

نظرية ذات الحدين

The Binomial Theorem

المجموعة الثمانية التمارين الأساسية

في التمارين (١-٣)، املأ الفراغ بالعدد المناسب.

$$(1) (s + v)^4 = \binom{4}{0} s^4 + \binom{4}{1} s^3 v + \binom{4}{2} s^2 v^2 + \binom{4}{3} s v^3 + \binom{4}{4} v^4$$

$$(2) (z - v)^3 = \binom{3}{0} z^3 - \binom{3}{1} z^2 v + \binom{3}{2} z v^2 - \binom{3}{3} v^3$$

$$(3) (s + v)^5 = \binom{5}{0} s^5 + \binom{5}{1} s^4 v + \binom{5}{2} s^3 v^2 + \binom{5}{3} s^2 v^3 + \binom{5}{4} s v^4 + \binom{5}{5} v^5$$

في التمارين (٤-٩)، أوجد مفكوك كل مما يلي:

$$(4) (s + 1)^4 = \binom{4}{0} s^4 + \binom{4}{1} s^3 + \binom{4}{2} s^2 + \binom{4}{3} s + \binom{4}{4} 1$$

$$(5) (s - 1)^4 = \binom{4}{0} s^4 - \binom{4}{1} s^3 + \binom{4}{2} s^2 - \binom{4}{3} s + \binom{4}{4} 1$$

$$(6) (s^2 - 1)^3 = \binom{3}{0} (s^2)^3 - \binom{3}{1} (s^2)^2 + \binom{3}{2} (s^2) - \binom{3}{3} 1$$

$$(7) (1 - s^2)^3 = \binom{3}{0} 1 - \binom{3}{1} s^2 + \binom{3}{2} s^4 - \binom{3}{3} s^6$$

$$(8) (s - v)^3 = \binom{3}{0} s^3 - \binom{3}{1} s^2 v + \binom{3}{2} s v^2 - \binom{3}{3} v^3$$

$$(9) \left(\frac{s}{v} - 1\right)^4 = \binom{4}{0} \left(\frac{s}{v}\right)^4 - \binom{4}{1} \left(\frac{s}{v}\right)^3 + \binom{4}{2} \left(\frac{s}{v}\right)^2 - \binom{4}{3} \left(\frac{s}{v}\right) + \binom{4}{4} 1$$

(١٠) في مفكوك $\left(\frac{3}{s} - 1\right)^3$ أوجد: $r =$ ، $n =$

(أ) الحد الثالث. $\binom{n}{r} =$ ، $r =$ ، $n =$

$$\frac{40}{s^3} = \binom{3}{2} \times 1 \times \left(\frac{3}{s}\right)^2 = \frac{9}{s^2}$$

(ب) الحد الخامس. $n =$ ، $r =$

$$\frac{20}{s^5} = \binom{3}{4} \times 1 \times \left(\frac{3}{s}\right)^4 = \frac{81}{s^4}$$

(١٦) أثبت أن: $(s + \frac{1}{s})^3 = (s^3 + \frac{1}{s^3}) + 3(s + \frac{1}{s})$. باستخدام نظرية ذات الحدين

$$\left(s + \frac{1}{s}\right)^3 = \binom{3}{0} s^3 \left(\frac{1}{s}\right)^0 + \binom{3}{1} s^2 \left(\frac{1}{s}\right)^1 + \binom{3}{2} s^1 \left(\frac{1}{s}\right)^2 + \binom{3}{3} s^0 \left(\frac{1}{s}\right)^3$$

$$= s^3 + \frac{3}{s} + \frac{3}{s} + \frac{1}{s^3} = s^3 + \frac{6}{s} + \frac{1}{s^3}$$

(١٧) أوجد مفكوك: $(s+2)^0$. باستخدام نظرية ذات الحدين

$$(s+2)^0 = \binom{0}{0} s^0 2^0 = 1$$

المجموعة ب تمارين تعزيرية

في التمارين (١-٧)، أوجد مفكوك كل مما يلي:

