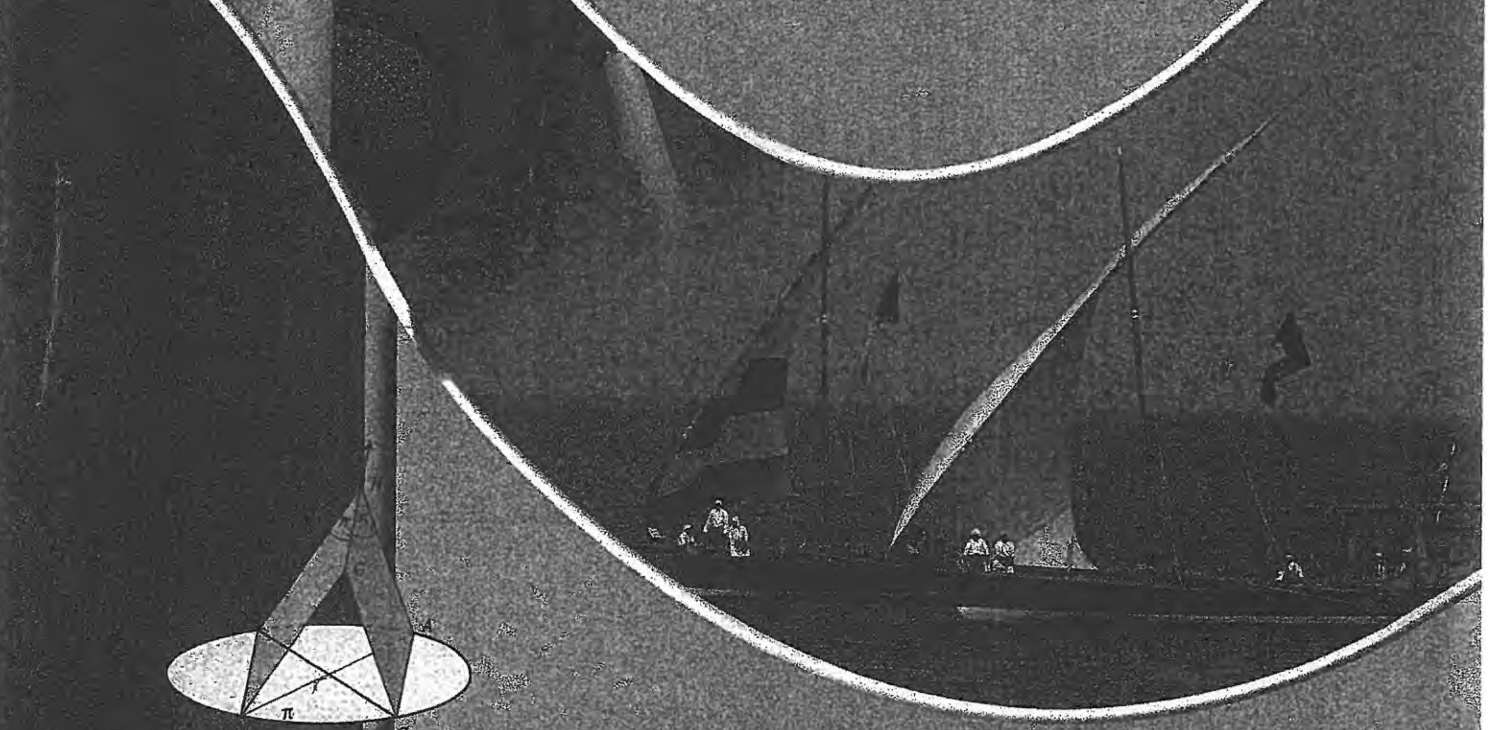
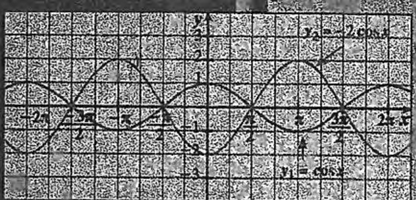
وزارة التربية

الرياضيات

كرّاسة التمارين





الصفّ الحادي عشر علمي

الفصل الدراسي الثاني

١١

الطبعة الأولى

الرياضيات

الصفّ الحادي عشر علمي

الفصل الدراسي الثاني

كرّاسة التمارين

اللجنة الإشرافية لدراسة ومواءمة سلسلة كتب الرياضيات

أ. حسين علي عبدالله (رئيسًا)

أ. حصة يونس محمد علي أ. فتحية محمود أبو زور

الطبعة الأولى

١٤٣٤ - ١٤٣٥ هـ

٢٠١٣ - ٢٠١٤ م

لجنة دراسة ومواءمة كتب الرياضيات للصف الحادي عشر علمي

أ. حسن نوح علي المهنا (رئيسًا)

أ. حسين اليماني الشامي　　أ. مصطفى محمد شعبان

أ. صديقة أحمد صالح الانصاري　　أ. شيخة فلاح مبارك الحجرف

أ. منى علي عيسى المسري

دار التَّربَويّون House of Education ش.م.م. وبيرسون إديوكيشن ٢٠١٣

الطبعة الأولى ٢٠١٣

صاحب السمو الشيخ صباح الأحمد الجابر الصباح

أمير دولة الكويت

سمو الشيخ نواف الأحمد الجابر الصباح

ولي عهد دولة الكويت

المحتويات

تمرَّنْ
7-1

الأعداد المركبة

Complex Numbers

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (4–1)، بسّط كل عدد مستخدمًا الوحدة التخيلية i

(1) $\sqrt{-16}$

(2) $\sqrt{-15}$

(3) $3\sqrt{-9}$

(4) $-\frac{1}{2}\sqrt{-100}$

في التمارين (8–5)، اكتب كل عدد في الصورة الجبرية.

(5) $2+\sqrt{-3}$

(6) $\sqrt{-1}+2$

(7) $\frac{-\sqrt{-50}-2}{6}$

(8) $\frac{\sqrt{-8}+8}{2}$

في التمرينين (11–9)، حل المعادلات التالية:

(9) $2x+3yi=-14+9i$

(10) $3x+19i=16-8yi$

(11) $14i^2-3i=2x+(y+5)i$

(12) مثّل كلًّا مما يلي في المستوى المركب:

(a) $z_1=-2+3i$ (b) $z_2=-4$ (c) $z_3=-i$ (d) $z_4=2(2+i)$

(13) اكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط التالية:

(a) $L(4,5)$ (b) $M(-4,-2)$ (c) $N(-2,6)$ (d) $P(0,-3)$

في التمارين (23–14)، بسّط كل تعبير مما يلي:

(14) $(2+4i)+(4-i)$

(15) $6-(8+3i)$

(16) $(4+\sqrt{-9})+(6-\sqrt{-49})$

(17) $(8-\sqrt{-1})-(-3+\sqrt{-16})$

(18) $(-2i)(5i)$

(19) $(4i)(-9i)^2$

(20) $-5(1+2i)+3i(3-4i)$

(21) $(-6-5i)(1+3i)$

(22) $(-2+\sqrt{-9})(6+\sqrt{-25})$

(23) $i(-6i)^3$

(24) إذا كان $z = \frac{1-i}{1+i}$ فأوجد: z^{12} , z^{27}

(25) إذا كان $z_1 = 2+i$, $z_2 = -3+4i$ فأوجد:

(a) $-\frac{1}{3}z_2$ (b) $z_1 . z_2$ (c) z_1^3 (d) $\overline{z_1 . z_2}$

(e) $\overline{z_1} - \overline{z_2}$ (f) $z_1 . \overline{z_2}$

(26) إذا كان $z = \frac{4i}{1-i\sqrt{3}}$ فأوجد: $\overline{z}$

(27) أوجد المعكوس الضربي لكل مما يلي:

(a) $-3-2i$ (b) $5i$ (c) $3i-4$

(28) إذا كان $z_1 = \sqrt{3}+i$, $z_2 = -\sqrt{3}+2i$ فأوجد: $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$, $\frac{z_1}{\overline{z_2}}$, $\frac{\overline{z_1}}{z_2}$

(29) **تفكير ناقد:** أوجد العلاقة بين y , x عندما يكون $(x+yi)^2$ عددًا تخيّليًا.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الصورة الجبرية للعدد: $3+\sqrt{-4}$ هي: $3+2i$ (a) (b)

(2) مرافق العدد المركب: $z = 3+4i$ هو: $\overline{z} = -3-4i$ (a) (b)

(3) المعكوس الجمعي للعدد المركب $z = 3-2i$ هو: $z' = 3+2i$ (a) (b)

(4) الصورة المبسّطة للتعبير: $(12+5i)-(2-i)$ هي: $10+6i$ (a) (b)

في التمارين (14–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) العدد: $32+\sqrt{-225}$ يكتب بالصورة الجبرية كما يلي:

a) $-15+6i$ b) $6+15i$ c) $6-15i$ d) $32+15i$

(6) حل المعادلة: $-10-6i=2x+3yi$ هو:

a) $x=5\ ,\ y=-2$ b) $x=-5\ ,\ y=-2$ c) $x=-5\ ,\ y=2$ d) $x=5\ ,\ y=2$

(7) إذا كان $z_1=5i+2$ ، $z_2=-3-i$ فإنّ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$ يساوي:

a) $\frac{1}{10}+\frac{17}{10}i$ b) $\frac{-1}{10}-\frac{17}{10}i$ c) $\frac{-1}{10}+\frac{17}{10}i$ d) $\frac{1}{10}-\frac{17}{10}i$

(8) $(8-5i)^2=$

a) $39+80i$ b) $39-80i$ c) $69+80i$ d) $69-80i$

(9) أبسط صورة للتعبير: $(3+\sqrt{-4})(4+\sqrt{-9})$ هي:

a) $18+17i$ b) $18+3\sqrt{-9}+4\sqrt{-4}$
c) $6+17i$ d) 18

(10) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=(1+2i)^2$ هي:

a) $z=-3+4i$ b) $z=5+4i$ c) $z=-3$ d) $z=5$

(11) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=(2-i)^3$ هي:

a) $z=14+13i$ b) $z=14-13i$ c) $z=2-11i$ d) $z=2-13i$

(12) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=\frac{i}{i+2}$ هي:

a) $z=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$ b) $z=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$
c) $z=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$ d) $z=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$

(13) إذا كان $z=i$ فإنّ z^{250} يساوي:

a) $-i$ b) i c) 1 d) -1

(14) ليكن $x\in\mathbb{Z}^+$ فإنّ مجموعة قيم x التي تجعل العدد $(5+i^x)$ عددًا حقيقيًّا هي:

a) $\mathbb{Z}^+$ b) $\{0,2,4,6,...\}$ c) $\{1,3,5,...\}$ d) $\{2,4,6,...\}$

تمرَّنْ
7-2

الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب

Polar Coordinates and Trigonometric Form of a Complex Number

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أوجد:

(a) $|5+12i|$

(b) $|2-2i|$

(c) $|zi|$

في التمارين (7–2)، حول الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية:

(2) $M\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$

(3) $N\left(1, \frac{3\pi}{4}\right)$

(4) $\left(1.5, \frac{7\pi}{3}\right)$

(5) $(2, \pi)$

(6) $(2, 270°)$

(7) $\left(2, -\frac{\pi}{6}\right)$

في التمارين (13–8)، أوجد الإحداثيات القطبية لكل من النقاط التالية:

(8) $(1, 1)$

(9) $(-2, 5)$

(10) $(-3, 0)$

(11) $(0, 4)$

(12) $(-2, -2\sqrt{3})$

(13) $(3\sqrt{3}, -3)$

في التمارين (21–14)، ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية: مستخدما السعة الأساسية

(14) $3i$

(15) $2+2i$

(16) $-2+2i\sqrt{3}$

(17) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

(18) $-2i$

(19) $\sqrt{3}+i$

(20) $3-3i$

(21) $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

في التمارين (28–22)، اكتب الأعداد التالية في الصورة المثلثية $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$:

$2\pi > \theta \geq 0$

(22) $5\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(23) $8(\cos 30° - i\sin(-150°))$

(24) $-\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

(25) $2(\cos 45° + i\sin 405°)$

(26) $4\left(-\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

(27) $5\left(\cos(-60^\circ)+i\sin(60^\circ)\right)$

(28) $3\left(\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3}\right)$

في التمارين (33–29)، ضع كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية:

(29) $\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}$

(30) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(31) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{3}+i\sin\frac{-\pi}{3}\right)$

(32) $7\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

(33) $\sqrt{3}(\cos 225^\circ+i\sin 225^\circ)$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (6–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $A\left(4,\frac{7\pi}{6}\right)$ هي: $A(-2\sqrt{3},2)$ — (a) (b)

(2) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $B(\sqrt{2},135^\circ)$ هي: $B(-1,1)$ — (a) (b)

(3) الإحداثيات القطبية للنقطة: $M\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ هي: $M\left(1,\frac{5\pi}{4}\right)$ — (a) (b)

صورة مثلثية

(4) ~~الصورة المثلثية~~ للعدد المركب: $z=\sqrt{3}-i$ هي: $z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ — (a) (b)

(5) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ هي: $z=1-i$ — (a) (b)

(6) السعة الأساسية للعدد $z=\cos 30^\circ+i\cos 240^\circ$ هي 330° — (a) (b)

في التمارين (13–7)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $A\left(4,\frac{5\pi}{3}\right)$ هي:

(a) $A(2,2\sqrt{3})$ (b) $A(-2,2\sqrt{3})$ (c) $A(-2,-2\sqrt{3})$ (d) $A(2,-2\sqrt{3})$

(8) الإحداثيات القطبية للنقطة: $B\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ هي:

(a) $B\left(1,\frac{-\pi}{4}\right)$ (b) $B\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$ (c) $B\left(1,\frac{3\pi}{4}\right)$ (d) $B\left(1,\frac{-3\pi}{4}\right)$

(9) الصورة المثلثية للعدد المركب: $z = 2 - 2\sqrt{3}\,i$ هي:

$2\pi \geq \theta \geq 0$

ⓐ $z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

ⓑ $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

ⓒ $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

ⓓ $z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

(10) الصورة المثلثية للعدد المركب: $z = \frac{-4}{1-i}$ هي:

$\theta \in [0, 2\pi)$

ⓐ $z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

ⓑ $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

ⓒ $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

ⓓ $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

(11) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ هي:

ⓐ $z = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

ⓑ $z = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

ⓒ $z = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

ⓓ $z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

(12) $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ فإنّ قيمة $\left(i^{2n+2} + i^{2n+8}\right)$ تساوي:

ⓐ 1 ⓑ 0 ⓒ -1 ⓓ i^{-2n}

(13) $(6 - 2i + 3i^5)^2$ تساوي:

ⓐ $35 - 12i$ ⓑ $35 + 12i$ ⓒ $81 - 12i$ ⓓ $81 + 12i$

تمرّنْ
7-3

حل معادلات

Solving Equations

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (4–1)، أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلات التالية:

(1) $3z - 1 + i = 5 - 2i$

(2) $z + 2\overline{z} = 4 + i$

(3) $5z - 4 + 2i = 3z + 1 - 4i$

(4) $z + 3(1+i)z - 8(2-i) = 0$

في التمارين (9–5)، أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلات التالية:

(5) $16x^2 + 64 = 0$

(6) $x^2 - 5x + 7 = 0$

(7) $x^2 + 6x + 25 = 0$

(8) $x^2 - 2x + 4 = 0$

(9) $z + \frac{4}{z} = 2$

(10) لتكن المعادلة $z^2 + z + 2 = 0$ ، بدون حل المعادلة، أثبت أن $\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}$ هو جذر للمعادلة ثم أوجد الجذر الثاني.

(11) أوجد الجذرين التربيعيّين للعدد المركب: $z = -3 + 4i$

(12) أوجد الجذرين التربيعيّين للعدد المركب: $z = 5 + 12i$

(13) أوجد الجذرين التربيعيّين للعدد المركب: $z = -7 - 24i$

(14) حل المعادلة: $(2+i)z^2 = 22 - 19i$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (6–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حل المعادلة: $\overline{z}+2=5-i$ هو: $z=3+i$ — (a) (b)

(2) حل المعادلة: $2z+\overline{z}-3-5i=0$ هو: $z=1-5i$ — (a) (b)

(3) مجموعة حل المعادلة: $z^2-4z+5=0$ هي: $\{-2-i,2+i\}$ — (a) (b)

(4) الجذران التربيعيان للعدد -1 هما: $-1, 1$ — (a) (b)

(5) الجذران التربيعيان للعدد المركب: $z=16+30i$ هما: $z_1=5+3i,\ z_2=-5-3i$ — (a) (b)

(6) إذا كان z_1, z_2 جذران تربيعيان للعدد z فإن $z_1+z_2=0$ — (a) (b)

في التمارين (10–7)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) حل المعادلة: $2z-5+6i=-3\overline{z}$ هو:

(a) $z=1+6i$ (b) $z=-1+6i$ (c) $z=1-6i$ (d) $z=-1-6i$

(8) مجموعة حل المعادلة: $z^2-4z+20=0$ هي:

(a) $\{2-4i,-2-4i\}$

(b) $\{-2+4i,-2-4i\}$

(c) $\{2-4i,-2+4i\}$

(d) $\{2-4i,2+4i\}$

(9) الجذران التربيعيان للعدد المركب: $z=33-56i$ هما:

(a) $\begin{cases} z_1=-7-4i \\ z_2=7+4i \end{cases}$

(b) $\begin{cases} z_1=7-4i \\ z_2=-7+4i \end{cases}$

(c) $\begin{cases} z_1=7+4i \\ z_2=7-4i \end{cases}$

(d) $\begin{cases} z_1=-7-4i \\ z_2=-7+4i \end{cases}$

(10) حل المعادلة $(3-4i)z=5-2i$ هو:

(a) $\frac{5}{3}+\frac{1}{2}i$ (b) $\frac{5}{3}-\frac{1}{2}i$ (c) $\frac{23}{25}+\frac{14}{25}i$ (d) $\frac{23}{25}-\frac{14}{25}i$

اختبار الوحدة السابعة

في التمارين (4–1)، بسّط كلًّا من التعابير التالية:

(1) $4\sqrt{-9}-2$

(2) $(4-i)+(5-9i)$

(3) $(-3+2i)-(6+i)$

(4) $(2+3i)(8-5i)$

(5) أوجد المعكوس الجمعي والمعكوس الضربي للعدد $3-7i$

(6) أوجد القيمة المطلقة للعدد $7-2i$

(7) أوجدكلًّا مما يلي:

(a) $-3i^{77}$

(b) i^{50}

(c) $(-2+3i)^2$

(8) أوجد مجموعة حلّ المعادلة: $2x^2+10=0$

صور مثلثية

(9) اكتب الكسر $\frac{1+3i}{3+2i}$ في الصورة الجبرية، ثم حوّلها إلى الصورة المثلثية.

