معلومة رياضية:

النسبة الذهبية:

$\frac{١ + \sqrt{٥}}{٢}$ إلى ١.

مثال (٣)

استخدم المستطيل الذهبي المقابل والتناسب لإيجاد النسبة الذهبية.



الحل:

المستطيل أ ~ ب.

إذًا: $\frac{\text{طول الضلع الكبير في المستطيل أ}}{\text{طول الضلع الصغير في المستطيل أ}} = \frac{\text{طول الضلع الكبير في المستطيل ب}}{\text{طول الضلع الصغير في المستطيل ب}}$

ليكن س = طول الضلع الكبير في المستطيل أ،

$س - ١$ طول الضلع الكبير في المستطيل ب.

نحصل على $\frac{س}{١} = \frac{١}{س - ١}$

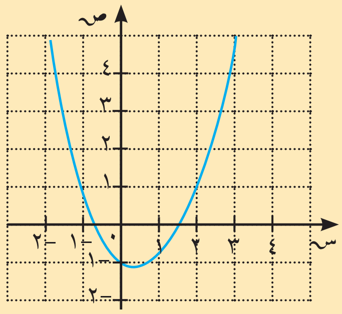
أي $س^{٢} - س = ١$

$س^{٢} - س - ١ = ٠$

استخدم آلة حاسبة لرسم الدالة $ص = س^{٢} - س - ١$.

نقرأ $س \simeq ١,٦٢$. أي أن النسبة الذهبية هي $١,٦٢$ إلى ١.

هل تعلم:
العدد الذهبي يساوي
$١,٦١٨$



حاول أن تحل

٣ قطعة نقدية ورقية مستطيلة الشكل أبعادها $١٠,٥$ سم، $٦,٥$ سم.
هل نسبة طولها إلى عرضها تساوي النسبة الذهبية؟

استخدم الآلة الحاسبة لمقارنة $\sqrt{١ + \sqrt{١ + \sqrt{١ + \dots}}}$ بالعدد الذهبي.

التحدي: إذا كان العدد الذهبي س هو الجزر الموجب للمعادلة التربيعية $س^{٢} = س + ١$

فأثبت أن: $س = \sqrt{١ + \sqrt{١ + \sqrt{١ + \dots}}}$

استخدم الرسامون كثيرًا المستطيل الذهبي في أعمالهم.

مثال (٤)

يخطط أحد الفنانين لرسم لوحة مستطيلة الشكل طولها ٦٠ سم. كم يجب أن يكون عرض اللوحة ليكون المستطيل ذهبيًّا؟

الحلّ:

ليكن هـ عرض اللوحة.

$\frac{٦٠}{هـ} = \frac{١,٦١٨}{١}$ كتابة التناسب

$١,٦١٨\ هـ = ٦٠$ الضرب التقاطعي

$هـ = \frac{٦٠}{١,٦١٨}$

$هـ \simeq ٣٧$

يجب أن يكون عرض اللوحة حوالي ٣٧ سم.

حاول أن تحل

٤ إذا كان عرض أحد المستطيلات الذهبية ٣٧ سم، فكم يجب أن يكون طوله؟

٣ـ٣

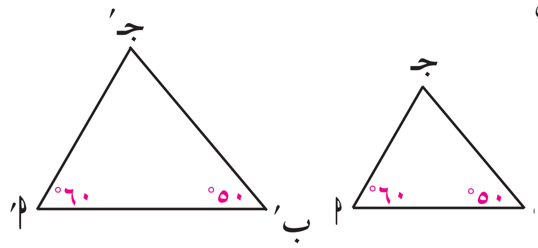
تشابه المثلثات

Similar Triangles

سوف تتعلم
- حالات تشابه المثلثات

عمل تعاوني

- ارسم مثلثين مختلفين بحيث يكون في كل منهما زاويتان قياساهما ٥٠°، ٦٠° (كما في الشكل أدناه).
- أوجد بالقياس أطوال أضلاع كل منهما لأقرب ملليمتر.
- استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد النسبة بين طولي كل ضلعين متناظرين.



١ ماذا تستنتج عن هذين المثلثين؟

٢ قارن بين نتائجك ونتائج المجموعات الأخرى.

٣ أكمل العبارة التالية:

إذا تطابقت زاويتان في مثلث مع زاويتين في مثلث آخر (أي يساوي قياس كل منها قياس زاوية مناظرة لها)، كان المثلثان...

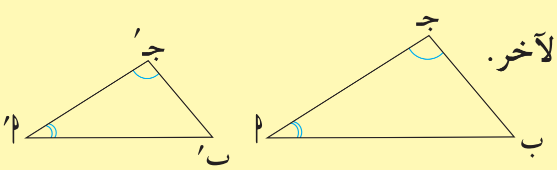
سبق أن تعلمت عدة طرائق تبيّن بها تطابق مثلثين. في هذا الدرس سوف تتعلم ثلاث طرائق تبيّن بها تشابه مثلثين.

من العمل التعاوني السابق تمّ استكشاف النظرية التالية:

نظرية (١)

يتشابه المثلثان إذا تطابقت زاويتان في أحد المثلثين مع زاويتين في المثلث الآخر.

$\triangle$أ ب جـ $\sim$ $\triangle$أ′ ب′ جـ′



مثال (١)

أثبت أن المثلثين في الشكل المقابل متشابهان. اكتب عبارة التشابه.

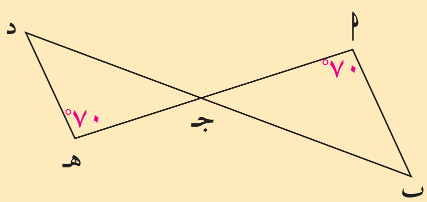
الحل:

المثلثان أ ب جـ، هـ د جـ فيهما:

ق(أ جـَ ب) = ق(هـ جـَ د) زاويتان متقابلتان بالرأس

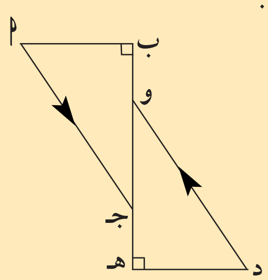
ق(جـ أَ ب) = ق(جـ هـَ د) معطى

$\triangle$أ ب جـ $\sim$ $\triangle$ هـ د جـ

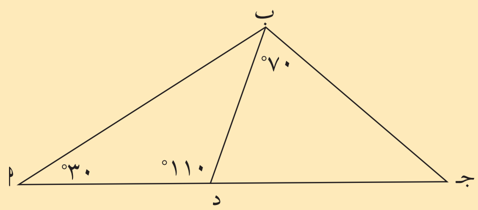


حاول أن تحل

١ أثبت تشابه المثلثين أ ب جـ، د هـ و.



مثال (٢)



أثبت أن المثلثين أ ب د ، أ جـ ب متشابهان. اكتب عبارة التشابه.

الحل:

المثلثان أ ب د ، أ جـ ب فيهما:

ق(ب أ د) = ق(ب أ جـ) = ٣٠° زاوية مشتركة

ق(أ ب د) = ١٨٠° − (١١٠° + ٣٠°) = ٤٠° مجموع زوايا المثلث أ ب د = ١٨٠°

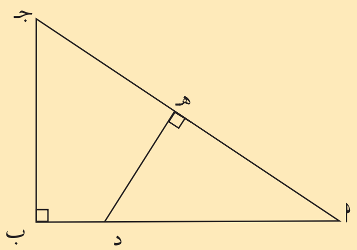
ق(أ ب جـ) = ٤٠° + ٧٠° = ١١٠°

إذًا ق(أ ب جـ) = ق(أ د ب)

المثلثان متشابهان (تطابق زاويتين)

Δ أ ب د ~ Δ أ جـ ب.

حاول أن تحل



٢ أثبت تشابه المثلثين أ ب جـ، أ هـ د، واكتب عبارة التشابه.

١ - القياس غير المباشر

Indirect Measurement

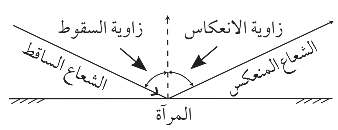
في بعض الحالات، يصعب قياس مسافة أو ارتفاع معين مباشرة. في هذه الحالة، يمكنك استخدام تشابه المثلثات لإيجاد هذا القياس بطريقة غير مباشرة.

إحدى الطرائق تستخدم خاصية انعكاس الضوء في المرآة المستوية.

فكما تعرف في الفيزياء، إن قياس زاوية السقوط يساوي قياس زاوية الانعكاس.

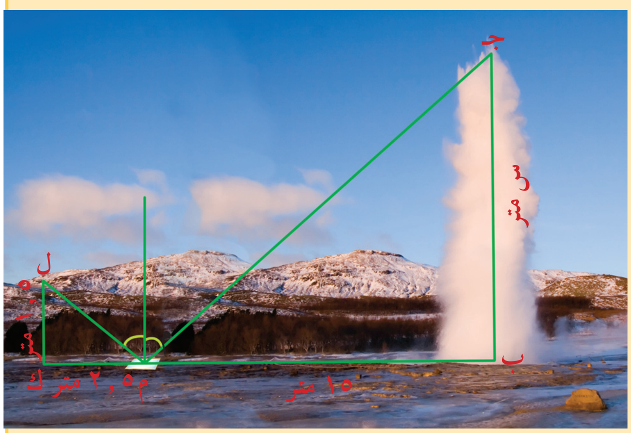
تذكر:

قياس زاوية السقوط = قياس زاوية الانعكاس



مثال (٣)

أراد سعيد أن يعرف ارتفاع المياه. وضع مرآة على مسافة ١٥ م من موقع اندفاع المياه، ثم تحرك إلى الخلف حتى استطاع أن يرى أعلى نقطة بلغتها المياه في وسط المرآة. عند هذه النقطة كان سعيد قد تحرك بعيدًا عن المرآة بمسافة ٢,٥ م، وكانت عيناه على ارتفاع ١,٥ م فوق الأرض. إذا كانت قدماه والمرآة وموقع اندفاع المياه على استقامة واحدة، فأوجد ارتفاع المياه.



الحل:

المثلثان م ب جـ ، م ك ل فيهما:

ق(ب مˆ جـ) = ق(ك مˆ ل)   زاوية الانعكاس = زاوية السقوط

ق(بˆ) = ق(كˆ) = ٩٠°

المثلثان م ب جـ ، م ك ل متشابهان (تطابق زاويتين)

إذاً $\frac{\text{ب جـ}}{\text{ك ل}} = \frac{\text{م ب}}{\text{م ك}}$ تناسب أطوال الأضلاع المتناظرة

$\frac{\text{س}}{١,٥} = \frac{١٥}{٢,٥}$

٢,٥س = ١,٥ × ١٥

س = $\frac{١,٥ \times ١٥}{٢,٥}$ = ٩

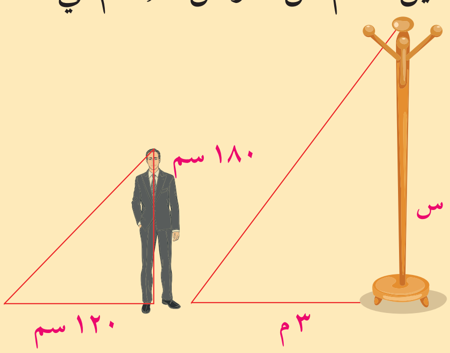
يبلغ ارتفاع المياه ٩ أمتار.

حاول أن تحل

٣ أ لإيجاد ارتفاع برج، وضع سالم مرآة مستوية على الأرض على بعد ١٢ م من قاعدة البرج. وعندما كان سالم على بعد ١,٢ م من المرآة استطاع أن يرى قمة البرج. إذا كان ارتفاع عين سالم عن الأرض ١,٨ م في هذه النقطة، فكم يكون ارتفاع البرج.

ب عمود طول ظله ٣ م في الوقت نفسه الذي يكون فيه طول ظل محمد ١٢٠ سم.

إذا كان طول محمد ١٨٠ سم، فكم سيكون طول العمود.



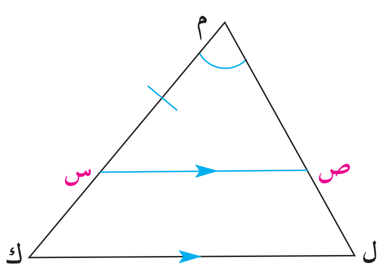
نظرية (٢)

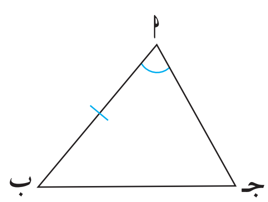
يتشابه المثلثان إذا تطابقت زاوية في أحدهما مع زاوية في المثلث الآخر، وتناسب طولا الضلعين المحددين لهاتين الزاويتين.

المعطيات: ق(أˆ) = ق(مˆ)، $\frac{\text{أب}}{\text{م ك}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{م ل}}$.

المطلوب: إثبات أن: Δأب جـ ~ Δم ك ل.

العمل: نأخذ س نقطة من $\overline{\text{م ك}}$ حيث م س = أب





ونرسم $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ك ل}}$.

البرهان: نبدأ بإثبات تطابق المثلثين

ق(∠م س ص) = ق(∠م ك ل) زاويتان متناظرتان، ق(∠م ص س) = ق(∠م ل ك) زاويتان متناظرتان.

وبالتالي من نظرية (١) نستنتج أن:

Δم س ص ~ Δم ك ل متشابهان.

∴ $\frac{\text{م س}}{\text{م ك}} = \frac{\text{م ص}}{\text{م ل}}$ (١) تناسب أطوال الأضلاع المتناظرة.

سنثبت الآن أن المثلثين أ ب جـ، م س ص متطابقان.

$\frac{\text{أ ب}}{\text{م ك}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{م ل}}$ (٢) معطى

بما أن أ ب = م س وبمقارنة التناسبين (١)، (٢) نحصل على أ جـ = م ص.

∴ المثلثان أ ب جـ ، م س ص متطابقان (ض ز ض) إذًا متشابهان.

Δ أ جـ ب ~ Δ م س ص، Δ م س ص ~ Δ م ك ل.

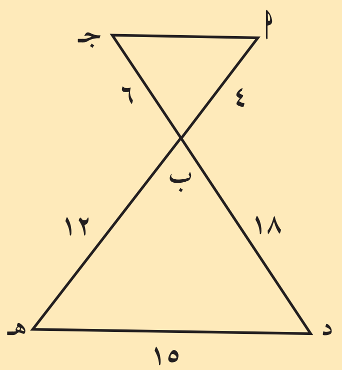
إذًا: Δأ جـ ب ~ Δم ك ل. القياس المنطقي

مثال (٤)

في الشكل المرسوم، برهن أن:

أ) $\overline{\text{أ جـ}}$ // $\overline{\text{د هـ}}$.

ب) أوجد طول $\overline{\text{أ جـ}}$.



الحل:

أ) ق(∠أ ب جـ) = ق(∠هـ ب د) متقابلتان بالرأس ، $\frac{\text{ب جـ}}{\text{ب د}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب هـ}} = \frac{١}{٣}$.

∴ المثلثان متشابهان ومنه نستنتج أن الزوايا المتناظرة متساوية القياس.

وبالتالي ق(∠جـ) = ق(∠د) وهما في وضع تبادل. إذًا $\overline{\text{أ جـ}}$ // $\overline{\text{د هـ}}$.

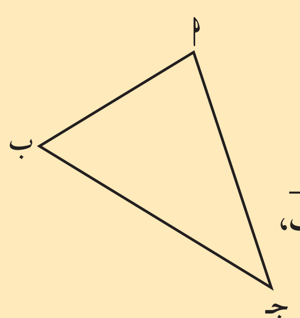
ب) لإيجاد طول $\overline{\text{أ جـ}}$ نكتب التناسب: $\frac{\text{أ جـ}}{\text{د هـ}} = \frac{١}{٣}$

أي $\frac{\text{أ جـ}}{١٥} = \frac{١}{٣}$

أ جـ $= \frac{١٥}{٣} = ٥$

حاول أن تحل

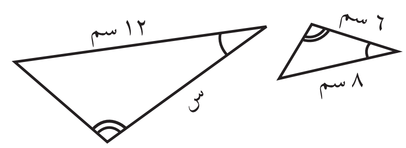
٤) ارسم بشكل تقريبي قطعة مستقيمة $\overline{\text{د هـ}}$ في المثلث أ ب جـ موازية للقطعة $\overline{\text{ب جـ}}$ حيث د تنتمي إلى $\overline{\text{أ ب}}$، هـ تنتمي إلى $\overline{\text{أ جـ}}$ على أن تكون نسبة التشابه بين المثلثين أ د هـ، أ ب جـ تساوي $\frac{٢}{٣}$.



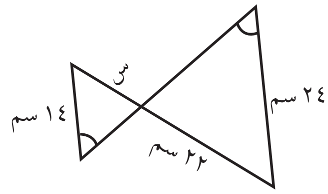
تدريب (١)

اكتب تشابه المثلثين، ثم أوجد قيمة س في كل مما يلي:

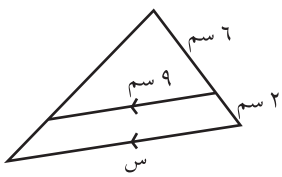
(أ)



(ب)

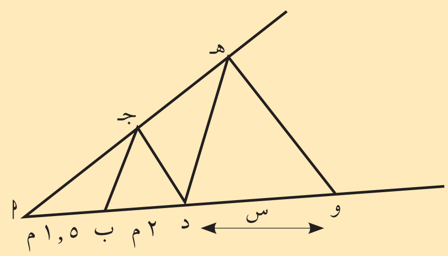


(جـ)



مثال (٥)

يبيّن الرسم المقابل حلبة منحدرة مدعّمة تستخدم في لعبة التزحلق (سكيت بورد **Skateboard**). إذا كان $\overline{\text{ب جـ}} \parallel \overline{\text{د هـ}}$، $\overline{\text{د جـ}} \parallel \overline{\text{و هـ}}$، أوجد قيمة س.



الحل:

المثلثان أب جـ، أد هـ فيهما:

ق(ب$\hat{\text{أ}}$جـ) = ق(د$\hat{\text{أ}}$هـ) زاوية مشتركة

ق(أ$\hat{\text{ب}}$جـ) = ق(أ$\hat{\text{د}}$هـ) زاويتان متناظرتان

∴ Δأب جـ ~ Δأدهـ

ومنه $\frac{\text{أب}}{\text{أد}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{أهـ}}$ تناسب الأضلاع المتناظرة

$\frac{١,٥}{١,٥ + ٢} = \frac{\text{أجـ}}{\text{أهـ}}$ (١)

نثبت بالطريقة نفسها أن المثلثين أدجـ، أوهـ متشابهان.

ومنه $\frac{\text{أد}}{\text{أو}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{أهـ}}$ تناسب الأضلاع المتناظرة

$\frac{٣,٥}{٣,٥ + \text{س}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{أهـ}}$ (٢)

من (١)، (٢) نستنتج: $\frac{١,٥}{١,٥ + ٢} = \frac{٣,٥}{٣,٥ + \text{س}}$

١,٥(٣,٥ + س) = ٣,٥(١,٥ + ٢) الضرب التقاطعي

س = $\frac{٣,٥ \times ٣,٥}{١,٥} - ٣,٥$

س = $\frac{١٤}{٣} = ٤,\overline{٦}$

حاول أن تحل

٥ في مثال (٥) إذا كان طول $\overline{\text{هـ جـ}}$ يساوي ٣ م، أوجد طول $\overline{\text{أجـ}}$.

نظرية (٣)

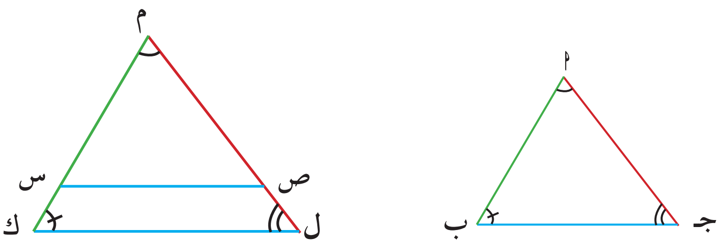
يتشابه المثلثان إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة فيهما.

المعطى:

Δأب جـ، Δم ك ل فيهما:

$\frac{\text{أب}}{\text{م ك}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{م ل}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ك ل}}$.

المطلوب: إثبات أن Δأب جـ $\sim$ Δم ك ل.



العمل:

نأخذ س نقطة من $\overline{\text{م ك}}$ حيث م س = أب ونرسم $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{م ك}}$.

$\therefore$ Δم س ص ، Δم ك ل متشابهان. لماذا؟

$\frac{\text{م س}}{\text{م ك}} = \frac{\text{م ص}}{\text{م ل}} = \frac{\text{س ص}}{\text{ك ل}}$ (١) تناسب الأضلاع المتناظرة

$\frac{\text{أب}}{\text{م ك}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{م ل}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ك ل}}$ (٢) معطى

بما أن م س = أب إذًا $\frac{\text{م س}}{\text{م ك}} = \frac{\text{أب}}{\text{م ك}}$

ومنه $\frac{\text{م ص}}{\text{م ل}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{م ل}}$ ، $\frac{\text{س ص}}{\text{ك ل}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ك ل}}$ تساوي التناسبين (١)، (٢)

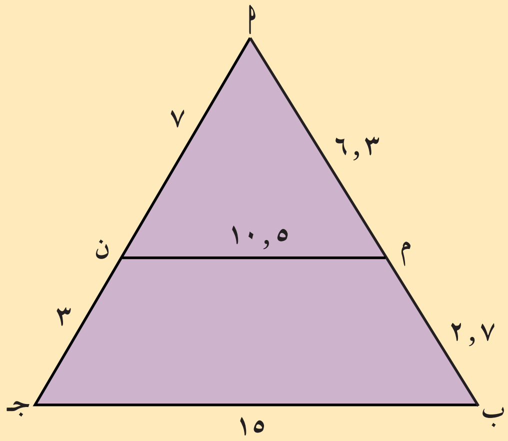
م ص = أجـ ، س ص = ب جـ. لماذا؟

Δم س ص ، Δأب جـ متطابقان. (ض ض ض)

$\therefore$ Δأب جـ $\sim$ Δم ك ل.

ق($\hat{\text{أ}}$) = ق($\hat{\text{م}}$) ، ق($\hat{\text{ب}}$) = ق($\hat{\text{ك}}$) ، ق($\hat{\text{جـ}}$) = ق($\hat{\text{ل}}$).

مثال (٦)



في الشكل المرسوم،

أولًا: أثبت أن:

أ Δ أب جـ ~ Δ أم ن.

ب $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{م ن}}$.

ثانيًا: أوجد النسبة بين محيطي المثلثين. ماذا تلاحظ؟

الحل:

أولًا: $\frac{\text{أم}}{\text{أب}} = \frac{٦,٣}{٦,٣ + ٢,٧} = \frac{٦,٣}{٩} = ٠,٧$

أوجد: $\frac{\text{أن}}{\text{أجـ}} = \ldots$ ، $\frac{\text{م ن}}{\text{ب جـ}} = \ldots$. ماذا تلاحظ؟

استخدم نظرية (٣) . Δ أم ن ~ Δ أب جـ وهو المطلوب (أ).

من تشابه المثلثين: ق($\hat{\text{أم ن}}$) = ق($\hat{\text{أب جـ}}$) وهما في وضع تناظر.

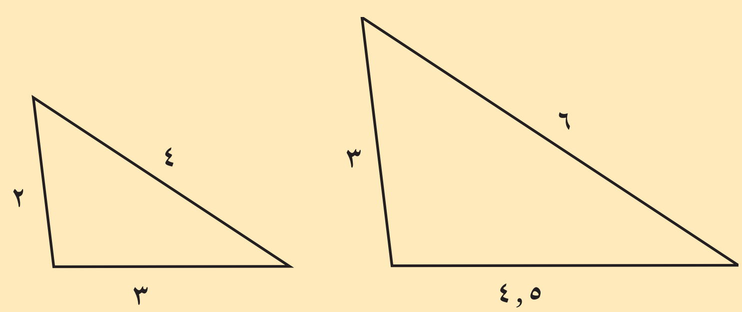
$\therefore$ $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{م ن}}$.

ثانيًا: $\frac{\text{محيط } \Delta \text{أم ن}}{\text{محيط } \Delta \text{أب جـ}} = \frac{٢٣,٨}{٣٤} = ٠,٧$

نلاحظ أن النسبة بين محيطي المثلثين تساوي نسبة التشابه.

حاول أن تحل

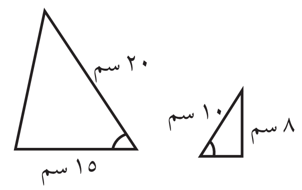
٦ في الشكل المقابل، أثبت أن المثلثين متشابهان.



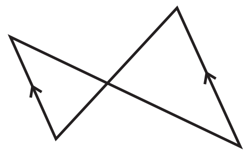
تدريب (٢)

اذكر أي الحالات يكون فيها المثلثان متشابهين، وأيها يكونان فيها غير متشابهين. وفي حالة التشابه، اذكر النظرية التي تثبت تشابههما.