(١) $(s-2)^3 = \binom{3}{0} s^3 (-2)^0 + \binom{3}{1} s^2 (-2)^1 + \binom{3}{2} s^1 (-2)^2 + \binom{3}{3} s^0 (-2)^3$

$$= s^3 - 6s^2 + 12s - 8$$

(٢) $(s-1)^3 = \binom{3}{0} s^3 (-1)^0 + \binom{3}{1} s^2 (-1)^1 + \binom{3}{2} s^1 (-1)^2 + \binom{3}{3} s^0 (-1)^3$

$$= s^3 - 3s^2 + 3s - 1$$

(٣) $(s+1)^3 = \binom{3}{0} s^3 (1)^0 + \binom{3}{1} s^2 (1)^1 + \binom{3}{2} s^1 (1)^2 + \binom{3}{3} s^0 (1)^3$

$$= s^3 + 3s^2 + 3s + 1$$

(٤) $(\frac{1}{s} + b)^3 = \binom{3}{0} \left(\frac{1}{s}\right)^3 b^0 + \binom{3}{1} \left(\frac{1}{s}\right)^2 b^1 + \binom{3}{2} \left(\frac{1}{s}\right)^1 b^2 + \binom{3}{3} \left(\frac{1}{s}\right)^0 b^3$

$$= \frac{1}{s^3} + \frac{3b}{s^2} + \frac{3b^2}{s} + b^3$$

$$(5) \binom{4}{0} x^4 + \binom{4}{1} x^3 (P) + \binom{4}{2} x^2 (P)^2 + \binom{4}{3} x (P)^3 + \binom{4}{4} (P)^4 = (P+1)^4$$

$$1 + 4P + 6P^2 + 4P^3 + P^4 =$$

$$(6) \binom{4}{0} x^4 + \binom{4}{1} x^3 \left(\frac{1}{s}\right) + \binom{4}{2} x^2 \left(\frac{1}{s}\right)^2 + \binom{4}{3} x \left(\frac{1}{s}\right)^3 + \binom{4}{4} \left(\frac{1}{s}\right)^4 = \left(\frac{1}{s} + 1\right)^4$$

$$1 + \frac{4}{s} + \frac{6}{s^2} + \frac{4}{s^3} + \frac{1}{s^4} =$$

$$1 + \frac{4}{s} + \frac{6}{s^2} + \frac{4}{s^3} + \frac{1}{s^4} =$$

$$(7) \binom{3}{0} x^3 + \binom{3}{1} x^2 s + \binom{3}{2} x s^2 + \binom{3}{3} s^3 = (s+1)^3$$

$$1 + 3s + 3s^2 + s^3 =$$

(8) في مفكوك $(s+2)^4$ ، أوجد معامل s^3 . $n=4$ $k=3$ $p=2$ $r=3$

$$\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} p^r = 1+r$$

$$\binom{4}{3} 2^3 = 1+r$$

$$\binom{4}{3} 2^3 = 8 = 1+r$$

$$r = 7$$

معامل s^3 = 8

(9) أوجد معامل s^4 في مفكوك $(s+3)^7$ $n=7$ $k=4$ $p=3$ $r=4$

$$\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} p^r = 1+r$$

$$\binom{7}{4} 3^4 = 1+r$$

$$\binom{7}{4} 3^4 = 30 = 1+r$$

$$r = 29$$

$$\binom{7}{4} 3^4 = 30 = 1+r$$

معامل s^4 = 30

الاحتمال

Probability

المجموعة التمارين الأساسية

في التمارين (١-٣)، حدّد ما إذا كان الحدثان مستقلين أم غير مستقلين.

(١) اختيار كرة من كيس، ثم إعادتها واختيار كرة ثانية.

مستقلين

(٢) اختيار كرة من كيس دون إعادتها ثم اختيار كرة ثانية.