(10) أوجد مجموعة حل المعادلة: $\frac{z+1}{z-1}=2i$

(11) أوجد مرافق العدد $\frac{3-i}{1+i}$

(12) حل المعادلة: $2z^2-6z+5=0$

(13) اكتب الأعداد المركبة التالية في الصورة المثلثية:

(a) $\frac{1}{2}$

(b) $-3i$

(c) $2\sqrt{3}+6i$

(14) اكتب العدد $-3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ في الصورة المثلثية.

(15) اكتب العدد $\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ في الصورة الجبرية.

(16) أوجد الجذرين التربيعيين للعدد $-8+6i$

(17) (a) أثبت أن $-2+\frac{3}{2}i$ هو أحد جذري المعادلة: $4z^2+16z+25=0$

(b) أوجد الجذر الآخر.

تمارين إثرائية

(1) أثبت أن النقاط الممثلة للأعداد:

i، $-i$، $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$، $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$، $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ تنتمي إلى دائرة واحدة.

(2) اكتب العدد $\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$ في الصورة المثلثية.

(3) أثبت أن النقاط A, B, C, D الممثلة للأعداد المركبة $z_A = 1$، $z_B = 1\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$، $z_C = \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$، $z_D = 2$ تشكل معينًا.

(4) اكتب العدد $z = \sin\alpha - i\cos\alpha$ في الصورة المثلثية. ستمرنا بعر الأساسي

(5) أثبت أن $(1+i)^8$ هو عدد حقيقي موجب.

(6) إذا كان $|z| = 1$، أثبت أن $\overline{z} = \frac{1}{z}$

(7) **(a)** أثبت أن $1+i$ هو أحد عوامل $f(z) = z^3 + (-2+3i)z^2 + (13-i)z - 6 - 10i$

(b) استخدم القسمة التركيبية لتوجد ناتج قسمة $f(z)$ على $z = 1+i$

(8) أوجد مجموعة النقاط M الممثلة للعدد المركب z بحيث تكون سعته الأساسية تساوي $\frac{\pi}{3}$

(9) **(a)** أثبت أن: $1+i$، $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ هما جذران للمعادلة: $z^4 - z^3 + z^2 + 2 = 0 \ (1)$

(b) أوجد مجموعة حل المعادلة (1).

(c) أثبت أن $f(z) = z^4 - z^3 - z^2 + 2$ يمكن أن تكتب على شكل كثيرتي حدود من الدرجة الثانية مضروبتين في بعضهما بعضًا.

(10) **(a)** أثبت أن -1 هو أحد أصفار $f(z) = z^2 + 2(3-i)z + 5 - 2i$

(b) أوجد الصفر الثاني.

تمرَّنْ

8−1

التمثيل البياني للدوال المثلثية (الجيب، جيب التمام، الظل)

Graphs of Trigonometric Functions (Sine, Cosine and Tangent)

المجموعة A تمارين مقالية

(1) حدِّد دورة كل دالة مما يلي وسعتها:

(a) $y = 3\cos x$

(b) $y = \sin 2x$

(c) $y = 3\sin\frac{x}{3}$

(d) $y = \frac{1}{3}\cos\frac{x}{2}$

(2) اكتب معادلة دالة على صورة $y = a\sin(bx)$ في كل من الحالات التالية:

(a) السعة 1، الدورة $\frac{2\pi}{3}$ $a = 1$

(b) السعة $\frac{1}{3}$، الدورة π $a = \frac{1}{3}$

(c) السعة 4، الدورة 4π $a = 4$

(3) اكتب معادلة دالة على صورة $y = a\cos(bx)$ في كل من الحالات التالية:

(a) السعة 5، الدورة 3π $a = 5$ $a = 5$

(b) السعة 2، الدورة π $a = 2$ $a = \frac{1}{2}$

(c) السعة 3، الدورة $\frac{\pi}{2}$ $a =$ $a = \frac{3}{5}$

(4) مثِّل بيانيًّا دورة واحدة لكل دالة من الدوال التالية:

(a) $y = 2\sin x$

(b) $y = -3\sin x$

(c) $y = 0.5\sin 2x$

(d) $y = 4\sin\frac{1}{2}x$

(e) $y = -\sin 5x$

(f) $y = 3\cos x$

(g) $y = 3\cos 5x$

(h) $y = -\cos 3x$

(i) $y = \cos 2x$

(5) حدِّد دورة كل دالة مما يلي:

(a) $y = \tan 5x$

(b) $y = \tan\frac{3x}{2}$

(6) اكتب معادلة دالة على صورة $y = \tan(bx)$ في كل من الحالات التالية:

(a) الدورة $\frac{\pi}{5}$ **(b)** الدورة $\frac{2\pi}{3}$

(c) الدورة $\frac{\pi}{4}$

(7) مثّل بيانيًّا دورة واحدة لكل دالة من الدوال التالية:

(a) $y = \tan 2x$ **(b)** $y = \tan\frac{x}{2}$ **(c)** $y = -3\tan x$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–7)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

$y = \pm 5\sin$

(1) معادلة الدالة المثلثية $y = a\sin(b\theta)$ حيث السعة 5 والدورة 3π هي $y = 5\sin\left(\frac{2}{3}\theta\right)$ (a) (b)

$y = \pm 3\sin$

(2) الدالة التي دورتها $\frac{\pi}{2}$ وسعتها 3 هي $y = 3\sin\left(\frac{\pi\theta}{2}\right)$ (a) (b)

(3) الدالة $y = 3\tan\left(\frac{3}{4}x\right)$ دورتها $\frac{4}{3}\pi$ (a) (b)

(4) الدالة التي دورتها $\frac{\pi}{3}$ وسعتها 4 هي $y = -4\cos(6x)$ (a) (b)

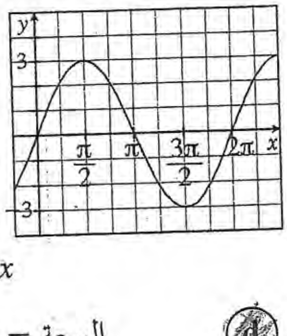
(5) سعة الدالة $y = -5\cos 2x$ هي -5 (a) (b)

(6) في الدالة f حيث $f(x) = a\cos bx$ يكون: $2|a| = \max f + \min f$ (a) (b)

(7) الدالتان f, g حيث $g(x) = \tan 4x$ ، $f(x) = \cos 8x$ لهما نفس الدورة. (a) (b)

في التمارين (8–17)، ظلّل رمز الدائرة الدالّ على الإجابة الصحيحة.

(8) البيان التالي يمثل بيان الدالة:



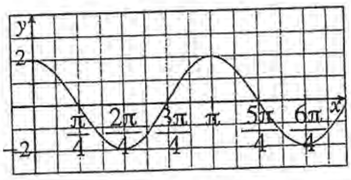
(a) $f(x) = 3\cos x$ (b) $f(x) = 3\sin x$

(c) $f(x) = -3\sin x$ (d) $f(x) = \sin 3x$

(9) لتكن $f(x) = 3\tan 2x$ فإن:

(a) السعة $= 1$ (b) السعة $= 2$ (c) السعة $= 3$ (d) f ليس لها سعة

(10) ليكن بيان f كما في الشكل التالي:

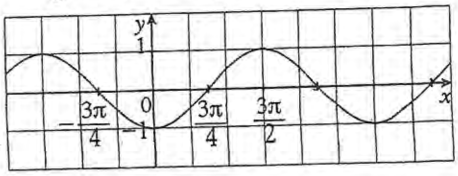


فإن f يمكن أن تكون:

(a) $2\cos 2x$ (b) $\cos 2x$ (c) $\cos\frac{x}{2}$ (d) $\sin 2x$

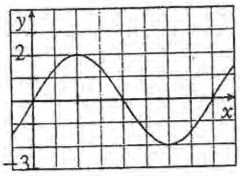
شكل g دالة دورية بيان كما في الشكل

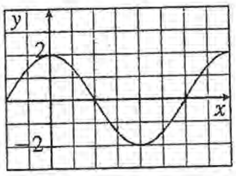
(11) ليكن بيان g كما في الشكل التالي فإن الدورة تساوي:

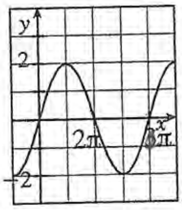


(a) π (b) 2π (c) 3π (d) $\frac{6\pi}{4}$

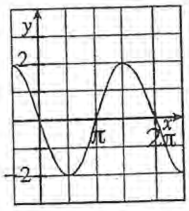
(12) لتكن الدالة g حيث: $g(x) = a \sin bx$ فإن بيان g لا يمكن أن يكون:

(a)


(b)


(c)


4π

(d)


(13) معادلة الدالة المثلثية $y = a\cos(bx)$ حيث السعة 4 والدورة 6 هي:

$\frac{1}{4}\cos\left(\frac{x}{3}\right)$

(a) $y = \pm\frac{3}{2}\cos\left(\frac{x}{3}\right)$ (b) $y = \pm 4\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$

(c) $y = \pm 4\cos\left(\frac{3}{\pi}x\right)$ (d) $y = \pm 4\cos\left(\frac{x}{3}\right)$

(14) الدالة $y = a\cos(bx)$ ~~التي دورتها $\frac{\pi}{4}$ وسعتها 2 هي~~: $a=2$ ، الدورة $= \frac{\pi}{4}$ هي

(a) $y = \pm 2\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ (b) $y = \pm 8\cos(8x)$

(c) $y = \pm 2\cos(8x)$ (d) $y = \pm 8\cos\left(\frac{x}{4}\right)$

(15) معادلة الدالة المثلثية $y = a\sin(bx)$ حيث السعة 3 والدورة $\frac{\pi}{2}$ هي:

(a) $y = \pm 3\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ او $y = -3\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ (b) $y = \pm 3\sin\left(\frac{2}{\pi}x\right)$ او $y = -3\sin\left(\frac{2}{\pi}x\right)$

(c) $y = \pm 3\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ او $y = -3\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ (d) $y = \pm 3\sin(4x)$ او $y = -3\sin 4x$

(16) معادلة الدالة المثلثية $y = \tan(bx)$ حيث الدورة $\frac{3}{4}$ هي:

(a) $y = \tan\left(\frac{4}{3}\pi x\right)$ (b) $y = \tan\left(\frac{3}{4}x\right)$

(c) $y = \tan\left(\frac{4}{3}x\right)$ (d) $y = \tan\left(\frac{3}{4}\pi x\right)$

(17) في الدالة المثلثية $y = -2\sin\left(\frac{3}{5}x\right)$ السعة والدورة هما:

(a) $-2 , \frac{3\pi}{5}$ (b) $2 , \frac{10\pi}{3}$

(c) $2 , \frac{3\pi}{5}$ (d) $2 , \frac{2\pi}{15}$

تمرّن
8–2

التحويلات الهندسية للدوال الجيبية

Geometric Transformations of Sinusoid Functions

المجموعة A تمارين مقالية

(1) صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين h , f لكل مما يلي:

(a) $f(x) = \cos 2x \ , \ h(x) = \frac{5}{3}\cos 2x$

(b) $f(x) = \sin \frac{x}{3} \ , \ h(x) = \frac{-2}{3}\sin \frac{x}{3}$

(c) $f(x) = \sin x \ , \ h(x) = \sin 3x$

(d) $f(x) = \cos x \ , \ h(x) = \cos \frac{x}{5}$

(e) $f(x) = \sin x \ , \ h(x) = -\frac{1}{3}\sin(-2x)$

(f) $f(x) = \cos x \ , \ h(x) = 1.5\cos 4x$

(g) $f(x) = \cos 2x \ , \ h(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

(h) $f(x) = \sin 3x \ , \ h(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

(i) $f(x) = 0.3\cos 2x \ , \ h(x) = 0.3\cos 2x + 4$

(j) $f(x) = 3\sin \frac{x}{2} \ , \ h(x) = 3\sin \frac{x}{2} - 1$

(2) صف العلاقة بين التمثيلين البيانيين لكل من: $y_1 = \cos x \ , \ y_2 = \cos 3x$
ثم ارسم دورتين من الدالة y_2

(3) وضّح كيف يمكن الحصول على التمثيل البياني لكل من الدالتين التاليتين باستخدام تحويلات الدوال المثلثية $y = \sin x$ أو $y = \cos x$، ثم أوجد سعة كل دالة ودورتها:

(a) $y = -2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 1$

(b) $y = -3.5\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) - 1$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) يمثّل منحنى الدالة $f(x) = 4\sin(3x)$ تمددًا رأسيًّا 4 ~~وحدات~~ وانكماشًا أفقيًّا 3 ~~وحدات~~ لمنحنى الدالة: $g(x) = \sin x$ معامل

معامل ٣

(a) (b)

(2) يمثّل منحنى الدالة $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 4$ إزاحة إلى اليسار $\frac{\pi}{3}$ وحدة وإزاحة إلى الأعلى 4 وحدات لمنحنى الدالة: $g(x) = \cos x$

ⓐ ⓑ

(3) يمثّل منحنى الدالة $y = 2\tan x$ تمددًا رأسيًّا بمعامل 2 لمنحنى الدالة $y = \tan x$

ⓐ ⓑ

(4) يمثّل منحنى الدالة $f(x) = 4\cos(x - 3)$ انكماشًا رأسيًّا قيمته 4 وحدات وإزاحة أفقية قيمتها 3 وحدات إلى اليمين لمنحنى الدالة $g(x) = \cos x$

ⓐ ⓑ

(5) يمثّل منحنى الدالة $f(x) = -3\sin(x + 4)$ تمددًا رأسيًّا قيمته 3 وحدات إلى الأسفل وإزاحة أفقية قيمتها 4 وحدات إلى اليسار لمنحنى الدالة $y = \sin x$

ⓐ ⓑ

في التمارين (6–10)، ظلّل رمز الدائرة الدالّ على الإجابة الصحيحة.

(6) يمثّل منحنى الدالة $f(x) = -3\sin(x - 5)$ لمنحنى الدالة $g(x) = \sin x$:

ⓐ انكماشًا رأسيًّا قيمته 3 وحدات إلى الأسفل وإزاحة أفقية قيمتها 5 وحدات إلى اليسار.

ⓑ انكماشًا رأسيًّا قيمته 3 وحدات إلى الأسفل وإزاحة أفقية قيمتها 5 وحدات إلى اليسار.

ⓒ تمددًا رأسيًّا قيمته 3 وحدات إلى الأسفل وإزاحة أفقية قيمتها 5 وحدات إلى اليمين.

ⓓ تمددًا رأسيًّا قيمته 3 وحدات إلى الأعلى وإزاحة أفقية قيمتها 5 وحدات إلى اليمين.

(7) يمثّل منحنى الدالة $f(x) = \sin(2x - 6) - 3$ لمنحنى الدالة $g(x) = \sin x$:

ⓐ انكماشًا أفقيًّا بمعامل $\frac{1}{2}$، إزاحة أفقية 3 وحدات لجهة اليمين، إزاحة رأسية قيمتها 3 إلى الأسفل.

ⓑ انكماشًا أفقيًّا بمعامل 2، إزاحة أفقية 6 وحدات لجهة اليمين، إزاحة رأسية قيمتها 3 وحدات إلى الأعلى.

ⓒ انكماشًا أفقيًّا بمعامل $\frac{1}{2}$، إزاحة أفقية 3 وحدات لجهة اليسار، إزاحة رأسية قيمتها 3 وحدات إلى الأسفل.

ⓓ انكماشًا أفقيًّا بمعامل $\frac{1}{2}$، إزاحة أفقية 6 وحدات لجهة اليسار، إزاحة رأسية قيمتها 3 وحدات إلى الأسفل.

(8) يمثّل منحنى الدالة $f(x) = -4\cos\left(\frac{x}{3}\right)$ لمنحنى الدالة $g(x) = \cos x$:

ⓐ تمددًا رأسيًّا إلى الأعلى 4 وحدات وتمددًا أفقيًّا 3 وحدات.

ⓑ تمددًا رأسيًّا إلى الأسفل 4 وحدات وتمددًا أفقيًّا 3 وحدات.

ⓒ انكماشًا رأسيًّا إلى الأعلى 4 وحدات وانكماشًا أفقيًّا 3 وحدات.

ⓓ انكماشًا رأسيًّا إلى الأسفل 4 وحدات وانكماشًا أفقيًّا 3 وحدات.

$-2\cos\frac{x}{4}$ $-2\cos\frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+5$

(9) يمثّل منحنى الدالة $f(x) = -2\cos\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{8}\right)+5$ لمنحنى الدالة $g(x) = \cos x$:

(a) ~~تمددًا رأسيًّا 2 وحدة إلى الأسفل، تمددًا أفقيًّا 4 وحدات، إزاحة رأسية 5 وحدات إلى الأعلى وأفقية $\frac{\pi}{2}$ لجهة اليمين.~~ الأسفل مقدار اليسار

(b) تمددًا رأسيًّا 2 وحدة إلى الأسفل، تمددًا أفقيًّا 8 وحدات، إزاحة رأسية 5 وحدات إلى الأعلى وأفقية $\frac{\pi}{8}$ لجهة اليمين. مقدار $\frac{\pi}{8}$

(c) تمددًا رأسيًّا 2 وحدة إلى الأعلى، انكماشًا أفقيًّا 4 وحدات، إزاحة رأسية 5 وحدات إلى الأعلى وأفقية $\frac{\pi}{4}$ لجهة اليمين. مقدار

(d) تمددًا رأسيًّا 2 وحدة إلى الأسفل، تمددًا أفقيًّا 4 وحدات، إزاحة رأسية 5 وحدات إلى الأسفل وأفقية $\frac{\pi}{2}$ لجهة اليمين. مقدار

(10) مجموعة حل المعادلة $3\tan(3x) = \sqrt{3}$ على الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ هي:

(a) $\left\{\frac{\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}\right\}$

(b) $\left\{\frac{\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}\right\}$

(c) $\left\{\frac{-5\pi}{18}, \frac{\pi}{18}\right\}$

(d) $\left\{\frac{-5\pi}{18}, \frac{\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}\right\}$

$g(x) = -2\cos\frac{x}{4}$

9

تمرَّنْ
8-3

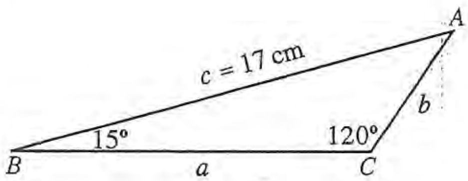
قانون الجيب

Law of Sine

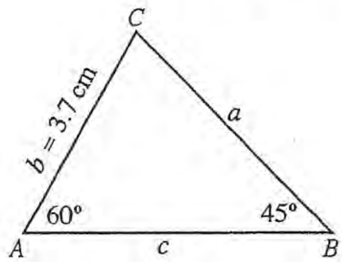
المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (2—1)، حلّ كلًّا من المثلثين التاليين:

(1)



(2)



في التمرينين (4—3)، حلّ المثلث ABC:

(3) $m(\widehat{A}) = 32°, a = 17\text{ cm}, b = 11\text{ cm}$

(4) $m(\widehat{A}) = 43°, a = 32\text{ cm}, b = 28\text{ cm}$

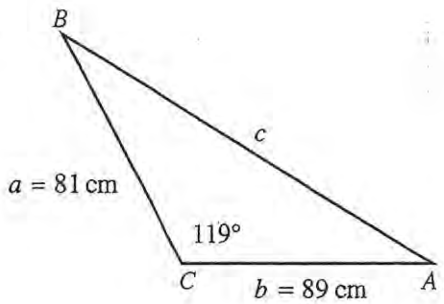
في التمرينين (6—5)، يمكن تكوين مثلثين باستخدام القياسات المعطاة، حلّ كلًّا منهما:

(5) $m(\widehat{C}) = 68°, a = 19\text{ cm}, c = 18\text{ cm}$

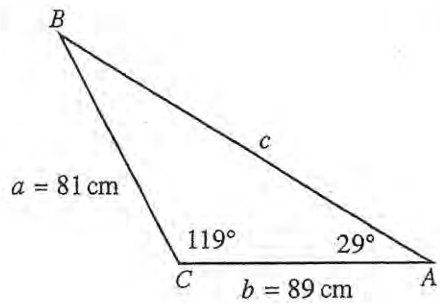
(6) $m(\widehat{B}) = 57°, a = 11\text{ cm}, b = 10\text{ cm}$

في التمرينين (8—7)، قرر ما إذا كان يمكن حلّ المثلث باستخدام قانون الجيب، ثم حلّه إذا كان ذلك ممكنًا. وإذا لم يكن ممكنًا فاشرح السبب.