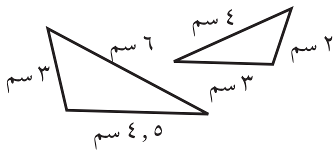
(أ)



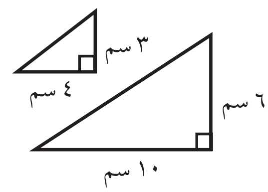
(ب)



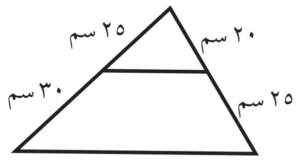
(جـ)



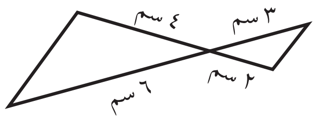
(د)



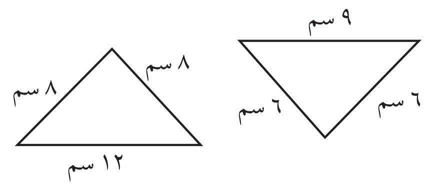
(هـ)



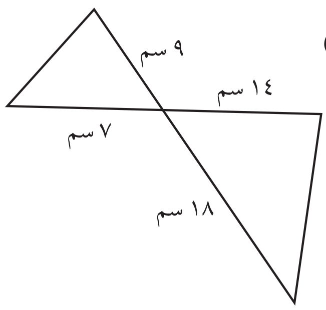
(و)



(ز)

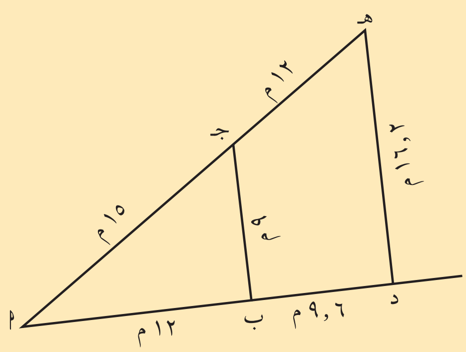


(جـ)



مثال (٧) تطبيقات حياتية

يبيّن الشكل المقابل قسمًا من المنطقة العلوية في أحد الأهراءات. أراد يوسف التحقق من توازي الدعامتين $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{دهـ}}$.
هل يمكنك مساعدته؟



الحل:

Δأب جـ ، Δأدهـ فيهما:

$$\frac{\text{أب}}{\text{أد}} = \frac{١٢}{١٢ + ٩,٦} = \frac{٥}{٩}$$

$$\frac{\text{أجـ}}{\text{أهـ}} = \frac{١٥}{١٥ + ١٢} = \frac{٥}{٩}$$

$$\frac{\text{ب جـ}}{\text{دهـ}} = \frac{٩}{١٦,٢} = \frac{٥}{٩}$$

$\therefore$ المثلثان متشابهان (نظرية ٣)

الزاويتان أ$\hat{\text{ب}}$ جـ ، أ$\hat{\text{د}}$ هـ متناظرتان ومتساويتان في القياس إذًا $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{دهـ}}$.

حاول أن تحل

٧ في المثال أوجد قياس الزاوية $\hat{\text{أ}}$.

٣–٤ التشابه في المثلثات قائمة الزاوية

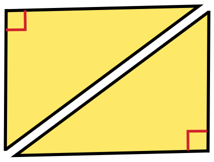
Similarity in Right Triangles

سوف تتعلم

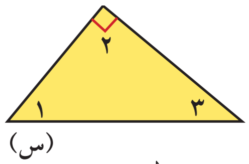
- خصائص العمود المرسوم من رأس القائمة إلى الوتر في مثلث قائم الزاوية

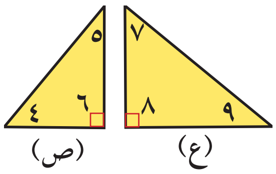
عمل تعاوني

اشترك مع أحد زملائك في التالي:



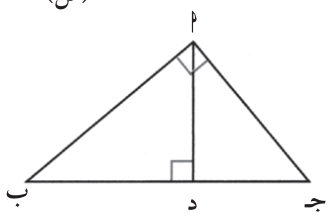
- أحضر قطعة ورق مستطيلة الشكل. ارسم قطرًا للمستطيل. اقطع الورقة كما في الشكل لتحصل على مثلثين قائمي الزاوية متطابقين.
- خذ أحد المثلثين. اقطع المثلث لتحصل على مثلثين قائمي الزاوية صغيرين كما في الشكل.





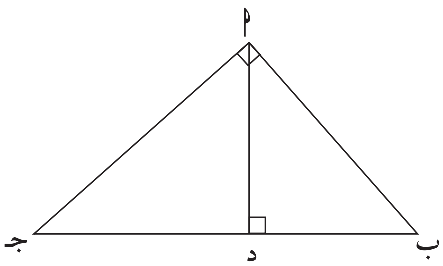
في المثلثات الثلاثة: س، ص، ع.

- أي الزوايا لها نفس قياس $\hat{١}$.
- أي الزوايا لها نفس قياس $\hat{٢}$.
- أي الزوايا لها نفس قياس $\hat{٣}$.
- معتمدًا على نتائجك، ماذا تستنتج بالنسبة إلى المثلثات الثلاثة؟
- أكمل العبارة: Δأب جـ ~ Δ... ~ Δ...



نظرية (١)

العمود المرسوم من رأس القائمة إلى الوتر في مثلث قائم الزاوية يقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين وكل منهما يشابه المثلث الأصلي.



المعطيات: أب جـ مثلث قائم الزاوية أ، $\overline{أد} \perp \overline{ب جـ}$.

المطلوب: ١ إثبات تشابه المثلثين أب د، جـ أ د

٢ إثبات تشابه المثلثين أب د ، جـ ب أ

البرهان:

١ المثلثان أب د، جـ أ د فيهما:

ق(أ$\hat{د}$ب) = ق(جـ$\hat{د}$أ) = ٩٠°

ق(ب$\hat{أ}$د) + ق(أ$\hat{ب}$د) = ٩٠°،

ق(ب$\hat{جـ}$أ) + ق(أ$\hat{ب}$جـ) = ٩٠°

∴ ق(ب $\hat{أ}$ د) = ق(ب$\hat{جـ}$أ) — زاوية متممة مشتركة

Δأب د ~ Δجـ أ د. — نظرية (١)

٢ المثلثان أب د ، جـ ب أ فيهما:

ق(أ$\hat{ب}$د) = ق(جـ $\hat{ب}$ أ) — زاوية مشتركة

ق(أ$\hat{د}$ب) = ق(ب $\hat{أ}$ جـ) = ٩٠°

∴ Δأب د ~ Δجـ ب أ — نظرية (١)

Δأب د ~ Δجـ أ د ، Δأب د ~ Δ جـ ب أ

∴ Δأب د ~ Δجـ أ د ~ Δجـ ب أ . — القياس المنطقي

نتيجة (١)

مربع طول العمود المرسوم من رأس القائمة إلى الوتر في مثلث قائم الزاوية يساوي ناتج ضرب طولي القطعتين المستقيمتين اللتين ينقسم إليهما الوتر بهذا العمود.

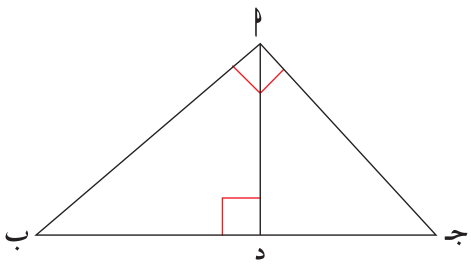
المعطيات: أب جـ مثلث قائم الزاوية أ، $\overline{\text{أد}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$.

المطلوب: إثبات أن: (أد)^{٢} = ب د × د جـ.

البرهان: Δأب د ~ Δجـأد (نظرية ١)

$$\frac{\text{أب}}{\text{جـأ}} = \boxed{\frac{\text{ب د}}{\text{أد}} = \frac{\text{أد}}{\text{جـ د}}}$$

(أد)^{٢} = ب د × د جـ



نتيجة (٢)

إذا كان Δأب جـ قائم الزاوية أ، $\overline{\text{أد}} \perp \overline{\text{جـ ب}}$:

١ (أب)^{٢} = ب د × ب جـ

٢ (أجـ)^{٢} = جـ د × جـ ب

المعطيات: Δأب جـ مثلث قائم الزاوية أ.

$\overline{\text{أد}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$.

المطلوب: ١ إثبات (أب)^{٢} = ب د × ب جـ.

٢ (أجـ)^{٢} = جـ د × جـ ب

البرهان:

١ Δأب د ~ Δجـ ب أ (نظرية ١)

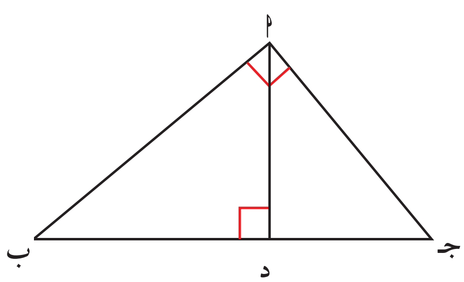
إذًا $\frac{\text{أب}}{\text{جـ ب}} = \frac{\text{ب د}}{\text{ب أ}}$

ومنها (أب)^{٢} = ب د × ب جـ.

٢ Δأجـ د ~ Δب جـ أ (نظرية ١)

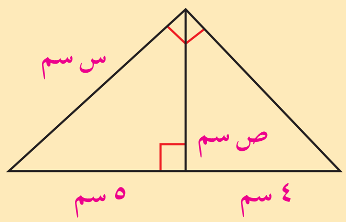
إذًا $\frac{\text{جـأ}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{جـأ}}$

ومنها (أجـ)^{٢} = جـ د × جـ ب



مثال (١)

أوجد س، ص بحسب المعطيات في الشكل.



الحل:

باستخدام نتائج النظرية (١):

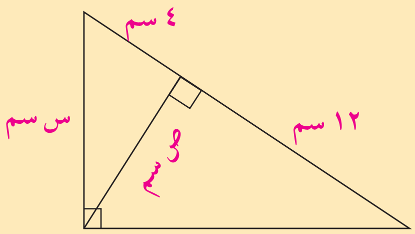
$س^2 = ٥ \times (٥ + ٤) = ٤٥$

$س = \sqrt{٤٥} = ٣\sqrt{٥}$

$ص^2 = ٤ \times ٥$

$ص = \sqrt{٢٠} = ٢\sqrt{٥}$

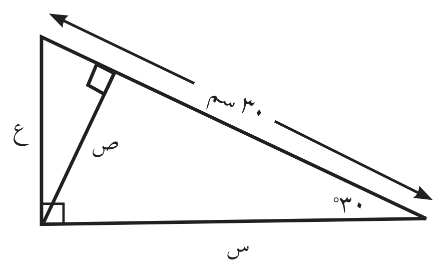
حاول أن تحل

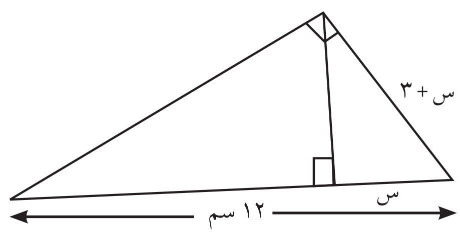


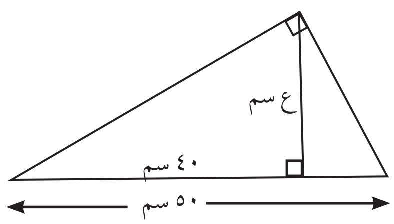
١ أوجد من الشكل المجاور س، ص في أبسط شكل.

تدريب (١)

أوجد قيمة س، ص، ع في أبسط صورة من كل من الحالات التالية:







مثال (٢) تطبيقات حياتية

يراقب فلكي كسوف الشمس. ينمذج الشكل المقابل الحالة. يقف المراقب في ب.

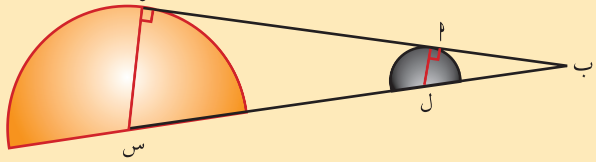
النقاط س (مركز الشمس)، ل (مركز القمر)، ب متسامتة.

طول نصف قطر الشمس = ٦٩٥ ٠٠٠ كم.

طول نصف قطر القمر = ١ ٧٣٦ كم.

المسافة ب س = ١٥٠ مليون كم.

أوجد المسافة ب ل (قرّب الإجابة لأقرب كم).



الحل:

المثلثان ب ل ﻫ، ب س و قائمي الزاوية ﻫ، و. $\hat{ب}$ زاوية مشتركة.

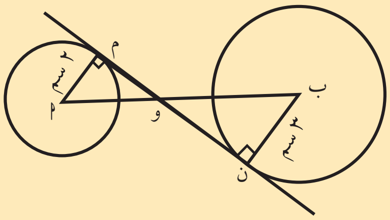
المثلثان ب ل ﻫ، ب س و متشابهان (نظرية ١)

$\frac{ب\ ل}{ب\ س} = \frac{ل\ ﻫ}{س\ و}$ تناسب أطوال الأضلاع المتناظرة

$\frac{ب\ ل}{١٥٠\ ٠٠٠\ ٠٠٠} = \frac{١\ ٧٣٦}{٦٩٥\ ٠٠٠}$

ب ل = ٣٧٤٦٧٦,٢٥٩

تبلغ المسافة بين النقطة ب التي يقف فيها المراقب ومركز القمر حوالى ٣٧٤ ٦٧٦ كم.

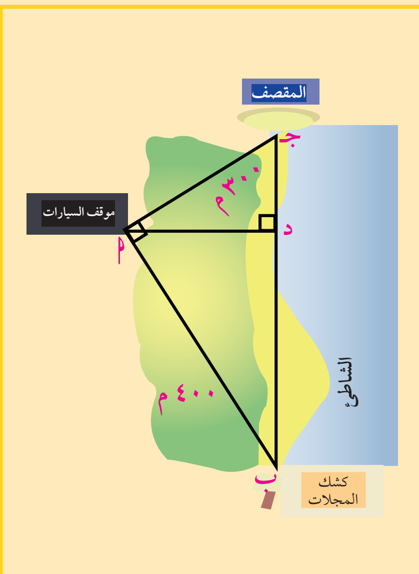


حاول أن تحل

٢ في الشكل المقابل أوجد طول كل من القطعتين $\overline{وﻫ}$، $\overline{وب}$ إذا كان طول $\overline{ﻫب}$ = ٨ سم.

مثال (٣) تطبيقات حياتية

في إحدى الحدائق العامة، التي تقيمها الدولة على الشاطئ للترويح عن المواطنين، كان طول الممر المرصوف داخل الحديقة حتى المقصف يساوي ٣٠٠ م، وطول الممر حتى كشك المجلات ٤٠٠ م، وكان الممران يتقابلان في زاوية قائمة كما في الشكل أمام موقف السيارات. سار جاسم من موقف السيارات على مسار مستقيم عمودي على الشاطئ حتى وصل إلى الشاطئ. كم مترًا على جاسم أن يسير من مكانه على الشاطئ ليشتري شطائر من المقصف؟



الحل: Δﻫب جـ قائم الزا وية في ﻫ.

بتطبيق نظرية فيثاغورث

(ب جـ)^٢ = (٣٠٠)^٢ + (٤٠٠)^٢

(ب جـ)^٢ = ٢٥٠ ٠٠٠

ب جـ = ٥٠٠ م

بتطبيق نتائج التشابه

(ﻫجـ)^٢ = جـ د × جـ ب

(٣٠٠)^٢ = جـ د × ٥٠٠

جـ د = $\frac{٣٠٠ \times ٣٠٠}{٥٠٠}$ = ١٨٠

أي أن جاسم سيسير ١٨٠ م ليصل إلى المقصف.

حاول أن تحل

٣ احسب المسافة ﻫد من موقف السيارات إلى الشاطئ بطريقتين مختلفتين.

٣-٥ التناسبات والمثلثات المتشابهة

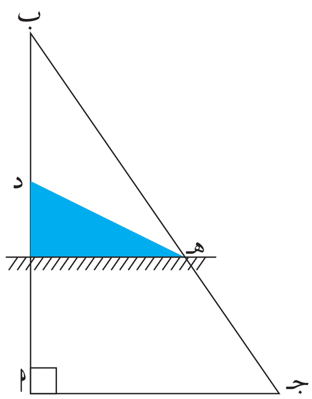
Proportions and Similar Triangles

سوف تتعلم

- خصائص الخط الموازي لأي ضلع في المثلث
- نظرية طاليس
- خصائص منصفات الزوايا الداخلية في المثلث

عمل تعاوني

استخدم الأدوات الهندسية (المسطرة والمثلث القائم) في إنشاء التالي:



- ارسم Δأب جـ. خذ نقطة د على $\overline{\text{أب}}$.
- ارسم خطًّا مستقيمًا يمر بنقطة د ويوازي $\overline{\text{أجـ}}$.
- لتكن هـ هي نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{\text{دهـ}}$ مع $\overline{\text{ب جـ}}$.
- أوجد بالقياس طول كل من: $\overline{\text{ب د}}$، $\overline{\text{دأ}}$، $\overline{\text{ب هـ}}$، $\overline{\text{هـ جـ}}$.
- احسب النسبتين: $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}}$ ، $\frac{\text{ب د}}{\text{دأ}}$.

قارن بين النسبتين: $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}}$ ، $\frac{\text{ب د}}{\text{دأ}}$.

قارن بين عدد من الحالات يتحرك فيها موقع $\overleftrightarrow{\text{دهـ}}$ محافظًا على توازيه مع $\overline{\text{أجـ}}$.

دعنا نفكر ونتناقش

أعط أمثلة عددية توضح خواص التناسب التالية:

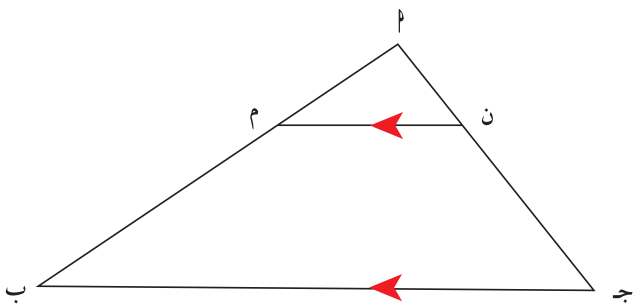
خواص التناسب	أمثلة عددية
إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$. فإن: ١ أد = ب جـ ٢ $\frac{\text{ب}}{\text{أ}} = \frac{\text{د}}{\text{جـ}}$ ٣ $\frac{\text{أ}}{\text{جـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{د}}$ ٤ $\frac{\text{أ} + \text{ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ} + \text{د}}{\text{د}}$ ٥ $\frac{\text{أ} + \text{جـ}}{\text{ب} + \text{د}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$	

نظرية (١)

إذا وازى مستقيم أحد أضلاع مثلث وقطع ضلعيه الآخرين، فإنه يقسم هذين الضلعين إلى أجزاء أطوالها متناسبة.

المعطيات: أ ب جـ مثلث، $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$.

المطلوب: إثبات أن $\frac{\text{أ م}}{\text{م ب}} = \frac{\text{أ ن}}{\text{ن جـ}}$.



البرهان:

$\overline{\text{م ن}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

Δ أ جـ ب ~ Δ أ ن م (لماذا؟)

$\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ن}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ م}}$

$\frac{\text{أ ن + ن جـ}}{\text{أ ن}} = \frac{\text{أ م + م ب}}{\text{أ م}}$

$1 + \frac{\text{ن جـ}}{\text{أ ن}} = 1 + \frac{\text{م ب}}{\text{أ م}}$

$\frac{\text{ن جـ}}{\text{أ ن}} = \frac{\text{م ب}}{\text{أ م}}$

إذًا $\frac{\text{أ م}}{\text{م ب}} = \frac{\text{أ ن}}{\text{ن جـ}}$.

معلومة رياضية:

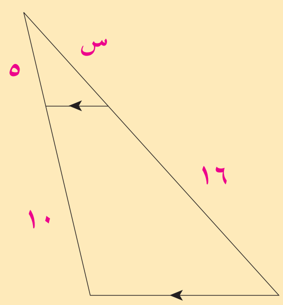
إذا كان $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

فأن $\overline{\text{م ن}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

والعكس صحيح.

مثال (١)

استخدم نظرية المستقيم الموازي السابقة لإيجاد قيمة س.



الحل:

بما أن المستقيمين متوازيان وباستخدام نظرية طاليس نكتب التناسب:

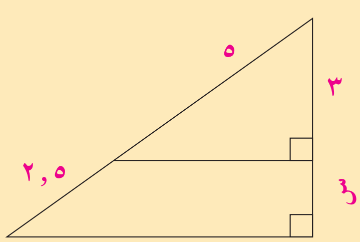
$\frac{٥}{١٠} = \frac{\text{س}}{١٦}$ الأجزاء المتناسبة

١٠س = ٨٠ باستخدام الضرب التقاطعي

س = ٨ بالقسمة على ١٠

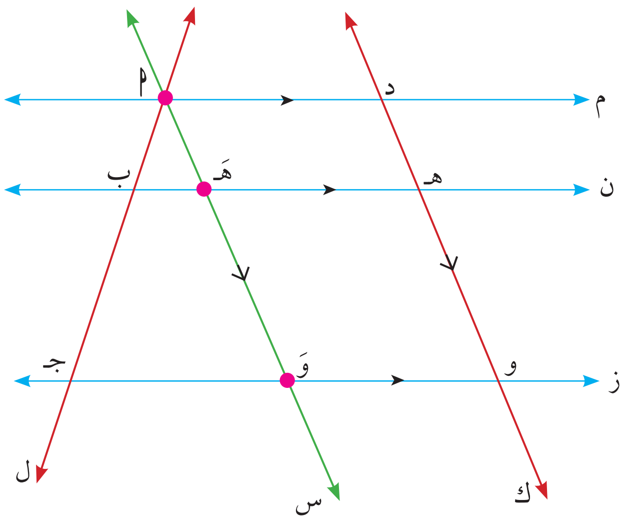
حاول أن تحل

١ استخدم نظرية المستقيم الموازي السابقة لإيجاد قيمة س.



نظرية (٢)

إذا قطع مستقيمان غير متوازيين ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر فإن أطوال القطع المستقيمة الناتجة متناسبة.



المعطيات: لدينا المستقيمات م، ن، ز حيث م // ن // ز.

المستقيم ل يقطع م، ن، ز بالنقاط ﺃ، ب، ﺟ على الترتيب.

المستقيم ك يقطع م، ن، ز بالنقاط د، ﻫ، و على الترتيب.

المطلوب: إثبات أن: $\frac{\text{ﺃب}}{\text{ب ﺟ}} = \frac{\text{د ﻫ}}{\text{ﻫ و}}$

البرهان:

نأخذ من النقطة ﺃ خطًا مستقيمًا س موازيًا للمستقيم ك حيث يقطع ن بالنقطة ﻫَ ويقطع ز بالنقطة وَ.

ويكون لدينا: ﺃﻫَ ﻫ د متوازي أضلاع لذا: ﺃﻫَ = دﻫ

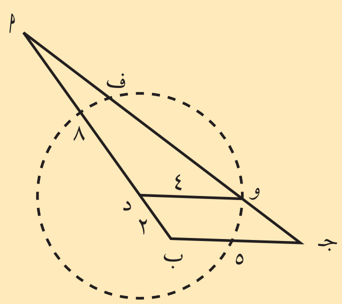
ثم ﻫَ وَ و ﻫ متوازي أضلاع لذا: ﻫَ وَ = ﻫ و

من ناحية ثانية:

$\frac{\text{ﺃب}}{\text{ب ﺟ}} = \frac{\text{ﺃﻫَ}}{\text{ﻫَ وَ}}$ نظرية (١)

ومنه نستنتج: $\frac{\text{ﺃب}}{\text{ب ﺟ}} = \frac{\text{دﻫ}}{\text{ﻫ و}}$ بالتعويض

مثال (٢) **تجنب الخطأ**



في الشكل المقابل: د مركز الدائرة، طول نصف قطر الدائرة = ٤ سم.

ﺃب = ١٠ سم ، ﺃد = ٨ سم ، ب ﺟ = ٥ سم ، و، ف نقطتان على الدائرة.

قال فهد: النقاط ﺃ، د، ب متسامتة كذلك النقاط ﺃ، و، ﺟ وبالترتيب نفسه.

بما أن $\frac{\text{ﺃد}}{\text{ﺃب}} = \frac{٨}{٨ + ٢} = \frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$ ، $\frac{\text{ود}}{\text{ﺟ ب}} = \frac{٤}{٥}$

إذًا $\overline{\text{ود}} \,//\, \overline{\text{ﺟ ب}}$

إجابة سلطان: في هذه الحالة، $\overline{\text{ف د}}$، $\overline{\text{ﺟ ب}}$ متوازيتان أيضًا.

أ) اشرح علام ارتكز سلطان في إجابته.

ب) أين الخطأ في الحل الذي أعطاه فهد؟

الحل:

أ كيف فكر سلطان: بما أن $\frac{\text{أد}}{\text{أب}} = \frac{٤}{٥}$ ، $\frac{\text{دف}}{\text{جـب}} = \frac{٤}{٥}$ واستنادًا على ما اقترح فهد، $\overline{\text{دف}} \,//\, \overline{\text{جـب}}$

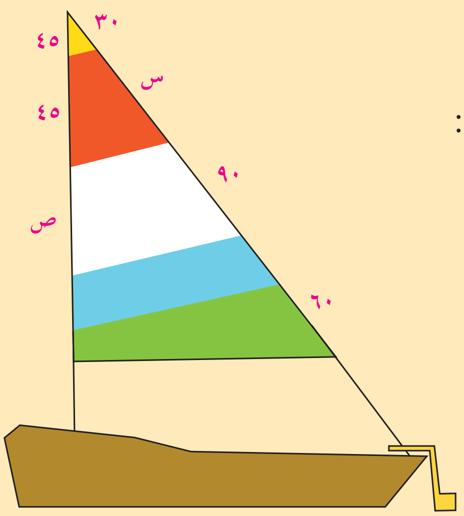
ب يجب أن يكون $\overline{\text{ود}} \,//\, \overline{\text{جـب}}$ (نظرية طاليس). توازي المستقيمات يعطي قطعًا أطوالها متناسبة وليس العكس.

حاول أن تحل

٢ إذا كان أيضًا $\overline{\text{ود}} \,//\, \overline{\text{جـب}}$، وجـ = ٣ سم فأوجد طول $\overline{\text{أد}}$.

مثال (٣) **تطبيقات حياتية**

تصميم أنماط لشراع المركب: يستخدم صانعو الأشرعة الحاسوب لتكوين نمط لكل شراع يصنعونه، ثم يرسمون مخططًا له بالطباشير على الأرضية التي يقصونه عليها. بعد أن يقطعوا إطارات الشراع، يحيكونها معًا لتكوين الشراع بأكمله. الخطوط المحاكاة تكون متوازية كما في الشكل حيث الأبعاد بالسنتيمتر. أوجد س، ص.