غير مستقلين

(٣) عند رمي حجر نرد متظلم مرتين متتاليتين، الحصول في المرة الأولى على ٥ والحصول في المرة الثانية على ٥.

مستقلين

في التمرينين (٤-٥)، إذا كان الحدثان A و B مستقلين، أوجد $P(A \cap B)$.

$$(٤) P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{3}{4}, P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$$

$$(٥) P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{2}{5}, P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$$

في التمرينين (٦-٧)، إذا كان الحدثان M و N متنافيين، أوجد $P(M \cup N)$.

$$(٦) P(M) = \frac{3}{4}, P(N) = \frac{1}{4}, P(M \cup N) = P(M) + P(N) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$(٧) P(M) = \frac{6}{10}, P(N) = \frac{2}{10}, P(M \cup N) = P(M) + P(N) = \frac{6}{10} + \frac{2}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

(٨) إذا كان A و B حدثين متنافيين في فضاء العينة S حيث:

$$P(A) = \frac{4}{10}, P(B) = \frac{3}{10}, \text{ أوجد:}$$

$$(أ) P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{4}{10} = \frac{6}{10}$$

$$(ب) P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

$$(ج) P(A \cap B) = \text{صفر} \text{ حدثان متنافيان}$$

$$(د) P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{10} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

$$(هـ) P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0 = 1$$

ثانوية ام الحارث الانصارية

(٩) إذا كان ل، ب حداث في فضاء العينة ف حيث:

$$ل(أ) = ٤، ٠، ل(ب) = ٣، ٠، ل(أ ∩ ب) = ٢، ٠، أوجد:$$

$$(أ) ل(أ ∪ ب) = ١ - ل(أ ∩ ب) = ١ - ٢ = -١ و ٧٥$$

$$(ب) ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ ∩ ب) = ٤ + ٣ - ٢ = ٥ و ٤٥$$

$$(ج) ل(أ ∪ ب) = ١ - ل(أ ∩ ب) = ١ - ٢ = -١ و ٤٥$$

(١٠) إذا كان م، ن حداث مستقلين في فضاء العينة ف حيث ل(ن) = ١/٤، ل(م) = ٣/٥، فأوجد كلاً مما يلي:

$$(أ) ل(م) = ١ - ل(م) = ١ - ٣/٥ = ٢/٥$$

$$(ب) ل(م ∩ ن) = ل(م) × ل(ن) = ٣/٥ × ١/٤ = ٣/٢٠$$

$$(ج) ل(م ∪ ن) = ل(م) + ل(ن) - ل(م ∩ ن) = ٣/٥ + ١/٤ - ٣/٢٠ = ١٠/٢٠ + ٥/٢٠ - ٣/٢٠ = ١٢/٢٠ = ٣/٥$$

(١١) إذا كان م، ن حداث في فضاء العينة ف حيث ل(م ∪ ن) = ٧، ٠، ل(م) = ٥، ٠، ل(ن) = ٣، ٠، فأوجد:

ل(م ∩ ن)

$$ل(م ∪ ن) = ل(م) + ل(ن) - ل(م ∩ ن)$$

$$٧ = ٥ + ٣ - ل(م ∩ ن) \Rightarrow ل(م ∩ ن) = ١$$

(١٢) إذا كان م، ن حداث في فضاء العينة ف حيث ل(م) = ١/٣، ل(ن) = ١/٤، ل(م ∪ ن) = ١/٥، فأوجد:

$$(أ) ل(م ∪ ن) = ١ - ل(م ∩ ن) = ١/٥ \Rightarrow ل(م ∩ ن) = ٤/٥$$

$$(ب) ل(م ∩ ن) = ل(م) - ل(م ∩ ن) = ١/٣ - ٤/٥ = ٥/١٥ - ١٢/١٥ = -٧/١٥$$

$$ل(م ∩ ن) = ل(م) + ل(ن) - ل(م ∪ ن) = ١/٣ + ١/٤ - ١/٥ = ٤/١٢ + ٣/١٢ - ٢/١٢ = ٥/١٢$$