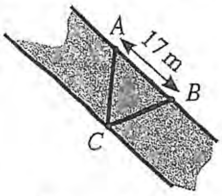
(7)



(8)



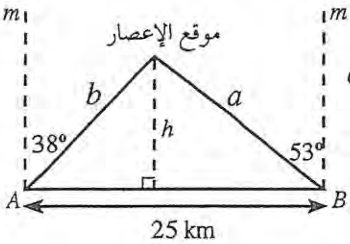
(9) مسح جداول المياه: تقع العلامتان A, B على الحافة نفسها لجدول مياه، تساوي المسافة بينهما 17 m وتقع علامة ثالثة C على الحافة المقابلة بحيث $m(B\widehat{A}C) = 72°$، $m(A\widehat{B}C) = 53°$



(a) أوجد المسافة بين A, C

(b) أوجد المسافة بين حافتي الجدول على افتراض أنهما متوازيتان.

(10) التوقّع بحالة الطقس: وقف اثنان من مصلحة الأرصاد الجوية أحدهما في غرب الطريق عند النقطة A والآخر في شرق الطريق عند النقطة B، تفصل بينهما مسافة 25 km



رأى الواقف عند النقطة A إعصارًا في اتجاه 38° شرق الشمال ورأى الواقف عند النقطة B الإعصار نفسه في اتجاه 53° غرب الشمال.

(a) أوجد المسافة بين كل من الشخصين وموقع الإعصار.

(b) أوجد المسافة بين الإعصار والطريق.

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–3)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 100°$, $m(\widehat{B}) = 30°$, $BC = 20$ cm فإنّ: $AC = 10.154$ cm   (b)   (a)

(2) في المثلث ABC: $m(\widehat{B}) = 80°$, $AB = 12$ cm , $AC = 16$ cm فإنّ: $m(\widehat{C}) = 50°$ (b)   (a)

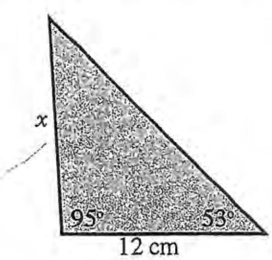
(3) في كل مثلث ABC يكون: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{\sin\gamma}{c}$ (b)   (a)

في التمارين (4–9)، ظلّل رمز الدائرة الدالّ على الإجابة الصحيحة.

(4) في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 80°$, $m(\widehat{B}) = 40°$, $AC = 10$ cm فإنّ طولي $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ يساويان:

(a) 7.43 cm , 15.32 cm
(b) 6.53 cm , 13.47 cm
(c) 13.47 cm , 15.32 cm
(d) 7.43 cm , 6.53 cm

(5) في المثلث المقابل، x تساوي حوالى:



(a) 8.6 cm
(b) 15 cm
(c) 18.1 cm
(d) 19.2 cm

(6) مثلث قياسات زواياه: $50^\circ, 60^\circ, 70^\circ$، طول أصغر ضلع فيه هو $9\ \text{cm}$
طول أطول ضلع حوالى:

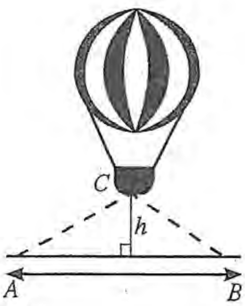
(a) $11\ \text{cm}$ (b) $11.5\ \text{cm}$ (c) $12\ \text{cm}$ (d) $12.5\ \text{cm}$

(7) القياسات المعطاة في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 56^\circ$, $AC = 23\ \text{cm}$, $AB = 19\ \text{cm}$، طول $\overline{BC}$ يساوي:

(a) $12\ \text{cm}$ (b) $18\ \text{cm}$

(c) $19\ \text{cm}$ (d) لا يمكن استخدام قانون الجيب

(8) رأى شخصان، أحدهما يقف عند النقطة A والثاني عند النقطة B، منطادًا، حيث المسافة بينهما $3\ \text{km}$. إذا كان قياس زاوية الارتفاع عند النقطة A هي 28° وقياس زاوية الارتفاع عند النقطة B هي 37°، فإنّ ارتفاع المنطاد عن سطح الأرض هو:



$180-(37+28)=115$

$\frac{\sin 115}{3} = \frac{\sin 28}{a}$ $a = 1.559\ \text{km}$

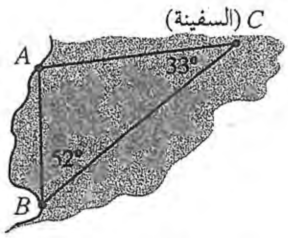
$\sin B = \frac{h}{a}$

(a) $h \approx 1200\ \text{m}$ (b) $h \approx 2\,500\ \text{m}$

(c) $h \approx 940\ \text{m}$ (d) $h \approx 880\ \text{m}$

935

(9) تقع منارتان A , B على خط واحد من الشمال إلى الجنوب وتساوي المسافة بينهما $20\ \text{km}$،
إذا كان قائد السفينة موجود في الموقع C بحيث إن $m(A\widehat{C}B) = 33^\circ$
وعامل الراديو موجود في الموقع B بحيث إن: $m(A\widehat{B}C) = 52^\circ$،
فإن المسافة بين السفينة وكل من المنارتين تساوي:



(a) $AC \approx 13.8\ \text{km}, BC \approx 10.9\ \text{km}$ (b) $AC \approx 32.6\ \text{km}, BC \approx 36.6\ \text{km}$

(c) $AC \approx 28.9\ \text{km}, BC \approx 10.9\ \text{km}$ (d) $AC \approx 28.9\ \text{km}, BC \approx 36.6\ \text{km}$

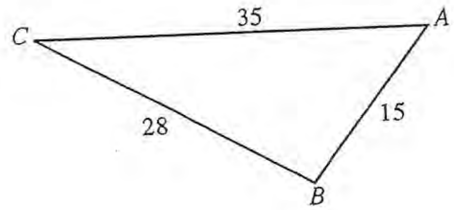
تمرّنْ
8-4

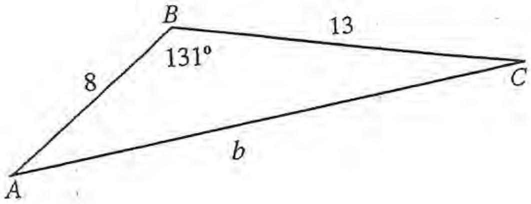
قانون جيب التمام

Law of Cosine

المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (2–1)، حلّ كلًّا من المثلثين التاليين:

(1) 

(2) 

في التمارين (8–3)، حلّ كل مثلث مما يلي:

(3) $a = 12, b = 21, m(\widehat{C}) = 95°$

(4) $b = 22, c = 31, m(\widehat{A}) = 82°$

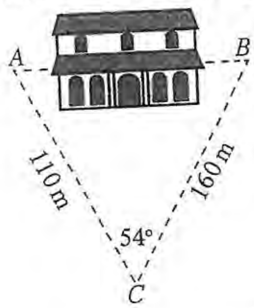
(5) $a = 1, b = 5, c = 4$

(6) $a = 3.2, b = 7.6, c = 6.4$

(7) $m(\widehat{A}) = 63°, a = 8.6, b = 11.1$

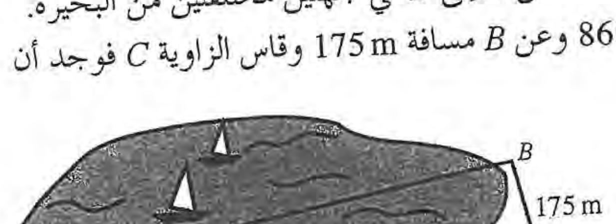
(8) $m(\widehat{A}) = 71°, a = 9.3, b = 8.5$

(9) **في الهندسة:** متوازي أضلاع يساوي طول ضلعيه المتجاورين 18 cm، 26 cm وقياس الزاوية بينهما 39°. أوجد طول قطره الأصغر.



(10) **قياس المسافة بطريقة غير مباشرة:** أراد عادل أن يقيس المسافة بين نقطتين A وB في جهتين مختلفتين من مبنى وذلك من الموقع C الذي يبعد عن A مسافة 110 m وعن B مسافة 160 m كما في الشكل المقابل.
إذا كان $m(\widehat{C}) = 54°$. فأوجد المسافة AB.

(11) **حسابات مسّاحي الأراضي:** أراد خالد أن يقيس المسافة من A إلى B في جهتين مختلفتين من البحيرة. فوقف في الموقع C الذي يبعد عن A مسافة 860 m وعن B مسافة 175 m وقاس الزاوية C فوجد أن قياسها 78°، أوجد طول المسافة AB.



المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) في المثلث ABC: $AB = 24\,\text{cm}$, $AC = 19\,\text{cm}$, $BC = 27\,\text{cm}$ فإنّ: $m(\widehat{A}) \approx 76.82°$ — (a) (b)

(2) في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 60°$, $BC = 44\,\text{cm}$, $AB = 20\,\text{cm}$ فإنّ: $AC \approx 50.5\,\text{cm}$ — (a) (b)

(3) في المثلث ABC: $b^2 + c^2 > 2bc\cos A$ — (a) (b)

(4) إذا كانت أطوال أضلاع مثلث تساوي $5\,\text{cm}, 8\,\text{cm}, 12\,\text{cm}$ فإن قياس الزاوية الكبرى في هذا المثلث يساوي حوالى $133.4°$ — (a) (b)

في التمارين (5–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) في المثلث ABC: $m(\widehat{C}) = 60°$, $AC = 10\,\text{cm}$, $BC = 20\,\text{cm}$ فإن طول $\overline{AB}$ يساوي:

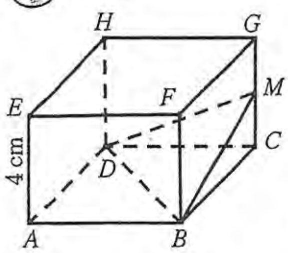
(a) $AB = 10\sqrt{7}\,\text{cm}$ (b) $AB = 10\sqrt{3}\,\text{cm}$ (c) $AB = 12.4\,\text{cm}$ (d) $AB = 29\,\text{cm}$

(6) في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 120°$, $AB = 30\,\text{cm}$, $AC = 40\,\text{cm}$ فإنّ طول $\overline{BC}$ يساوي:

(a) $BC \approx 60.8\,\text{cm}$ (b) $BC \approx 36\,\text{cm}$ (c) $BC \approx 68\,\text{cm}$ (d) $BC \approx 21\,\text{cm}$

(7) إذا كان $BC = 25\,\text{cm}$, $AC = 17\,\text{cm}$, $AB = 12\,\text{cm}$ فإنّ قياس الزاوية الكبرى في المثلث ABC يساوي حوالى:

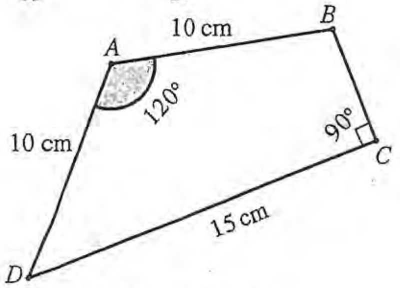
(a) $118°$ (b) $110°$ (c) $125°$ (d) $100°$



(8) $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه $4\,\text{cm}$، النقطة M منتصف الضلع $\overline{GC}$

فإن: قياس الزاوية $(D\widehat{M}B)$ يساوي:

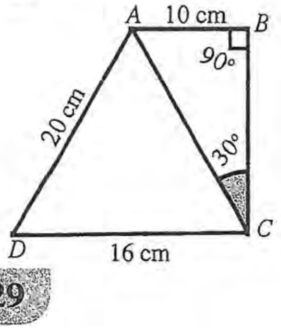
(a) $78.46°$ (b) $86.82°$ (c) $11.54°$ (d) $3.2°$



(9) في الشكل الرباعي $ABCD$ طول $\overline{BC}$ هو:

(a) $12.16\,\text{cm}$ (b) $8.66\,\text{cm}$

(c) $11.5\,\text{cm}$ (d) $13.7\,\text{cm}$



(10) في الشكل الرباعي $ABCD$، قياس الزاوية $(B\widehat{A}D)$ يساوي تقريبًا:

(a) $110°$ (b) $104°$

(c) $107°$ (d) $120°$

تمرّنْ
8-5

مساحة المثلث

Area of Triangle

المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (2–1)، أوجد مساحة المثلث ABC بطريقتين مختلفتين.

(1) $m(\hat{A}) = 47^\circ$, $b = 32\text{ cm}$, $c = 19\text{ cm}$

(2) $a = 4\text{ cm}$, $b = 5\text{ cm}$, $c = 8\text{ cm}$

في التمارين (6–3)، حدّد ما إذا كانت أطوال الأضلاع التالية تكوّن مثلثًا أم لا. إذا كانت تكوّن مثلثًا فاستخدم قاعدة هيرون لإيجاد مساحته. (الأطوال بالسنتيمتر). استخدم قاعدة هيرون لإيجاد مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه كالتالي

(3) $a = 5$, $b = 9$, $c = 7$

(4) $a = 23$, $b = 19$, $c = 12$

(5) $a = 19.3$, $b = 22.5$, $c = 31$

(6) $a = 18.2$, $b = 17.1$, $c = 12.3$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (6–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا عرفت أطوال أضلاع مثلث فيمكن استخدام قاعدة هيرون لإيجاد مساحته. (a) (b)

(2) لا يمكن إيجاد مساحة مثلث بمعلومية قياسات زواياه الثلاثة. (a) (b)

(3) لا يمكن استخدام قاعدة هيرون إذا كان المثلث قائم الزاوية. (a) (b)

(4) إن معرفة قياس إحدى زوايا مثلث هو شرط ضروري لإيجاد مساحته. (a) (b)

(5) إذا كان a, b طولا ضلعين متتاليين في متوازي أضلاع وθ قياس الزاوية بينهما فإن مساحة متوازي الأضلاع تساوي $ab\sin\theta$ (a) (b)

(6) في المثلث ABC: $AC = 9\text{ cm}$, $AB = 7\text{ cm}$, $BC = 5\text{ cm}$ فإن مساحة المثلث ABC تساوي حوالى 15 cm^2 (a) (b)

في التمارين (7–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) إذا كان: $m(\widehat{C}) = 40^\circ$, $b = 3\,\text{cm}$, $a = 2\,\text{cm}$ فإن مساحة المثلث ABC تساوي حوالى:

(a) $4.6\,\text{cm}^2$

(b) $3.86\,\text{cm}^2$

(c) $1.93\,\text{cm}^2$

(d) $2.3\,\text{cm}^2$

(8) مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه 9 cm , 8 cm , 7 cm هي:

(a) $6\sqrt{15}\text{ cm}^2$

(b) $12\sqrt{5}\text{ cm}^2$

(c) $16\sqrt{3}\text{ cm}^2$

(d) $18\sqrt{3}\text{ cm}^2$

(9) مساحة مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه a هي:

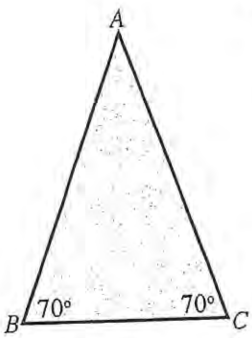
(a) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ units^2

(b) a^2 units^2

(c) $\frac{1}{2}a^2$ units^2

(d) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ units^2

(10) إذا كانت مساحة المثلث ABC تساوي حوالى $8\,\text{cm}^2$ فإن طول $\overline{AB}$ هو حوالى:



(a) 5 cm

(b) 8 cm

(c) 4 cm

(d) 6 cm

اختبار الوحدة الثامنة

في التمارين (3–1)، ارسم بيان كل دالة.

(1) $y = -2\cos x$ **(2)** $y = 2\sin 2x$ **(3)** $y = \tan\frac{3}{2}x$

في التمارين (8–4)، حدّد دورة كل دالة وسعتها إذا كان ممكنًا.

(4) $y = 1.5\sin x$ **(5)** $y = 5\cos\frac{x}{2}$ **(6)** $y = -4\sin\frac{\pi}{3}x$

(7) $y = \tan 2.5x$ **(8)** $y = -\tan\frac{\pi}{6}x$

(9) اكتب معادلة دالة على صورة $y = a\sin(bx)$ إذا كانت السعة 3، الدورة 4π

في التمرينين (11–10)، استخدم التحويلات لكي تصف كيف أن التمثيل البياني لمنحنيات الدوال التالية مرتبطًا بالتمثيل البياني للدوال المثلثية الأساسية $\sin x$ أو $\cos x$

(10) $y = -2\sin\frac{\pi x}{4}$ **(11)** $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

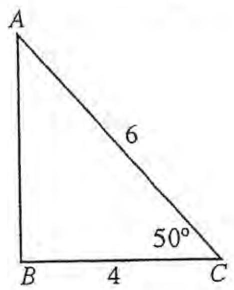
في التمارين (15–12)، أوجد مساحة كل مثلث.