الحل:

من توازي القطع المستقيمة واستنادًا إلى نظرية طاليس، نكتب التناسب:

$\frac{٣٠}{\text{س}} = \frac{٤٥}{٤٥}$ باستخدام نظرية طاليس

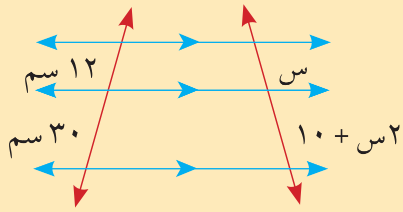
س = ٣٠

$\frac{\text{ص}}{٤٥} = \frac{٩٠}{٣٠}$

إذًا ص $= \frac{٤٥ \times ٩٠}{٣٠}$

= ١٣٥ سم.

استخدم على الحاسوب برنامج **Illustrator** في تصميم الشراع إذا كان ذلك متاحًا لك.



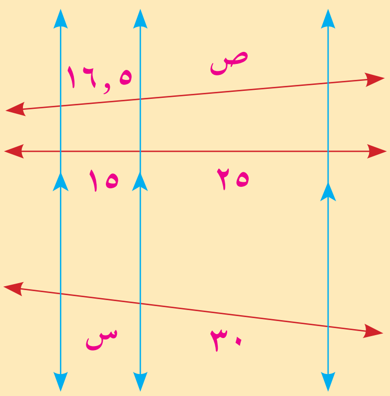
تدريب (١)

من الشكل المقابل أكمل المعادلة أدناه لإيجاد قيمة س.

باستخدام نظرية طاليس $\frac{\text{س}}{\text{٢س + ١٠}} = \frac{\dots}{\dots}$

حاول أن تحل

٣ أوجد في الشكل المقابل س، ص في أبسط شكل.



نظرية (٣)

إذا نصّف شعاع زاوية داخلية في مثلث، فإن هذا المنصف يقسم الضلع المقابل إلى قطعتين يتناسب طولاهما مع طول الضلعين الآخرين في المثلث.

المعطيات: Δ ٢ب جـ فيه $\overleftrightarrow{\text{٢د}}$ ينصف ب ٢̂ جـ.

المطلوب: إثبات أن: $\frac{\text{جـ د}}{\text{د ب}} = \frac{\text{جـ٢}}{\text{ب٢}}$

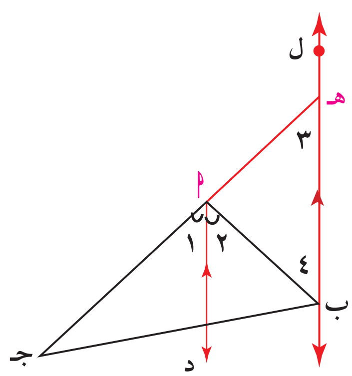
العمل: نرسم $\overleftrightarrow{\text{ب ل}} \,//\, \overleftrightarrow{\text{٢د}}$

حيث يتقاطع $\overleftrightarrow{\text{جـ٢}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب ل}}$ في نقطة هـ.

البرهان:

$\because$ $\overleftrightarrow{\text{ب ل}} \,//\, \overleftrightarrow{\text{٢د}}$ **عملًا**

$\overline{\text{جـ هـ}}$ ، $\overline{\text{جـ ب}}$ قاطعان لهما

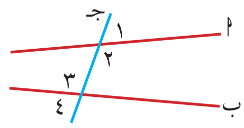


باستخدام نظرية طاليس نجد أن:

$\frac{\text{جـ د}}{\text{د ب}} = \frac{\text{جـ٢}}{\text{٢هـ}}$ (١)

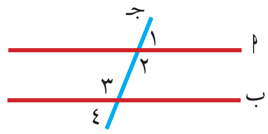
ق(٢̂) = ق(١̂) بالتنصيف.
ق(١̂) = ق(٣̂) من التوازي والتناظر.
إذًا ق(٢̂) = ق(٣̂)
ق(٢̂) = ق(٤̂) من التوازي والتبادل الداخلي.
إذًا ق(٣̂) = ق(٤̂)
∴ المثلث ﺃب هـ متطابق الضلعين ومنه ﺃهـ = ﺃب.
وبالتعويض في (١) ينتج أن: $\frac{\text{جـ د}}{\text{د ب}} = \frac{\text{جـﺃ}}{\text{بﺃ}}$.

معلومة رياضية:



(٢̂)، (٣̂): زاويتان متبادلتان داخليًّا

(١̂)، (٤̂): زاويتان متبادلتان خارجيًّا



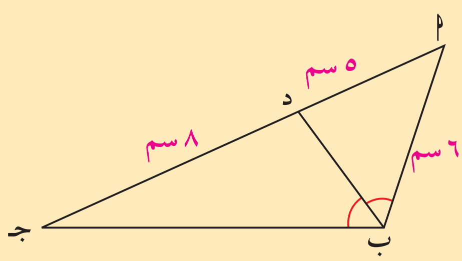
ق(٢̂) = ق(٣̂): التوازي والتبادل الداخلي

ق(١̂) = ق(٤̂): التوازي والتبادل الخارجي

مثال (٤)

أوجد جـ ب في الشكل المبيّن حيث $\overline{\text{ب د}}$ ينصف ﺃبَ̂جـ.

الحل:



في المثلث ﺃجـ ب

$\overline{\text{ب د}}$ منصف ﺃب̂جـ

∴ $\frac{\text{جـ د}}{\text{د ﺃ}} = \frac{\text{جـ ب}}{\text{ب ﺃ}}$ نظرية منصف الزاوية

$\frac{\text{جـ ب}}{\text{ب ﺃ}} = \frac{٨}{٥}$

ب جـ = $\frac{٨ \times \text{بﺃ}}{٥}$

= $\frac{٨ \times ٦}{٥}$ = ٩٫٦ سم

حاول أن تحل

٤ ارسم مثلثًا ﺃب جـ بحيث أن ﺃب = ٦ سم، ﺃجـ = ٨ سم، ب جـ = ٧ سم، ثم ارسم $\overline{\text{ﺃد}}$ منصف ب ﺃ̂ جـ.
أوجد جـ د، ب د.

٣–٦

العلاقة بين محيطي شكلين متشابهين وبين مساحتيهما

Relation Between Perimeters and Areas of Two Similar Figures

سوف تتعلم

- العلاقة بين محيطات الأشكال المتشابهة ونسبة التشابه
- العلاقة بين مساحات الأشكال المتشابهة ونسبة التشابه

عمل تعاوني

اعمل مع زميل لك لبحث العلاقة بين محيطي شكلين متشابهين وبين مساحتيهما.

خطوات العمل:

١ على ورقة المربعات حدّد مستطيلًا أبعاده ٣ وحدات، ٤ وحدات.

٢ حدد ثلاثة مستطيلات مشابهة للمستطيل الأصلي.

٣ استخدم الرسم في ملء الجدول (١).

٤ استعن بالمعلومات التي حصلت عليها في الجدول (١) لتكمل الجدول (٢).

٥ ماذا تعني النسب التي حصلت عليها مقارنة بنسبة التشابه؟

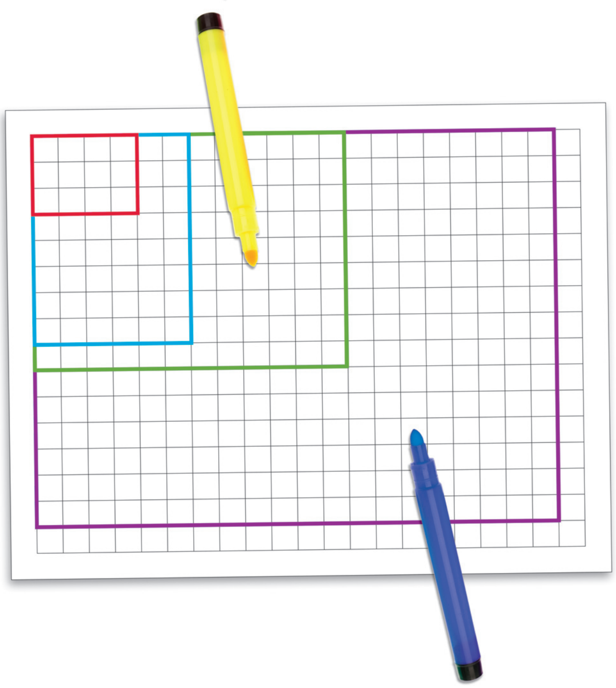
٦ قارن بين النتائج التي حصلت عليها والنتائج التي حصل عليها زملاؤك في الفصل.

جدول (١)

المستطيل	العرض	الطول	المحيط	المساحة
الأصلي				
I				
II				
III				

جدول (٢)

المستطيل	النسبة بين العرضين	النسبة بين الطولين	النسبة بين المحيطين	النسبة بين المساحتين	نسبة التشابه
	١:٢	١:٢			٢
I: الأصلي					
II: الأصلي					
III: الأصلي					



معلومة مفيدة:
في المستطيل البعد الأقصر يسمى العرض، والبعد الأطول يسمى الطول.

يلاحظ أن:

النسبة بين المحيطين = نسبة التشابه
النسبة بين المساحتين = مربع نسبة التشابه
نسبة التشابه بين محيطي دائرتين تساوي النسبة بين طولي نصفي قطري الدائرتين.

نظرية (١)

(نظرية العلاقة بين محيطات أو مساحات الأشكال المتشابهة)

إذا كانت نسبة التشابه لأي شكلين متشابهين هي $\frac{\text{م}}{\text{ب}}$ فإن:

١ النسبة بين محيطي الشكلين = $\frac{\text{م}}{\text{ب}}$

= نسبة التشابه.

٢ النسبة بين مساحتي الشكلين = $\frac{\text{م}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = \left(\frac{\text{م}}{\text{ب}}\right)^{٢}$

= مربع نسبة التشابه.

نسبة التشابه بين أي دائرتين هي النسبة بين طولي نصفي قطريهما.

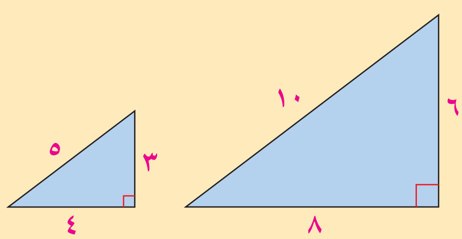
النسبة بين محيطي دائرتين تساوي النسبة التشابه بين الدائرتين.

النسبة بين مساحتي دائرتين تساوي مربع نسبة التشابه بين الدائرتين.

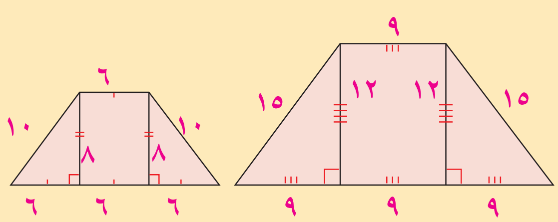
مثال (١)

أوجد نسبة التشابه بين محيطي ثمّ بين مساحتي:

أ المثلثين المتشابهين.



ب شبهي المنحرف المتشابهين.



الحل:

أ نسبة التشابه = النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين: $\frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

النسبة بين محيطي المثلثين: $\frac{١٢}{٢٤} = \frac{١}{٢}$

النسبة بين مساحتي المثلثين: $\frac{\frac{١}{٢} \times ٣ \times ٤}{٢٤} = \frac{٦}{٢٤} = \frac{١}{٤} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}$.

ب نسبة التشابه: $\frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$

النسبة بين محيطي شبهي المنحرف:

$$\frac{٦ + ١٨ + ٢٠}{٣٠ + ٢٧ + ٩} = \frac{٤٤}{٦٦} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$$

النسبة بين مساحتي شبهي المنحرف:

$$\frac{٨ \times ١٢}{١٢ \times ١٨} = \frac{٨}{١٨} = \frac{٤}{٩} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢}.$$

حاول أن تحل

١ لدينا مثلثان متشابهان بنسبة $\frac{٢}{٣}$. إذا كان محيط المثلث الأكبر ٤٥ سم، فما محيط المثلث الأصغر؟

مثال (٢)

مضلعان متشابهان أحدهما أطوال أضلاعه٣ سم، ٥ سم، ٦ سم، ٨ سم، ١٠ سم والآخر محيطه ٤٨ سم، أوجد أطوال أضلاع المضلع الثاني.

الحل:

محيط المضلع الأول = ٣ + ٥ + ٦ + ٨ + ١٠ = ٣٢ سم.

النسبة بين محيطي الضلعين = $\frac{٣٢}{٤٨} = \frac{٢}{٣}$.

لتكن أ، ب، جـ، د، هـ على التوالي أطوال أضلاع المضلع الثاني المناظرة للأطوال ٣، ٥، ٦، ٨، ١٠ في المضلع الأول.

النسبة بين ضلعين متناظرين = النسبة بين محيطي المضلعين.

$\frac{أ}{٣} = \frac{٢}{٣}$ ∴ أ = ٢ سم $\qquad$ $\frac{ب}{٥} = \frac{٢}{٣}$ ∴ ب = $\frac{١٠}{٣} \simeq ٣,٣$ سم

$\frac{جـ}{٦} = \frac{٢}{٣}$ ∴ جـ = ٤ سم $\qquad$ $\frac{د}{٨} = \frac{٢}{٣}$ ∴ د = $\frac{١٦}{٣} \simeq ٥,٣$ سم

$\frac{هـ}{١٠} = \frac{٢}{٣}$ ∴ هـ = $\frac{٢٠}{٣} \simeq ٦,٧$ سم.

حاول أن تحل

٢ ينقص محيط المضلع الثاني ٨ سم عن محيط المضلع الأول. أوجد أطوال أضلاع المضلع الثاني.

مثال (٣)

ليكن لدينا دائرتان م، ن: الأولى طول نصف قطرها $نق_١$، والثانية طول نصف قطرها $نق_٢$.

أوجد النسبة بين محيطي الدائرتين والنسبة بين مساحتيهما.

الحل:

نسبة التشابه: $\frac{ك_١}{ك_٢}$

النسبة بين المحيطين: $\frac{٢\pi نق_١}{٢\pi نق_٢} = \frac{نق_١}{نق_٢}$

النسبة بين المساحتين: $\frac{\pi (نق_١)^٢}{\pi (نق_٢)^٢} = \frac{(نق_١)^٢}{(نق_٢)^٢}$.

حاول أن تحل

٢ دائرتان م، ن، طول نصف قطر الأولى ٥ سم وطول نصف قطر الثانية = ٨ سم. أوجد النسبة بين محيطي الدائرتين والنسبة بين مساحتيهما.

مثال (٤)

لدينا رباعيان متشابهان بنسبة $\frac{٥}{٤}$. إذا كانت مساحة الرباعي الأكبر ٣٠ سم^{٢}، فما مساحة الرباعي الأصغر؟

الحل:

النسبة بين المساحتين = مربع نسبة التشابه

$$\frac{\text{مساحة الرباعي الأكبر}}{\text{مساحة الرباعي الأصغر}} = \left(\frac{٥}{٤}\right)^{٢} = \frac{٢٥}{١٦}$$

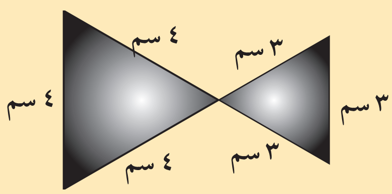
$$\frac{٣٠}{\text{مساحة الرباعي الأصغر}} = \frac{٢٥}{١٦}$$

$$\text{مساحة الرباعي الأصغر} = \frac{٣٠ \times ١٦}{٢٥} = ١٩,٢ \text{ سم}^{٢}.$$

حاول أن تحل

٤ النسبة بين مساحتي مضلعين هي $\frac{١٦}{٩}$. ما محيط المضلع الأكبر إذا كان محيط المضلع الأصغر ٢٤ سم؟

مثال (٥) تطبيقات حياتية



رسم يوسف ربطة عنق على شكل عقدة فراشة. لاحظ أن قسمي الربطة غير متطابقين. ما النسبة المئوية من مساحة المثلث الأكبر التي عليه قطعها ليصبح القسمان متطابقين؟

الحل:

الفرق بين مساحتي المثلثين = ٦,٩٢٨ − ٣,٨٩٧ = ٣,٠٣١

نكتب التناسب: $\frac{٣,٠٣١}{٦,٩٢٨} = \frac{س}{١٠٠}$

$$س = \frac{٣,٠٣١ \times ١٠٠}{٦,٩٢٨} \simeq ٤٣,٧٥.$$

يجب أن يقطع حوالى ٤٣,٧٥٪ من مساحة المثلث الأكبر.

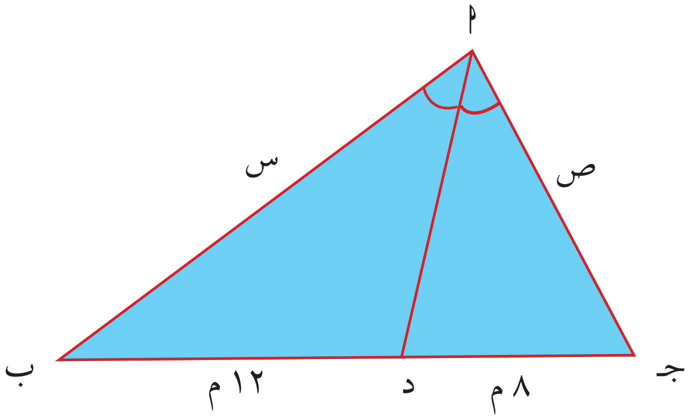
حاول أن تحل

٥ هل تبقى النسبة المئوية دون تغيير إذا كان طول ضلع المثلث الأصغر ٤ سم، وطول ضلع المثلث الأكبر ٥ سم؟

المرشد لحل المسائل

١ محيط المثلث المقابل يساوي ٥٠ مترًا. $\overline{\text{ﺃد}}$ منصف داخلي للزاوية ﺃ. أوجد قيم س، ص.

ما الذي أعرفه؟ يجب عرض المعطيات



محيط المثلث ﺃب جـ يساوي ٥٠ مترًا، أي أن:

ﺃب + ﺃجـ + ب جـ = ٥٠ م.

ثم ب د = ١٢ م، دجـ = ٨ م أي أن:

ب جـ = ١٢ + ٨ = ٢٠

$\overline{\text{ﺃد}}$ منصف داخلي للزاوية ﺃ

ما الذي أريد معرفته؟

قيمة س، قيمة ص.

كيف سأحل المسألة؟

استخدم المعطيات، اكتب:

$$\begin{cases} \text{س} + \text{ص} + ٢٠ = ٥٠ & \text{أي: س + ص} = ٣٠ \\ \dfrac{\text{س}}{\text{ص}} = \dfrac{١٢}{٨} = \dfrac{٣}{٢} & \text{أي: س} = \dfrac{٣\text{ص}}{٢} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{س} + \text{ص} = ٣٠ \\ \text{س} = \dfrac{٣\text{ص}}{٢} \end{cases}$$

أجد حل نظام المعادلتين باستخدام طريقة التعويض أحصل على: $\dfrac{٣\text{ص}}{٢}$ + ص = ٣٠ ومنه ص = ١٢ وبالتالي س = ١٨

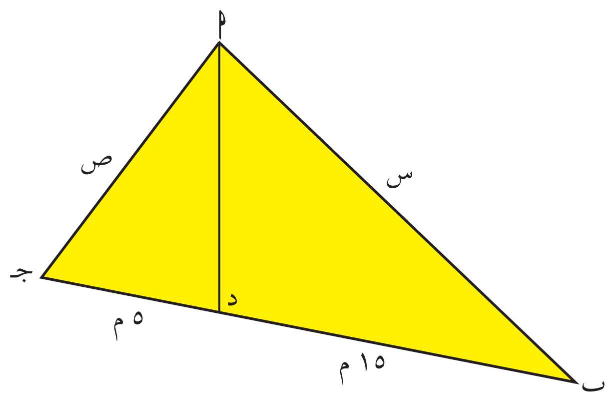
أي أن ص = ١٢ م، س = ١٨ م.

سوف أتحقق من صحة الحل:

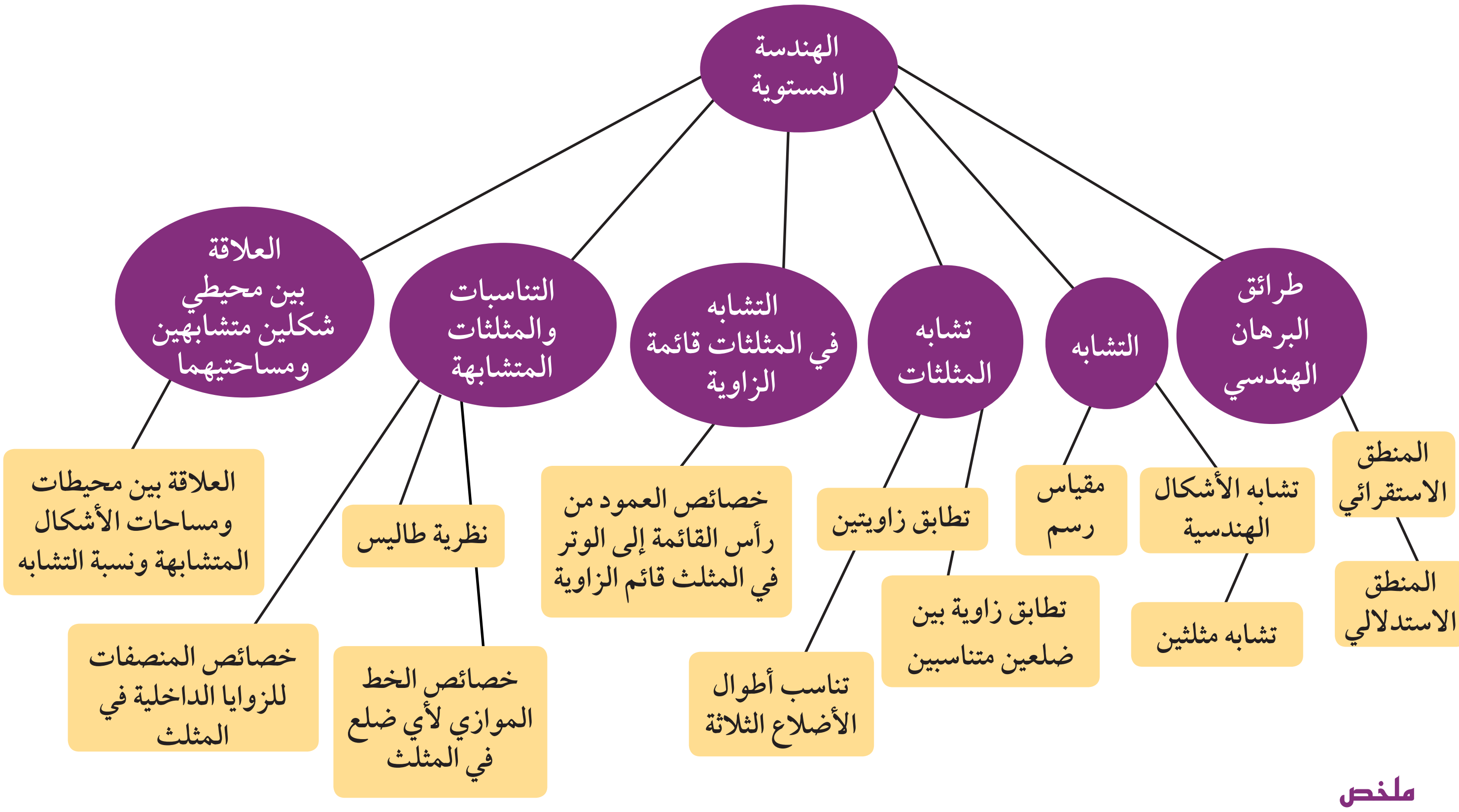
س + ص + ٢٠ = ١٨ + ١٢ + ٢٠ = ٥٠ محيط المثلث يساوي ٥٠ م.

مسألة إضافية

محيط المثلث المقابل يساوي ٧٥ مترًا مسافة $\overline{\text{ﺃد}}$ منصف داخلي للزاوية ﺃ. أوجد قيم س، ص.



مخطط تنظيمي للوحدة الثالثة



ملخص

- يعتمد المنطق الاستقرائي على توقع نتائج صحيحة من معطيات وأنماط محددة.
- يعتمد المنطق الاستدلالي على إيجاد نتائج صحيحة من معطيات صحيحة.
- يكون شكلان متشابهين عندما يكون لهما الشكل نفسه وأحدهما أكبر أو أصغر من الآخر أو متطابقًا معه.
- يوجد في شكلين متشابهين أزواج من الزوايا متساوية القياس وأزواج من الأضلاع متناسبة الأطوال.
- يستخدم التناسب في الأشكال المتشابهة للتطبيق على مقياس الرسم.
- عند تطابق زاويتين في مثلث مع زاويتين في مثلث آخر يكون المثلثان متشابهين.
- عند تطابق زاوية في مثلث مع زاوية في مثلث آخر وتناسب طولي الضلعين المحددين لهاتين الزاويتين، يكون المثلثان متشابهين.
- عند تناسب أطوال الأضلاع الثلاثة في مثلثين، يكون المثلثان متشابهين.
- يقسم العمود المرسوم من رأس القائمة إلى الوتر، المثلث قائم الزاوية إلى مثلثين متشابهين وكل منهما مشابه للمثلث الأصلي.
- عندما يوازي مستقيم أحد أضلاع مثلث ويقطع ضلعيه الآخرين، فإنه يقسم هذين الضلعين إلى أجزاء متناسبة.
- تنص نظرية طاليس على أنه إذا قطع مستقيمان ثلاثة مستقيمات متوازية مع بعضها بعضًا ،فإن الأجزاء المقطوعة من المستقيمين تكون متناسبة.
- يقسم المنصف للزاوية الداخلية في المثلث الضلع المقابل لها إلى جزئين متناسبين مع الضلعين الآخرين.
- إذا كانت نسبة التشابه بين شكلين متشابهين هي $\frac{أ}{ب}$ فإن:

(١) النسبة بين محيطي الشكلين = $\frac{أ}{ب}$

(٢) النسبة بين مساحتي الشكلين = $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{٢}$

الوحدة الرابعة

الجبر
Algebra

مشروع الوحدة: تحويل التروس Shifting Gears في الدراجات الهوائية الرياضية.

١ مقدمة المشروع:

يستخدم الرياضيون في سباقات الدراجات الهوائية دراجات لها تروس متغيّرة.