(١٣) إذا كان ل(م ∪ ن) = ٧/١٠، ل(م) = ١/٥، ل(م ∩ ن) = ٠، فأوجد:

ل(ن)

$$ل(م ∪ ن) = ل(م) + ل(ن) - ل(م ∩ ن)$$

$$٧/١٠ = ١/٥ + ل(ن) - ٠ \Rightarrow ل(ن) = ٦/١٠ = ٣/٥$$

(١٤) ألقى حجر نرد مرقم من ١ إلى ٦. ليكن:

$$\{٢\} = ل(أ) = ١/٦$$

$$\{٤، ١\} = ل(ب) = ٢/٦ = ١/٣$$

$$\{٦، ٤، ٢، ١\} = ل(ج) = ٤/٦ = ٢/٣$$

$$ل(أ ∪ ب) = ١/٦ + ٢/٦ = ٣/٦ = ١/٢$$

$$(أ) ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ ∩ ب) = ١/٦ + ٢/٦ - ١/٦ = ٢/٦ = ١/٣$$

$$(ب) ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ ∩ ب) = ١/٦ + ٢/٦ - ١/٦ = ٢/٦ = ١/٣$$

$$(ج) ل(أ ∪ ب) = ١/٢$$

$$(د) ل(أ ∪ ب) = ١ - ل(أ ∩ ب) = ١ - ١/٦ = ٥/٦$$

$$ل(ب ∪ ج) = ل(ب) + ل(ج) - ل(ب ∩ ج) = ٢/٦ + ٤/٦ - ١/٦ = ٥/٦$$

$$١/٦ = ١/٦ - ١/٦ + ١/٦ = ١/٦$$

(١٥) إذا كان احتمال نجاح راشد في الاختبار $\frac{2}{5}$ ، واحتمال نجاح سعد في نفس الاختبار $\frac{1}{3}$ ، فما احتمال أن ينجحاً معاً في نفس الاختبار؟

$$\text{احتمال ان ينجحاً معاً} = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$$

(١٦) في إحدى المؤسسات تم تنظيم دورة للموظفين في اللغة الإنجليزية والحاسوب. إذا كان عدد الموظفين في المؤسسة ٢٠٠ موظف وتم تنفيذ الدورات على الموظفين وفق الجدول التالي:

(ع ، حاسوب)

في = { (نعم ، نعم) ، (نعم ، لا) }
{ (لا ، نعم) ، (لا ، لا) }

دور الحاسوب	نعم	لا
دورة اللغة الإنجليزية	٤٥	٣٣
نعم	٧٠	٥٢
لا		

إذا تم اختيار موظف عشوائياً، فأوجد كلاً من الاحتمالات التالية:

(أ) أن يكون الموظف قد أخذ دورة اللغة الإنجليزية ودورة الحاسوب.

$$\frac{45}{200} = \frac{9}{40}$$

(ب) أن يكون الموظف قد أخذ دورة اللغة الإنجليزية ولم يأخذ دورة الحاسوب.

$$\frac{33}{200}$$

(ج) أن يكون الموظف قد أخذ دورة اللغة الإنجليزية أو أخذ دورة الحاسوب.

$$\frac{148}{200} = \frac{37}{50}$$

(١٧) في حوض لتربية سمك السلمون هناك نوعان من الأسماك: السلمون المرقط والسلمون الملون. يبين الجدول توزيع هذه الأسماك في الحوض.