(12) $m(\widehat{A}) = 20°, b = 5\text{ cm}, c = 5\text{ cm}$ **(13)** $a = 4\text{ cm}, b = 3\text{ cm}, c = 5\text{ cm}$

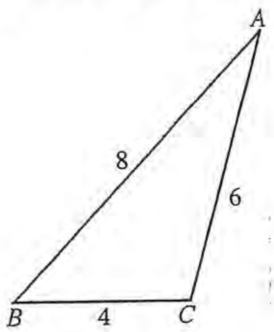
(14) $m(\widehat{A}) = 10°, m(\widehat{C}) = 40°, c = 3\text{ cm}$ **(15)** $a = 4\text{ cm}, b = 2\text{ cm}, c = 3\text{ cm}$

في التمارين (18–16)، أوجد العناصر المجهولة (قياس زاوية أو طول ضلع) في كل مثلث مما يلي:

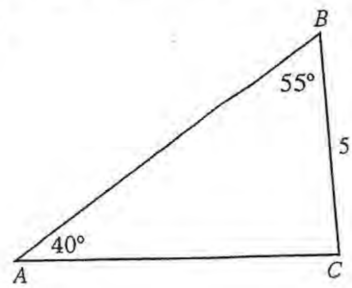
(16)



(17)



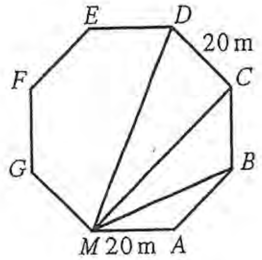
(18)



(19) **الملاحة الجوية:** أقلعت طائرتان في الوقت نفسه، إحداهما في اتجاه الشرق بسرعة 560 km/h والأخرى في اتجاه الشمال الشرقي بسرعة 600 km/h، أوجد البعد بينهما بعد ساعتين من افتراقهما علمًا أنهما تحلقان على الارتفاع نفسه.

(20) **التصميم الزراعي:** صمم مهندس زراعي حديقة على شكل مثمن منتظم، طول كل ضلع من أضلاعه 20 m

أوجد أطوال الأقطار MB , MC , MD



الإزاحة الأفقية

تمارين إثرائية

في التمرينين (2—1)، حدّد السعة، الدورة، الإزاحة الطورية، الإزاحة الرأسية لكل من الدوال التالية:

(1) $y = 3\cos(x+3) - 2$ **(2)** $y = \frac{2}{3}\sin\left(\frac{x-3}{3}\right) + 1$

في التمرينين (4—3)، صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين $f\ ,\ g$

(3) $f(x) = 2\cos\pi x\ ,\ g(x) = 2\cos 2\pi x$ **(4)** $f(x) = 3\sin\frac{2\pi x}{3}\ ,\ g(x) = 2\sin\frac{\pi x}{3}$

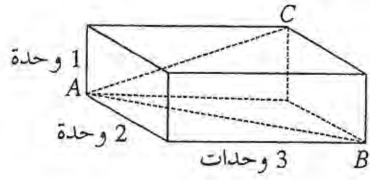
(5) **إيجاد الارتفاع:** وقف شخصان في جهتين مختلفتين من شجرة كبيرة بينهما مسافة $122\,\text{m}$، إذا كانت زاوية ارتفاع قمة الشجرة بالنسبة إلى كل منهما $15°$، $20°$، فأوجد ارتفاع الشجرة.

(6) **تصميم العجلة الدوّارة:** تتكوّن العجلة الدوارة من 16 عربة متساوية البعد، تبلغ المسافة بين كرسيين متجاورين $4.72\,\text{m}$، أوجد نصف قطر العجلة.

(7) **اكتب لتتعلم:** حدّد أي من الحالات التالية يمكن حلها باستخدام قانون الجيب أو قانون جيب التمام إذا علمت: $A.S.A$، $S.A.A$، $S.S.A$، $S.A.S$، $S.S.S$.

(8) **الربط بين حساب المثلثات والهندسة:** CAB زاوية داخلية لصندوق مستطيل الشكل، أطوال أضلاعه بالوحدات هي: $1\ ,\ 2\ ,\ 3$

أوجد $m(\widehat{CAB})$



(9) في المثلث ABC أثبت أنّ: $\frac{\cos A}{a} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2abc}$

تمرّنْ
9-1

المتطابقات المثلثية

The Trigonometric Identities

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–9)، استخدم المتطابقات الأساسية في تبسيط كل من المقادير التالية:

(1) $\csc x - \csc x \cos^2 x$

(2) $\dfrac{\tan^2 x}{\sec^2 x}$

(3) $\dfrac{1+\tan^2 x}{\csc^2 x}$

(4) $\cos x \csc x + \sin x \sec x$

(5) $\dfrac{\sin x}{\csc x} + \dfrac{\cos x}{\sec x}$

(6) $\dfrac{1+\tan x}{1+\cot x}$

(7) $\dfrac{1}{1-\sin x} + \dfrac{1}{1+\sin x}$

(8) $\dfrac{\sin x}{1-\cos x} + \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$

(9) $\dfrac{\tan x \csc x}{\cos^2 x}$

في التمارين (10–16)، بسّط المقادير إلى 1 أو -1

(10) $\dfrac{1}{\cot^2 x} - \dfrac{1}{\cos^2 x}$

(11) $\dfrac{1}{\csc^2 x} + \dfrac{1}{\sec^2 x}$

(12) $\dfrac{\tan x \times \cos x}{\sin x}$

(13) $\cot(-x)\tan(-x)$

(14) $\sec^2(-x) - \tan^2 x$

(15) $\sin^2(-x) + \cos^2(-x)$

(16) $\dfrac{\sec^2 x - \tan^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$

في التمارين (17–19)، استخدم التحليل إلى عوامل في كل مما يلي:

(17) $\sin^2 c + \sin^2 c \tan^2 c$

(18) $1 - 2\sin x + (1-\cos^2 x)$

(19) $\cos x - 2\sin^2 x + 1$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الصورة المبسّطة للمقدار: $E(x) = \dfrac{\sin^2 x + \tan^2 x + \cos^2 x}{\sec x}$ هي: $E(x) = \sec x$ (a) (b)

(2) الصورة المبسّطة للمقدار: $E(x) = (\sec^2 x + \csc^2 x) - (\tan^2 x + \cot^2 x)$ هي: $E(x) = 2$ (a) (b)

(3) المقدار: $E(x) = \dfrac{1-\sin^2 x}{1+\sin x}$ هو: $E(x) = 1 + \sin x$ (a) (b)

(4) المقدار: $E(x) = \dfrac{(\cos x + \sin x)^2 - 2\sin x \cos x}{\cos^2 x}$ هو: $E(x) = \sec^2 x$ (a) (b)

(5) المقدار: $E(x) = \csc x - \cos x \cot x$ هو: $E(x) = \cos x$ (a) (b)

في التمارين (6–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) المقدار: $E(x) = \dfrac{\tan^2 x}{1-\sec^2 x}$ بالصورة المبسّطة هو: $E(x) =$

ⓐ 1 ⓑ -1

ⓒ $\tan^4 x$ ⓓ $-\tan^4 x$

(7) المقدار: $E(x) = \dfrac{1}{\sec x+1} - \dfrac{1}{\sec x-1}$ بالصورة المبسّطة هو: $E(x) =$

ⓐ $2\tan^2 x$ ⓑ $-2\tan^2 x$

ⓒ $2\cot^2 x$ ⓓ $-2\cot^2 x$

(8) تحليل المقدار: $E(x) = \cos^2 x + \dfrac{3}{\sec x} + 2$ إلى عوامل هو: $E(x) =$

ⓐ $(1-\cos x)(2+\cos x)$ ⓑ $(1+\cos x)(2+\cos x)$

ⓒ $(1+\cos x)(2-\cos x)$ ⓓ $(1-\cos x)(2-\cos x)$

(9) الدالة $f(x) = \sqrt{\sec^2 x - 1}$ بالصورة المبسّطة هي: $f(x) =$

ⓐ $\tan x$ ⓑ $-\tan x$

ⓒ $\cot x$ ⓓ $|\tan x|$

(10) الدالة $f(x) = \sqrt{\csc^2 x - 1}$ بالصورة المبسّطة هي: $f(x) =$

ⓐ $|\cot x|$ ⓑ $\tan x$

ⓒ $-\cot x$ ⓓ $\cot x$

تمرَّنْ
9-2

إثبات صحة متطابقات مثلثية

Confirming Trigonometric Identities

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (14–1)، أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

(1) $(\cos x)(\tan x + \sin x \cot x) = \sin x + \cos^2 x$

(2) $(\sin x)(\cot x + \cos x \tan x) = \cos x + \sin^2 x$

(3) $(1 - \tan x)^2 = \sec^2 x - 2\tan x$

(4) $\tan x + \cot x = \sec x \csc x$

(5) $\tan x + \cot x + 2 = \dfrac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x \cos x}$

(6) $\dfrac{1}{1 - \cos x} + \dfrac{1}{1 + \cos x} = 2\csc^2 x$

(7) $\dfrac{\tan^2 x}{\sec x + 1} = \dfrac{1 - \cos x}{\cos x}$

(8) $\cot^2 x - \cos^2 x = \cos^2 x \cot^2 x$

(9) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$

(10) $\dfrac{\tan x}{\sec x - 1} = \dfrac{\sec x + 1}{\tan x}$

(11) $\dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \dfrac{2\sin^2 x - 1}{1 + 2\sin x \cos x}$

(12) $\dfrac{\sin x}{1 - \cos x} + \dfrac{1 + \cos x}{\sin x} = \dfrac{2(1 + \cos x)}{\sin x}$

(13) $\sin^2 x \cos^3 x = (\sin^2 x - \sin^4 x)(\cos x)$

(14) $\sin^3 x \cos^3 x = (\sin^3 x - \sin^5 x)(\cos x)$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) المتطابقة: $3\sin x = \sin(3x)$ صحيحة . (a) (b)

(2) المتطابقة: $\cos 2x = \sin^2 x - \cos^2 x$ صحيحة . ⓐ ⓑ

$\sec x - \cos x = \tan x \sin x$

(3) المتطابقة: $\cot x + \csc x = \dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$ صحيحة. ⓐ ⓑ

(4) الصورة المبسّطة للمقدار: $\sqrt{\dfrac{\csc x}{\sin^3 x} - \dfrac{\cot x}{\sin^3 x}}$ هي: $\dfrac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sin x}$ ⓐ ⓑ

في التمارين (10–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) المقدار: $\dfrac{\sec^2 x - 1}{\sin x}$ متطابق مع المقدار:

ⓐ $\sin x \tan x$
ⓑ $\sin x \sec^2 x$
ⓒ $\cos x \sec^2 x$
ⓓ $\sin x \csc x$

(6) المقدار: $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2$ متطابق مع المقدار:

ⓐ $-4 \sin x \cos x$
ⓑ 2
ⓒ -2
ⓓ $4 \sin x \cos x$

(7) المقدار: $\dfrac{1}{\tan x} + \tan x$ متطابق مع المقدار:

ⓐ $\sec x \csc x$
ⓑ $\sec x \sin x$
ⓒ $\sec x \cos x$
ⓓ $\sin x \cos x$

(8) المقدار: $\tan^2 x - \sin^2 x$ متطابق مع المقدار:

ⓐ $\tan^2 x$
ⓑ $\cot^2 x$
ⓒ $\tan^2 x \sin^2 x$
ⓓ $\cot^2 x \cos^2 x$

(9) المقدار: $\dfrac{\sin x}{\csc x} + \dfrac{\cos x}{\sec x} + 1$ متطابق مع المقدار:

ⓐ 1
ⓑ -1
ⓒ 2
ⓓ -2

(10) المقدار: $\dfrac{\cos^2 x - 1}{\cos x}$ متطابق مع المقدار:

ⓐ $-\tan x \sin x$
ⓑ $-\tan x$
ⓒ $\tan x \sin x$
ⓓ $\tan x$

تمرّنْ
9-3

حل معادلات مثلثية

Solving Trigonometric Equations

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (8–1)، حل كلًّا من المعادلات التالية:

(1) $\sin x = \frac{-1}{2}$ **(2)** $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **(3)** $2\cos x = -1$

(4) $\sqrt{3}\tan a = 1$ **(5)** $2\cos x \sin x - \cos x = 0$ **(6)** $\tan x \sin^2 x = \tan x$

(7) $\tan^2 x = 3$ **(8)** $4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$

في التمارين (11–9)، أوجد جميع حلول المعادلة على الفترة $[0, 2\pi)$

(9) $\sin 2x = 1$ **(10)** $2\cos 3x = 1$ **(11)** $\tan 2x = 1$

في التمارين (14–12)، حلّ المعادلات التالية:

(12) $\sin^2 x - 2\sin x = 0$ **(13)** $2\sin^2 x + 3\sin x = 2$

(14) $\tan^2 x \cos x + 5\cos x = 0$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حل المعادلة $\sin x = \frac{1}{2}$ هو: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح. (a) (b)

(2) حل المعادلة $\cos x = \sqrt{2}$ هو: $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ أو $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح. (a) (b)

(3) حل المعادلة $\tan x = -\sqrt{3}$ هو: $x = +\frac{5\pi}{6} + k\pi$، حيث k عدد صحيح. (a) (b)

(4) حلول المعادلة $\sin x \tan^2 x = \sin x$ على الفترة $(0, \pi)$ هي: $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ (a) (b)

(5) حلول المعادلة $2\sin^2 x = 1$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي: $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$ (a) (b)

في التمارين (10–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا كان $\sin x + \cos x = 0$ فإن x تقع في الربع:

(a) الأول
(b) الأول أو الثالث
(a) الثالث
(b) الثاني أو الرابع

(7) حلول المعادلة: $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي:

(a) $-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$
(b) $\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}$
(c) $\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$
(d) $\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

(8) حلول المعادلة: $2\sqrt{2}\sin x \cos x - \sqrt{2}\cos x - 2\sin x = -1$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي:

(a) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$
(b) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}$
(c) $\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}$
(d) $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}$

(9) عدد حلول المعادلة: $2\cos 4x = 1$ حيث $x \in \left[0, \frac{\pi}{8}\right)$ هو:

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) 3

(10) حلول المعادلة: $3\tan 2y = \sqrt{3}$ هي:

(a) $\frac{\pi}{6} + k\pi$، حيث k عدد صحيح.
(b) $\frac{\pi}{12} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح.
(c) $\frac{7\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$، حيث k عدد صحيح.
(d) $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح.

تمرّن 9−4

متطابقات المجموع والفرق

Sum and Difference Identities

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (3−1)، استخدم متطابقات المجموع والفرق في إيجاد القيمة الدقيقة.

(1) $\sin 15°$

(2) $\tan 135°$

(3) $\cos 75°$

(4) إذا كان $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ ، $\sin\gamma = \frac{4}{5}$

$\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ ، $\cos\beta = \frac{-8}{17}$

(a) أوجد: $\sin(\beta + \gamma)$

(b) أوجد: $\cos(\beta - \gamma)$

(c) أوجد: $\tan(\gamma + \beta)$

في التمارين (10−5)، اكتب المقدار على صورة جيب أو جيب التمام أوظل الزاوية.

(5) $\sin 42° \cos 17° - \cos 42° \sin 17°$

(6) $\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{5}$

(7) $\frac{\tan 19° + \tan 47°}{1 - \tan 19° \tan 47°}$

(8) $\cos\frac{\pi}{7}\cos x + \sin\frac{\pi}{7}\sin x$

(9) $\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x$

(10) $\frac{\tan 2y + \tan 3x}{1 - \tan 2y \tan 3x}$

(11) اختصر: $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4−1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) باستخدام متطابقات المجموع والفرق نجد أن: $\sin 75° = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ (a) (b)

(2) باستخدام متطابقات المجموع والفرق نجد أن: $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ (a) (b)

(3) $\cos(h + \frac{\pi}{2}) = -\cos h$ (a) (b)

(4) $\tan^2\frac{\pi}{12} + \tan^2\frac{5\pi}{12} = 14$ (a) (b)

في التمارين (11–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) باستخدام متطابقات المجموع والفرق نجد أن: $\tan\frac{7\pi}{12}$ تساوي:

ⓐ $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ ⓑ $\sqrt{2}+\sqrt{6}$

ⓒ $2+\sqrt{3}$ ⓓ $-2-\sqrt{3}$

(6) $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ تساوي:

ⓐ $\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$ ⓑ $\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)$

ⓒ $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x$ ⓓ $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x$

(7) $\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)$ تساوي:

ⓐ $1+\tan h$ ⓑ $\frac{1-\tan h}{1+\tan h}$

ⓒ $\frac{1+\tan h}{1-\tan h}$ ⓓ $1-\tan h$

(8) $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ تساوي:

ⓐ $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)$ ⓑ $\sqrt{2}(\cos x+\sin x)$

ⓒ $\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos x+\sin x)$ ⓓ $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)$

(9) $\cos 94°\cos 18°+\sin 94°\sin 18°$ تساوي:

ⓐ $\cos 112°$ ⓑ $\cos 76°$

ⓒ $\sin 112°$ ⓓ $\sin 76°$

(10) $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{3}$ تساوي:

ⓐ $\cos\frac{4\pi}{21}$ ⓑ $\sin\frac{4\pi}{21}$

ⓒ $\cos\frac{10\pi}{21}$ ⓓ $\sin\frac{10\pi}{21}$

(11) $\frac{\tan\frac{\pi}{5}-\tan\frac{\pi}{3}}{1+\tan\frac{\pi}{5}\tan\frac{\pi}{3}}$ تساوي:

ⓐ $\tan\frac{2\pi}{15}$ ⓑ $\tan\frac{8\pi}{15}$

ⓒ $\tan\left(\frac{-8\pi}{15}\right)$ ⓓ $\tan\left(\frac{-2\pi}{15}\right)$

تمرّنْ
9–5

متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

Double–Angle and Half–Angle Identities

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (4–1)، اكتب المقدار بدلالة $\sin x$ أو $\cos x$.

(1) $\sin 2x + \cos x$

(2) $\sin 2x + \cos 2x$

(3) $\cos 3x$

(4) $\cos 4x$

في التمارين (7–5)، أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

(5) $2\csc 2x = \csc^2 x \tan x$

(6) $\sin 3x = (\sin x)(4\cos^2 x - 1)$

(7) $\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x \cos^2 x$

في التمارين (10–8)، استخدم متطابقات نصف الزاوية لإيجاد كل من:

(8) $\sin 15°$

(9) $\tan 195°$

(10) $\cos 75°$

(11) اختصر كلًّا من التعابير التالية:

(a) $\dfrac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$ **(b)** $\dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$ **(c)** $\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

(12) إذا كانت $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ ، $\sin x = -\frac{12}{13}$ فأوجد $\sin\frac{x}{2}$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x$ — (a) (b)

(2) $\sin 4x = -4\cos x \sin^3 x + 4\cos^3 x \sin x$ — (a) (b)

(3) $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$ — (a) (b)

(4) $\cos 6x = 2\cos^2 3x - 1$ — (a) (b)

(5) $\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1$ — (a) (b)

في التمارين (6–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\sin 3x + \cos 2x$ تساوي:

(a) $3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x$

(b) $3\cos^2 x \sin x - \sin^2 x + \cos^2 x$

(c) $3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x - \sin^2 x + \cos^2 x$

(d) $3\sin^2 x \cos x - \sin^3 x + \cos^2 x$

(7) $2\cos^2 \frac{x}{2}$ تساوي:

(a) $\frac{1+\cos x}{2}$

(b) $1+\cos x$

(c) $1+\cos 2x$

(d) $\frac{1-\cos 2x}{2}$

(8) $\sin 3x$ تساوي:

(a) $\sin^3 x + 3\cos^2 x \sin x$

(b) $3\sin x - \sin^3 x$

(c) $(3-2\sin^2 x)(\sin x)$

(d) $3\sin x - 4\sin^3 x$

(9) باستخدام متطابقات نصف الزاوية نجد أن $\cos\frac{\pi}{8}$ تساوي:

(a) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

(b) $\sqrt{2}-1$

(c) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

(d) $\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$

(10) إذا كان: $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ، $\cos\theta = \frac{-7}{25}$ فإن $\cos\frac{\theta}{2}$ يساوي:

(a) $\frac{2}{5}$

(b) $\frac{-2}{5}$

(c) $\frac{-3}{5}$

(d) $\frac{3}{5}$

اختبار الوحدة التاسعة

في التمارين (3–1)، حوّل المقادير إلى sin وcos. اكتب إجابتك على صورة كسر واحد.