يمكن للتروس والروافع أن تسهّل العمل، لكن تبقى هناك مفاضلة للجودة. فالتروس العالية في الدراجة تسمح بالسير مسافة أكبر مع كل دورة من الدواسات ولكن بمجهود أكبر.

٢ الهدف:

كيف تختار التروس الملائمة خلال ركوب الدراجة: أماكن مسطحة، صعود الجبال، سباقات السرعة، أو المسافات الطويلة.

سوف تستخدم ما تتعلمه في الوحدة حول التغير والتناسبات في عملك.

٣ اللوازم:

أوراق، أوراق رسم بياني، آلة حاسبة.

٤ أسئلة حول التطبيق:

أ ضع جدولًا يبيّن المسافات التي تقطعها على دراجتك مستخدمًا تروسات مختلفة، ولمدة زمنية ثابتة وعلى الطريق نفسها.

ب أعد التجربة واختر طريقًا غير مسطحة (صعودًا ثم نزولًا).

جـ اسأل أحد المحال التجارية عن خصائص الدراجات التي يستخدمها الرياضيون في السباقات وقارنها بخصائص الدراجة التي قدمتها.

د التقرير: ضع تقريرًا مفصلًا تبيّن فيه كيف استفدت من النسب والتناسب في تنفيذ المشروع.

دروس الوحدة

النسبة والتناسب	التغير الطردي	التغير العكسي
٤–١	٤–٢	٤–٣

الوحدة الرابعة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت تمثيل العلاقات بيانيًّا باستخدام المتغيرات.
- استكشفت أنماط الدوال.
- تعرفت طرائق حل معادلات ومتباينات من الدرجة الأولى بمتغير واحد أو بمتغيرين.
- تعرفت طرائق حل معادلات ومتباينات من الدرجة الثانية بمتغير واحد ومثلت الحلول بيانيًّا.

ماذا سوف تتعلم؟

- النسبة والتناسب واستخدامهما في حل مسائل حياتية.
- خواص التناسب المتسلسل.
- التغير الطردي.
- التغير العكسي.

المصطلحات الأساسية

النسبة - مقياس الرسم - التناسب - التناسب المتسلسل (الهندسي) - التغير الطردي - التغير العكسي.

أضف إلى معلوماتك

الجبر كلمة عربية استخدمها محمد بن موسى الخوارزمي (القرن التاسع الميلادي في عصر الخليفة العباسي المأمون) في كتابه الذي ألفه وكان عنوانه «الجبر والمقابلة» والذي وضع فيه طرقًا أصيلةً لحلّ المعادلات، وبذلك يعتبر الخوارزمي مؤسس علم الجبر بعد أن كان الجبر جزءًا من الحساب. وقد ترجم الكتاب إلى اللغات الأوروبيّة بعنوان «الجبر» ومنها أخذ العلم «الجبر» (algebra) هذا الاسم.

ويقول ابن الياسمين (أحدُ الرياضيّين الشعراء):

على ثلاثة يدور الجبر
المال والأعداد ثم الجذر
فالمال كل عدد مربع
وجذره واحد تلك الأضلع
والعدد المطلق ما لم ينسب
للمال أو للجذر، فافهم تصب

٤–١ النسبة والتناسب
Ratio and Proportion

سوف تتعلم
- خواص التناسب
- تمارين وتطبيقات هندسيّة
- خواص التناسب المتسلسل

دعنا نفكر ونتناقش

تعلم أن **النسبة** هي مقارنة بين كميتين من النوع نفسه يمكن تمثيلها بكسر.
فمثلًا: النسبة بين العدد ٣ (الحد الأول)، والعدد ٤ (الحد الثاني) هي $\frac{٣}{٤}$ ويمكن التعبير عن هذه النسبة بالصورة ٣:٤ وتُقرأ ٣ إلى ٤.

تذكر:
١ كم = ١٠٠ ٠٠٠ سم

مثال (١)

إذا كانت المسافة بين الكويت العاصمة والرياض هي ٥٥٠ كم، وكانت هذه المسافة ممثَّلة في إحدى الخرائط بقطعة مستقيمة طولها ١١ سم. أوجد مقياس الرسم، ثم أوجد النسبة بين الطول على الخريطة والمسافة الحقيقيّة.

الحلّ:

مقياس الرسم $= \dfrac{\text{المسافة على الخريطة}}{\text{المسافة الحقيقية}}$

$= \dfrac{\text{١١ سم}}{\text{٥٥٠ كم}} = \dfrac{\text{١١ سم}}{\text{٥٥ ٠٠٠ ٠٠٠ سم}}$

حيث إن الكميتين من النوع نفسه يمكن كتابتها كنسبة بالصورة:

$\dfrac{١١}{٥٥\ ٠٠٠\ ٠٠٠} = ١١ : ٥٥\ ٠٠٠\ ٠٠٠$

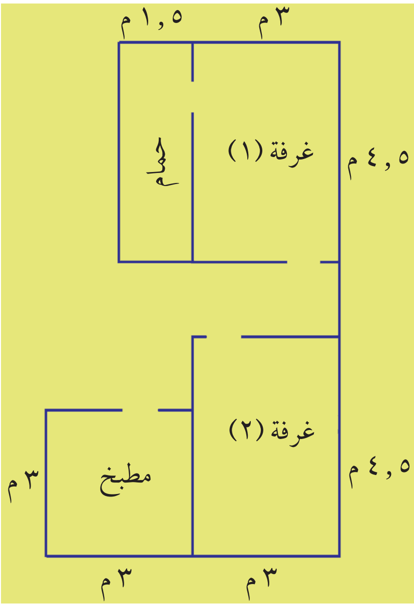
حاول أن تحل

١ استخدم المقياس على الخريطة لإيجاد المسافة الحقيقيّة بين الدمام والكويت العاصمة.

عمل تعاوني

١ رسم مهندس معماري مخططًا لإحدى الشقق كما بالشكل التالي. اشترك مع أحد زملائك في الآتي:

أ أوجد بالقياس الأطوال من الرسم، ثم أكمل الجدول التالي:



	الطول في الرسم بالسم	الطول الحقيقي بالمتر	الطول الحقيقي بالسم
غرفة (١)			
غرفة (٢)			
المطبخ			
الحمّام			

ب أوجد مقياس الرسم ☐ سم: ☐ م

جـ أوجد النسبة بحيث يكون البسط والمقام بالوحدات نفسها، واختصر النسبة لأبسط صورة.

التناسب:

هو تساوي نسبتين أو أكثر.

فمثلًا: $\frac{٣}{٤} = \frac{١٢}{١٦} = \frac{١٥}{٢٠} = ...$

ويمكن كتابة ذلك كالآتي: ٣:٤ = ١٢:١٦ = ١٥:٢٠...

وتقرأ ٣ إلى ٤ هي نفسها ١٢ إلى ١٦ هي نفسها ١٥ إلى ٢٠...

خاصيّة التساوي:

ليكن أ، ب، جـ، د ∈ ح*، ك ∈ ح.

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإنّ $\frac{أ}{ب} \times ك = \frac{جـ}{د} \times ك$ ، $ك \times \frac{أ}{ب} = ك \times \frac{جـ}{د}$

تذكر:

ح* هي مجموعة الأعداد الحقيقية غير الصفرية

ح* = ح − {٠}

الرمز ∈ يقرأ ينتمي

فمثلًا:

نعلم أن $\frac{٣}{٤} = \frac{١٥}{٢٠}$ بضرب الطرفين في ٢ نجد أن:

$$\frac{٣}{٤} \times ٢ = \frac{١٥}{٢٠} \times ٢$$

أي أن $\frac{٣}{٢} = \frac{١٥}{١٠}$

مثال (٢)

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{٩}} = \frac{\text{٥}}{\text{٦}}$ فأوجد قيمة أ.

الحل: $\frac{\text{٥}}{\text{٦}} = \frac{\text{أ}}{\text{٩}}$

$\text{١٨} \times \frac{\text{٥}}{\text{٦}} = \text{١٨} \times \frac{\text{أ}}{\text{٩}}$ بضرب الطرفين في ١٨ (م.م ﺃ للعددين ٦، ٩)

$\text{١٥} = \text{٢أ}$ بالتبسيط

$\text{أ} = \frac{\text{١٥}}{\text{٢}}$ بقسمة الطرفين على ٦

$\text{أ} = \text{٧,٥}$

حاول أن تحل

٢ إذا كان $\frac{\text{٤}}{\text{٦}} = \frac{\text{ص}}{\text{٩}}$ فأوجد قيمة ص.

خاصيّة الضرب التقاطعي

إذا كان $\frac{\text{ﺃ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ فإن ﺃ د = ب جـ

$\frac{\text{ﺃ}}{\text{ب}} \quad \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$

فمثلًا: $\frac{\text{١٢}}{\text{١٦}} = \frac{\text{٣}}{\text{٤}}$ من ذلك نجد أن:

$\text{١٢} \times \text{٤} = \text{١٦} \times \text{٣}$

$\text{٤٨} = \text{٤٨}$ عبارة صحيحة

مثال (٣)

أوجد قيمة ص في التناسب: $\frac{ص}{٢,٥} = -\frac{٣}{٤}$

الحل:

ص × ٤ = -٣ × ٢,٥ ضرب تقاطعي

٤ص = -٧,٥

ص = $-\frac{٧,٥}{٤}$ بقسمة الطرفين على ٤

ص = -١,٨٧٥

حاول أن تحل

٣ أوجد قيمة ب في التناسب: $\frac{٢}{ب} = \frac{٨}{٢٠}$

تعريفٌ:

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإنه يقال أن أ، ب، جـ، د أعداد متناسبة.

وإذا كانت أ، ب، جـ، د متناسبة فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$

ويسمى أ، د **طرفي التناسب**، كما يسمى جـ، ب **وسطي التناسب**. ولأنّ في هذه الحالة أد = ب جـ خاصيّة الضرب التقاطعي

فإنّ: حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين.

مثال (٤)

أثبت أن ٤، ٥، ١، ٨، ٣ أعداد متناسبة.

الحل:

تكون الأعداد ٤، ١,٥، ٨، ٣ أعدادًا متناسبة عندما $\frac{٤}{١,٥} = \frac{٨}{٣}$

باستخدام الضرب التقاطعي

∵ ٤ × ٣ = ١,٥ × ٨

أي أن ١٢ = ١٢ عبارة صحيحة

∴ الأعداد متناسبة

حاول أن تحل

٤ أثبت أن ٤، ٣، ٧، ٠٤، ٢، ٢، ٤ أعداد متناسبة.

مثال (٥) تطبيقات حياتية

الزراعة: في عام ٢٠١١، أنتجت إحدى مزارع الوفرة في دولة الكويت ٢٦٥٠ طنًّا من الطماطم. وفي عام ٢٠١٢، أنتجت المزرعة نفسها ٢٧٨٢,٥ طنًّا من الطماطم. احسب النسبة المئوية للزيادة في إنتاج هذه المزرعة.

تذكر:

النسبة المئوية للتغيّر = $\frac{\text{قيمة التغير}}{\text{القيمة الأصلية}}$ × ١٠٠

عندما تتزايد القيمة فإنها تدعى النسبة المئوية للزيادة، وعندما تتناقص القيمة فإنها تدعى النسبة المئوية للتناقص.

الحل:

الزيادة في الإنتاج تساوي: ٢٧٨٢,٥ − ٢٦٥٠ = ١٣٢,٥ طنًّا

لتكن س النسبة المئوية للزيادة:

س = $\frac{\text{قيمة التغير}}{\text{القيمة الأصلية}}$ × ١٠٠

س = $\frac{١٣٢,٥}{٢٦٥٠}$ × ١٠٠

س = ٥

إذًا النسبة المئوية للزيادة هي ٥، أي أن الزيادة تساوي ٥٪ من الإنتاج عن العام السابق.

حاول أن تحل

٥ في العام ٢٠١١، كان إنتاج المزرعة نفسها ٥٥٠٠ طنًّا من البطاطا أما في العام ٢٠١٢ فكان الإنتاج ٦٣٥٠ طنًّا. احسب النسبة المئوية لزيادة منتج البطاطا بين عامي ٢٠١١، ٢٠١٢ إلى أقرب جزء من مئة.

مثال (٦) **تطبيقات حياتية**

عند القيام بأنشطة رياضية فإن الشخص يفقد سعرات حراريّة تتناسب تقريبًا مع وزنه.

والجدول المجاور يبيّن ذلك لشخص وزنه ٦٥ كجم، عند قيامه بالنشاطات المذكورة لمدة ٦٠ دقيقة.

قام هذا الشخص بأحد هذه الأنشطة لمدة ٨٠ دقيقة. اكتب تناسبًا تستطيع بواسطته أن تحسب عدد السعرات الحراريّة التي يفقدها (بالتقريب).

النشاط لمدة ٦٠ دقيقة	السعرات المحروقة
المشي بسرعة ٤-٥ كم/ س	٣٠٠
السباحة أو التزلج	٥٠٠
لعبة كرة قدم	٤٠٠

الحلّ: عند المشي ٦٠ دقيقة يحرق ٣٠٠ سعرة حرارية

عند المشي ٨٠ دقيقة يحرق س سعرة حرارية

أي أن $\frac{س}{٣٠٠} = \frac{٨٠}{٦٠}$

$٦٠س = ٣٠٠ \times ٨٠$ باستخدام الضرب التقاطعي

$س = \frac{٣٠٠ \times ٨٠}{٦٠}$

س = ٤٠٠ سعرة حرارية تقريبًا

وبالمثل السباحة: $\frac{س}{٥٠٠} = \frac{٨٠}{٦٠}$ ، س = ٦٦٧ سعرة حرارية تقريبًا.

وبالمثل كرة القدم: $\frac{س}{٤٠٠} = \frac{٨٠}{٦٠}$ ، س = ٥٣٣ سعرة حرارية تقريبًا.

حاول أن تحل

٦ إذا مارست رياضة كرة السلة لمدة ٢٠ دقيقة، تفقد ٣٠٠ سعرة. اكتب تناسبًا تستطيع بواسطته أن تحسب عدد السعرات الحرارية التي تفقدها إذا مارست هذه الرياضة لمدة ٥٠ دقيقة.

١ - التناسب المتسلسل الهندسي Geometric Proportion

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$ فإنّه يقال إن أ، ب، جـ في **تناسب متسلسل** (أو تناسب هندسي)

وبالعكس: إذا كانت أ، ب، جـ في تناسب متسلسل فإنّ: $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$

ويسمى بـ **الوسط المتناسب** للعددين أ، جـ أو **الوسط الهندسي** لهما كما يسمى أ، جـ **طرفي التناسب**.

فمثلًا: ٢، ٤، ٨ في تناسب متسلسل لأن $\frac{٢}{٤} = \frac{٤}{٨}$.

ولاحظ أن ٨، ٤، ٢ كذلك في تناسب متسلسل لأن $\frac{٨}{٤} = \frac{٤}{٢}$.

إذا كان أ، ب، جـ ∈ ح* في تناسب متسلسل فإن جـ، ب، أ في تناسب متسلسل أيضًا.

مثال (٧)

أثبت أن ٣، ٩، ٢٧ في تناسب متسلسل.

الحلّ:

$\frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$ ، $\frac{٩}{٢٧} = \frac{٩ \div ٩}{٢٧ \div ٩} = \frac{١}{٣}$

إذًا $\frac{٣}{٩} = \frac{٩}{٢٧}$

أي أن: ٣، ٩، ٢٧ في تناسب متسلسل.

حاول أن تحل

٧ اكتب ٣ أعداد في تناسب متسلسل.

مثال (٨)

إذا كانت الأعداد ٥، س، ٢٠ في تناسب متسلسل، أوجد قيمة س.

الحل: نكتب التناسب المتسلسل: $\frac{٥}{س} = \frac{س}{٢٠}$

$س^٢ = ١٠٠$ الضرب التقاطعي

س = ١٠ أو س = −١٠

التحقق:

س = ١٠	س = −١٠
$\frac{٥}{س} = \frac{س}{٢٠}$	$\frac{٥}{س} = \frac{س}{٢٠}$
$\frac{٥}{١٠} = \frac{١٠}{٢٠}$	$\frac{٥}{-١٠} = \frac{-١٠}{٢٠}$
١٠٠ = ١٠٠ ✓	١٠٠ = ١٠٠ ✓

حاول أن تحل

٨ هل يمكن إيجاد قيمة س بحيث يكون −٩، س، ٤ في تناسب متسلسل؟ فسّر.

خواص التناسب المتسلسل

خاصيّة (١)

ليكن ٢، ب، جـ $\in$ ح*

إذا كان $\frac{٢}{ب} = \frac{ب}{جـ}$ (أي أن ٢، ب، جـ في تناسب متسلسل)

فإن ب^{٢} = ٢جـ وذلك من خاصية الضرب التقاطعي

فمثلًا: في حالة ٣، ٩، ٢٧ نجد أن:

٣ × ٢٧ = (٩)^{٢} (كل من الطرفين يساوي ٨١)

خواص التناسب المتسلسل

خاصيّة (٢)

ليكن ٢، ب، جـ، د $\in$ ح*

إذا كان:

$\frac{٢}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د}$ = م (أي أن ٢، ب، جـ، د في تناسب متسلسل)

فإن:

جـ = د × م ، ب = د × م^{٢} ، ٢ = د × م^{٣}

فمثلًا: في حالة $\frac{١٦}{٨} = \frac{٨}{٤} = \frac{٤}{٢}$ = ٢ نجد أن:

٤ = ٢ × ٢ ، ٨ = ٢ × (٢)^{٢} ، ١٦ = ٢ × (٢)^{٣}

مثال (٩)

إذا كانت الأعداد ٦، س، ٥٤، ١٦٢ في تناسب متسلسل، أوجد قيمة س.

الحل:

نكتب التناسب: $\frac{٦}{س} = \frac{٥٤}{١٦٢}$

س × ٥٤ = ٦ × ١٦٢ الضرب التقاطعي

س = $\frac{٦ \times ١٦٢}{٥٤}$ = ١٨

قيمة س = ١٨

حاول أن تحل

٩ إذا كانت الأعداد ٤، س − ٢، س − ٣، ٣ في تناسب متسلسل، أوجد قيمة س.

مثال (١٠)

إذا كان أ، ب، جـ، د في تناسب متسلسل، أثبت أن

$$\frac{أ + ب + جـ}{ب + جـ + د} = \frac{أ}{ب}$$

الحل:

∵ أ، ب، جـ، د في تناسب متسلسل

∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م$ تناسب متسلسل

إذًا: جـ = د × م ، ب = د × م^{٢} ، أ = د × م^{٣}

$$\frac{أ + ب + جـ}{ب + جـ + د} = \frac{دم^{٣} + دم^{٢} + دم}{دم^{٢} + دم + د} = \frac{دم(م^{٢} + م + ١)}{د(م^{٢} + م + ١)} = م = \frac{أ}{ب}$$

حل آخر: من التناسب السابق أ = ب م، ب = جـ م، جـ = د م

$$\frac{أ + ب + جـ}{ب + جـ + د} = \frac{ب م + جـ م + دم}{ب + جـ + د} = \frac{م(ب + جـ + د)}{ب + جـ + د} = م = \frac{أ}{ب}$$

معلومة مفيدة:

ليكن أ، ب، جـ ، د ∈ ح*

١ إذا كان أ، ب، جـ، د أعدادًا متناسبة، فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$

٢ إذا كانت أ، ب جـ، د في تناسب متسلسل،

فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م$

حاول أن تحل

١٠ إذا كان أ، ب، جـ في تناسب متسلسل

فأثبت أن: $\frac{أ + ٣ب}{ب + ٣جـ} = \frac{أ - ٢ب}{ب - ٢جـ}$ (بشرط المقام ≠ ٠)

مثال (١١)

تشارك سالم ومنصور بتنفيذ أعمال الدهان. إن نسبة الوقت الذي أمضياه في العمل هي ٧:٤. قبضا معًا ٨٨ دينارًا. كيف سيتوزع هذا المبلغ بينهما إذا عمل سالم وقتًا أطول من منصور؟

الحل:

لتكن س حصة سالم ، م حصة منصور من المبلغ.

$$\frac{\text{س}}{\text{م}} = \frac{٧}{٤}$$ كتابة التناسب

$$\frac{\text{س}}{\text{م}} + ١ = \frac{٧}{٤} + ١$$

$$\frac{\text{س} + \text{م}}{\text{م}} = \frac{٧ + ٤}{٤}$$

$$\frac{٨٨}{\text{م}} = \frac{١١}{٤}$$

$$\text{م} = \frac{٤ \times ٨٨}{١١} = ٣٢$$

س = ٨٨ − ٣٢ = ٥٦

ينال سالم ٥٦ دينارًا، وينال منصور ٣٢ دينارًا.

حاول أن تحل

١١ في مثال ١١، كيف سيتوزع المبلغ بين سالم ومنصور إذا كانت نسبة الوقت ٥:٣ وإذا عمل منصور أكثر من سالم؟

٤ – ٢

التغير الطردي
Direct Variation

سوف تتعلم

- التغير
- التغير الطردي
- دالة التغير الطردي
- ثابت التغير الطردي
- معدل التغير الطردي

دعنا نفكر ونتناقش

١ – التغير

التغيّر هو ظاهرة طبيعية في الحياة نلمسها ونشاهدها في العديد من المواقف والأشياء.

فمثلًا:

- درجات الحرارة تتغيّر بالارتفاع والانخفاض في اليوم الواحد وفي الفصول المختلفة.
- وزن الطفل يتغيّر ويزداد مع نموه.
- الزمن يتغيّر مع توالي الليل والنهار والأشهر والسنين.
- الأسعار تتغيّر.
- حجم الغاز يتغيّر بتغيّر درجة حرارته.
- المسافة التي يقطعها جسم متحرّك تتغيّر بمرور الزمن.

٢ – تدريب

١ أُذكر بعض الأشياء التي تتغيّر في حياتك.

٢ عدِّد بعض الأشياء التي تتغيّر بسبب تغيّر أشياء أخرى.

٣ هل تتغيّر مساحة المربع بتغيّر طول ضلعه؟

٤ عدِّد بعض الظواهر التي لا تتغيّر – أي الظواهر الثابتة.

٥ أُذكر أمثلة لبعض الثوابت التي مرّت عليك في الرياضيّات.

٣ – التغير الطردي

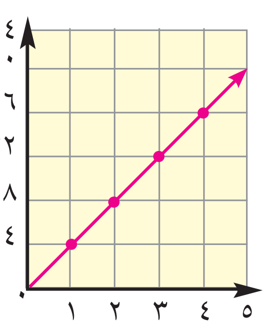
مثال توضيحي: الصورة المتحركة في السينما

عندما تشاهد فيلمًا سينمائيًّا عاديًّا، فإن ٢٤ صورة فرديّة تسطع سريعًا على الشاشة كل ثانية. في ما يلي ثلاث طرائق لبيان العلاقة بين عدد الصور (أو الإطارات التي تعرض) وعدد الثواني:

الطريقة الأولى
الجدول

س عدد الثواني	ص عدد الصور
١	٢٤
٢	٤٨
٣	٧٢
٤	٩٦
٥	١٢٠

الطريقة الثانية
الشكل المرسوم



الطريقة الثالثة
العلاقة بين عدد الصور (ص)
وعدد الثواني (س) هي:

ص = ٢٤ س

من الطرائق الثلاث السابقة أجب عن التالي:

(أ) ما معدل التغيّر في البيانات المبينة في الجدول؟

(ب) ما ميل المستقيم في الشكل البيانيّ؟

(جـ) ما معامل س في العلاقة بين ص ، س؟

ما العلاقة التي تلاحظها بين: معدل التغيّر، ميل المستقيم، معامل س؟

معلومة مفيدة:

لتكن أ $(س_١، ص_١)$، ب$(س_٢، ص_٢)$ فإن

ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢، س_١}$، $س_١ \neq س_٢$

وعندما يمر المستقيم بنقطة الأصل يصبح

ميل المستقيم $= \frac{ص}{س}$. $س \neq ٠$

- نلاحظ في هذا المثال أن **عدد الصور يتغيّر مع عدد الثواني التي تظهر فيها**.

(كلما زاد عدد الثواني زاد عدد الصور التي تعرض بالنسبة نفسها) وفي هذه الحالة نقول إن العلاقة تمثل **تغيّرًا طرديًا**.

التغيّر الطردي

هو دالة خطية يمكن أن تكتب بالصورة: ص = ك س حيث ك ≠ ٠

ويسمى ك ثابت التغيّر أو ثابت التناسب أو معدل التغير.

ويمكن التعبير عن العلاقة ص = ك س على الصورة ص α س.

ملاحظات

١ الشكل البياني لمعادلة التغيّر الطردي ص = ك س هو خط مستقيم **يمر بنقطة الأصل** (انظر الشكل، في المثال التوضيحي).

٢ يمكن كتابة المعادلة الخطيّة ص = ك س بالصورة: ك = $\frac{ص}{س}$ حيث س ≠ ٠

٣ ثابت التغيّر ك = معدل التغير في البيانات التي تصف التغيّر.

٤ الثابت ك = ميل الخط المستقيم الذي يمثّل المعادلة بيانيًّا.

٥ في حالة التغيّر الطردي فإنّ: ثابت التغيّر = معدل التغيّر = ميل المستقيم الممثل لمعادلة التغيّر.

٦ التغير قد يكون بالزيادة أو بالنقصان.

٧ إذا كانت ص α س فمعنى ذلك أن $\frac{ص_١}{س_١} = \frac{ص_٢}{س_٢} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{\text{التغير في ص}}{\text{التغير في س}}$

تعميم:

إذا كانت ص تتغير طرديًّا مع س أي ص α س فإن:

ص = ك س حيث ك ثابت لا يساوي الصفر

والعكس صحيح.

مثال (١)

إذا كانت ص α س وكانت ص = ٣٠ عندما س = ١٠، فأوجد قيمة ص عندما س = ٤٠، ثم مثل العلاقة بين س، ص بيانيًا.