الطول بالسنتيمتر	-١٦	-١٨	-٢٠	-٢٢
ملون	٣	٢٠	٣٥	١٢
مرقط	٧	١٥	٢٥	٣

أخذت سمكة عشوائياً من الحوض. أوجد كلاً من احتمالات الأحداث التالية:

أ = «سمكة ملونة» = $\frac{70}{140} = \frac{70}{140} = \frac{12 + 35 + 20 + 3}{140}$

ب = «طولها أصغر من ٢٠ سم» = $\frac{38}{140} = \frac{38}{140} = \frac{10 + 20 + 7 + 3}{140}$

ج = «سمكة مرقطة وطولها على الأقل ٢٠ سم» = $\frac{58}{140} = \frac{58}{140} = \frac{3 + 20 + 15 + 7}{140}$

د = «سمكة مرقطة أو طولها على الأقل ٢٢ سم» = $\frac{70}{140} = \frac{70}{140} = \frac{12 + 3 + 25 + 10 + 7}{140}$

هـ = «سمكة ملونة وطولها على الأقل ١٨ سم» = $\frac{77}{140} = \frac{77}{140} = \frac{12 + 35 + 20}{140}$

و = «ألا تكون مرقطة وألا يكون طولها أصغر من ٢٠ سم» = $\frac{42}{140} = \frac{42}{140} = \frac{12 + 25}{140}$

ثانوية ام الحارث الانصارية

(١١) إذا كان P ، B حدثين في فضاء العينة S حيث: $P \cup B = (A \cup B)$ ، $P \cap B = (A \cap B)$ ، $P = (A \cap B)$ ، $B = (A \cap B)$ ، $P \cup B = (A \cup B)$ ، $P \cap B = (A \cap B)$.

$$P \cup B = (A \cup B) \Rightarrow P + B - (P \cap B) = (A \cup B)$$

$$P + B - (P \cap B) = (A \cup B) \Rightarrow P + B - (P \cap B) = (A \cup B)$$

$$P + B - (P \cap B) = (A \cup B) \Rightarrow P + B - (P \cap B) = (A \cup B)$$

(١٢) تحوي علبة ١٢ قرصًا متشابهًا مرقمًا من ١ إلى ١٢، سحب قرص عشوائيًا. أوجد احتمال كل من الأحداث التالية:

(أ) الحصول على العدد ٢.

(ب) الحصول على عدد فردي.

(ج) الحصول على عدد أولي.

(د) الحصول على عدد من مضاعفات العدد ٤.

$$(أ) \text{ الحصول على عدد زوجي} = \frac{1}{12}$$

$$(ب) \text{ الحصول على عدد فردي} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$(ج) \text{ الحصول على عدد أولي} = \frac{5}{12}$$

$$(د) \text{ الحصول على عدد مضاعفات العدد ٤} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

(١٣) ألقى حجر نرد أرقامه ٣، ٣، ٣، ١، ٤، ٦، فما احتمال الحصول على:

$$(أ) \text{ عدد زوجي} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$(ب) \text{ عدد من مضاعفات العدد ٣} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

اختبار الوحدة الخامسة

أسئلة المقال

في التمارين (١-٣)، حدد ما إذا كانت الحالة تبين توفيقاً أم تبديلاً، ثم حل.

(١) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار ٥ ممثلين من مجموعة مؤلفة من ١١ ممثلاً لتحضير عمل مسرحي؟

$${}_{11}C_5 = \frac{11!}{5!6!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 462$$

(٢) بكم طريقة يمكن اختيار ٣ طلاب من بين ١٥ طالباً مع مراعاة الترتيب.

$${}_{15}P_3 = \frac{15!}{(15-3)!} = \frac{15 \times 14 \times 13}{1} = 2730$$

(٣) أوجد مفكوك: $(1-2^2)^4$

$$(1-2^2)^4 = (1-4)^4 = (-3)^4 = 81$$

(٤) إذا كان م، ن حدثين مستقلين في فضاء العينة ف حيث: ل(م) = ٠,٣٨ ، ل(ن) = ٠,٢٤ .

فأوجد: ل(م ∩ ن).

$$ل(م ∩ ن) = ل(م) \cdot ل(ن) = 0,38 \times 0,24 = 0,0912$$

(٥) إذا كان م، ن حدثين متنافيين في فضاء العينة ف حيث: ل(م) = ٠,٣٣ ، ل(ن) = ٠,٢٠ .