(1) $\tan x + \cot x$

(2) $\sin x \cot x - \cos x \tan x$

(3) $\dfrac{\sec y}{\cos y} - \dfrac{\sin y}{\csc y \cos^2 y}$

في التمارين (8–4)، أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

(4) $\dfrac{\cos x}{1+\sin x} + \dfrac{\cos x}{1-\sin x} = 2\sec x$

(5) $\dfrac{1-3\cos x - 4\cos^2 x}{\sin^2 x} = \dfrac{1-4\cos x}{1-\cos x}$

(6) $\sqrt{1-\cos x} \times \sqrt{1+\cos x} = \sin x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

(7) $\dfrac{2\sin x \times \cos x}{1+\cos^2 x - \sin^2 x} = \tan x$

(8) $\dfrac{1+2\sin x \times \cos x}{\sin x + \cos x} = \sin x + \cos x$

في التمارين (13–9)، استخدم متطابقات المجموع والفرق في إيجاد القيمة الدقيقة.

(9) $\tan \dfrac{5\pi}{12}$

(10) $\sin \dfrac{-\pi}{12}$

(11) $\cos(x-y) - \cos(x+y)$

(12) $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

(13) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

(14) **(a)** أوجد ناتج: $\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}$

(b) أوجد القيمة الصحيحة لكلّ مما يلي دون استخدام الآلة الحاسبة:

(1) $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ **(2)** $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

(15) أوجد قيمة $\sin 2x$، إذا كان $\sin x - \cos x = \frac{1}{5}$

(16) أوجد: $\cos 2x$، إذا كان $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

تمارين إثرائية

في التمرينين (2–1)، حدّد ما إذا كانت الدالتان f , r متساويتين. إذا كانتا كذلك فاذكر سببًا مقنعًا. وإذا لم تكونا كذلك، فأوجد قيمة x التي تجعل $r(x) \neq f(x)$.

(1) $f(x) = \sqrt{x^2}$, $r(x) = x$

(2) $f(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x}$, $r(x) = \sin x$

في التمارين (5–3)، أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

(3) $\dfrac{\tan x}{1 - \cot x} + \dfrac{\cot x}{1 - \tan x} = 1 + \sec x \csc x$

(4) $\dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} + \dfrac{1}{2\cos^2 x - 1} = \dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$

(5) $\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\sin^2 x}} - \dfrac{1 + \tan^2 x}{\tan x} = 0$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

(6) لتكن: $\tan x = \dfrac{\sin y - \cos y}{\sin y + \cos y}$

(a) أثبت أن: $2\cos^2 x = (\sin y + \cos y)^2$

(b) أثبت أن: $2\sin^2 x = (\sin y - \cos y)^2$

في التمارين (10–7)، حلّ كلًّا من المعادلات التالية:

(7) $\cos x = \cos\dfrac{\pi}{4}$

(8) $\sin^2 x - \dfrac{1}{2} = 0$

(9) $2\sin^2 x + 3\sin x - 5 = 0$

(10) $4\cos^2 x - 2(\sqrt{2} + \sqrt{3})\cos x + \sqrt{6} = 0$

(11) أوجد حلول المعادلة التالية: $2\sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0$ على الفترة $[0, 2\pi)$

(12) حلّ المعادلة: $\cos^2 x - \sin^2 x + \sin x = 0$

(13) استخدم متطابقات المجموع والفرق لإيجاد القيمة الدقيقة لِـ: $\tan\dfrac{11\pi}{12}$

(14) أوجد قيمة $\cos(x+y) \times \cos(x-y)$ بدلالة $\cos x$ ، $\cos y$

(15) (a) أثبت أن: $\tan 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(b) مستندًا إلى النتيجة في (a)،

أثبت أن: $\cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos(x + 30°)$

(16) أثبت صحة المتطابقة: $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} + \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = 4\cos 2x$

(17) (a) أوجد قيمة $\cos(x+y+z)$ بدلالة: $\cos x$, $\cos y$, $\cos z$, $\sin x$, $\sin y$, $\sin z$

(b) استنتج قيمة $\cos 3x$ بدلالة $\cos x$ فقط (مساعدة: $x = y = z$).

(18) أوجد قيمة x إذا كان $\cos x = 1 + \sqrt{3}\sin x$

(19) حلّ المعادلة: $2\cos x \tan x + \tan x - 2\cos x - 1 = 0$

(20) حلّ المعادلة: $2\cos^2 2x + \cos 2x = 1$

(21) لتكن: $y(x) = \dfrac{\sin^2 x + \sin x \cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$، حيث $0 < x < \frac{\pi}{2}, x \neq \frac{\pi}{4}$

أوجد قيمة $\tan x$ إذا كانت $y = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

(**مساعدة:** اكتب $y(x)$ بدلالة $\tan x$)

(22) (a) أثبت أن: $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

(b) اختصر: $\dfrac{1}{\tan x} - \dfrac{2}{\tan 2x}$

(23) أثبت صحة المتطابقة: $1 - \sin x + \cos x = 2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)$

(24) (a) أوجد قيمة $\cos 2x$، إذا كان $\cos x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$، $0 < x < \pi$

(b) أوجد قيمة $\cos 4x$

(c) أوجد قيمة x

(25) أوجد قيمة $\cos 18°$، $\sin 36°$، $\sin 9°$، إذا كان $\sin 18° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

(26) ABC مثلث متطابق الضلعين فيه $AB = AC$، $m(\widehat{A}) = 2\alpha$، حيث $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$،

M منتصف $\overline{BC}$، D الإسقاط العمودي للنقطة C على $\overline{AB}$

(a) أوجد BM باستخدام $\sin\alpha$ وبيّن أن $a = 2b\sin\alpha$

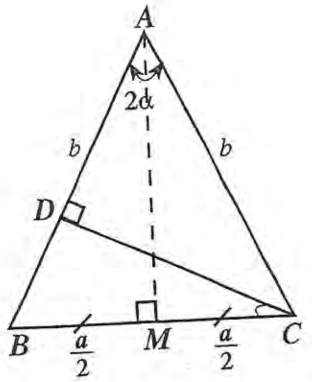
(b) استنتج $m(D\widehat{C}B)$

(c) أوجد CD باستخدام $\cos\alpha$

(d) استنتج أن مساحة المثلث ABC هي $b^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha$

(e) أثبت أن مساحة ΔABC هي $\frac{1}{2}b^2\sin(2\alpha)$

(f) أثبت أن: $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$



المستقيمات والمستويات في الفضاء

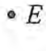
Lines and Planes in Space

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (5–1)، هل الشكل يجب أن يكون موجودًا في مستوٍ واحد فقط؟

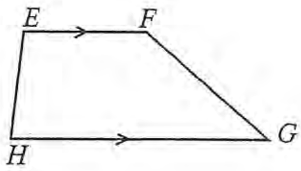
(1)

(2)

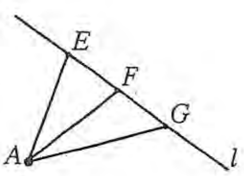


(3)

(4)

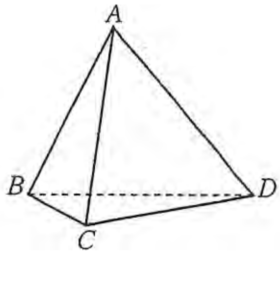


(5)

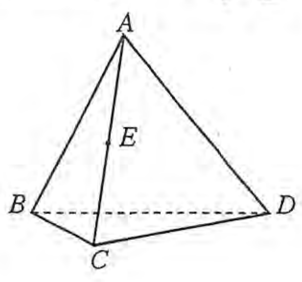


(6) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.

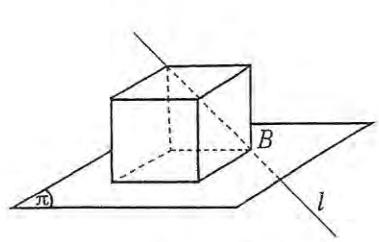
سمّ المستويات الأربعة التي تجدها في الرسم.



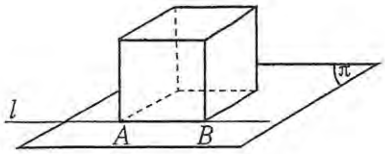
(7) أثبت أن النقطة E تقع في المستوي ADC وفي المستوي ABC



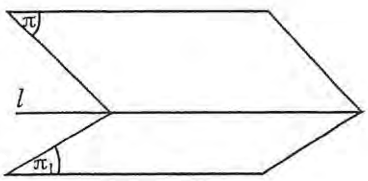
(8) **(a)** أوجد نقطة تقاطع المستوي π والمستقيم l.



(b) أوجد تقاطع المستوي π والمستقيم l.

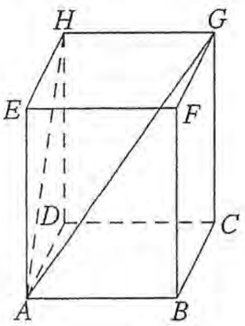


(c) أوجد تقاطع المستوي π والمستوي π_1.



(9) في شبه المكعب المقابل، أكمل:

(a) $(AGH) \cap (ABC) = \ldots$



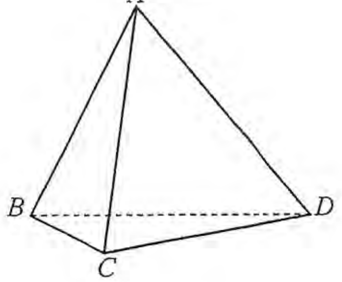
(b) ارسم المستقيم الناتج عن تقاطع المستويين BFH, $ABCD$

(c) إذا كانت L نقطة تنتمي إلى $\overline{EF}$،

ارسم المستقيم الناتج عن تقاطع المستويين ADL, BCL

(10) ارسم $\overleftrightarrow{AB}$ يقطع مستويًا π_1 في النقطة B، ثم ارسم المستوي π_2 يقطع المستوي π_1 في مستقيم يمر بالنقطة B.

(11) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.

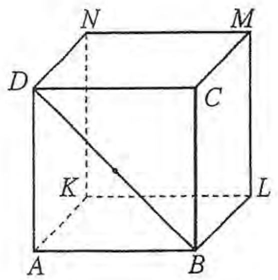


(a) ما نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{AB}$ مع المستوي BCD؟

(b) ما نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{AB}$ مع المستوي ACD؟

(c) ما هو تقاطع (ABC) مع المستوي BCD؟

(12) في الرسم المقابل $ABCDKLMN$ مكعب:



(a) ما نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{ND}$، $\overleftrightarrow{BD}$؟

(b) ما نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{AD}$، $\overleftrightarrow{BC}$؟

(c) ما نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{BD}$، $\overleftrightarrow{ML}$؟

(d) ما نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{ML}$ والمستوي $ABLK$؟

(e) سمّ المستقيم الذي هو تقاطع المستويين NBD، $ABCD$

(f) أثبت أن النقاط L, B, D, N تنتمي إلى مستوٍ واحد.

(g) هل $\overleftrightarrow{ML}$, $\overleftrightarrow{ND}$ يعينان مستويًا واحدًا؟

(h) أثبت أن المستويين CMN , ADK يتقاطعان.

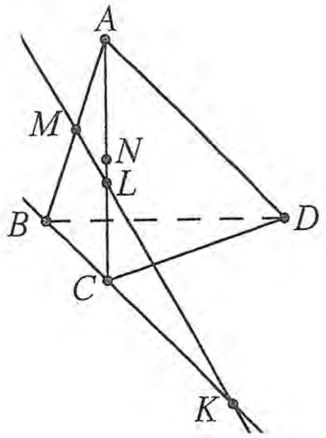
(13) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.

M منتصف $\overline{AB}$، N منتصف $\overline{AC}$، $L \in \overline{AC}$، $L \neq N$

(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{ML}$ يقع في المستوي ABC

(b) أثبت أن: $\overleftrightarrow{ML}$, $\overleftrightarrow{CB}$ يتقاطعان في النقطة K

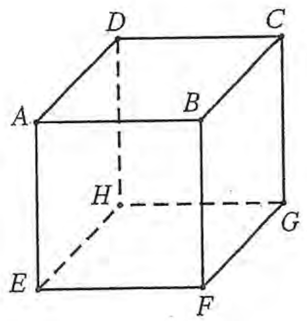
(c) ما نقطة تقاطع المستقيم $\overleftrightarrow{ML}$ مع المستوي BCD؟



المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

$ABCDEFGH$ مكعّب.



(1) المستقيمان AB, HG يعينان مستويًا. (a) (b)

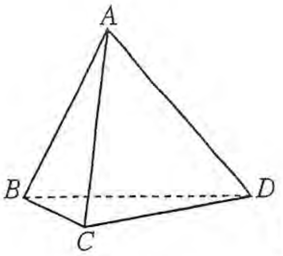
(2) النقاط B, D, H, F تعيّن مستويًا. (a) (b)

(3) النقاط A, B, G, C تعيّن مستويًا. (a) (b)

(4) المستقيمان GC, EF يعينان مستويًا. (a) (b)

(5) المستقيمان BC, AB يعينان مستويًا. (a) (b)

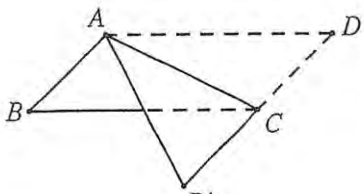
في التمارين (9–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.



(6) النقاط B, C, D تعيّن:

(a) مستويًا واحدًا
(b) مستويين اثنين
(c) عدد لا منته من المستويات
(d) لا يمكن أن تعيّن مستويًا

(7) $ABCD$ متوازي أضلاع. إذا تمّ طيّه على طول $\overline{AC}$ دون أن ينطبق القسمان على بعضهما يتعين:



(a) مستوٍ واحدٍ
(b) مستويان
(c) ثلاثة مستويات
(d) أربعة مستويات

(8) منشور قائم خماسي القاعدة يعيّن:

(a) خمسة مستويات
(b) ستة مستويات
(c) سبعة مستويات
(d) ثمانية مستويات

(9) الأسطوانة تعيّن:

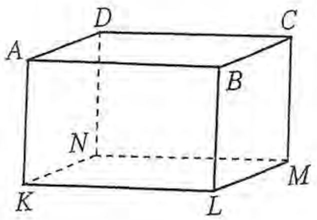
(a) صفر مستوٍ
(b) مستوٍ واحد
(c) مستويين اثنين
(d) ثلاثة مستويات

تمرَّنْ
10-2

المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء
Parallel Lines and Planes in Space

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $ABCDKLMN$ شبه مكعب.



(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{AK} \parallel \overleftrightarrow{CM}$

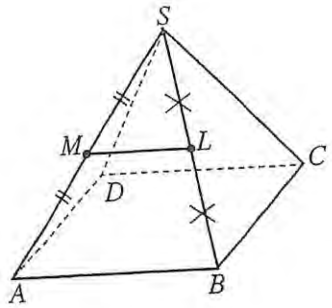
(b) أثبت أن النقاط A, K, M, C تنتمي إلى مستو واحد.

(c) أثبت أن: $\overleftrightarrow{AD}$ يوازي المستوي MKN

(2) **(a)** متى يكون المستقيم l موازيًا للمستوي π؟

(b) ارسم مستقيمًا يوازي المستوي π

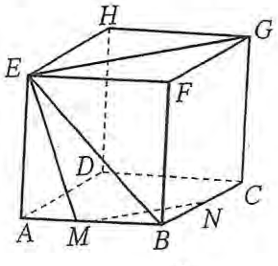
(3) $SABCD$ هرم قاعدته $ABCD$ مربعة الشكل.



M منتصف $\overline{SA}$، L منتصف $\overline{SB}$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{ML} \parallel (ABCD)$

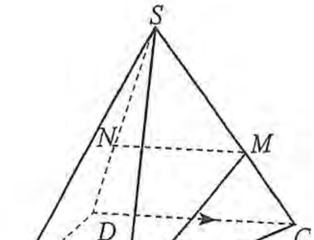
(4) $ABCDEFGH$ مكعب.



$M \in \overline{AB}$، المستوي GEM يقطع $\overline{BC}$ في النقطة N

أثبت أن: $\overleftrightarrow{GE} \parallel \overleftrightarrow{MN}$

(5) $SABCD$ هرم قاعدته $ABCD$ شبه منحرف بحيث إن $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$



$M \in \overline{SC}$، المستوي ABM يقطع $\overline{SD}$ في N

(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{AB}$ يوازي المستوي SDC

(b) أثبت أن: $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

(6) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة، $I \in \overline{AB}$

المستقيم الموازي لِـ $\overleftrightarrow{AC}$ والمار بالنقطة I يقطع $\overleftrightarrow{BC}$ في J

المستقيم الموازي لِـ $\overleftrightarrow{BD}$ والمار بالنقطة J يقطع $\overleftrightarrow{CD}$ في K

المستقيم الموازي لِـ $\overleftrightarrow{AC}$ والمار بالنقطة K يقطع $\overleftrightarrow{AD}$ في H

(a) ضع رسمًا مناسبًا.