الحل: ∴ ص α س

∴ ص = ك س   ك ثابت التغير

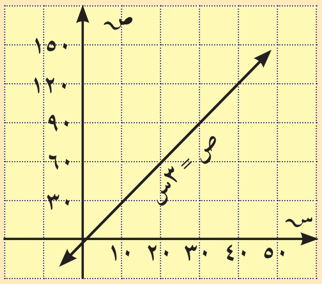
∴ ٣٠ = ك × ١٠

ك = ٣

∴ ص = ٣ س

عندما س = ٤٠ تكون ص = ٣ × ٤٠ = ١٢٠

س	٠	١٠	٤٠
ص = ٣س	٠	٣٠	١٢٠



حاول أن تحل

١ إذا كانت ص α س وكانت ص = −٢٠ عندما س = ١٠، أوجد قيمة ص عندما س = ١٥ ثم مثّل العلاقة بين س، ص بيانيًا.

موقف يمثل تغيرا طرديا (ثابت التغير سالب)

مثال (٢)

في إحدى المناطق القطبيّة تنخفض درجة الحرارة بانتظام خلال الليل بمعدل ٣° في الساعة. اكتب معادلة تغيّر طردي تمثل هذا الانخفاض إذا كانت درجة الحرارة ٠° بعد غروب الشمس.

∵ درجة الحرارة تنخفض بانتظام

∴ معدل التغيير = −٣

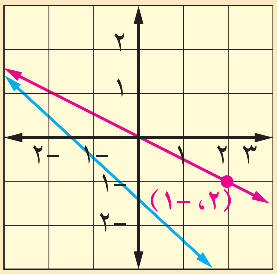
الحل: المعادلة هي ص = −٣س حيث ص درجة الحرارة، س عدد الساعات.

حاول أن تحل

٢ لإعادة طلاء المنزل، عمل ٤ رجال لمدة ٣ أيام. هل المدة اللازمة لطلاء المنزل تتغيّر طرديًّا مع عدد الرجال العاملين؟

مثال (٣)

في الشكل المقابل، أي من المستقيمين يمثل تغيرًا طرديًا؟ أوجد ثابت التغير في حالة التغير الطردي.



الحل:

المستقيم الذي يمر بنقطة الأصل يمثل تغيرًا طرديًا بين س ، ص وهو يمر بالنقطة (٢، −١).

ثابت التغير يساوي $\frac{ص}{س} = \frac{-١}{٢} = -\frac{١}{٢}$

المستقيم الثاني لا يمر بنقطة الأصل فهو لا يمثل تغيرًا طرديًا.

حاول أن تحل

٣ هل المستقيم الذي يمر بالنقاط: أ (٢، −٣)، ب (−٤، ٦) يمثل تغيرًا طرديًا بين س، ص. اشرح إجابتك

مثال (٤)

أي من المعادلتين التاليتين تمثّل تغيّرًا طرديًا؟ أوجد ثابت التغيّر في حالة التغيّر الطرديّ.

(أ) ٥س + ٢ص = ٠ (ب) ٥س + ٢ص = ٩

الحل:

(أ) ٥س + ٢ص = ٠

٢ص = −٥س

ص = $-\frac{٥}{٢}$ س وهي على الصورة ص = ك س

هذه المعادلة تمثل تغيرًا طرديًا،

حيث ثابت التغيّر = $-\frac{٥}{٢}$

(ب) ٥س + ٢ص = ٩

٢ص = −٥س + ٩

ص = $-\frac{٥}{٢}$ س + $\frac{٩}{٢}$ وهذه ليست على الصورة ص = ك س

إذًا هذه المعادلة لا تمثّل تغيّرًا طرديًّا.

حاول أن تحل

٤ أي من المعادلات التالية تمثّل تغيّرًا طرديًّا؟ أوجد ثابت التغيّر في حالة التغير الطردي.

(أ) ٧ص = ٢س

(ب) ٣س + ٤ص = ٨

(جـ) ص − ٥,٧س = ٠

مثال (٥) **تطبيقات حياتية**

الطقس: الزمن الذي تستغرقه لسماع الرعد يتغيّر طرديًّا مع المسافة بينك وبين موقع البرق. فإذا كنت على مسافة ٣ كم من موقع البرق فإنك سوف تسمع الرعد بعد ١٠ ثوانٍ من رؤية البرق.

(أ) اكتب المعادلة التي تربط العلاقة بين المسافة والزمن.

(ب) أوجد المسافة بينك وبين موقع البرق إذا سمعت الرعد بعد ١٨ ثانية من رؤية البرق.

الحل:

(أ) لتكن س المسافة بالكيلومترات بينك وبين موقع البرق،

وليكن ص الزمن بالثواني الذي يمر بين رؤية البرق وسماع الرعد.

بما أن الزمن يتغيّر طرديًّا مع المسافة

∴ معادلة التغيّر الطرديّ:

ص = ك س

وحيث إن س = ٣، ص = ١٠

٣ × ك = ١٠

ك = $\frac{١٠}{٣}$

= ثاتب التغيّر

∴ المعادلة هي:

ص = $\frac{١٠}{٣}$ س هي العلاقة المطلوبة

حيث س تقاس بالكيلومترات، ص بالثواني.

(ب) ص = $\frac{١٠}{٣}$ س

١٨ = $\frac{١٠}{٣}$ س

س = $\frac{١٨ \times ٣}{١٠}$ = ٥,٤

المسافة بيني وبين موقع البرق = ٥,٤ كيلومتر.

مثال (٦)

البيولوجيا: تتغير كمية الدم في جسم الإنسان طرديًّا مع وزنه. تبلغ كمية الدم في جسم رجل يزن ٧٥ كجم نحو ٥ ليترات.

(أ) أوجد ثابت التغيّر.

ثابت التغيّر = $\frac{\text{كمية الدم}}{\text{الوزن}} = \frac{٥}{٧٥} = \frac{١}{١٥}$

(ب) اكتب معادلة تربط العلاقة بين كمية الدم والوزن.

معادلة التغيّر الطردي

كمية الدم = ثابت التغير × الوزن

كمية الدم = $\frac{١}{١٥}$ الوزن.

حاول أن تحل

٥ السؤال المفتوح: قدّر كمية الدم في جسمك.

مثال (٧)

بيّن ما إذا كانت ص تتغيّر طرديًّا مع س في كل من بيانات الجدولين أ، ب. اكتب معادلة التغيّر في حالة التغيّر الطرديّ.

(أ)

س	٢	٤	٦
ص	−١	١	٣

(ب)

س	−٣	١	٤
ص	٢,٢٥	−٠,٧٥	−٣

الحل:

أ

س	٢	٤	٦
ص	−١	١	٣
$\frac{ص}{س}$	−٠,٥	٠,٢٥	٠,٥

ب

س	−٣	١	٤
ص	٢,٢٥	−٠,٧٥	−٣
$\frac{ص}{س}$	−٠,٧٥	−٠,٧٥	−٠,٧٥

- الجدول (أ) لا يمثّل تغيّرًا طرديًّا لأن $\frac{ص}{س}$ ليست ثابتة لكل البيانات.
- الجدول (ب) يمثّل تغيّرًا طرديًّا حيث ثابت التغيّر يساوي −٠,٧٥. معادلة التغيّر هي ص = −٠,٧٥ س.

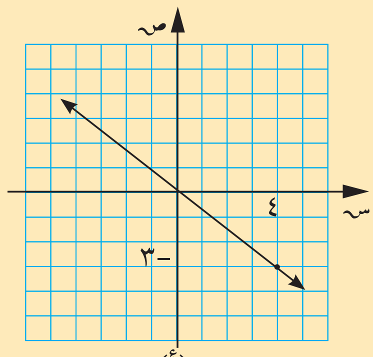
تفكير ناقد: هل كل معادلة خط مستقيم تعبّر عن تغيّر طرديٍّ؟ فسر إجابتك.

الحل:

لا: ليست كل معادلة خط مستقيم تعبّر عن تغيّر طرديّ.

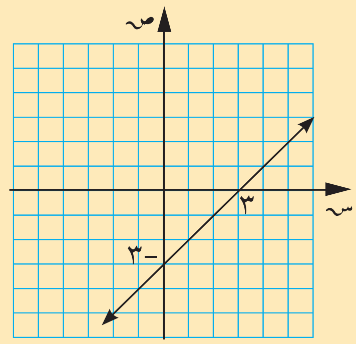
معادلة التغيّر الطرديّ تكون بالصورة ص = ك س، أي تمر بنقطة الأصل.

مثلًا: البيانات في الشكل (أ) تمثّل بالمعادلة ص = −٧٥, ٠ س، وهي معادلة تغيّر طرديّ، لأنها بالصورة ص = ك س بينما البيانات في الشكل (ب) تمثّل بالمعادلة ص = س − ٣ وهي ليست بالصورة ص = ك س.



(أ)

معادلة خط مسقيم تمثّل تغيّرًا طرديًّا



(ب)

معادلة خط مستقيم لا تمثّل تغيّرًا طرديًّا

حاول أن تحل

٦ هل تتغيّر ص طرديًّا مع س في الجدول:

س	١	−١	٢	−٣
ص	٣	−١	٥	−٥

التعبير عن التغير الطردي

في التغيّر الطرديّ تكون النسبة $\frac{ص}{س}$ **ثابتة** لكل زوج مرتّب حيث س ≠ ٠ في جميع الحالات. وبالتالي يمكن التعبير عن التغيّر الطرديّ باستخدام التناسب.

فيكون: $\frac{ص_١}{س_١} = \frac{ص_٢}{س_٢}$ ... لجميع الأزواج المرتبة $(س_١، ص_١)$، $(س_٢، ص_٢)$.

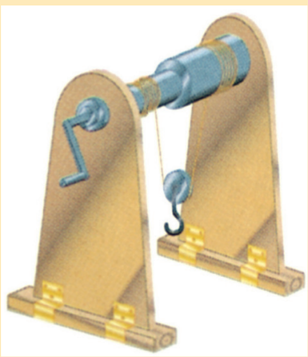
حيث $س_١ \neq ٠$، $س_٢ \neq ٠$

وكل من هذه النسب تساوي ثابت التغيّر ك.(معدل التغير).

مثال (٨) تطبيقات حياتية

الفيزياء: القوة التي تستخدمها لرفع جسم تتغيّر طرديًّا مع وزن الجسم. فأنت تحتاج إلى استخدام قوة قدرها ٠,٢٧٥ كجم/ واط لتتمكن إحدى المعدات من رفع جسم وزنه ١٢ كجم. أوجد مقدار القوة اللازم استخدامه في هذه الآلة لرفع جسم وزنه ٤٥ كجم/ واط.

الحل:



لنرمز إلى القوة بالرمز ق، وإلى وزن الجسم بالرمز و.

$\because$ ق α و

$\therefore \frac{ق_١}{و_١} = \frac{ق_٢}{و_٢}$

$\frac{ق_٢}{٤٥} = \frac{٠,٢٧٥}{١٢}$

ق$_٢$ × ١٢ = ٤٥ × ٠,٢٧٥

ق$_٢$ = $\frac{٤٥ \times ٠,٢٧٥}{١٢}$ = ١,٠٣١٢٥ كجم/ واط

أي أنك تحتاج إلى كيلوجرام تقريبًا لرفع ٤٥ كجم/ واط.

حاول أن تحل

٧ أ اكتب معادلة التغيّر الطردي للمثال السابق، واستخدمها لإيجاد الوزن الذي يمكن أن ترفعه باستخدام قوّة قدرها ٤,٣ كجم/ واط في الرافعة نفسها.

٤-٣

التّغير العكسي
Inverse Variation

سوف تتعلم

- التغير العكسي
- ثابت التغير العكسي
- دالة التغير العكسي
- مقارنة بين التغيّر الطردي والتغيّر العكسي

عمل تعاوني

- يرغب فريق من الشباب في استصلاح قطعة أرض لجعلها صالحة للزراعة، ويتطلب هذا العمل ١٦٠ يوم عمل. ويمكن لفريق مكون من ٢٠ شابًا أن يكملوا هذا العمل في ٨ أيام؛ فإذا استمر العمل بالمعدل نفسه:

١ كم يومًا يتطلب العمل إذا كان عدد أعضاء الفريق مكونًا من ٤٠ شخصًا؟

٢ أكمل الجدول التالي:

عدد أعضاء الفريق (س)	عدد أيام العمل (ص)	س ص
٢	٨٠	١٦٠
٥	٣٢	١٦٠
٨	....	....
....	١٦	....
٢٠	٨	١٦٠
٤٠	....	....

٣ يمثل الجدول العلاقة بين س ،ص في هذا النوع من التغيّر.

٤ صف ما يحدث لعدد أيام العمل (ص) عندما يزداد عدد أعضاء الفريق(س).

٥ ماذا تلاحظ على حاصل الضرب س ص في هذا النوع من التغيّر؟

هل تعلم؟

روبرت بويل (١٦٢٧-١٦٩١) عالم إيرلندي. درس العلاقة بين حجم الغاز وضغطه. اشتهر بقانونه: حجم الغاز × ضغط الغاز = مقدار ثابت.

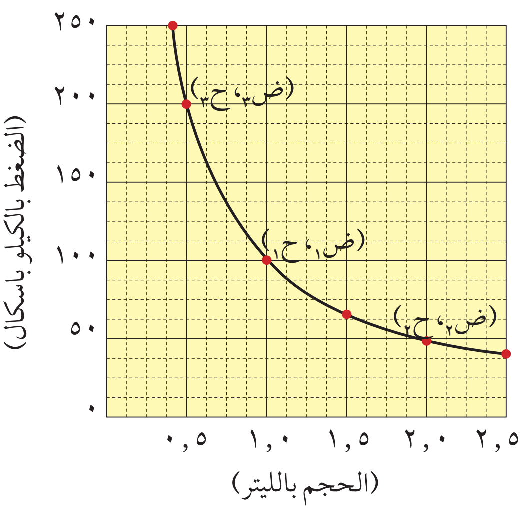
يسمى القانون أيضًا قانون بويل ماريوت.

قانون بويل

إن حاصل ضرب حجم الغاز وضغطه في وعاء يساوي مقدارًا ثابتًا.

$\boxed{\text{ح} \times \text{ض} = \text{مقدار ثابت}}$

في كل نقطة في الشكل المقابل حاصل الضرب ثابت.



١ - التغير العكسي

إذا تغيرت كمية س مع تغيّر كمية أخرى ص بحيث كان **حاصل ضرب الكميتين** ثابتًا، فإن هذا التغير يسمى **تغيّرًا عكسيًّا**. ويسمى حاصل الضرب س ص ثابت التغيّر، ويرمز إلى ذلك:

س ص = ك أو ص = $\frac{ك}{س}$ ، ك $\neq$ ٠

ويمكن التعبير عن التغيّر العكسي بالصورة ص α $\frac{١}{س}$

ففي العمل التعاوني السابق نجد أن:

س ص = ١٦٠

أي ص = $\frac{١٦٠}{س}$ **حيث ثابت التغيّر هنا هو ١٦٠.**

مثال (١)

أ أكمل الجدول التالي الذي يعبّر عن التغير العكسي س ص = ١٠٠

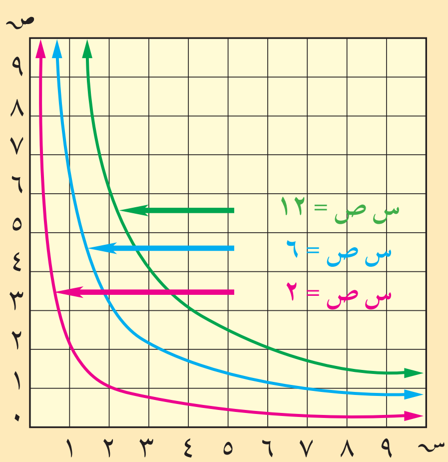
س	١	٢	٤	٥	١٠	٢٠	٥٠	١٠٠
ص	١٠٠	...	...	...	...	...	...	...

الحل:

س	١	٢	٤	٥	١٠	٢٠	٥٠	١٠٠
ص	١٠٠	٥٠	٢٥	٢٠	١٠	٥	٢	١

ب كيف تتغيّر قيم ص مع زيادة قيم س في هذا الجدول؟

الحل: نلاحظ أن كلما تزايدت قيمة س، تتناقص قيمة ص.



تدريب ١

أ اذكر ثابت التغيّر ك في التغيرات العكسية الممثلة بالأشكال البيانيّة.

الحل: ثابت التغير ١٢، ٦، ٢.

ب اذكر ثلاث نقاط تقع على كل من الأشكال البيانية المبينة.

الحل:

أ(١، ١٢)، ب (٢، ٦)، جـ(٣، ٤)

د (١، ٦)، هـ (٢، ٣)، و (٣، ٢)

حـ (١، ٢)، ط (٢، ١)، ي (٥ , ٠، ٤)

مثال (٢)

منطقة مستطيل مساحتها ٢٤ سم^{٢}، وطولها س سم، وعرضها ص سم. إذا كان كل من س، ص أعدادًا كلية، فأوجد القيم الممكنة لـ س، ص ثم حدد نوع التغير الذي يمثل هذه العلاقة.

الحل:

س	٢٤	١٢	٨	٦
ص	١	٢	٣	٤

مساحة المستطيل = س ص = ٢٤

أي س ص = ثابت ونعبر عن ذلك رياضيًّا:

س × ص = ك   ك ثابت

أي أن ص = $\frac{ك}{س}$ ،   ص α $\frac{١}{س}$

∴ التغير عكسي.

حاول أن تحل

١

س	٢	٣	٤	٥	٦	١٠
ص	٣٠	٢٠	١٥	١٢	١٠	٦

بالنظر إلى الجدول أعلاه، هل س × ص يعبّر عن تغيير عكسي؟ اشرح إجابتك.

٢ كوّن جدولًا من س، ص على أن يكون س ص يعبّر عن تغيير عكسي.

ملاحظة: استخدام التناسب في التعبير عن التغيّر العكسي.

إذا كان (س$_{١}$، ص$_{١}$)، (س$_{٢}$، ص$_{٢}$) زوجين مرتبين في تغيّر عكسي.

ص α $\frac{١}{س}$ ، $\left(ص = \frac{ك}{س}\right)$ فإنّ

س$_{١}$ ص$_{١}$ = س$_{٢}$ ص$_{٢}$ = ك

ومن ذلك نستنتج أن $\frac{ص_{١}}{ص_{٢}} = \frac{س_{٢}}{س_{١}}$

في مثال العمل التعاوني السابق نجد أن:

٣٢ × ٥ = ٨٠ × ٢

ومن ذلك نرى أن: $\frac{٥}{٢} = \frac{٨٠}{٣٢}$ ، $\frac{٨٠}{٥} = \frac{٣٢}{٢}$ ، $\frac{٢}{٥} = \frac{٣٢}{٨٠}$ ، ...

مثال (٣) **تطبيقات حياتية**

الفيزياء: الوزن الذي تحتاج إليه لإحداث توازن في أرجوحة على شكل رافعة يتغيّر عكسيًّا مع المسافة بين الوزن ونقطة الارتكاز. جاسم وزنه ٥١ كجم ويجلس على بعد ٢,٥ م من نقطة الارتكاز. أين يجلس وائل الذي وزنه ٧٥ كجم/ واط ليحدث التوازن؟

معلومة فيزيائية: قانون الرافعة

ناتج ضرب القوة في المسافة العمودية بين نقطة تأثير القوة ونقطة الارتكاز (ذراع القوة) يساوي حاصل ضرب المقاومة في ذراع المقاومة.

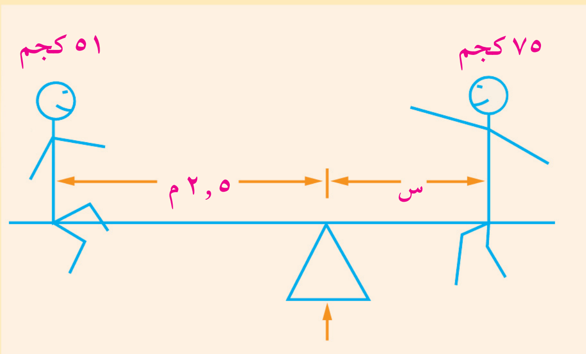
الحل:

من توازن الرافعة: الوزن$_{١}$ × المسافة$_{١}$ = الوزن$_{٢}$ × المسافة$_{٢}$

٥١ × ٢,٥ = ٧٥ × س

س = $\frac{\text{٥١} \times \text{٢,٥}}{\text{٧٥}}$ = ١,٧

أي أن وائل يجلس على مسافة ١,٧ م بعيدًا عن نقطة الارتكاز.



حاول أن تحل

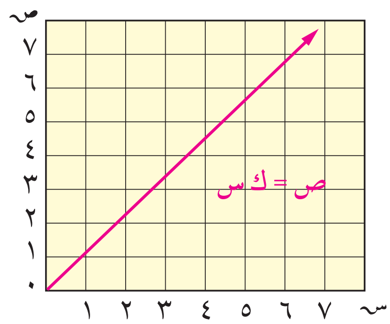
٣ (أ) في تغيّر عكسي ص α $\frac{\text{١}}{\text{س}}$ إذا كانت ص = ٢,٠ عندما س = ٧٥. أوجد س عندما ص = ٣.

(ب) ما وزن جسم يوضع على مسافة ٣ م من نقطة ارتكاز رافعة، ليحدث توازنًا مع جسم وزنه ٤٠ كجم على بعد ٦ م من نقطة الارتكاز؟

(جـ) رحلة تستغرق ٣ ساعات عندما تسير السيارة بسرعة ٧٥ كم/ ساعة. كم تستغرق الرحلة إذا سارت السيارة بسرعة ٩٠ كم/ ساعة.

٢ – مقارنة بين التغير الطردي والعكسي

يوضح الشكلان البيانيان التاليان الفرق بين التغيّر الطردي والتغيّر العكسي.

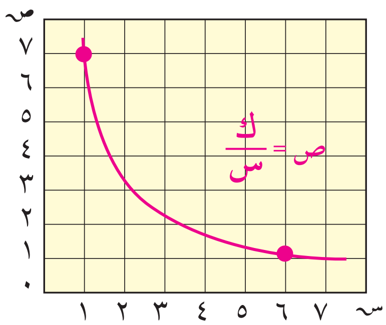


ص α س

ص = ك س

ك = $\frac{ص}{س}$

= ثابت التغيّر



ص α $\frac{١}{س}$

ص = $\frac{ك}{س}$

ك = س ص

= ثابت التغيّر

مثال (٤)

أي من بيانات الجدولين (أ)، (ب) يمثل تغيّرًا طرديًا؟ وأيهما يمثل تغيّرًا عكسيًا؟ اكتب المعادلة التي تمثّل التغيّر في الحالتين:

أ

س	٥	١٠	٢٥
ص	٢٠	١٠	٤

ب

س	٢	٤	١٠
ص	٥	١٠	٢٥

الحل:

أ نلاحظ أن $\frac{ص}{س}$ ليست ثابتة.

نبحث س ص نجد أن   س ص = ٥ × ٢٠ = ١٠ × ١٠

= ٢٥ × ٤ = ١٠٠ = ثابت

إذًا التغيّر هنا تغيّر عكسي معادلته س ص = ١٠٠

ب نبحث عن النسب $\frac{ص}{س}$ في جميع الحالات نجد أن:

$\frac{ص}{س} = \frac{٥}{٢} = \frac{١٠}{٤} = \frac{٢٥}{١٠}$

وهي نسبة ثابتة = ٢,٥   إذًا التغيّر هنا طرديّ معادلته ص = ٢,٥ س

حاول أن تحل

٤ بيّن نوع التغيّر المناسب للموقف في كل من الحالات التالية، ثم اكتب رقم المعادلة التي تمثله:

١ المبلغ الذي يأخذه كل شخص عند توزيع مبلغ ١٠٠ دينار على عدة أشخاص بالتساوي.

٢ تكلفة شراء عدد من الأقلام علمًا أن ثمن القلم ٢٠ فلسًا.

٣ أنت تمشي ٥ كم كل يوم. سرعتك في المشي والزمن يتغيّران من يوم إلى يوم.

٤ عدد من الأشخاص يشترون هدايا تذكارية سعر الواحدة ٥ دنانير.

أ ص = ٥س

ب س ص = ٥

ج ص = $\frac{١٠٠}{س}$

د ص = ٢٠ س

مثال (٥) تطبيقات حياتية

موسيقى: لإحداث طبقات مختلفة في السلم الموسيقي تستخدم القيثارة العلاقة:

«تردد اهتزازات الوتر (ف) يتغيّر عكسيًّا مع طول الوتر (ل)».

أوجد أطوال الوتر للسلم الموسيقي المبين بالجدول. (لأقرب مليمتر)

الطبقة	جـ	د	و	هـ	حـ	٨	ب	جـ
التردد (الدورة/ ث)	٥٢٣	٥٦٧	٦٥٩	٦٩٨	٧٨٤	٨٨٠	٩٨٨	١٠٤٦
طول الوتر (بالمليمتر)	٤٢٠							

الحل:

الطبقة	جـ	د	و	هـ	حـ	٨	ب	جـ
التردد (الدورة/ ث)	٥٢٣	٥٦٧	٦٥٩	٦٩٨	٧٨٤	٨٨٠	٩٨٨	١٠٤٦
طول الوتر (بالمليمتر)	٤٢٠	٣٨٧	٣٣٣	٣١٥	٢٨٠	٢٥٠	٢٢٢	٢١٠

حاول أن تحل

٥ هندسة: خصصت قطعتا أرض لبناء مجمعين سكنيين لهما المساحة نفسها، كل منهما على شكل مستطيل: أبعاد القطعة الأولى ٤٢ م × ٣٥ م، فإذا كان طول القطعة الثانية ٥٢,٥ م فاحسب عرضها.

المرشد لحل المسائل

يباع الحجر المصنوع من الإسمنت المعد سلفًا ويوزع في شاحنات تتسع كل منها لـ ٨,٥ م^{٣}.

أبعاد حجر الأسمنت المعتمدة هي ١٥ سم، ١٨ سم، ٢٠ سم.

يريد جاسم تغطية رقعة مساحتها ٢٨٠ مترًا مربعًا ويريد معرفة عدد الشاحنات اللازم للعملية.

كيف فكر جاسم

أ كلما زاد عمق الرقعة المغطاة بالأسمنت قلت مساحتها. استنتج أن تغيّر عمق الرقعة مع تغيّر المساحة هو عكسي.

ب قام بوضع جدول يبيّن الأمتار المكعبة من الأسمنت اللازمة وفق كل عمق.