فأوجد: ل(م ∪ ن).

$$ل(م ∪ ن) = ل(م) + ل(ن) = 0,33 + 0,2 = 0,53$$

النوع	الفصيلة	A	B	AB	O
موجب		٥١٥	٧٥	٦٠	٥١٠
سالب		١١٥	٤٥	١٥	١٦٥

(٦) يبين الجدول المقابل فصائل الدم لـ ١٥٠٠ شخص.

اختير شخص عشوائياً من هذه المجموعة.

(أ) ما احتمال أن يكون دمه من الفصيلة A؟

$$P(A) = \frac{515 + 115}{1500} = \frac{630}{1500} = \frac{21}{50}$$

(ب) ما احتمال أن يكون نوع دمه موجب؟

$$P(\text{موجب}) = \frac{510 + 60 + 75 + 515}{1500} = \frac{1160}{1500} = \frac{58}{75}$$

البنود الموضوعية

في البنود (١-١٢) عبارات، ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة، (ب) إذا كانت العبارة خاطئة.

(ب)	(ب)	(١) قيمة المقدار $10!$ هي 3628800
(ب)	(أ)	(٢) قيمة المقدار $14 \times 5!$ هي 360
(ب)	(أ)	(٣) قيمة المقدار 1P_3 هي 360
(ب)	(ب)	(٤) قيمة المقدار 3P_3 هي 15
(ب)	(ب)	(٥) $^0P_2 = 2 \times ^0P_1$
(ب)	(ب)	(٦) مفكوك $(ج + ١)^٥$ هو: $ج٥ + ٥ج٤ + ١٠ج٣ + ١٠ج٢ + ٥ج + ١$
(ب)	(أ)	(٧) إذا كان الحد $١٢٦ ج٤ د٥$ أحد حدود مفكوك $(ج + د)^٥$ ، فإن قيمة $ن$ هي ٥
(ب)	(ب)	(٨) إذا كان معامل الحد الثاني في مفكوك $(س + ر)^٥$ هو ٧ فإن قيمة $ن$ هي ٦
(ب)	(أ)	(٩) الحد الثاني من $(س + ٣)^٩$ هو $٥٤ س^٨$
(ب)	(ب)	(١٠) اختيار لون السيارة عشوائياً واختيار نوع الإطارات عشوائياً هما حدثان مستقلان.
(ب)	(أ)	(١١) بفرض أن الحدثين $م$ ، $ن$ مستقلان، $ل(م) = \frac{12}{17}$ ، $ل(ن) = \frac{3}{8}$ إذاً $ل(م \cap ن) = \frac{9}{17}$
(ب)	(ب)	(١٢) في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة فإن احتمال الحصول على العدد ٤ أو عدد زوجي يساوي $\frac{1}{3}$

في التمارين (١٣-٢٤)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(د) ١	(ب) ١٢٠	(أ) $\frac{10}{21}$	(ب) $\frac{1}{120}$	(١٣) قيمة المقدار $\frac{110}{17!3}$ هي:
(د) ٢١٠	(ج) ٢,٥	(ب) ٧٥٦٠	(ب) ٧٥٦٠٠	(١٤) قيمة المقدار $^1P_3 \times ^1P_3$ هي:
(د) ٧٣٥	(ب) ١٠	(ب) ٥,١٨٤	(أ) ١٨	(١٥) قيمة المقدار $\frac{^7P_4}{^9P_3} \times ^9P_3$ هي:
(د) ١١٤٠٤٨٠٠	(ج) ٣٩٢	(ب) ٤٧٥٢٠٠	(ب) ٩٥٠٤٠	(١٦) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار ٥ لاعبين لفريق كرة السلة من بين ١٢ لاعباً إذا كان ترتيب المراكز في الفريق مهماً؟
(د) ٢٤	(ج) ٨٤٠	(ب) ٣٥	(ب) ٢١٠	(١٧) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار ٣ أعلام من مجموعة من ٧ أعلام مختلفة؟