(b) أثبت أن: $\overleftrightarrow{IH} \parallel \overleftrightarrow{BD}$

(7) ليكن π_1, π_2 مستويان متقاطعان في $\overleftrightarrow{MN}$ حيث:

$\overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1 \ , \ \overleftrightarrow{AB} \parallel \pi_2$

و $\overleftrightarrow{CD} \subset \pi_2 \ , \ \overleftrightarrow{CD} \parallel \pi_1$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

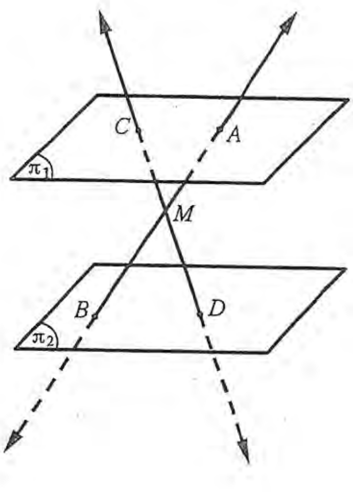
(8) $ABCD \ , ABEF$ متوازيا أضلاع غير مستويين معًا ويتقاطعان في $\overleftrightarrow{AB}$

أثبت أن: $CDEF$ متوازي أضلاع

(9) في الشكل المقابل π_1, π_2 مستويان متوازيان، M نقطة واقعة بينهما،

حيث $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{M\}$

أثبت أن: $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AC}{BD}$



المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) يكون المستويان متوازيين إذا اشتركا في نقطة واحدة على الأقل. (a) (b)

(2) إذا وازى مستقيم مستويًا فإنهما لا يشتركان في أي نقطة من نقاطهما. (a) (b)

(3) إذا وازى مستقيم l مستوي π فإن $\overleftrightarrow{l}$ يوازي مستقيمًا وحيدًا في π (a) (b)

(4) إذا كان: $\overleftrightarrow{m} \parallel \pi \ , \overleftrightarrow{l} \parallel \pi$ فإن $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ (a) (b)

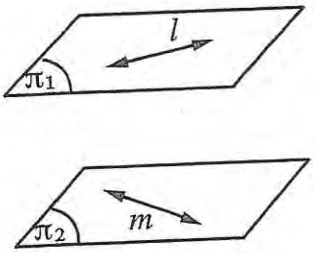
(5) إذا توازى مستقيمان ومرّ بهما مستويان متقاطعان فإن تقاطعهما هو مستقيم يوازي كلًّا من هذين المستقيمين. (a) (b)

في التمارين (6–8)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا توازى مستويان مختلفان وقطعهما مستو ثالث فإن خطّي التقاطع:

(a) متقاطعان (b) متخالفان

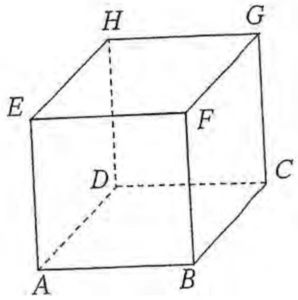
(c) متوازيان (d) متعامدان



(7) في الشكل المقابل: إذا كان $\pi_1 \parallel \pi_2$ ، $\overleftrightarrow{l} \subset \pi_1$ ، $\overleftrightarrow{m} \subset \pi_2$ فإن:

(a) $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ (b) $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{m}$

(c) $\overleftrightarrow{l}, \overleftrightarrow{m}$ متخالفان (d) $\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \phi$



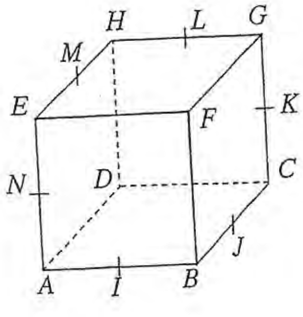
(8) في المكعّب $ABCDEFGH$، $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{EG}$ هما:

(a) متوازيان (b) متقاطعان

(c) متخالفان (d) يحويهما مستوٍ واحد

في التمارين (9–12)، لديك قائمتان. اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين من القائمة (1) للحصول على إجابة صحيحة.

في المكعب المقابل I, J, K, L, M, N منتصفات $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CG}$, $\overline{GH}$, $\overline{HE}$, $\overline{EA}$ على الترتيب.



القائمة (1)	القائمة (2)
(9) $\overleftrightarrow{EK} \parallel$	(a) (MNK)
(10) $\overleftrightarrow{ML} \parallel$	(b) (NBC)
	(c) (AFC)

القائمة (1)	القائمة (2)
(11) $(IJK) \parallel$	(a) (MNC)
(12) $(JKE) \parallel$	(b) (HFG)
	(c) (LMN)

تمرّنْ
10-3

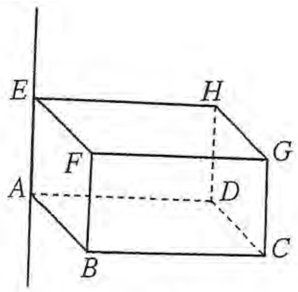
تعامد مستقيم مع مستوٍ

Perpendicular Line with a Plane

المجموعة A تمارين مقالية

(1) (a) متى يكون المستقيم عموديًّا على المستوي؟

(b) ارسم مستقيمًا عموديًّا على مستو.

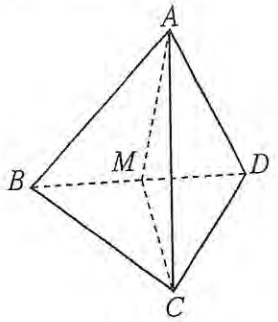


(2) $ABCDEFGH$ شبه مكعّب.

(a) سمّ المستقيمات المتعامدة مع $\overleftrightarrow{AE}$

(b) سمّ المستويات المتعامدة مع $\overleftrightarrow{AE}$

(c) أثبت أن $\overleftrightarrow{AD}$ عمودي على المستوي CGH



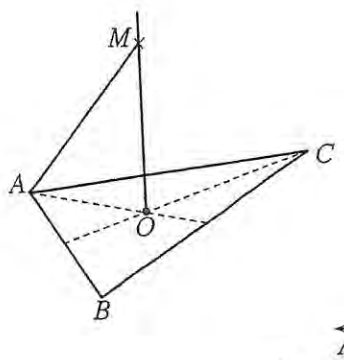
(3) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.

$AD = AB$ ،$CD = CB$

النقطة M منتصف $\overline{DB}$

(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{BD} \perp (AMC)$

(b) استنتج أن: $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$



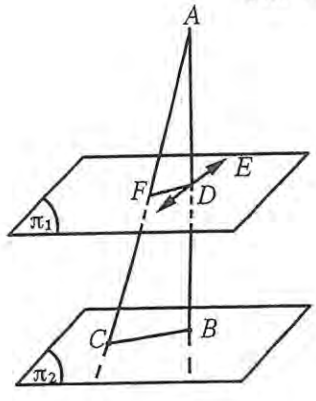
(4) ABC مثلث متطابق الأضلاع مركزه O، $\overleftrightarrow{MO}$ متعامد مع (ABC)

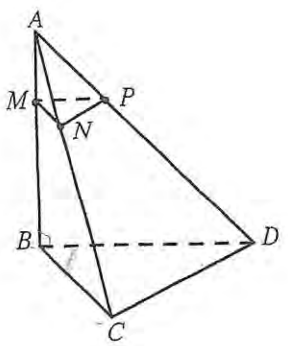
أثبت أن: $\overleftrightarrow{CB} \perp \overleftrightarrow{AM}$

(5) في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{AB}$ عمودي على المستوي π_1, π_2 $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{DE}, \overleftrightarrow{DE} \subset \pi_1$

فإذا كانت D منتصف $\overline{AB}$، F منتصف $\overline{AC}$

أثبت أن: $\pi_1 /\!/ \pi_2$





(6) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة حيث إن $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$

نأخذ النقاط M, N, P كما يلي: $\overline{AB} = 3\,\overline{AM}$ ، $\overline{AC} = 3\,\overline{AN}$ ، $\overline{AD} = 3\,\overline{AP}$ ،

أثبت أن $\overleftrightarrow{AB}$ عمودي على (MNP)

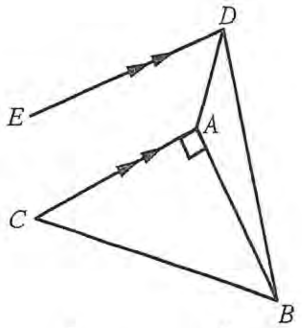
(7) ليكن $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{EF}$ عموديان على المستوي π ويقطعانه في D, F على الترتيب. فإذا كان $\overleftrightarrow{CE}$ يوازي π. أثبت أن $CDFE$ مستطيل.

(8) ABC مثلث، أخذت النقطة D خارج مستوي المثلث بحيث كان:

$\overleftrightarrow{DA}$ عموديًّا على كل من $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{AC}$

فإذا كانت M منتصف $\overline{AB}$ ، N منتصف $\overline{DB}$

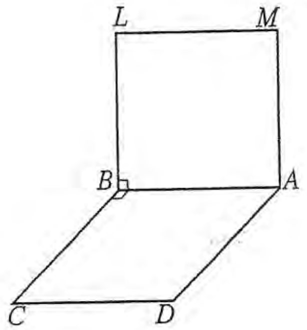
أثبت أن: $\overleftrightarrow{MN} \perp (ABC)$



(9) في الشكل المقابل، ABC مثلث قائم الزاوية في A

رسم $\overleftrightarrow{AD}$ عمودي على مستوي المثلث ABC، ورسم $\overleftrightarrow{ED} \parallel \overleftrightarrow{CA}$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{ED} \perp \overleftrightarrow{AB}$



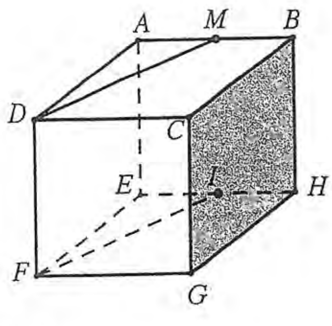
(10) $ABCD$ ، $ABLM$ مربعان، لهما ضلع مشترك $\overline{AB}$ ،

غير موجودين في مستو واحد.

أثبت أن: $\overleftrightarrow{LM} \perp (LBC)$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–7)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.



أسئلة التمرينين (1–2)، على الشكل المقابل حيث $ABCDEFGH$ مكعّب،

النقطة M منتصف $\overline{AB}$ ، I منتصف $\overline{EH}$.

(1) $\overleftrightarrow{MI} \perp (EFGH)$ (a) (b)

(2) $\overleftrightarrow{MD} \perp (BCGH)$ (a) (b)

(3) إذا كان $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة جميع أحرفه متطابقة فإن: $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (a) (b)

(4) المستويان العمودان على ثالث متوازيان. (a) (b)

(5) إذا كان $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{m}, \overleftrightarrow{m} \subset \pi$ فإن $\overleftrightarrow{l} \subset \pi$ (a) (b)

(6) إذا كان المستقيمان l , m متخالفان وكان $\overleftrightarrow{n} \perp \overleftrightarrow{m}$ فإن $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{n}$ (a) (b)

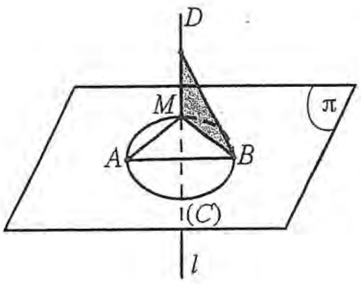
(7) إذا كان المستقيمان l , m متخالفان وكان $\overleftrightarrow{n} \perp \overleftrightarrow{m}$ فإن $\overleftrightarrow{l}$, $\overleftrightarrow{n}$ متخالفان. (a) (b)

في التمارين (8–11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(8) إذا كان: $\overleftrightarrow{l} \subset \pi_2$, $\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1$ فإن:

(a) $\pi_1 \parallel \pi_2$ (b) $\pi_1 \perp \pi_2$

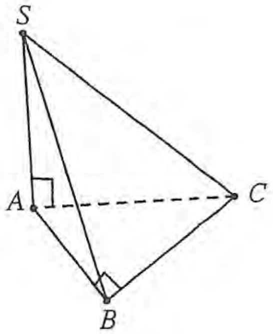
(c) $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l}$ (d) $\pi_1 = \pi_2$



(9) في الشكل المقابل إذا كان $\overleftrightarrow{l} \perp (AMB)$ ، $\overline{AB}$ قطر في الدائرة (C) فإن:

(a) $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BD}$ (b) $\overleftrightarrow{l} \perp (BMD)$

(c) $\overleftrightarrow{AM} \perp (BMD)$ (d) $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BM}$



(10) في الشكل المقابل إذا كان $m(\widehat{B}) = 90°$ ، $\overleftrightarrow{SA} \perp (ABC)$ فإن:

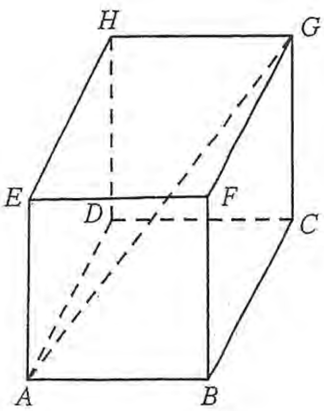
(a) المثلث SAB قائم في $\widehat{B}$

(b) $\overleftrightarrow{CB} \perp (SAB)$

(c) المثلث SAB متطابق الضلعين.

(d) المثلث SCB قائم في $\widehat{C}$

(11) يمثل الشكل المقابل مكعبًا، إذا كان طول حرفه 3 cm فإن طول قطره AG يساوي:



(a) $\sqrt{3}$ cm (b) $3\sqrt{3}$ cm

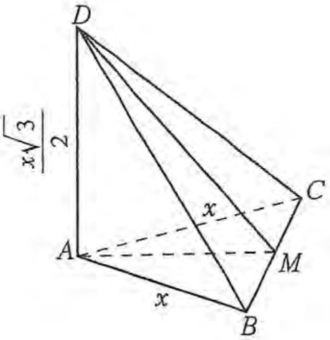
(c) 9 cm (d) 18 cm

تمرّنْ
10-4

الزاوية الزوجية

The Dihedral Angle

المجموعة A تمارين مقالية



(1) ABC مثلث متطابق الأضلاع وطول ضلعه x

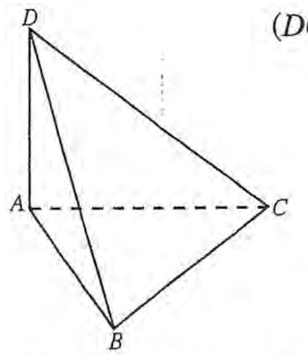
$\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع المستوي ABC، $AD = \frac{x\sqrt{3}}{2}$،

M منتصف $\overline{BC}$

(a) أثبت أن $\overleftrightarrow{CB}$ متعامد مع المستوي AMD

(b) أوجد الزاوية الزوجية $(DCB, \overleftrightarrow{BC}, ACB)$

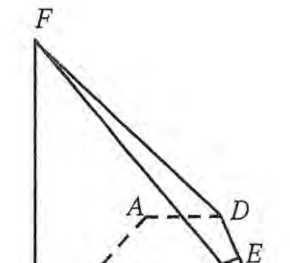
(c) أوجد قياس الزاوية الزوجية $(DCB, \overleftrightarrow{BC}, ACB)$



(2) ABC مثلث متطابق الأضلاع.

$\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع المستوي ABC

أوجد قياس الزاوية الزوجية $(DAB, \overleftrightarrow{DA}, DAC)$



(3) في الشكل المقابل $ABCD$ شكل رباعي، $\overleftrightarrow{FB}$ عمودي على المستوي $ABCD$،

$\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$ فإذا كان $FB = BE$،

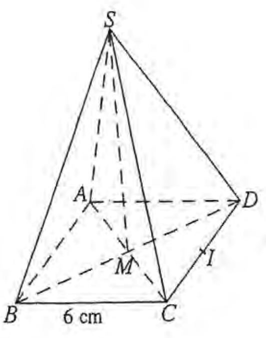
أوجد قياس الزواية الزوجية بين $(ABCD)$، (FCD)

(4) $MABC$ هرم ثلاثي رأسه M وقاعدته مثلث متطابق الأضلاع ABC،

طول ضلعه $10\,\text{cm}$، إذا كان $m(\widehat{MAB}) = m(\widehat{MAC}) = 90°$، $MA = 5\,\text{cm}$، D منتصف $\overline{BC}$

(a) أثبت أن: $\overline{BC} \perp (MAD)$

(b) أوجد قياس الزاوية الزوجية بين (MBC), (ABC)



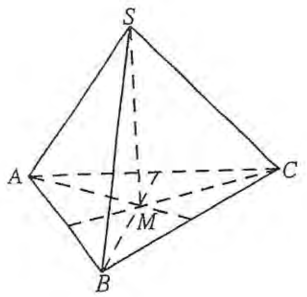
(5) $SABCD$ هرم مربع القاعدة طول ضلعها $6\,\text{cm}$ ومركزها M

بحيث إن $\overleftrightarrow{SM} \perp (ABCD)$، I منتصف $\overline{CD}$

(a) أثبت أن: $(\widehat{MIS})$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(ABCD, \overleftrightarrow{CD}, SCD)$

(b) أوجد: $m(\widehat{MIS})$ إذا كان $SM = \sqrt{3}\ cm$

(6) $SABC$ هرم قاعدته مثلث متطابق الأضلاع مركزه M
بحيث إن $\overleftrightarrow{SM} \perp (ABC)$
أوجد قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(SMB, \overleftrightarrow{SM}, SMC)$



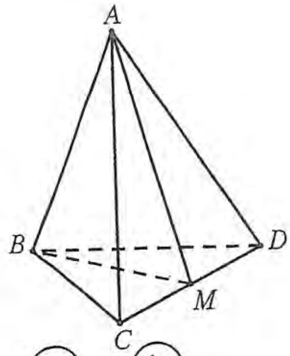
المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

أسئلة التمرينين (2–1)، على الشكل المقابل.

إذا كان $ABCD$ هرم جميع حروفه متساوية الطول، M منتصف $\overline{CD}$

فإن:



(1) $\overline{CD}$ عمودي على $\overline{AB}$ (a) (b)

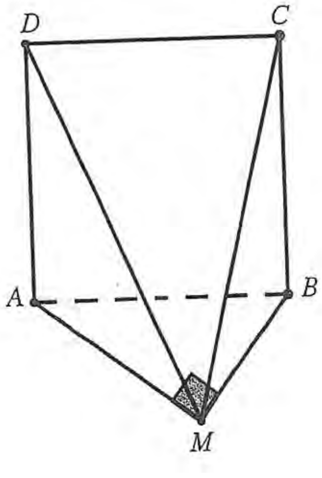
(2) الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(BDC, \overleftrightarrow{DC}, ADC)$ هي $A\widehat{M}D$ (a) (b)

أسئلة التمرينين (4–3)، على الشكل المقابل.

المثلث AMB قائم الزاوية في M، $\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع المستوي AMB

إذا أخذنا النقطة C بحيث يكون $ABCD$ مربعًا.

فإن:



(3) $\overleftrightarrow{BM}$ متعامد مع (MAD) (a) (b)

(4) $\overleftrightarrow{CB}$ متعامد مع (AMB) (a) (b)

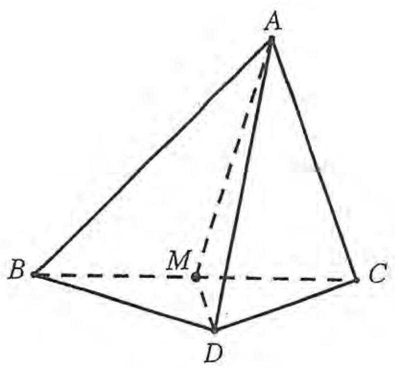
في التمارين (10–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

أسئلة التمارين (7–5)، على الشكل المقابل. حيث إن:

M منتصف $\overline{BC}$

ABC، DBC مثلثان لهما ضلع مشترك $\overline{BC}$ حيث $BC = x$

وهما متطابقا الأضلاع ولا يحويهما مستوٍ واحد.