إذا كان العمق ١٥ سم: ح = ٢٨٠ × ١٥,٠ = ٤٢ م^{٣}.

يتغيّر عدد الشاحنات طرديًّا مع حجم الأسمنت: ٤٢ ÷ ٨,٥ ≃ ن شاحنات.

العمق بالأمتار	الأمتار المكعبة	عدد الشاحنات
٠,١٥	٤٢	٥
٠,١٨	٥٠,٤	٦
٠,٢٠	٥٦	٧

استشار جاسم أحد مهندسي الإنشاءات فأفاده أن عمق ٢٠ سم غير ضروري، ولكن يجب أن لا يقل عن ١٥ سم.

قرّر جاسم اعتماد عمق ١٨ سم.

برأيك، هل اختيار جاسم موفق؟ وهل كمية حجر الاسمنت المتبقية كبيرة (تشكل هدرًا للمال؟) فسّر.

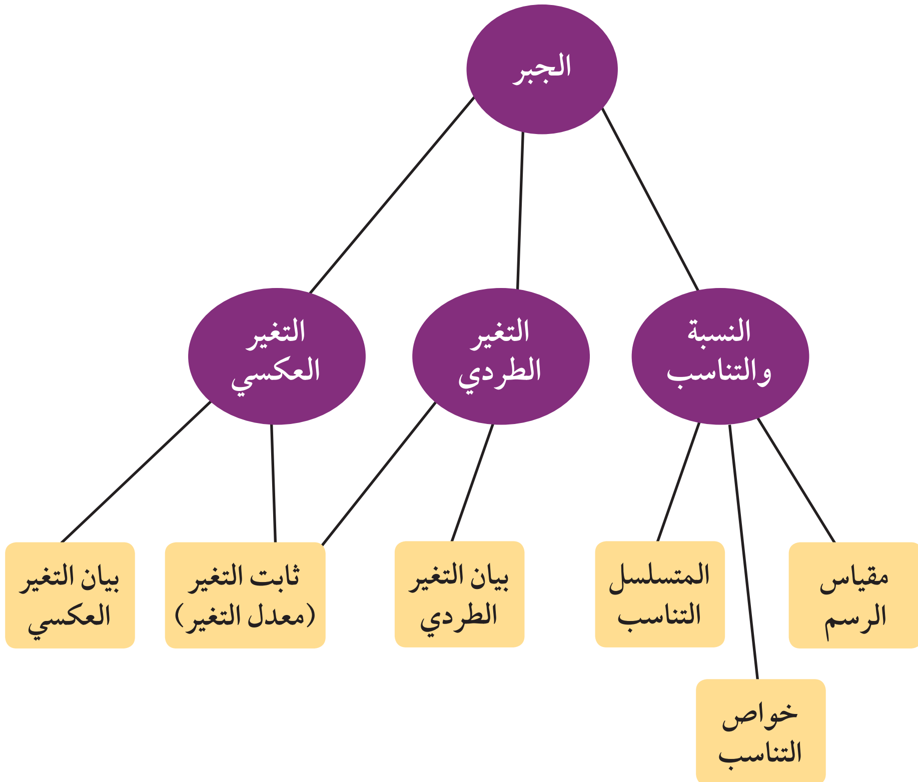
مسألة إضافية

في أحد المهرجانات الرياضيّة، تقذف آلة كهربائية كراتًا إلى البعيد. تتغير المسافة التي تقطعها الكرة عكسيًّا مع وزنها.

أ يريد عبدالله قذف الكرة مسافة تزيد على ١٥٠ مترًا بأقل وزن ممكن للكرة. وضع في الآلة كرة تزن ٢٠٠ جم فقذفتها الآلة مسافة ١٢٠ م.

ب ما الوزن المناسب لكي تقطع الكرة مسافة تزيد على ١٥٠ مترًا؟

مخطط تنظيمي للوحدة الرابعة



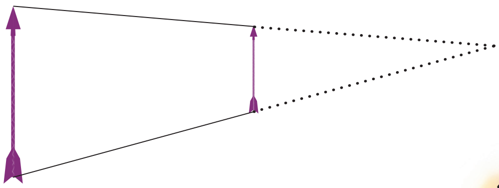
ملخص

- النسبة هي علاقة بين عددين حقيقيين.
- مقياس الرسم هو النسبة بين الطول على الخريطة والمسافة الحقيقية.
- التناسب هو تساوي نسبتين أو أكثر.
- إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$ فإنه يقال إن أ، ب، جـ في تناسب متسلسل.
- بيان التغير الطردي هو دالة خطية تكتب بالصورة: ص = ك س حيث ك $\neq$ ٠، ك: ثابت التغير.
- في التغير الطردي: النسبة $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ثابتة لكل زوج مرتب (س $\neq$ ٠).
- إذا تغيرت كمية ص مع تغير كمية أخرى س بحيث كان حاصل ضرب الكميتين ثابتًا، فإن هذا التغير يسمى تغيرًا عكسيًّا.
- في التغير العكسي: $\text{س}_{١} \times \text{ص}_{١} = \text{س}_{٢} \times \text{ص}_{٢}$ أو $\frac{\text{س}_{١}}{\text{س}_{٢}} = \frac{\text{ص}_{٢}}{\text{ص}_{١}}$.
- حاصل الضرب هو ثابت التغير أي س × ص = ك (ثابت).

الوحدة الخامسة

المتتاليّات

Sequences



مشروع الوحدة: استخدام المتتابعات في الرسوم الهندسيّة والتصاميم.

١ **مقدمة المشروع:** كل حد في متتالية فيبوناتشي يدعى عدد فيبوناتشي. في العديد من النباتات والزهور والثمار عدد البتلات هو من إعداد فيبوناتشي.

٢ **الهدف:** دراسة بعض أنواع النباتات والزهور والثمار وتبيان توافق عدد بتلاتها مع أعداد فيبوناتشي

٣ **اللوازمُ:** أوراق رسم بياني، آلة حاسبة، صور: زنابق، قزحية زهور على شكل نجمة، مخروط صنوبر، عباد الشمس.

٤ **أسئلة حول التطبيق:**

أ ابحثْ عن إحدى النباتات التي يتوافق نمو ساقها مع متتالية فيبوناتشي.
ضعْ مخططًا وجدولًا يبينان هذا التوافق.

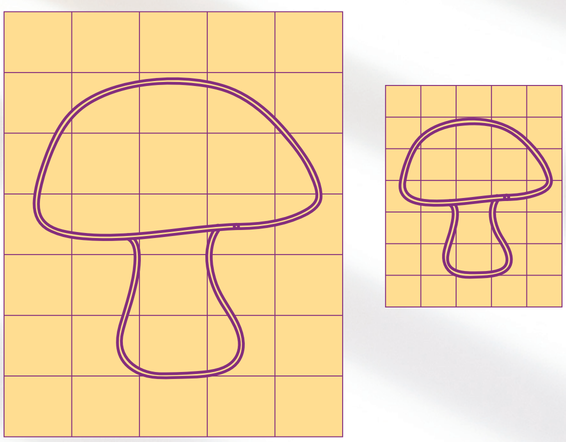
ب ابحث عن بعض الزنابق وعشب الحوزان والقزحية والأقحوانات. اعرض هذه الصور وبين كيف أن عدد بتلات كل منها هو عدد فيبوناتشي.

جـ ابحث عن صورة لزهرة الآرام (PASSI FLORA) واعرض صورتها منالجهتين الأمامية والخلفية
بيّن أنّ أعداد مجموعتي بتلاتها الخضراء هي أعداد فيبوناتشي. كذلك من الجهة الخلفية بيّن العلاقة بين الأوراق الخضراء والبتلات ومتتالية فيبوناتشي

د أعرض صورة لزهرة إشنسا فرفرية Echinacea Purpura صورة لقرص عباد الشمس Sun FLower. بيّن توافق المنحنيات الحلزونية مع أعداد فيبوناتشي.

هـ إجمع بعض مخاريط الصنوبر. عدّ الحلزونات في الاتجاهين في كل مخروط. ماذا تلاحظ؟ وماذا عن ثمرة الأناناس؟

٥ **التقريرُ:** ضعْ تقريرًا مفصلًا تبيّنُ فيهِ كيفَ استفدْتَ منَ المتتالياتِ للإجابةِ عنِ الأسئلةِ وأنت تنفذ المشروع.



دروس الوحدة

المتتاليّات	المتتاليّة الحسابيّة	المتتاليّة الهندسيّة
٥-١	٥-٢	٥-٣

الوحدة الخامسة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت إيجاد قيم دوال بمعلومية المتغير.
- استخدمت بيان القطع المكافئ لرسم بيان دوال تربيعية.
- تعلمت تبسيط الكسور المركبة.
- تعلمت تبسيط الجذور التربيعية.

ماذا سوف تتعلم؟

- الأنماط الرياضية.
- الحد النوني للمتتالية.
- المتتاليات الحسابية.

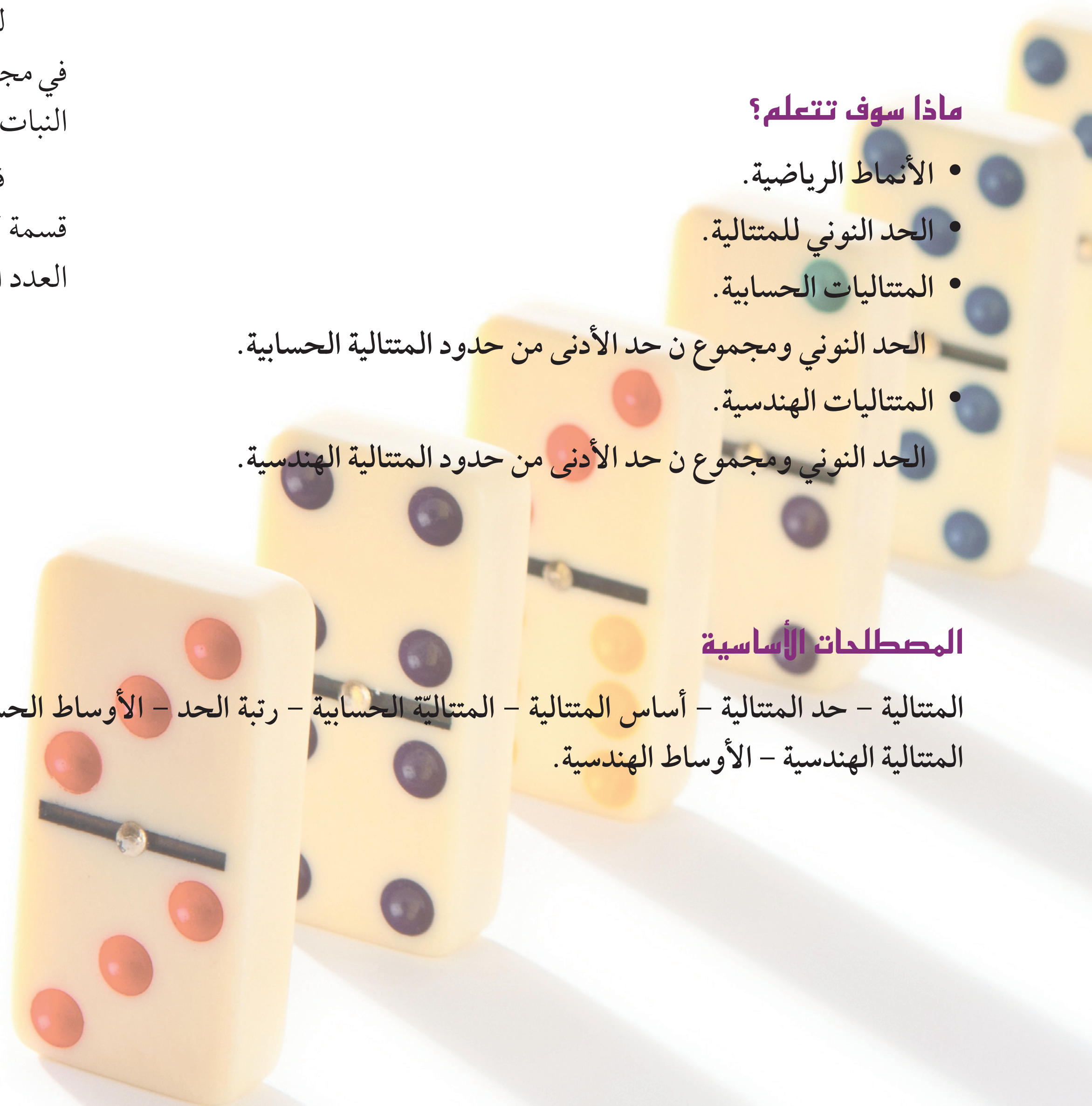
الحد النوني ومجموع ن حد الأدنى من حدود المتتالية الحسابية.

- المتتاليات الهندسية.

الحد النوني ومجموع ن حد الأدنى من حدود المتتالية الهندسية.

المصطلحات الأساسية

المتتالية – حد المتتالية – أساس المتتالية – المتتاليّة الحسابية – رتبة الحد – الأوساط الحسابية – المتتالية الهندسية – أساس المتتالية الهندسية – الأوساط الهندسية.



أضف إلى معلوماتك

في العام ١٢٠٢ أصدر فيبوناتشي كتابه "ليبري أباتشي" عرض فيه المتتالية: ٠، ١، ١، ٢، ٣، ٥، ٨، ١٣، ٢١،

(متتالية فيبوناتشي) حيث كل حد هو ناتج جمع الحدين السابقين:

$$ح_{ن} = ح_{ن-١} + ح_{ن+٢}$$

لهذه المتتالية تطبيقات مهمة وكثيرة في مجالات متعددة منها علم الأحياء وعلم النبات.

في متتالية فيبوناتشي يقترب ناتج قسمة كل حد على الحد الذي يسبقه من العدد الذهبي ١,٦١٨.

٥ – ١

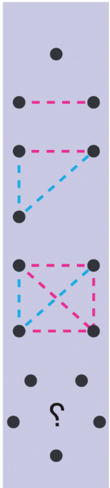
الأنماط الرياضية المتتاليّات (المتتابعات)

Sequences

سوف تتعلم

- النمط الرياضي
- المتتالية الحقيقيّة
- الحد النوني للمتتالية

عمل تعاوني



ما أقل عدد من المكالمات الهاتفيّة يمكنك الحصول عليها بحيث يتحدّث كل طالب من فصلك مع الآخر هاتفيًّا؟ (افترض أن كل طالبين من الفصل يجري بينهما مكالمة هاتفية.) ثم أجب عن الأسئلة التالية باستخدام الشكل المجاور:

١ كم مكالمة يمكن أن تكون بين طالبين؟

٢ كم مكالمة يمكن أن تكون بين ٣ طلّاب أو ٤ طلّاب؟

٣ استخدم الشكل المجاور لتحديد عدد المكالمات الممكنة بين ٥ طلّاب. ثم أكمل الجدول التالي:

عدد الطلّاب (ن)	١	٢	٣	٤	٥
عدد الاتّصالات (م)	٠	١	■	■	■

٤ **النمط الرياضي:** أي من الصيغ التالية تمثل النمط الموجود في الجدول السابق؟

أ م = ٢ن – ٣   ب م = ن (ن – ١) – ٥   ج م = $\frac{\text{ن (ن – ١)}}{\text{٢}}$

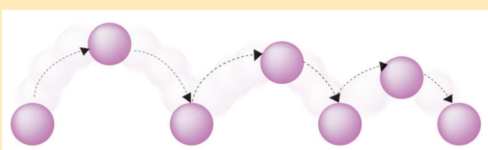
حيث ن عدد الطلّاب، م عدد المكالمات

٥ أوجد عدد المكالمات م اللازمة لمجموعة من ٧ طلّاب مستخدمًا الصيغة الصحيحة.

٦ ما عدد المكالمات اللازم ليتحدث كل طلّاب صفك مع بعضهم؟

مثال (١)

سقطت كرة من ارتفاع ١٢,٥ متر عن سطح الأرض وكانت ترتفع إلى ٨٠٪ من الارتفاع السابق في كل مرة نتيجة اصطدامها بالأرض. أُحسب ارتفاع الكرة بعد الاصطدام الرابع.



الحل:

لارتفاع الأصلي ١٢,٥ م.

- بعد الاصطدام الأوّل بالأرض يكون ارتفاع الكرة: ٠,٨ × ١٢,٥ = ١٠ أمتار.
- بعد الاصطدام الثّاني بالأرض يكون ارتفاع الكرة: ٠,٨ × ١٠ = ٨ أمتار.
- بعد الاصطدام الثالث بالأرض يكون ارتفاع الكرة: ٠,٨ × ٨ = ٦,٤ أمتار.
- بعد الاصطدام الرابع بالأرض يكون ارتفاع الكرة: ٠,٨ × ٦,٤ = ٥,١٢ متر.

فيكون الارتفاع ٥,١٢ م بعد الاصطدام الرابع للكرة بالأرض.

لاحظ تتابع الارتفاعات (١٢,٥ ، ١٠ ، ٨ ، ٦,٤ ، ٥,١٢ ، ...)

حاول أن تحل

١ سقطت كرة من ارتفاع ١٠ أمتار. وكانت ترتفع إلى ٦٠٪ من الارتفاع السابق في كل مرة نتيجة اصطدامها بالأرض. احسب ارتفاع الكرة بعد الاصطدام الثالث.

تدريب(١): صف النمط التالي ثم أكمل بكتابة الجداول الثلاثة التالية

أ ٢، ٤، ٦، ٨، ــ، ــ، ــ

ب ٢٤٣، ٨١، ٢٧، ٩، ــ، ــ، ــ

مثل الأنماط الرياضية السابقة تسمّى متتابعات ويمكننا إيجاد الجداول التالية باتباع قاعدة النمط.

اعتبر متتاليّة الأعداد من (أ):

الحد الأول	الحد الثاني	الحد الثالث	الحد الرابع	...	الحد النوني
↓	↓	↓	↓	↓	↓
$ح_١$	$ح_٢$	$ح_٣$	$ح_٤$		$ح_ن$
$ح_١ = ٢$،	$ح_٢ = ٤$،	$ح_٣ = ٦$،	$ح_٤ = ٨$،	....،	...

ويرمز إلى الحد النوني في المتتابعة بالرمز $ح_ن$ حيث ن ∈ $ص_+$ وهي تعبر عن رتبة الحد.

تعريف:

المتتالية الحقيقية هي دالة حقيقية مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة جزئية مرتبة منها على الصورة {١، ٢، ٣، ٤، ...، م} حيث م ∈ ص ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية ح.

الملاحظة: يمكن التعبير عن المتتالية بكتابة حدودها ($ح_١$، $ح_٢$، $ح_٣$، ...)

ويمكن الحصول على حدود المتتالية من صور عناصر مجال المتتالية.

المتتالية المنتهية وغير المنتهية

مثال (٢)

لتكن الدالة ت: {١، ٢، ٣، ٤، ٥} ← ح حيث ت(ن) = $ن^٢$

بيّن فيما إذا كانت هذه الدالة متتالية ثم أوجد حدودها.

الحل:

ت دالة مجالها مجموعة جزئية مرتبة من $ص_+$ وتبدأ بالعدد ١.

∴ ت متتالية

حدود المتتالية هي: (١، ٤، ٩، ١٦، ٢٥)

ن	١	٢	٣	٤	٥
ت(ن)	١	٤	٩	١٦	٢٥

هل تعلم:

ليس من الضروري أن تكون جميع حدود المتتاليّة مختلفة. فمثلًا المتتابعة ٢، ٢، ٢، ٢... حيث $ح_ن = ٢$ جميع حدودها متساوية وهذه تسمى متتابعة ثابتة.

معلومة رياضية:

يستخدم الرمز ($ح_ن$) للتعبير عن المتتابعة. بينما يعبر $ح_ن$ عن الحد النوني لهذه المتتابعة.

ملاحظة:

في كل متتاليّة معرّفة بالصيغة الارتدادية يجب إعطاء الحد الابتدائي (أو الحدود الابتدائية).

المتتالية في مثال (٢) تسمّى متتالية منتهية لأنه يمكن حصر عدد حدودها.

مثال (٣)

لتكن ت: $ص_+ \leftarrow ح$ دالة معرّفة بالقاعدة ت (ن) = $\frac{١}{ن}$

بيّن فيما إذا كانت ت ممتالية ثم أوجد الحدود الثلاثة الأولى منها.

الحل:

ت دالة مجالها $ص_+$ ... ت متتابعة.

ت(١) = ١، ت(٢) = $\frac{١}{٢}$، ت(٣) = $\frac{١}{٣}$

أي أنه يمكن كتابة المتتالية على الصورة ١، $\left(\frac{١}{٢}، \frac{١}{٣}، ...\right)$

المتتالية في مثال (٣) تسمّى متتالية غير منتهية لأن مجالها $ص_+$

الصيغة الصريحة (الحد النوني للمتتالية) Explicit Formula

يمكنك أحيانًا معرفة قيمة الحد في متتالية دون معرفة الحد الحد الذي يسبقه. بدلًا منه يمكنك استخدام عدد الحدود لحساب قيمة الحد. الصيغة التي تعبر عن الحد النوني بدلالة ن تسمى **صيغة صريحة**.

الصيغة الارتدادية (الحد العام للمتتالية) Recursive Formula

تعرّف الصيغة الارتدادية حدود المتتالية بربط كل حد بالحد (أو بالحدود) الذي يسبقه مباشرة.

في مثال (١) كان النمط ارتداديًّا لأن ارتفاع الكرة بعد كل اصطدام بالأرض يساوي ٨٠٪ من الارتفاع الذي يسبقه مباشرة.

الصيغة الارتدادية التي تصف ارتفاع الكرة هي $ح_ن = ٠,٨ \times ح_{ن-١}$ مع $ح_١ = ١٢,٥$ حيث ن عدد طبيعي أكبر من ١.

مثال (٤)

أ صف النمط الذي يسمح بإيجاد الحد التالي من المتتالية (٦، ١، −٤، −٩، ...)

ب أوجد الحدين الخامس والسادس ($ح_٥$، $ح_٦$) من هذه المتتالية.

الحل:

أ نحصل على أي حد من المتتالية بطرح ٥ من الحد الذي يسبقه مباشرة.

١ = ٦ − ٥، −٤ = ١ − ٥، −٩ = −٤ − ٥

الصيغة الارتدادية هي: $ح_ن = ح_{ن-١} - ٥$ مع $ح_١ = ٢$

بما أن $ح_٤ = -٩$، $ح_٥ = ح_٤ - ٥ = -٩ - ٥ = -١٤$، $ح_٦ = ح_٥ - ٥ = -١٤ - ٥ = -١٩$

حاول أن تحل

٤ اكتب الصيغة الارتدادية (الحد العام) مما يلي ثم أوجد الحد التالي:

أ (−٢، −١، ٠، ١، ٢، ...)

ب (٤٣، ٤١، ٣٩، ٣٧، ٣٥، ...)

جـ (٤٠، ٢٠، ١٠، ٥، $\frac{٥}{٢}$، ...)

د $\left(\frac{١}{٢}، -\frac{١}{٤}، \frac{١}{١٦}، \frac{١}{٣٢} ...\right)$

مثال (٥) الهندسة

يمثل الجدول التالي أطوال أضلاع المربعات ومحيطاتها.

الحد	$ح_١$	$ح_٢$	$ح_٣$	$ح_٤$	$ح_٥$	$ح_٦$	$ح_٧$
طول ضلع المربع	١	٢	٣	٤	٥	٦	...
المحيط	٤	٨	١٢	١٦	٢٠	٢٤	...

أ في كل متتالية، أوجد الحد التالي ($ح_٧$) والحد الرابع والعشرون ($ح_{٢٤}$).

ب اكتب صيغة صريحة لكل متتالية.

الحل:

أ في المتتابعة الخاصة بأطوال أضلاع المربع، كل حد يساوي قيمة رتبته. وبالتالي $ح_٧$ = ٧، $ح_{٢٤}$ = ٢٤.

في المتتابعة الخاصة بالمحيط، كل حد يساوي أربعة أمثال قيمة رتبته. وبالتالي $ح_٧$ = ٤ × ٧ = ٢٨.

$ح_{٢٤}$ = ٤ × ٢٤ = ٩٦.

ب الصيغة الصريحة للمتتابعة الخاصة بأطوال أضلاع المربع هي $ح_ن$ = ن،

والصيغة الصريحة الخاصة بالمحيط هي: $ح_ن$ = ٤ن.

حاول أن تحل

٣ أ في مثال ٣ اكتب الحدود الستة الأولى للمتتالية التي تبين مساحة المربع.

ب اكتب الصيغة الصريحة لهذه المتتالية.

٤ اكتب الصيغة الصريحة (الحد النوني) لكل متتالية ثم أوجد $ح_{١٢}$.

أ (٤، ٧، ١٠، ١٣، ١٦، ...)

ب (٣، ٧، ١١، ١٥، ١٩)

جـ $\left(-٢\frac{١}{٢}، -١\frac{١}{٢}، -٢\frac{١}{٢} ...\right)$

مثال (٦)

اكتب الصيغة الصريحة (الحد النوني) للمتتالية (٢، ٥، ١٠، ١٧، ٢٦، ...)

الحل:

$ح_١ = ٢ = ١^٢ + ١$ $ح_٢ = ٥ = ٢^٢ + ١$

$ح_٣ = ١٠ = ٣^٢ + ١$ $ح_٤ = ١٧ = ٤^٢ + ١$

$ح_٥ = ٢٦ = ٥^٢ + ١$

حاول أن تحل

٦ اكتب الصيغة الصريحة (الحد النوني) للمتتالية (٠، ٣، ٨، ١٥، ٢٤، ...)

مثال (٧)

صنع متتالية

أ لإيجاد ضلع من «رقعة كوش» Kock snowflake، استبدل كل ـــ بـ . ارسم الأشكال الأربعة الأولى من النمط.

ب اكتب عدد القطع في كل شكل من أ أعلاه على صورة متتالية.

جـ توقع الحد التالي من المتتالية. فسِّرْ اختيارك.

الحل:

أ

ب في الشكل الأول قطعة واحدة (١)

في الشكل الثاني ٤ قطع (٤)

في الشكل الثالث ١٦ قطعة (١٦)

في الشكل الرابع ٦٤ قطعة (٦٤)

∴ المتتالية (١، ٤، ١٦، ٦٤، ...)