(5) الزاوية الزوجية $(BAC \text{ ، } \overleftrightarrow{BC} \text{ ، } BCD)$ هي:

(a) $A\widehat{M}D$ (b) $B\widehat{M}C$

(c) $A\widehat{M}B$ (d) $B\widehat{A}M$

(6) إذا كان: $m(A\widehat{M}D) = 60°$ فقيمة AD بدلالة x هي:

(a) $\frac{x}{2}$ (b) $\frac{x\sqrt{2}}{2}$

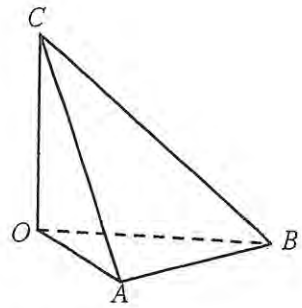
(c) $x\sqrt{3}$ (d) $\frac{x\sqrt{3}}{2}$

(7) إذا كان $AD = \frac{x\sqrt{3}}{2}$ ، فإنّ: $m(A\widehat{M}D) =$

(a) $90°$ (b) $45°$

(c) $60°$ (d) $30°$

أسئلة التمرينين (9–8) على الشكل المقابل.



إذا كان OAB مثلث فيه:

$OA = x$ ، $OB = 2x$ ، $m(A\widehat{O}B) = 60°$

$\overleftrightarrow{OC}$ متعامد مع المستوي OAB

(8) طول $\overline{AB}$ يساوي:

(a) x (b) $x\sqrt{2}$

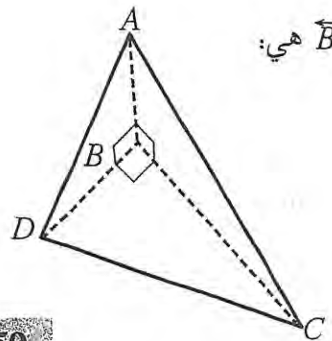
(c) $x\sqrt{3}$ (d) $\frac{x}{2}$

(9) قياس الزاوية الزوجية $(AOC, \overleftrightarrow{OC}, BOC)$ هو:

(a) $30°$ (b) $45°$

(c) $60°$ (d) $90°$

(10) في الشكل المقابل، المثلث DBC قائم الزاوية في B،



فإذا كان $\overleftrightarrow{AB}$ عمودي على (DBC) فإن الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{BD}$ هي:

(a) $D\widehat{B}C$ (b) $A\widehat{B}C$

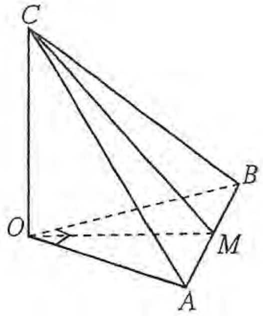
(c) $A\widehat{B}D$ (d) $A\widehat{D}C$

تمرّنْ 10-5

المستويات المتعامدة

Perpendicular Planes

المجموعة A تمارين مقالية



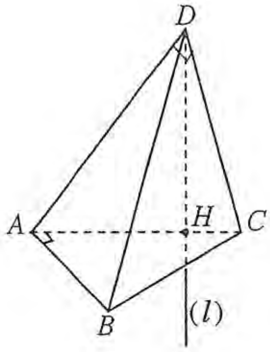
(1) OAB مثلث قائم في $\widehat{O}$، $OA = OB = 1$

$\overleftrightarrow{OC}$ متعامد مع المستوي OAB، $OC = 1$،

M منتصف $\overline{AB}$

(a) أثبت أن المستوي COM متعامد مع المستوي OAB

(b) أثبت أن المستوي COM متعامد مع المستوي CAB



(2) ABC مثلث قائم في $\widehat{A}$، $H \in \overline{AC}$

نأخذ المستقيم l المتعامد مع المستوي ABC والمار بالنقطة H

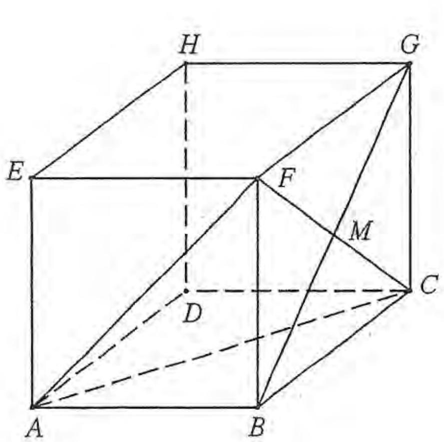
$D \in \overleftrightarrow{l}$ حيث يكون المثلث ADC قائم الزاوية في D

(a) أثبت أن $\overleftrightarrow{AB}$ متعامد مع (ACD)

(b) استنتج أن $\overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{CD}$ متعامدان وأن المثلث ABD قائم في $\widehat{A}$

(c) أثبت أن $\overleftrightarrow{CD}$ متعامد مع (ADB)

(d) استنتج أن (CDB), (BDA) متعامدان.



(3) $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه a:

(a) أثبت أن: $(ABCD) \perp (FBCG)$

(b) أثبت أن المثلث ACF متطابق الأضلاع.

(c) M نقطة تقاطع $\overline{FC}$، $\overline{BG}$،

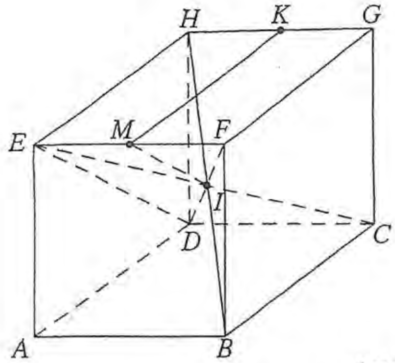
أثبت أن: $\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{FC}$

(d) أثبت أن: $(BCGF) \perp (ABG)$

(e) أثبت أن: $(ABG) \perp \overleftrightarrow{FC}$

(4) $ABCDEFGH$ مكعب تتقاطع أقطاره الأربعة في النقطة I وطول ضلعه 4 cm

M منتصف $\overline{EF}$، K منتصف $\overline{HG}$



(a) أوجد طول $\overline{EC}$ واستنتج طول $\overline{EI}$

(b) أثبت أن المثلث EIF متطابق الضلعين.

(c) أثبت أن: $\widehat{IMK}$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(EFH, \overleftrightarrow{EF}, EIF)$

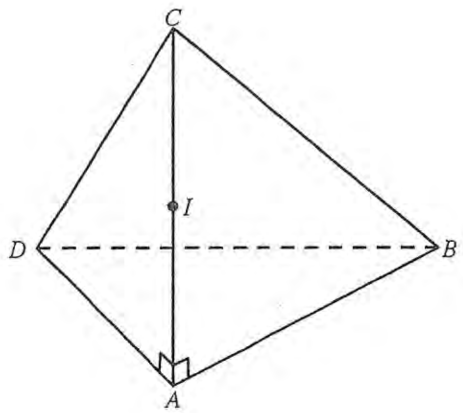
(d) أوجد: $m(\widehat{IMK})$

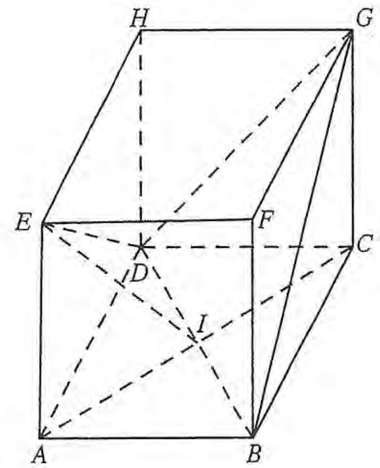
(e) أثبت أن: $(AEH) \perp (EIF)$

(5) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة فيه:

$\overleftrightarrow{CA} \perp (ABD)$، I منتصف $\overline{AC}$

أثبت أن المستوي العمودي من I على $\overleftrightarrow{AC}$ يقطع (ADC) بمستقيم يمر في منتصف $\overline{DC}$ ويقطع (ABC) بمستقيم يمر في منتصف $\overline{BC}$

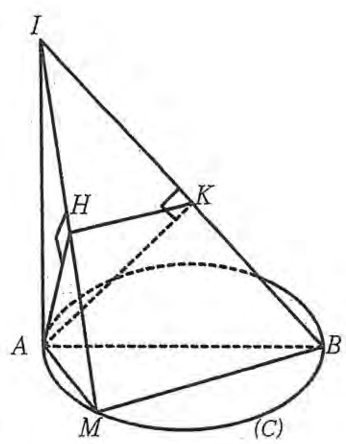




(6) $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه 5 cm

(a) أثبت أن المثلث EDB متطابق الأضلاع.

(b) I نقطة تقاطع القطرين في المربع $ABCD$، أثبت أن: $(DBG) \perp (AEI)$



(7) في الشكل المقابل:

(C) دائرة قطرها $\overline{AB}$، M نقطة على الدائرة مختلفة عن A و B

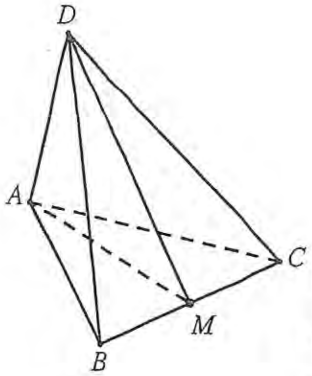
I نقطة على المستقيم العمودي عند A على مستوى الدائرة.

(a) أثبت أن: $(IMB) \perp (IAM)$

(b) إذا كان $\overline{AH} \perp \overline{IM}$, $\overline{AK} \perp \overline{IB}$ ،

أثبت أن: $(IMB) \perp (AHK)$

المجموعة B تمارين موضوعية



في التمارين (5—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

أسئلة التمارين (5—1)، على الشكل المقابل.

إذا كان $\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع (ABC)، $AB = AC$، M منتصف $\overline{BC}$ فإن:

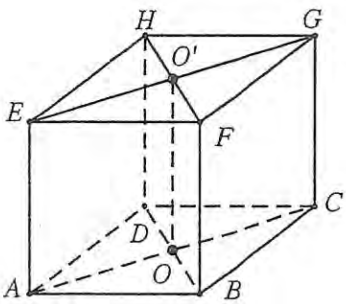
(1) $(ABC) \perp (DAC)$ (a) (b)

(2) $(DBC) \perp (DAC)$ (a) (b)

(3) $(AMD) \perp (ABC)$ (a) (b)

(4) $(AMD) \perp (DBC)$ (a) (b)

(5) $DC = DB$ (a) (b)



في التمارين (10—6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

أسئلة التمرينين (7—6)، على الشكل المقابل حيث إن:

$ABCDEFGH$ شبه مكعب فيه:

O مركز المستطيل $ABCD$، O' مركز المستطيل $EFGH$

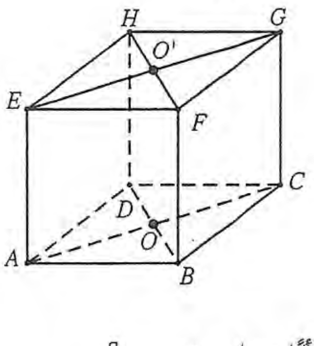
(6) $(EFGH)$، $(FGCB)$ هما:

(a) متعامدان (b) متوازيان (c) متطابقان (d) ليس أيًّا مما سبق

(7) $(DBFH)$، $(ABCD)$ هما:

(a) متوازيان (b) متطابقان (c) متعامدان (d) ليس أيًّا مما سبق

أسئلة التمرينين (9—8)، على الشكل المقابل حيث إن: $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه a.



O مركز المربع $ABCD$، O' مركز المربع $EFGH$

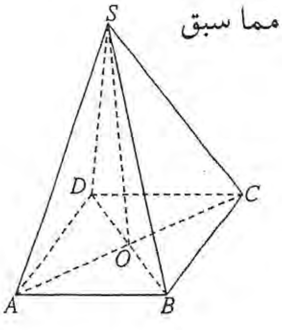
(8) $(EACG)$، $(DHFB)$ هما:

(a) متطابقان (b) متعامدان

(c) متوازيان (d) ليس أيًّا مما سبق

(9) (HGE)، (OAB) هما:

(a) متعامدان (b) متوازيان (c) متطابقان (d) ليس أيًّا مما سبق

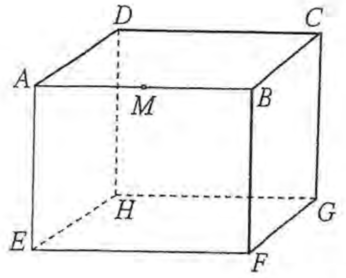


(10) $ABCD$ مربع مركزه O، $\overleftrightarrow{SO} \perp (ABCD)$

(a) $(SAB) \perp (SBC)$ (b) $(SAC) \perp (SBD)$

(c) $(SAB) \parallel (SCD)$ (d) $(SAD) \perp (ABCD)$

اختبار الوحدة العاشرة

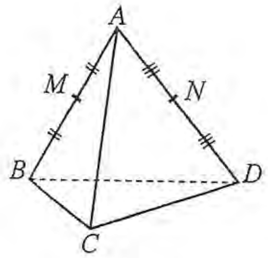


(1) $ABCDEFGH$ مكعب، M منتصف $\overline{AB}$

(a) هل $\overleftrightarrow{AB}$ والنقطة M تعينان مستويًا واحدًا؟

(b) هل $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{GH}$ يعينان مستويًا واحدًا؟

(c) سمّ ثلاثة مستويات تحتوي كل منها على النقطة M



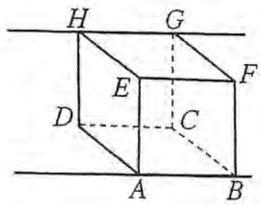
(2) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة. النقطة M منتصف $\overline{AB}$ والنقطة N منتصف $\overline{AD}$

أكمل:

(a) $\overleftrightarrow{BD}$ .... $\overleftrightarrow{NM}$

(b) $(ABD) \cap (CNM) = ...$

(c) $(CNB) \cap (ABD) = ...$

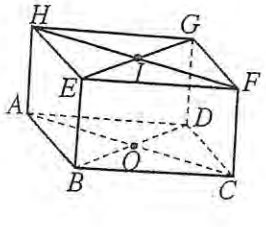


(3) $ABCDEFGH$ شبه مكعب.

(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

(b) أثبت أن: $BDHF$ هو مستطيل.

(c) أثبت أن: $\overleftrightarrow{HF}$ موازٍ للمستوي $ABCD$



(4) $ABCDEFGH$ شبه مكعب.

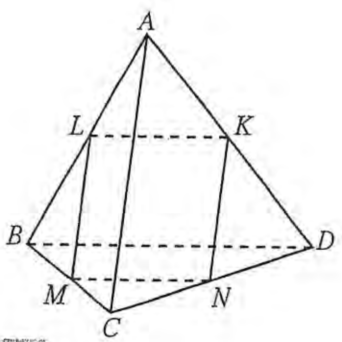
النقطة O مركز المربع $ABCD$،

النقطة I مركز المربع $EFGH$

(a) أثبت أن النقاط: D، G، E تقع في المستوي $EGDB$

(b) أكمل: $(BEGD) \cap (AHFC) = ...$

(c) أثبت أن: $\overleftrightarrow{AH} \parallel \overleftrightarrow{CF} \parallel \overleftrightarrow{OI}$



(5) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة؛ L منتصف $\overline{AB}$، M منتصف $\overline{CB}$،

N منتصف $\overline{CD}$، K منتصف $\overline{AD}$

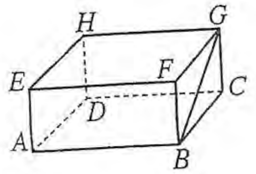
(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{NK} \parallel \overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{LM}$

(b) أثبت أن: $KLMN$ هو متوازي أضلاع.

(c) أثبت أن: $\overleftrightarrow{NL}$ يتقاطع مع $\overleftrightarrow{KM}$

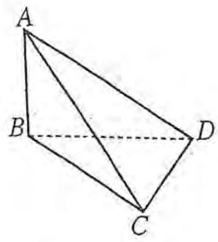
(6) $ABCDEFGH$ شبه مكعب.

أثبت أن: $\overleftrightarrow{GH}$ متعامد مع $\overleftrightarrow{GB}$



(7) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة $BC = BD$ ، $\overleftrightarrow{AB}$ متعامد مع المستوي BCD

أثبت أن: $m(A\widehat{C}B) = m(A\widehat{D}B)$

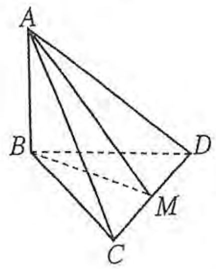


(8) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة، قاعدته BCD مثلث متطابق الأضلاع، $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$؛

M منتصف $\overline{CD}$

(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{DC} \perp (ABM)$

(b) استنتج أن: $\overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{AM}$

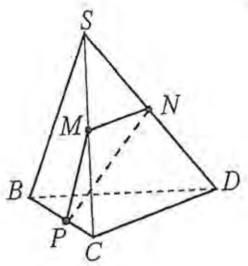


(9) $SBCD$ هرم ثلاثي قاعدته BCD، M منتصف $\overline{SC}$، N منتصف $\overline{SD}$ ، P نقطة على $\overline{BC}$

(a) أثبت أن $\overleftrightarrow{MN}$ موازٍ للمستوي BCD

(b) (PMN) يقطع $\overleftrightarrow{BD}$ في النقطة L

أثبت أن: $\overleftrightarrow{PL} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$



(10) $ABCDEFGH$ مكعب. I منتصف $\overline{BC}$،

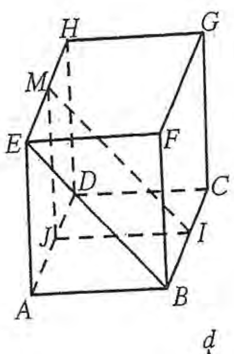
J منتصف $\overline{AD}$، M منتصف $\overline{EH}$

(a) أثبت أن $\overline{AD} \perp (IJM)$

(b) أثبت أن $\overline{AD} \perp (AEB)$

(c) أثبت أن (IJM)، (ABE) متوازيان

(d) أثبت أن: $\overline{IJ} \perp (ADHE)$



(11) (π_1) ، (π_2) يتقاطعان في $\overleftrightarrow{d}$، A نقطة خارج (π_1) وخارج (π_2)

$\overleftrightarrow{AI} \perp (\pi_1)$ ، $\overleftrightarrow{AJ} \perp (\pi_2)$

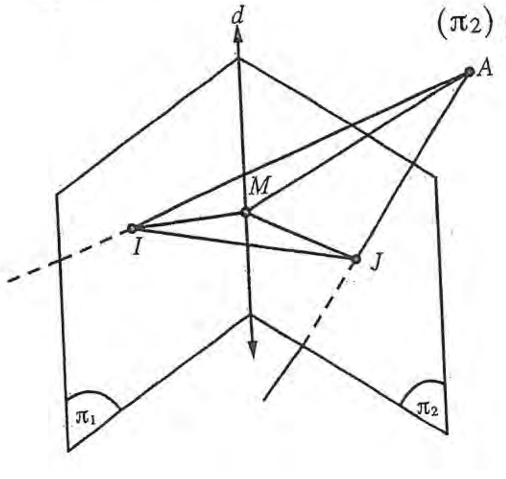
(a) أثبت أن $(AIJ) \perp (\pi_1)$

وأن $(AIJ) \perp (\pi_2)$

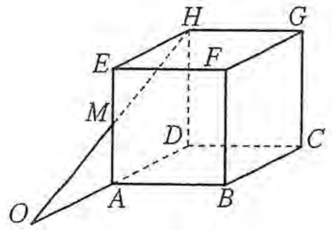
(b) أثبت أن $\overleftrightarrow{d} \perp (AIJ)$

(c) (AIJ) يتقاطع مع $\overleftrightarrow{d}$ عند النقطة M،

أوجد $m(A\widehat{J}M)$ ، $m(A\widehat{I}M)$



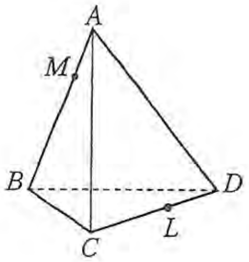
تمارين إثرائية



(1) $ABCDEFGH$ مكعب، M منتصف AE

$\overleftrightarrow{HM}$ يقطع المستوي $ABCD$ في O

أثبت أن النقاط A, D, O تقع على استقامة واحدة.