جـ كل حد يساوي ٤ أمثال الحد السابق. الحد التالي = ٤ × ٦٤ = ٢٥٦. يوجد ٢٥٦ قطعة في الشكل التالي أي الحد الخامس من المتتالية = ٢٥٦.

حاول أن تحل

٧ صف كل نمط وأوجد الحدود الثلاثة التالية.

أ ٢٧، ٣٤، ٤١، ٤٨، ...

ب ٢٤٣، ٨١، ٢٧، ٩، ...

مثال (٨)

متتالية فيبوناتشي Fibonacci Sequence

الصيغة الارتدادية لمتتالية فيبوناتشي هي: $\text{ف}_{\text{ن}} = \text{ف}_{\text{ن}-٢} + \text{ف}_{\text{ن}-١}$ مع $\text{ف}_{١} = ١$، $\text{ف}_{٢} = ١$.
استخدم الصيغة لإيجاد الحدود الخمسة الأولى من المتتالية. واكتب المتتالية.

الحل:

$\text{ف}_{١} = ١$

$\text{ف}_{٢} = ١$

$\text{ف}_{٣} = \text{ف}_{١} + \text{ف}_{٢} = ١ + ١ = ٢$

$\text{ف}_{٤} = \text{ف}_{٢} + \text{ف}_{٣} = ١ + ٢ = ٣$

$\text{ف}_{٥} = \text{ف}_{٣} + \text{ف}_{٤} = ٢ + ٣ = ٥$ (١، ١، ٢، ٣، ٥)

حاول أن تحل

٨ اختر عددين غير ١، ١ واكتب الحدود الخمسة الأولى لمتتالية مشابهة لمتتالية فيبوناتشي.

غالبًا ما نجد أعداد متتاليّة فيبوناتشي في الطبيعة.

الحد الرابع

الحد الخامس

الحد السادس

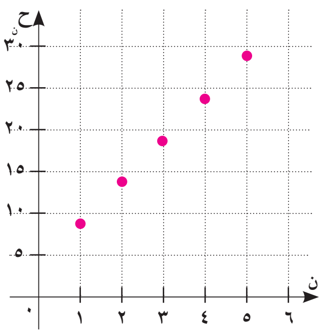
المتتاليّة الحسابيّة
Arithmetic Sequence

سوف تتعلم

- المتتالية الحسابيّة وأساسها
- الحد النوني للمتتالية الحسابيّة
- الأوساط الحسابيّة
- مجموع (ن) من حدود المتتالية الحسابيّة

عمل تعاوني

$ح_{١}$ ⟵ ٩
$ح_{٢}$ ⟵ ١٤
$ح_{٣}$ ⟵ ١٩
$ح_{٤}$ ⟵ ٢٤
$ح_{٥}$ ⟵ ٢٩



١ أ أوجد الحد السادس من المتتالية المبيّنة جهة اليسار.
ب أُكتب صيغة للحد السادس مستخدمًا الحد الخامس.
جـ أُكتب صيغة ارتدادية للمتتالية.

٢ في المتتالية (٩، ١٤، ١٩، ٢٤، ٢٩، ...). الفرق بين كل حد والحد السابق له هو مقدار ثابت.

٣ كوّن متتاليتين إحداهما بإضافة عدد ثابت والأخرى بطرح نفس عدد ثابت من كل حد من حدود المتتالية الأصليّة.
أ أوجد ن ع طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة متتابعة حصلت عليها. ماذا تلاحظ.
ب ارسم في شكل بياني واحد العلاقة بين ن، $ح_{ن}$ للمتتاليّة الأصليّة والمتتاليات التي حصلْت عليها في التدريب السابق. قارن بين الرسوم الثلاثة. ماذا تلاحظ؟

تعريف:
المتتالية (المتتابعة) الحسابيّة هي متتاليّة ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة عددًا ثابتًا. هذا الناتج يُسمّى أساس المتتالية ويرمز إليه بالرمز ك. وعلى ذلك $ح_{ن+١} - ح_{ن} = ك$ أو $ح_{ن+١} = ح_{ن} + ك$.

أي إنه يمكن الحصول على أي حد من حدود المتتالية الحسابيّة (بعد الحد الأوّل) وذلك بإضافة ك إلى الحدّ الذي يسبقه مباشرةً.

مثال (١)

بيّن أن المتتالية (٦، ١٢، ١٨، ٢٤، ...) هي متتالية حسابيّة.

الحل:

١٢ − ٦ = ١٨ − ١٢ = ٢٤ − ١٨ = ٦

أي أن الفرق بين كل حد وسابقه مباشرة يساوي ٦. لاحظ أن د = ٦

إذًا المتتاليّة حسابيّة.

حاول أن تحل

١ المتتاليّة (٢، ٥، ٧، ١٢، ...)
المتتاليّة (٤٨، ٤٥، ٤٢، ٣٩، ...)
هل هاتان المتتاليتان حسابيّتان؟ إذا كان كذلك أوجد أساس كل منهما.

مثال (٢)

إذا كان $ح_١ = ٥$، $د = ٧$ في متتاليّة حسابيّة.

اكتب الحدود الستّة الأولى من المتتاليّة.

الحل:

$ح_١ = ٥$

$ح_٢ = ح_١ + د = ٥ + ٧ = ١٢$

$ح_٣ = ح_٢ + د = ١٢ + ٧ = ١٩$

الحدود الستة الأولى هي: ٥، ١٢، ١٩، ٢٦، ٣٣، ٤٠

وتكون المتتاليّة: $(ح_ن) = (٥، ١٢، ١٩، ٢٦، ٣٣، ٤٠، ...)$

حاول أن تحل

٢ إذا كان $ح_١ = ٤$، $د = -٣$ في متتالية حسابيّة، اكتب الحدود الستة الأولى من المتتاليّة.

الحد النوني للمتتالية الحسابية General Term of an Arithmetic Sequence

إذا كان الحد الأوّل في المتتاليّة الحسابيّة $(ح_ن)$ هو $ح_١$ وأساس المتتاليّة يساوي د. واعتبرنا الحد النوني هو $ح_ن$.

فمن تعريف المتتاليّة الحسابيّة:

$ح_٢ = ح_١ + د$

$ح_٣ = ح_١ + ٢د$

$ح_٤ = ح_١ + ٣د$

وبصفةٍ عامّةٍ

$ح_ن = ح_١ + (ن - ١)د$ لكل $ن \in ص_+$.

إذا كان الحد المعروف $ح_ك$ فإن $ح_ك = ح_١ + (ك - ١)د$: $ل \in ص_+$

ومنه يكون $ح_ن - ح_ك = (ن - ك)د$

أي أن $ح_ن = ح_ك + (ن - ك)د$

وتكون الصورة العامة للمتتالية الحسابية هي $(ح_١، ح_١ + ك، ح_١ + ٢د، ...، ح_١ + (ن - ١)ك، ...)$

لاحظ أن $د = \frac{ح_ن - ح_ك}{ن - ك}$: $ن \neq ك$

ملاحظة:

ن تمثّل رتبة الحد $ح_ن$ أما $ح_ن$ فتمثّل قيمة الحدّ، فمثلاً: $ح_٧ = ٣٥$ تعني أن قيمة الحدّ السابع تساوي ٣٥.

مثال (٣)

أوجد الحد العاشر والحد المائة من المتتاليّة الحسابيّة (٨، ٦، ٤، ...).

الحل:

$ح_١ = ٨$ ، $د = ٦ - ٨ = -٢$

$ح_{١٠} = ح_١ + ٩د$

$ح_{١٠} = ٨ + ٩ \times (-٢) = -١٠$ أي أن $ح_{١٠} = -١٠$

$ح_{١٠٠} = ح_١ + ٩٩د$ أو $ح_{١٠٠} = ح_{١٠} + (١٠٠ - ١٠)د$

$= ٨ + ٩٩ \times (-٢)$ $= -١٠ + (١٠٠ - ١٠) \times (-٢)$

$= -١٩٠$ $= -١٩٠$

أي أن: $ح_{١٠٠} = -١٩٠$

حاول أن تحل

٣ في المتتاليّة الحسابيّة $ح_١ = ٤$، $د = ٣$

أوجد الحد $ح_{١٢}$.

مثال (٤)

أوجد رتبة الحد الذي قيمته ٩٩ من المتتاليّة الحسابيّة (٧، ٩، ١١، ...)

الحل:

$ح_١ = ٧$ ، $د = ٢$، $ح_ن = ٩٩$

$ح_ن = ح_١ + (ن - ١)د$

$٩٩ = ٧ + (ن - ١) \times ٢$

$٩٢ = (ن - ١) \times ٢$

$٤٦ = ن - ١$ $ن = ٤٧$

أي أن الحد من المتتاليّة الحسابيّة الذي قيمته ٩٩ هو $ح_{٤٧}$.

حاول أن تحل

٤ أ في المتتاليّة الحسابيّة (٢، ٥، ٨، ١١، ...)

ب أوجد عدد حدود المتتالية الحسابيّة (٧، ١١، ١٥، ... ، ٤٧)

أوجد رتبة الحد الذي قيمته ٧١.

مثال (٥)

في المتتاليّة $(ح_ن)$ حيث $ح_ن$ = ٧ن − ٣ لكل ن ∋ $ص_+$. أثبت أن المتتاليّة حسابيّة.

الحل:

$ح_ن$ = ٧ن − ٣

$ح_{ن+١}$ = ٧(ن + ١) − ٣ = ٧ن + ٤

$ح_{ن+١}$ − $ح_ن$ = (٧ن + ٤) − (٧ن − ٣) = ٧

= مقدار ثابت

إذًا المتتاليّة $(ح_ن)$ حيث $ح_ن$ = ٧ن − ٣ متتاليّة حسابيّة.

حاول أن تحل

٥ في المتتاليّة $(ح_ن)$ حيث $ح_ن$ = ٣ن + ٥ = ٣ن + ٥. حيث ∋ $ص_+$

أثبت أن المتتاليّة حسابيّة.

مثال (٦)

إذا كان الحد الخامس من متتاليّة حسابيّة يساوي ٩ والحد الثامن يساوي ١٥ أوجد أساس المتتاليّة.

الطريقة الأولى

$ح_ن$ = $ح_١$ + (ن − ١)د

$ح_٥$ = $ح_١$ + ٤د

∴ $ح_١$ + ٤د = ٩ (١)

$ح_٨$ = $ح_١$ + ٧د

∴ $ح_١$ + ٧د = ١٥ (٢)

بطرح (١) = (٢)

∴ ٣د = ٦

∴ د = ٢

الطريقة الثانية

$ح_ن$ = $ح_ك$ + (ن − ك)د

$ح_٥$ = ٩ ، ٨ = ١٥

$ح_٨$ − $ح_٥$ = (٨ − ٥) × د

١٥ − ٩ = ٣د

∴ ٦ = ٣د

∴ د = ٢

الحل:

$ح_٥$ = ٩ $ح_٨$ = ١٥ $ح_٨$ = $ح_٥$ + (٨ − ٥)د

١٥ = ٩ + ٣د بالتعويض

٦ = ٣د بالطرح

د = ٢ بالتبسيط

إذًا أساس المتتاليّة الحسابيّة هو ٢.

حاول أن تحل

٦ إذا كان الحد الثاني من متتالية حسابيّة يساوي ٩ والحد السادس يساوي −٣. أوجد أساس المتتالية ٢. أوجد المتتالية الحسابية مكتفيًا بالحدود الأربعة الأولى منها.

مثال (٧)

بفرض أنك تشارك في سباق دراجات لدعم مشروع خيري. قبل البدء بالسباق بلغت قيمة التبرعات ١١٠٠ دينار. على كل مشارك في السباق تأمين ما لا يقل عن ٣٥ دينار. أقل مبلغ من المال يتم تأمينه إذا شارك في السباق ٧٥ شخصًا؟

الحل:

أوجد الحد ٧٥ من المتتالية $ح_ن$ = ١١٠٠، $ح_١$ = ١١٣٥، $ح_٢$ = ١١٧٠ ....

$ح_ن = ح_١ + (ن - ١)د$ استخدام الصيغة الصريحة

$ح_{٧٥} = ١٣٥ + (٧٥ - ١) \times ٣٥$ التعويض

= ٣٧٢٥

باشتراك ٧٥ شخصًا يتأمن مبلغ لا يقل ن ٣٧٢٥ دينارًا.

حاول أن تحل

٧ أ في المثال كيف تجد المبلغ الذي تم تأمينه إذا كان $ح_١$ = ١١٠٠؟

ب استخدم الصيغة الصريحة لإيجاد الحد الخامس والعشرون ($ح_{٢٥}$) من المتتالية (٥، ١١، ١٧، ٢٣، ٢٩، ...).

الأوساط الحسابية Arithmetic Means

إذا كونت أ، ب، جـ متتاليّة حسابيّة حيث أ، ب، جـ هي عناصر من ح. (أعداد حقيقية)

فإن: ب − أ = جـ − ب

٢ب = جـ + أ

$ب = \frac{أ + جـ}{٢}$

أي أن ب هو **الوسط الحسابي** للعددين أ، جـ.

بصورةٍ عامّةٍ

إذا كانت (أ، ب، جـ، د، ... ف، ص) متتاليّة حسابيّة فإنّ (ب، جـ، د، ... ف) تسمّى أوساطًا حسابيّة للعددين أ، ص.

وتسمّى عمليّة إيجاد الأوساط الحسابيّة بإدخال أوساطٍ حسابيّة بين العددين أ، ص.

مثال (٨)

أدخل ٥ أوساط حسابيّة بين ٢٣، ٦٥.

(٢٣، ■، ■، ■، ■، ■، ٦٥).

الحل:

$ح_١$ = ٢٣، عدد الحدود: ٥ + ٢ = ٧، $ح_٧$ = ٦٥.

إذًا $ح_٧ = ح_١ + ٦د$

٦د + ٢٣ = ٦٥

٦د = ٤٢

د = ٧

الأوساط الحسابيّة هي ٣٠، ٣٧، ٤٤، ٥١، ٥٨.

حاول أن تحل

٨ أ أدخل ثلاثة أوساط حسابيّة بين −٩، ٣.

ب أدخل خمسة أوساط حسابيّة بين ١٣، ١.

مجموع ن حد الأدنى من حدود متتالية حسابية Sum of n Terms of an Arithmetic Sequence

مجموع ن من حدود متتاليّة حسابيّة ($ح_ن$) يُعطى بالقاعدة:

$$جـ_ن = \frac{ن}{٢}(ح_١ + ح_ن) \quad \text{أو} \quad جـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢ح_١ + (ن - ١)د]$$

حيث $ح_ن$ هو الحد الذي ترتيبه ن من المتتاليّة الحسابيّة وحدها الأوّل $ح_١$.

البرهان

ليكن د أساس المتتاليّة فإن:

$جـ_ن = ح_١ + (ح_١ + د) + (ح_١ + ٢د) + \ldots + (ح_ن - ٢د) + (ح_ن - د) + ح_ن$

$جـ_ن = ح_ن + (ح_ن - د) + (ح_ن - ٢د) + \ldots + (ح_١ + ٢د) + (ح_١ + د) + ح_١$

$٢جـ_ن = (ح_١ + ح_ن) + (ح_١ + ح_ن) + (ح_١ + ح_ن) + \ldots + (ح_١ + ح_ن)$ بالجمع

$٢جـ_ن = ن(ح_١ + ح_ن)$ ن حد

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}(ح_١ + ح_ن)$ (١) لكن $ح_ن = ح_١ + (ن - ١)د$

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}(ح_١ + ح_١ + (ن - ١)د)$ بالتعويض

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢ح_١ + (ن - ١)د]$ (٢)

القانون (١): يعطي مجموع المتتالية الحسابية بمعلومية الحد الأول والحد الأخير.

القانون (٢): يعطي مجموع المتتالية الحسابية بمعلومية الحد الأول والأساس د.

مثال (٩)

أوجد مجموع العشرين حدًّا الأولى من المتتاليّة الحسابيّة التي حدّها الأوّل ١٠ وحدها العشرون ٥٠٠.

الحل:

$ح_١ = ١٠ \quad ح_ن = ٥٠٠ \quad ن = ٢٠$

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}(ح_١ + ح_ن)$

$جـ_ن = \frac{٢٠}{٢}(١٠ + ٥٠٠) = ٥١٠٠$

حاول أن تحل

٩ أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتتاليّة الحسابيّة التي حدها الأول −١٢ وحدها العاشر ٢٤.

مثال (١٠)

أوجد مجموع الستة عشر حدًّا الأولى من المتتاليّة الحسابيّة التي حدّها الأوّل ١٥ وأساسها ٧.

الحل:

$ح_١ = ١٥ ، د = ٧ ، ن = ١٦$

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢ح_١ + (ن - ١)د]$

$جـ_ن = \frac{١٦}{٢}(٢ \times ١٥ + ١٥ \times ٧)$

$جـ_ن = ٨(٣٠ + ١٠٥)$

$جـ_ن = ١٠٨٠$

حاول أن تحل

١٠ أ متتاليّة حسابيّة حدها الأول −٧ وأساسها ٤.

ب أوجد مجموع أول خمسة وعشرين حد منها.

مثال (١١)

كم حدًّا يلزم أخذه من المتتاليّة الحسابيّة (١٠، ١٥، ٢٠، ...) ابتداءًا من الحد الأول ليكون المجموع ٤٥٠؟

الحل:

$ح_١ = ١٠$ ، $د = ٥$ ، $جـ_ن = ٤٥٠$

$جـ_ن = \frac{ن}{٢} [٢ح_١ + (ن - ١)د]$

$٤٥٠ = \frac{ن}{٢} [٢٠ + (ن - ١)٥]$

$٤٥٠ = \frac{ن}{٢} (١٥ + ٥ن)$

$٩٠٠ = ١٥ن + ٥ن^٢$

$ن^٢ + ٣ن - ١٨٠ = ٠$

$(ن + ١٥)(ن - ١٢) = ٠$

$ن = -١٥$، $ن = ١٢$

وحيث إن $ن = -١٥$ مرفوض لأن $-١٥ \notin ص_+$ $\therefore$ $ن = ١٢$ أي أن عدد حدود المتتاليّة هو ١٢.

حاول أن تحل

١١ أ كم حدًّا يلزم لهذه من المتتاليّة الحسابيّة التي حدها الأوّل ٥ وأساسها ٣ ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع ٩٤٨؟

ب كم حدًا يلزم لهذه من المتتالية الحسابية (٣٠، ٢٥، ٢٠، ...) ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع ١٠٠؟

مثال (١٢)

أراد فهد حفر بئر في مزرعته. تبلغ كلفة حفر المتر الأول ٧ دنانير وتزيد كلفة حفر كل متر دينارين عن كلفة حفر المتر السابق. دفع سعيد للمتعهد ٤٣٢ دينارًا. ما عمق البئر التي حفرت؟

الحل: بما أن الزيادة ثابتة: دينارين إذًا المتتاليّة حسابيّة. ليكن $جـ_ن$ المبلغ المدفوع لقاء حفر ن متر.

$جـ_ن = \frac{ن}{٢} [٢ح_١ + (ن - ١) \times ٢]$

$٤٣٢ = \frac{ن}{٢} (٢ \times ٧ + ٢ن - ٢)$

$٤٣٢ = ٦ن + ن^٢$

أي $ن^٢ + ٦ن - ٤٣٢ = ٠$

$(ن + ٢٤)(ن - ١٨) = ٠$

$ن = -٢٤$ (مرفوض)، $ن = ١٨$ يبلغ عمق البئر ١٨ مترًا.

حاول أن تحل

١٢ كم ستبلغ كلفة الحفر بالدينار إذا بلغ عمق البئر ٢٥ مترًا.

٥-٣

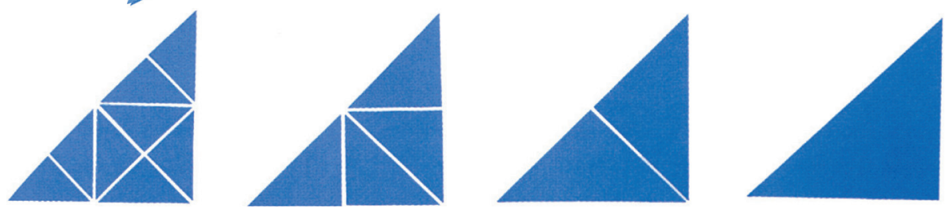
المتتاليّة الهندسيّة
Geometric Sequence

سوف تتعلم
- المتتالية الهندسيّة وأساسها
- الحد النوني للمتتالية الهندسيّة
- الأوساط الهندسية
- مجموع (ن) الحد الأول من حدود متتالية هندسيّة

عمل تعاوني

- ارسم مثلّثًا قائم الزاوية ومتطابق الضلعين.
- قُصّ المثلث إلى مثلّثين قائمي الزاوية، وكلٌّ منهما متطابق الضلعين.

كرِّر الشيء نفسه كما بالشكل واحسب عدد المثلّثات في كلّ مرة.



$ح_{١}$ = ■ $ح_{٢}$ = ■ $ح_{٣}$ = ■ $ح_{٤}$ = ■

هل الحدود الناتجة تكون متتاليّة حسابيّة؟ وإذا كانت بالنفي فلماذا؟
ماذا تلاحظ عن العلاقة بين الحدود الناتجة؟
هل يمكنك إيجاد الحد السادس $ح_{٦}$؟
هل يمكنك إيجاد الحد السادس $ح_{٦}$ بدلالة الحد الخامس $ح_{٥}$؟
هل يمكنك إيجاد الحد النوني $ح_{ن}$ بدلالة الحد $ح_{ن-١}$؟

جملة مفتوحة: في المتتاليّة السابقة اضرب كل من حدود المتتالية في عدد ثابت غير صفري واكتب المتتاليّة الجديدة الناتجة. ما العلاقة التي تجدها بين المتتاليتين؟

لنأخذ المتتاليّة (١، ٢، ٤، ٨، ١٦، ...). لاحظ النمط المتمثّل في كل حد وسابقه.

تعريف:
المتتاليّة الهندسيّة: هي متتاليّة ناتج قسمة أي حد فيها على الحد السابق له مباشرةً، يساوي عددًا حقيقيًّا ثابتًا غير صفري، هذا العدد يسمى أساس المتتاليّة الهندسيّة ويرمز إليه بالرمز ر.

فمثلًا المتتاليّة (٥، ١٠، ٢٠، ٤٠) متتاليّة هندسيّة.

أمّا (٥، ١٠، ١٥، ٢٠، ...) فليست متتاليّة هندسيّة.

تعريف:
المتتاليّة $(ح_{ن})$ تُسمى متتاليّة هندسيّة إذا كان $\frac{ح_{ن+١}}{ح_{ن}} = ر$ حيث $ح_{ن} \neq ٠$.
لكلّ ن من ح، ر عدد حقيقيّ ثابت يسمى أساس المتتاليّة الهندسيّة common ratio

لماذا أي حد في المتتاليّة الهندسيّة لا يمكن أن يساوي الصفر؟

مثال (١)

أثبت أن المتتاليّة $(ح_ن)$ متتالية حيث $ح_ن = ٣^ن$.

أ اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية $(ح_ن)$.

ب أثبت أن $(ح_ن)$ متتالية هندسيّة.

الحل:

$ح_١ = ٣^١ = ٣$ ، $ح_٢ = ٣^٢ = ٩$

$ح_٣ = ٣^٣ = ٢٧$ ، $ح_٤ = ٣^٤ = ٨١$

$ح_٥ = ٣^٥ = ٢٤٣$ الحدود الخمسة الأولى هي: ٣، ٩، ٢٧، ٨١، ٢٤٣.

∴ المتتالية $(ح_ن) = (٣، ٩، ٢٧، ٨١، ٢٤٣، ...)$

ب $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{٣^{ن+١}}{٣^ن} = \frac{ح_٤}{ح_٣} = ٣^{ن+١-ن} = ٣$ مقدار ثابت.

∴ المتتالية هندسية.

حاول أن تحل

١ أثبت أن المتتاليّة $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = (٢)^ن$، هي هندسيّة.

الحد النوني للمتتالية الهندسية General term of an Geometrie Sequence

إذا كانت $(ح_ن)$ متتاليّة هندسيّة أساسها $ر \neq ٠$ فإن $ح_ن = ح_١ \times ر^{ن-١}$

حيث $ح_١$ الحد الأول، $ح_ن$ هو الحد النوني، $ر$ هو أساس المتتاليّة الهندسيّة.

إذا كان الحد المعروف $ح_ك$ فإن $ح_ك = ح_١ \times ر^{ك-١}$

ومنه يكون $\frac{ح_ن}{ح_ك} \times \frac{ح_١ \times ر^{ن-١}}{ك^{ك-١}} = ر^{ن-ك}$

أي أن $ح_ن = ح_ك \times ر^{ن-ك}$

ويكون $ح_٢ = ح_١ \times ر$ ، $ح_٣ = ح_١ \times ر^٢$ ، $ح_٤ = ح_١ \times ر^٣$ ، ...

وتكون الصورة العامة للمتتاليّة الهندسيّة $ح_١$ ، $ح_١ ر$ ، $ح_١ ر^٢$ ، $ح_١ ر^٣$ ، ... ، $ح_١ ر^{ن-١}$ ، ...

مثال (٢)

اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتاليّة الهندسيّة التي حدها الأول ٩ وأساسها ٣.

الحل:

$ح_١ = ٩$ ، $ر = ٣$

$ح_٢ = ح_١ \times ر = ٩ \times ٣ = ٢٧$

$ح_٣ = ح_١ \times ر^٢ = ٩ \times ٣^٢ = ٨١$

$ح_٤ = ح_١ \times ر^٣ = ٩ \times ٣^٣ = ٢٤٣$

$ح_٥ = ح_١ \times ر^٤ = ٩ \times ٣^٤ = ٧٢٩$

المتتاليّة هي (٩، ٢٧، ٨١، ٢٤٣، ٧٢٩ ، ...)

∴ الحدود الخمسة الأولى هي: (٩، ٢٧، ٨١، ٢١٣، ٧٢٩)

حاول أن تحل

٢ اكتب الحدود الأربعة الأولى من المتتاليّة الهندسيّة التي حدها الأول ٥ وأساسها −٣.

مثال (٣)

متتاليّة هندسيّة حدها الأول ٤ وحدها السادس ١٢٨ . اكتب الحدود الأربعة الأولى من المتتاليّة.

الحل:

الحد الأول: $ح_١ = ٤$ ، الحد السادس: $ح_٦ = ١٢٨$

نعلم أن $ح_ن = ح_١ \times ر^{ن-١}$

$ح_٦ = ح_١ \times ر^٥$

$١٢٨ = ٤ \times ر^٥$

$ر^٥ = ٣٢$ ∴ $ر = ٢$

∴ الحدود الأربعة الأولى هي ٤، ٨، ١٦، ٣٢.

المتتاليّة هي: (٤، ٨، ١٦، ٣٢، ...)

حاول أن تحل

٣ متتاليّة هندسيّة حدها الأول ٢٧ وحدها الخامس $\frac{١}{٣}$. اكتب الحدود الخمسة الأولى منها.

مثال (٤)

متتاليّة هندسيّة حدودها موجبة، ومجموع الحدين الأوّل والثاني ٣٦، وحدها الثالث يساوي ٣. أوجد الحد الخامس.

الحل:

$ح_١ + ح_٢ = ٣٦ ،\ ح_٣ = ٣$

في المتتالية الهندسية يكون $ح_ن = ح_١ \times ر^{ن-١}$

$\therefore ح_١ + ح_١ ر = ٣٦$

$ح_١ (١ + ر) = ٣٦ \qquad (١)$

$ح_١ ر^٢ = ٣$

بالقسمة $\dfrac{ح_١ ر^٢}{ح_١ (١ + ر)} = \dfrac{٣}{٣٦}$

$\dfrac{ر^٢}{١ + ر} = \dfrac{١}{١٢}$

$١٢ ر^٢ = ر + ١$ الضرب التقاطعي

$١٢ ر^٢ - ر - ١ = ٠$

$(٤ ر + ١)(٣ ر - ١) = ٠$

$ر = -\dfrac{١}{٤}$ (مرفوض لأن الحدود موجبة)، $ر = \dfrac{١}{٣}$.

بالتعويض في (١) $ح_١ \times \left(١ + \dfrac{١}{٣}\right) = ٣٦$

$ح_١ = ٣٦ \times \dfrac{٣}{٤} = ٢٧$

$ح_٥ = ح_١ \times ر^٤$

$= ٢٧ \times \left(\dfrac{١}{٣}\right)^٤ = \dfrac{١}{٣}.$

الحد الخامس $= \dfrac{١}{٣}.$

ملاحظة:

- النسبة المئوية التزايدية القيمة النهائية والقيمة الأصلية × (١٠٠٪ + النسبة المئوية التزيدية).
- النسبة المئوية التناقصية القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ – النسبة المئوية التناقصية).

حاول أن تحل

٤ $(ح_ن)$ متتاليّة هندسيّة، مجموع حديها الأول والثاني يساوي ٢، ومجموع حديها الثالث والرابع يساوي ٨.
أوجد الحد الأول والحد الخامس منها.

مثال (٥) **مسألة حياتية**

يزداد عدد سكان مدينة بمعدل ثابت ٢٪ كل سنة. فكم يكون عدد سكان هذه المدينة في داية السنة السادسة إذا كان عددهم الحالي ٤٠٠ ٠٠٠ نسمة؟

الحل:

عدد السكان في بداية السنة الأولى: $ح_{١}$ = ٤٠٠ ٠٠٠ نسمة.

النسبة المئوية للتزايد = ٢٪

عدد السكان من بداية السنة الحالية = عدد السكان من السنة السابقة × (١٠٠٪ + النسبة المئوية للتزايد).

عدد السكان من بداية السنة الثانية = $ح_{٢}$ = ٤٠٠ ٠٠٠ × (١٠٠٪ + ٢٪)

= ٤٠٠ ٠٠٠ × (١,٠٢)

عدد السكان من بداية السنة الثالثة = $ح_{٣}$ = $ح_{٢}$ × (١,٠٢)

= ٤٠٠ ٠٠٠ × $(١,٠٢)^{٢}$

... وهكذا

مما سبق يتضح أن متتالية تزايد السكان هي متتالية هندسية أساسها (١,٠٢)

الحد النوني لها هو

$ح_{ن}$ = $ح_{١}$ × $(١,٠٢)^{ن-١}$

عدد السكان من بداية السنة السادسة = $ح_{٦}$ = ٤٠٠ ٠٠٠ × $(١,٠٢)^{٥}$

≃ ٤٤١٦٣٢

يبلغ عدد سكان المدينة من بداية السنة السادسة ٤٤١ ٦٣٢

حاول أن تحل

٥ من بداية السنة السادسة حيث أصبح عدد سكان المدينة ٤٤١ ٦٣٢ نسمة تم إقفال أحد المصانع الكبيرة مما أدّى إلى هجرة العديد من السكان بمعدل ٤٪ سنويًّا بعد حوالي كم سنة يصبح عدد سكان المدينة ٤٠٠ ٠٠٠؟

مثال (٦)

الخلية البكترية الواحدة التي تنجح في دخول جسم الإنسان يمكنها أن تتكاثر في متتاليّة هندسيّة لوقت طويل إذا لم تتم مهاجمتها بالجهاز المناعي للجسم.

فالبكتيريا تتكاثر بالانقسام الثنائي، والعديد من البكتيريا يمكنه أن يتكاثر كل ٢٠ دقيقة. ففي الساعة الواحدة يمكن للبكتيريا الواحدة أن تصبح ثمانية. دخلت بكتيرية واحدة جسم الإنسان. كم يصبح عدد البكتيريا في الجسم بعد ١٠ ساعات؟

الحل:

عدد البكتيريا بعد مرور ساعة واحدة = $ح_١$ = ٨

عدد البكتيريا بعد مرور ساعتين = $ح_٢$ = ٨ × ٨

عدد البكتيريا بعد مرور ٣ ساعات = $ح_٣$ = ٨ × (٨ × ٨) = ٨ $(٨)^٢$

... وهكذا

يشكل تكاثر البكتيريا متتالية هندسية أساسها ٨ وحدها الأول ٨ الحد النوني لها هو.

$ح_ن = ح_١ \times (٨)^{ن-١}$

عدد البكتيريا بعد مرور ١٠ ساعات = $ح_{١٠}$ = ٨ × $(٨)^٩$

= ١٠٧٣٧٤١٨٢٤

أي حوالي مليار و٧٤ مليون بكتيريا.

حاول أن تحل

٦ إذا كانت البكتيريا تتكاثر بالانقسام كل ١٥ دقيقة فكم تصبح بكتيريا واحدة في جسم الإنسان بعد ١٢ ساعة؟

الأوساط الهندسية بين عددين Geometric Means Between two Numbers

إذا كوَّنت ٲ، ب، جـ متتالية هندسية حيث ٲ، ب، جـ أعداد حقيقية غير صفرية حيث ٲب > ٠ فإن: $\frac{جـ}{ٲ} = \frac{ب}{جـ}$ ومنه $جـ^٢$ = ٲب

∴ جـ = $\pm\sqrt{ٲب}$.

يسمى جـ وسطًا هندسيًّا بين العددين ٲ، ب، أي أن: $\sqrt{ٲب}$ أو $-\sqrt{ٲب}$ وسطًا هندسيًّا بين العددين ٲ، ب.

مثال (٧)

أوجد وسطًا هندسيًّا بين العددين $\frac{١}{٣}$ ، ٢٧

الحل:

الوسط الهندسي: $\sqrt{\frac{١}{٣} \times ٢٧} = \sqrt{٩} = ٣$

أو الوسط الهندسي: $-\sqrt{\frac{١}{٣} \times ٢٧} = -\sqrt{٩} = -٣$

حاول أن تحل

٧ ٲ −٣، −٧٢ ب ٢٠، ٨٠ جـ ٣، ١٨,٧٥

بصورةٍ عامّةٍ

في المتتاليّة الهندسيّة (أ، ب، جـ، د، ... ك، ل). تسمى ب، جـ ، د، ... ك **أوساطًا هندسيّة** للعددين الحقيقيّين أ، ل.

وتسمى عملية إيجاد ب، جـ، د، ... ك بعملية إدخال أوساط هندسيّة بين العددين أ، ل.

مثال (٨)

عندما يتأرجح ولد دون تأثير قوة خارجية فإن مقاومة الهواء تؤدي إلى تناقص في طول قوس التأرجح. ويشكل التناقص في طول القوس متتالية هندسيّة. أوجد الوسط الهندسي لطولي القوسين.

الحل:

الوسط الهندسي = $\sqrt{٣,٢ \times ٢٧}$

$= \sqrt{٨,٩٦}$

$\simeq ٣$

حاول أن تحل

٨ يتدرّب عماد على القفزة الثلاثية. حقق في المحاولة الأولى ٨,٨ أمتار وفي المحاولة الثانية حقق ٩,٢ أمتار. ما الوسط الهندسي لطولي القفزتين؟

مثال (٩)

أدخل خمسة أوساط هندسيّة موجبة بين ٥١٢ و٨.

الحل:

$ح_١ = ٥١٢$

$ح_ن = ٨$ أي أن $ح_٧ = ٨$

$\therefore ح_ن = ح_١ \times ر^{ن-١}$

$\therefore ٨ = ٥١٢ \times ر^٦$

$ر^٦ = \frac{٨}{٥١٢} = \frac{١}{٦٤}$

$ر^٦ = \left(\frac{١}{٢}\right)^٦$

$ر = \frac{١}{٢}$ أو $ر = -\frac{١}{٢}$ مرفوضة لأن الأوساط موجبة.

الأوساط هي: ٢٥٦، ١٢٨، ٦٤، ٣٢، ١٦.

حاول أن تحل

٩ أدخل ثمانية أوساط هندسية بين ٢، ١٠٢٤.

مجموع ن حدا الأولى من متتالية هندسية — Sum of n Terms of a Geometric Sequence

إذا كان $(ح_ن)$ متتاليّة هندسيّة

$$جـ_ن = ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + \dots + ح_ن$$

هو مجموع ن حدًّا الأولى

$$جـ_ن = ح_١ + ح_١ ر + ح_١ ر^٢ + \dots + ح_١ ر^{ن-١} \qquad (١)$$

$\therefore$ $ر \ne ٠$، بضرب طرفي (١) في $ر$

$$ر جـ_ن = ح_١ ر + ح_١ ر^٢ + ح_١ ر^٣ + \dots + ح_١ ر^ن \qquad (٢)$$

بطرح (١) من (٢) وبالتبسيط ينتج:

قانون

إذا كانت (حن) متتالية هندسية، $جـ_ن = ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + \dots + ح_ن$ هو مجموع ن حدًّا الأول فإن:

١ $جـ_ن = ح_١ \times \frac{ر^ن - ١}{ر - ١}$ أو $جـ_ن = ح_١ \times \frac{ر^ن - ١}{ر - ١}$ ؛ $ر \ne ١$

٢ إذا كانت $ر = ١$ فإن $جـ_ن = ن جـ_١$

لاحظ أنه من (١) إذا كانت د = ١ فإنّ $جـ_ن = ن ح_١$.

البرهان

ليكن د أساس المتتاليّة فإن:

$$جـ_ن = ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + \dots + ح_ن \qquad (١)$$

$$ر جـ_ن = ح_١ ر + ح_١ ر^٢ + ح_١ ر^٣ + \dots + ح_١ ر^ن$$

يضرب طرفي المعادلة (١) في $ر \ne ٠$

بطرح (١) من (٢) وبالتبسيط ينتج:

$$ر جـ_ن - جـ_ن = ح_١ ر^ن - ح_١$$

$$جـ_ن (ر - ١) = ح_١ (ر^ن - ١)$$

$$جـ_ن = ح_١ \frac{ر^ن - ١}{ر - ١} \text{ ؛ } ر \ne ١$$

أما إذا كانت $ر = ١$ فإن حدود المتتالية متساوية ويساوي مجموع الحدود قيمة الحد الأول مضروبًا بعدد الحدود أي

$$جـ_ن = ح_١ \times ن$$

مثال (١٠)

أوجد مجموع العشرة حدود الأولى من المتتاليّة الهندسيّة (٢، ٤، ٨، ...)

الحل:

$ح_١ = ٢ \quad ر = \frac{ح_٢}{ح_١} = \frac{٤}{٢} = ٢ \text{ ، } ن = ١٠$

$جـ_ن = ح_١ \frac{ر^ن - ١}{ر - ١}$

$جـ_ن = \frac{٢ \times (٢^{١٠} - ١)}{(٢ - ١)}$

$جـ_ن = ٢ \times ١٠٢٣ = ٢٠٤٦$.

حاول أن تحل

١٠ أوجد مجموع الحدود الثمانية الأولى من المتتاليّة الهندسية ٣، ٩، ٢٧، ...

مثال (١١)

الحد الأول من متتالية هندسية يساوي ٨ والحد الثالث يساوي $\frac{٨}{٩}$. أوجد مجموع الحدود الستة الأولى.

الحل:

∴ المتتالية هندسية

∴ $ح_٣ = ح_١ \times ر^٢$

$\frac{٨}{٩} = ٨ \times ر^٢$

$ر^٢ = \frac{٨}{٩}$

$ر = \frac{١}{٣}$ أو $ر = -\frac{١}{٣}$.

$ر = \frac{٨}{٩}$

$جـ_٦ = ٨ \times \frac{١ - \left(-\frac{١}{٣}\right)^٦}{١ - \frac{١}{٣}}$

$= ٨ \times \frac{١ - \left(-\frac{١}{٣}\right)^٦}{\frac{٢}{٣}}$

$ر = -\frac{١}{٣}$

$جـ_٦ = ٨ \times \frac{١ - \left(-\frac{١}{٣}\right)^٦}{\frac{١}{٣} - ١}$

$= ٨ \times \frac{١ - \left(-\frac{١}{٣}\right)^٦}{\frac{٤}{٣}}$

$= \frac{٢٩١٢}{٢٤٣}$ $= \frac{١٤٥٦}{٢٤٣}$

$\simeq ١١,٩٨$ $\simeq ٥,٩٩٠$

حاول أن تحل

١١ أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتتالية الهندسية $\left(٤، \blacksquare، ١، \blacksquare، \frac{١}{٢}، \ldots\right)$

مثال (١٢)

فكرت عائلة محمد بأن تقوم برحلة في أول شهر سبتمبر لمدة أسبوع وكانت تكاليف الرحلة ١٣٧٥٠ دينارًا. ولكي تتوفر لدى محمد هذه التكلفة بدأ يوفّر من مصاريفه ١٢٥٠ دينارًا ابتداءً من شهر مارس وعلى أن يزيد ما يوفّره بمقدار ٢٠٪ كل شهر عن الشهر السابق له. هل يمكن أن يوفّر محمد كل تكلفة الرحلة حتّى يقوم بها في أوّل سبتمبر؟

الحل:

إذا وفر محمد س دينارًا في شهر ما، فسيوفر في الشهر التالي:

س + $\frac{٢٠}{١٠٠}$ × س = س + ٠,٢ س = ١,٢ س

تشكل المبالغ المالية التي يوفرها محمد شهريًّا متتالية هندسية أساسها ١,٢ .

يعطي القانون $جـ_{ن} = ح_{١} \times \frac{ر^{ن} - ١}{ر - ١}$ مجموع ما يوفره محمد حيث $ح_{١} = ١٢٥٠$، $جـ_{٦} = ١٢٥٠ \times \frac{(١,٢)^{٦} - ١}{١,٢ - ١}$

$جـ_{٦} = ١٢٤١٢,٤$ دينارًا. باستخدام الآلة الحاسبة

لا تستطيع عائلة محمد القيام بالرحلة في أول سبتمبر.

حاول أن تحل

١٢ في المثال (١٢) هل تستطيع العائلة القيام بالرحلة إذا جعلت التوفير ٢٥٪ زيادة عن كل شهر سابق؟

رمز المجموع

يمكن استخدام رمز المجموع $\sum$ (سيجما) لكتابة مجموعة حدود متتاليّة.

$$\sum_{ن=١}^{١٣} \frac{٥}{٢}\,ن$$

الحد الأعلى
أكبر قيمة لِـ ن

الصيغة الصريحة
للمتتاليّة

الحد الأدنى
أصغر قيمة لِـ ن

لكتابة: ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ... + ٤٥ نكتب $\sum_{ن=١}^{٤٥} ن$

لكتابة: $١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + ٤^٢ + ... + ١٠^٢$ نكتب $\sum_{ن=١}^{١٠} ن^٢$

كذلك لكتابة: (٢ × ٣ − ١) + (٢ × ٤ − ١) + (٢ × ٥ − ١) + (٢ × ٦ − ١) + ... + (٢ × ١٥ − ١) نكتب $\sum_{ن=٣}^{١٥} ٢ن - ١$

مثال (١٢)

أ أوجد قيمة $\sum_{ن=١}^{١٣} \frac{٥}{٢}\,ن$.

الحل:

$$\sum_{ن=١}^{١٣} \frac{٥}{٢}\,ن = \frac{٥}{٢} \times (١) + \frac{٥}{٢} \times (٢) + \frac{٥}{٢} \times (٣) + ... + \frac{٥}{٢} \times (١٣)$$

$$= \frac{٥}{٢} \times (١ + ٢ + ٣ + ... + ١٣)$$

$$= \frac{٥}{٢} \times \frac{١٣ \times ١٤}{٢}$$

$$= ٢٢٧{,}٥$$

معلومة رياضية:

مجموع أول ١٣ عدد طبيعي $= \frac{١٣ \times ١٤}{٢}$

وبالعموم: مجموع أول ن عدد طبيعي $= \frac{ن \times (ن + ١)}{٢}$

ب استخدم رمز المجموع $\sum$ لكتابة: جـ = ٣ + ٦ + ٩ + ... (٣٣ حدًّا)

الحل:

٣ = ٣ × ١ ، ٦ = ٣ × ٢ ، ٩ = ٣ × ٣

نكتب $\sum_{ن=١}^{٣٣} ٣ن$. (الحد الأدنى ١ والحد الأقصى ٣٣).

حاول أن تحل

١٢ أوجد الحد الأول والحد الأخير ثم المجموع: $\sum_{ن=١}^{٨} (٣ن - ٢)$

مثال (١٣)

أ أوجد قيمة $\sum\limits_{\text{ن} = \text{٣}}^{\text{٩}} (\text{٦ن} - \text{٤})$

الحل:

$\sum (\text{٦ن} - \text{٤}) = (\text{٦} \times - \text{٤}) + (\text{٦} \times \text{٤} - \text{٤}) + (\text{٦} \times \text{٥} - \text{٤}) + \ldots (\text{٦} \times \text{٩} - \text{٤})$

$= \text{٦} \times (\text{٣} + \text{٤} + \text{٥} + \ldots + \text{٩}) - \text{٧} \times \text{٤}$

$= \text{٦} \times \text{٤٢} - \text{٢٨}$

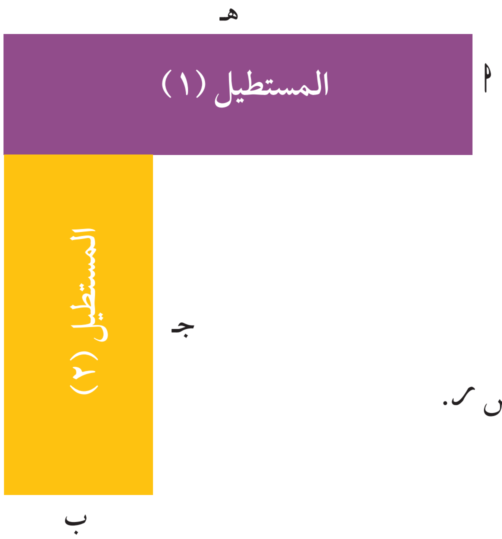
٢٢٤

حاول أن تحل

١٣ أوجد قيمة: $\sum\limits_{\text{ن} = \text{٤}}^{\text{٨}} (\text{٣ن} + \text{٥})$

المرشد لحل المسائل

١ في الشكل المقابل إذا كانت الأعداد أ، ب، جـ، هـ هي، في هذا الترتيب، لأربعة الأولى متعاقبة من متتالية هندسية أساسها ر.



أ قارن بين مساحتي المستطيلين.

ب بفرض أن هذه الأعداد هي، في هذا الترتيب، الأربعة حدود الأولى من متتاليّة حسابيّة أساسها د

قارن بين محيطي المستطيلين.

٢ كيف فكر محمد وحل المسألة

أ في المتتاليّة الهندسيّة كل حد يساوي الحد الذي يسبقه مضروبًا بالأساس ر.

إذًا ب = أر ، جـ = ب ر = أر^{٢} ، هـ = جـ ر = أر^{٣}

مساحة المستطيل = الطول × العرض

ومنه مساحة المستطيل (١) = أ × هـ = أ × أر^{٣} = أ^{٢}ر^{٣}

مساحة المستطيل (٢) = ب × جـ = أر × أر^{٢} = أ^{٢}ر^{٣}

الاستنتاج: وهكذا استنتج محمد أن مساحتي المستطيلين متساويتين.

ب بما أن المتتالية حسابية أساسها د فإن ب = أ + د ، جـ = ب + ٥ = أ + ٢د ، هـ = جـ + د = أ + ٣د

محيط المستطيل (١) = ٢ × (أ + هـ) = ٢ × (أ + أ + ٣د) = ٤أ + ٣٠ (سم)

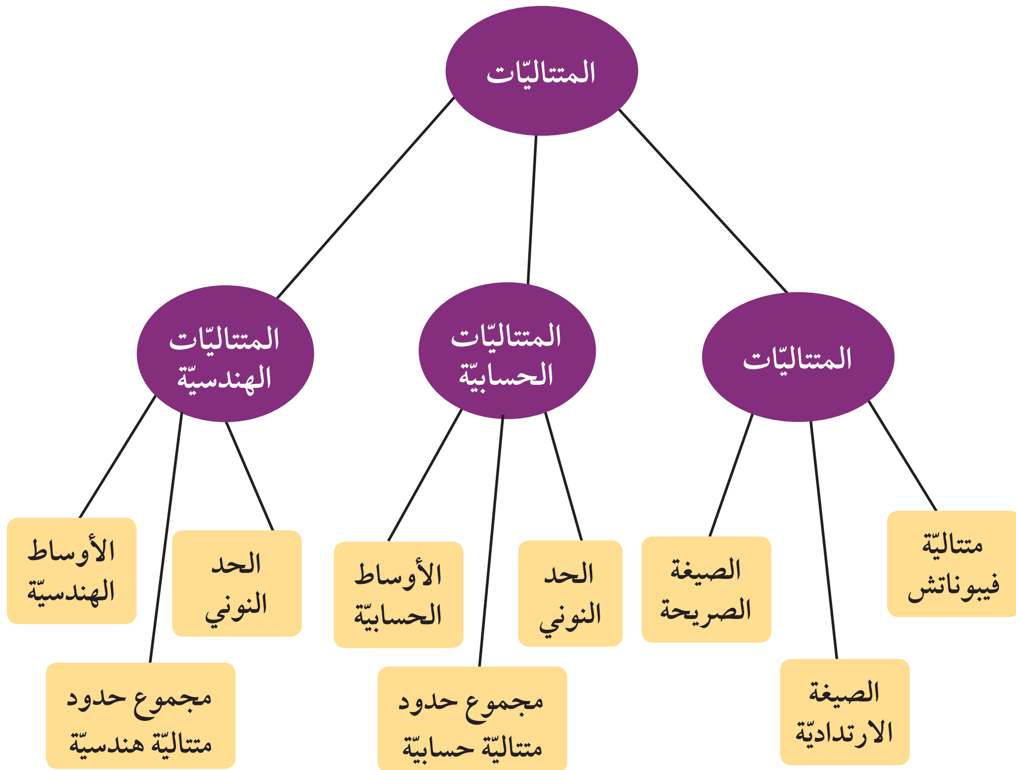
محيط المستطيل (٢) = ٢ × (ب + جـ) = ٢ × (أ + د + أ + ٢د) = ٤أ + ٦د

الاستنتاج: للمستطيلين المحيط نفسه.

٣ مسألة ثانية

قارن بين مساحتي المستطيلين (١)، (٢) في الحالة (ب).

مخطط تنظيمي للوحدة الخامسة



ملخص

- تعرّف الصيغة الارتداديّة حدود المتتاليّة بربط كل حد بالحد (أو بالحدود) الذي يسبقه مباشرة.
- تعبّر الصيغة الصريحة عن الحد النوني بدلالة ن.
- متتاليّة فيبوناتش: $ف_ن = ف_{ن-٢} + ف_{ن-١}$ مع $ف_١ = ف_٢ = ١$.
- في المتتاليّة الحسابيّة يكون الفرق بين كل حد والحد السابق له عددًا ثابتًا يسمى أساس المتتاليّة. $ح_{ن+١} = ح_ن + د$.
- الحد النوني للمتتالية الحسابية: $ح_ن = ح_ك + (ن - ك)د$.
- إذا كوّنت أ، ب، جـ متتاليّة حسابيّة فإن $ب = \frac{أ + جـ}{٢}$. ب هو الوسط الحسابي لِـ أ، جـ.
- مجموع ن حد الأول من حدود متتاليّة حسابيّة: $جـ_ن = \frac{ن}{٢}(ح_١ + ح_ن)$.
- في المتتاليّة الهندسيّة ناتج قسمة أي حد فيها على الحد السابق له مباشرة يساوي عددًا ثابتًا يسمى أساس المتتاليّة الهندسيّة $ح_{ن+١} = ح_ن \times ر$ أساس المتتالية الهندسية.
- $\sqrt{أب}$ أو $-\sqrt{أب}$ هو الوسط الهندسي للعددين الموجبين أ، ب.
- مجموع ن حدًا الأدنى من حدود متتاليّة هندسيّة: $جـ_ن = ح_١ \times \frac{ر^ن - ١}{ر - ١} = ح_١ \times \frac{١ - ر^ن}{١ - ر}$
- إذا كونت أ، ب، جـ متتاليّة هندسيّة فإن $ب^٢ = أ \times جـ$. ب هو الوسط الهندسي لِـ أ، جـ.