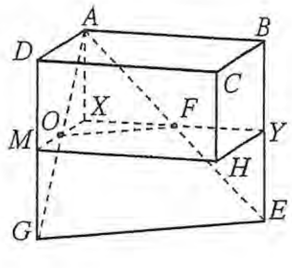


(2) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.

النقطة M تنتمي إلى $\overline{AB}$ وتنتمي النقطة L إلى $\overline{CD}$

(a) أثبت أن L تنتمي إلى كل من (ABL)، (CDM)

(b) أكمل: $(ABL) \cap (CDM) = ...$



(3) $ABCDXYHM$ شبه مكعب،

O منتصف $\overline{XM}$، F منتصف $\overline{XY}$

$\overleftrightarrow{DM}$، $\overleftrightarrow{AO}$ يتقاطعان في G

$\overleftrightarrow{BY}$، $\overleftrightarrow{AF}$ يتقاطعان في E

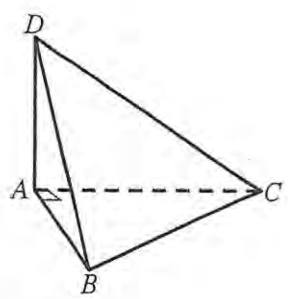
(a) أثبت أن النقطة O هي منتصف $\overline{AG}$

(b) أثبت أن النقطة F هي منتصف $\overline{AE}$

(c) أثبت أن: $\overleftrightarrow{OF} \parallel \overleftrightarrow{EG}$

(d) أثبت أن: $\overleftrightarrow{EG}$ يوازي المستوي $XYHM$

(4) $DABC$ هرم المثلثات ABC ، ACD ، ABD قائمة الزاوية في A



(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$

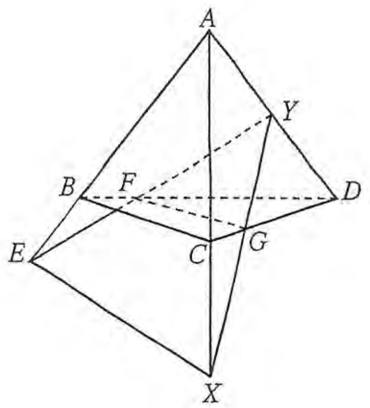
(b) استنتج أن: $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AD}$

(c) أثبت أن: $\overleftrightarrow{AB} \perp (ADC)$

(5) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.

$\overleftrightarrow{FG} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, $Y \in \overline{AD}$

$\overleftrightarrow{FY}$ يقطع $\overleftrightarrow{AB}$ في E، $\overleftrightarrow{GY}$ يقطع $\overleftrightarrow{AC}$ في X



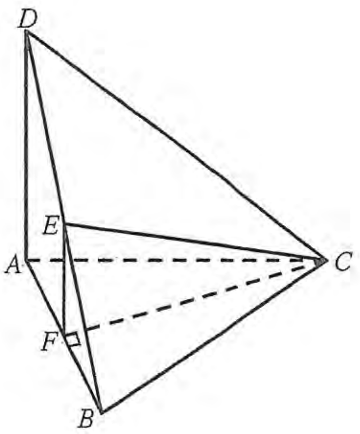
(a) أثبت أن: $(ABC) \cap (FYG) = \overleftrightarrow{XE}$

(b) أثبت أن: $\overleftrightarrow{XE} \parallel \overleftrightarrow{FG}$

(6) ABC مثلث متطابق الأضلاع.

$\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع المستوي ABC

F منتصف $\overline{AB}$



(a) أثبت أن: $\overline{CF}$ متعامد مع المستوي DAB

(b) أثبت أن: $\overleftrightarrow{CF}$ متعامد مع $\overleftrightarrow{BD}$

(c) أثبت أن: (ABC) متعامد مع (ABD)

(d) ليكن $\overleftrightarrow{FE}$ متعامدًا مع $\overleftrightarrow{BD}$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{CE}$ متعامد مع $\overleftrightarrow{BD}$

(e) إذا كان: $FE = 4\,\text{cm}, CE = 6\,\text{cm}$

فأوجد قياس الزاوية الزوجية $(DBA, \overleftrightarrow{DB}, DBC)$

تمرّنْ
11-1

مبدأ العد والتباديل والتوافيق

Counting Principle, Permutations and Combinations

المجموعة A تمارين مقالية

(1) لتكن $A = \{2, 3, 4, 6, 7, 9\}$. تم تكوين أعداد ذات أربع منازل باستخدام عناصر A . أوجد:

(a) عدد الأعداد الممكن تكوينها.

(b) عدد الأعداد مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

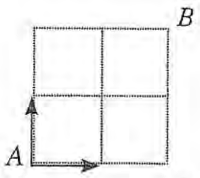
(c) عدد الأعداد الزوجية مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

(2) لتكن $B = \{2, 4, 5, 7, 8\}$. تم تكوين أعداد ذات أربع منازل باستخدام عناصر B . أوجد:

(a) عدد الأعداد مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

(b) عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 10 الممكن تكوينها.

(c) عدد الأعداد مختلفة الأرقام والأصغر من 5000 الممكن تكوينها.



(3) على ورقة المربعات المقابلة، ما عدد الخطوات التي تسمح بالانتقال من A إلى B بالاتجاه فقط إلى اليمين أو إلى الأعلى؟

(4) **السيّارات:** تقترح بعض الشركات على زبائنها تبديل مواقع إطارات السيارة كل مسافة معينة.

(a) بكم طريقة مختلفة يمكن تبديل مواقع الإطارات الأربعة؟

(b) إذا استخدم الإطار الاحتياطي، فكم يصبح عدد طرائق تبديل الإطارات؟

(5) أوجد قيمة كل مقدار مما يلي:

(a) ${}_8P_1$ **(b)** ${}_3P_2$ **(c)** ${}_8P_3$ **(d)** ${}_9P_6$

(6) طلب 15 طالبًا موعدًا للتحدث مع مدير المدرسة، كلًّا بمفرده. بكم طريقة مختلفة يمكن للمدير استقبال الطلاب؟

(7) لقضاء سهرة يمكن لعائلة اختيار مطعم من بين 4 مطاعم وصالة سينما من بين 3 صالات. فما عدد الخيارات الممكنة لمطعم وصالة سينما؟

(8) حلّ المعادلات التالية:

(a) ${}_nP_4 = 5 \times {}_nP_3 \,,\ n \geq 4$ **(b)** ${}_5P_r = 12 \times {}_5P_{r-2}$ **(c)** $\dfrac{{}_nP_{n-2}}{{}_nP_{n-4}} = \dfrac{n^2}{12}$

(9) بكم طريقة مختلفة يمكن لثلاثة طلاب الجلوس في صف واحد يحوي 8 مقاعد؟

(10) أوجد قيمة كل مقدار مما يلي:

(a) ${}_6C_2$ (b) ${}_7C_3 \times {}_9C_5$ (c) ${}_4C_4$ (d) ${}_6C_2 + {}_6C_3$

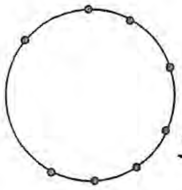
(11) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار مجموعة من 4 عناصر من مجموعة مؤلفة من 300 عنصر؟

(12) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار مجموعة من 4 أرقام من المجموعة:

{0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9}؟

(13) فاز 16 طالبًا بعضوية فريق كرة القدم في المدرسة. بكم طريقة ممكنة يمكن اختيار 11 لاعبًا منهم علمًا أنه يوجد بين الطلاب حارس مرمى واحد؟

(14) نوّاف طالب جامعي، يريد اختيار رفيقين أو 3 للسكن معه في المبنى الجامعي. بكم طريقة ممكنة يمكنه الاختيار إذا كان عدد رفاقه 25؟



(15) **الهندسة:** في الشكل المقابل، هناك 8 نقاط على الدائرة.

(a) ما عدد المثلثات المختلفة التي يمكنك الحصول عليها باستخدام 3 من هذه النقاط المختلفة؟

(b) ما عدد المضلعات الخماسية المختلفة التي يمكنك الحصول عليها باستخدام 5 من هذه النقاط؟

(c) فسّر، لماذا يجب أن تتساوى الإجابتان في (a)، (b).

(16) في الصفّ الحادي عشر «الشعبة A» 24 طالبًا وفي «الشعبة B» 22 طالبًا. أراد معلم الأنشطة الفنية اختيار 7 طلاب للتدرب على عمل مسرحي. ما عدد الخيارات الممكنة شرط أن تتضمن مجموعة الطلاب المختارة على الأقل طالبين من الشعبة A؟

(17) حلّ المعادلات التالية:

(a) ${}_nC_3 + {}_nC_2 = 3n(n-1)$ (b) ${}_nC_4 = {}_nC_{n-2}$ (c) ${}_{2n}C_4 = \frac{1}{2}\, {}_{2n}C_5$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) قيمة المقدار !10 هي 3 628 800 — (a) (b)

(2) قيمة المقدار $5! \times 4!$ هي 360 — (a) (b)

(3) عدد طرق جلوس 4 أشخاص على 4 مقاعد في صفّ هو !4 — (a) (b)

(4) قيمة المقدار $3 \times {}_5C_4$ هي 15 — (a) (b)

(5) $(n-r)! = n! - r!$ — (a) (b)

في التمارين (15–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) قيمة المقدار $\frac{10!}{7!3!}$ هي:

ⓐ $\frac{10}{21}$ ⓑ $\frac{1}{120}$ ⓒ 120 ⓓ 1

(7) قيمة المقدار ${}_{10}C_6 \times {}_6P_4$ هي:

ⓐ 75 600 ⓑ 7 560 ⓒ 2.5 ⓓ 210

(8) قيمة المقدار ${}_9C_2 \times \frac{{}_7C_4}{{}_9C_4}$ هي:

ⓐ 18 ⓑ 5.184 ⓒ 10 ⓓ 735

(9) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار 5 لاعبين لفريق السلة من بين 12 لاعبًا إذا كان ترتيب المراكز في الفريق مهمًّا؟

ⓐ 95 040 ⓑ 475 200 ⓒ 392 ⓓ 11 404 800

(10) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار 3 أعلام من مجموعة من 7 أعلام مختلفة؟

ⓐ 210 ⓑ 35 ⓒ 840 ⓓ 24

(11) إذا كان هناك طريق واحدة تصل بين كل مدينتين. فما عدد الطرق التي تصل بين 8 مدن.

ⓐ 20 160 ⓑ 2 520 ⓒ 40 320 ⓓ 5 040

(12) في المخزن 6 بطاريات من ماركات مختلفة، 3 بطاريات جديدة و3 مستخدمة. بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار على الأقل بطارية واحدة جديدة من 3 بطاريات؟

ⓐ 1 ⓑ 19 ⓒ 9 ⓓ 6

(13) بكم طريقة مختلفة يجلس أحمد ومحمد وعلي وجاسم وفهد بشرط تجاور محمد وأحمد؟

ⓐ 5! ⓑ 4! ⓒ 2! × 4! ⓓ 2! × 5!

(14) إذا كان: ${}_nP_3 = 60$ فإن n تساوي

ⓐ 6 ⓑ 5 ⓒ 4 ⓓ 2

(15) مجموعة حلّ المعادلة: ${}_6C_r = 15$ هي:

ⓐ {2} ⓑ {4} ⓒ {2, 4} ⓓ {3}

تمرّنْ 11-2

نظرية ذات الحدين

The Binomial Theorem

المجموعة A تمارين مقالية

(1) استخدم مثلث باسكال لفك كل مما يلي:

(a) $(a+b)^3$ **(b)** $(a+b)^4$ **(c)** $(x+y)^6$

(2) استخدم نظرية ذات الحدين لفك كل مما يلي:

(a) $(x+y)^4$ **(b)** $(x-y)^4$ **(c)** $(x-2)^5$

(3) فك كلًّا مما يلي:

(a) $(3x-y)^5$ **(b)** $(x^2+y)^4$ **(c)** $(3x+5y)^3$

في التمارين (4–8)، أوجد الحد المعين من مفكوك ثنائية الحد في كل مما يلي:

(4) الحد الثالث من $(x+3)^{12}$

(5) الحد الثاني من $(x+3)^9$

(6) الحد الثاني عشر من $(2+x)^{11}$

(7) الحد الثامن من $(x-2y)^{15}$

(8) الحد السابع من $(x^2-2y)^{11}$

(9) **تحليل الخطأ:** زعم أحد الطلاب بأن: ${}_7C_5\,x^2y^4$ هو أحد حدود ذات الحدين. اشرح خطأ الطالب.

(10) أوجد الحد الذي يحتوي على x^2y^3 في مفكوك $(3x-7y)^5$

(11) في مفكوك $(5-3ab)^7$ أوجد الحد الذي يحتوي على a^3b^3

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) مفكوك $(c+1)^5$ هو: $c^5+5c^4+10c^3+10c^2+5c+1$ (a) (b)

(2) إذا كان الحد $126c^4d^5$ أحد حدود مفكوك $(c+d)^n$، فإنّ قيمة n هي 5 (a) (b)

(3) إذا كان معامل الحد الثاني في مفكوك $(r+x)^n$ هو 7 فإنّ قيمة n هي 7 (a) (b)

(4) الحدّ الثاني من $(x+3)^9$ هو $54x^8$ (a) (b)

(5) معامل الحد السابع في مفكوك $(x-y)^7$ هو عدد سالب. (a) (b)

في التمارين (11—6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة:

(6) مفكوك $(a-b)^3$ هو:

(a) $a^3+a^2b+ab^2+b^3$
(b) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
(c) $a^3-a^2b+ab^2-b^3$
(d) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(7) الحد الثالث من مفكوك $(a-b)^7$ هو:

(a) $-21a^5b^2$
(b) $-7a^6b$
(c) $7a^6b$
(d) $21a^5b^2$

(8) في مفكوك $(2a-3b)^6$ الحد الذي معامله 2 160 هو:

(a) الحدّ الثاني
(b) الحد الثالث
(c) الحد الرابع
(d) الحد الخامس

(9) معامل الحد الثالث في مفكوك $(3c-4b)^5$ هو:

(a) 5 170
(b) 3 312
(c) 4 320
(d) 2 316

(10) في مفكوك $(x+y)^9$ تكون رتبة الحد: $126x^5y^4$ هي:

(a) الرابعة (b) الخامسة (c) السادسة (d) التاسعة

(11) في مفكوك $(3x+2y)^8$ الحد الذي يحوي x^3y^5 هو:

(a) T_3 (b) T_4 (c) T_5 (d) T_8

تمرّنْ
11−3

الاحتمال

Probability

المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (2−1)، رميت حجري نرد. بيّن ما إذا كان الحدثان متنافيين أم لا.

(1) مجموع العددين الظاهرين هو عدد أولي، المجموع أصغر من 4

(2) ناتج ضرب العددين الظاهرين 24، أحد العددين هو عدد أولي.

(3) يبيّن التمثيل البياني أدناه، أنواع عقود العمل في إحدى الدول في العام 2011، أوجد احتمال كل حدث مما يلي:

(a) اختيار شخص من قطاع الخدمات.

(b) اختيار شخص من قطاع الخدمات أو مستشار فني.

(c) اختيار شخص ليس مديرًا فنيًا.

(d) اختيار شخص ليس عاملًا وليس من قطاع الإنتاج.

(4) يبيّن الجدول المقابل كيف يمضي موظفو إحدى المؤسسات عطلتهم الصيفية. اختير عشوائيًا موظف من هذه المؤسسة. ما احتمال أن يسكن خلال عطلته الصيفية في فندق على شاطئ البحر؟

المسكن	الجبل	شاطئ البحر	المجموع
استئجار شقة في مبنى	14	6	20
فندق	16	12	28
منزل مستقل	8	18	26
المجموع	38	36	74

(5) يحتوي كيس على 4 كرات زرقاء اللون وكرتين حمراء اللون. أخذت كرتان معًا من دون النظر داخل الكيس. أوجد احتمال كل حدث مما يلي:

(a) الكرتان زرقاوان.

(b) كرة زرقاء وكرة حمراء.

(c) الكرتان من اللون نفسه.

(6) إذا كان الحدثان $r\,,t$ غير متنافيين، أكمل الجدول أدناه لإيجاد كل احتمال.

	$P(t)$	$P(r)$	$P(t\cap r)$	$P(t\cup r)$
(a)	$\frac{7}{11}$	$\frac{3}{11}$		$\frac{9}{11}$
(b)	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$
(c)		$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{3}$
(d)	$\frac{2}{x}$	$\frac{3}{2x}$	$\frac{1}{x}$	

(7) إذا كان الحدثان $r\,,t$ متنافيان. أوجد $P(t\cup r)$.

(a) $P(t)=\frac{5}{8}\ ,\ P(r)=\frac{1}{8}$

(b) $P(t)=12\%\ ,\ P(r)=27\%$

(8) إذا كان الحدثان $n\,,m$ مستقلّان. أوجد $P\left(m\cap n\right)$.

(a) $P(m)=\frac{1}{4}\ ;\ P(n)=\frac{2}{3}$

(b) $P(m)=0.6\ ;\ P(n)=0.9$

(9) في أحد البلدان، 30% من السكان هم تحت سن العشرين، 17% فوق الستين. اختير شخص من السكان عشوائيًّا. فما احتمال أن يكون تحت سن العشرين أو فوق الستين؟

(10) رميت حجر نرد. أوجد احتمال كل من الأحداث التالية:

(a) 3 أو عدد فردي.

(b) عدد زوجي أو عدد أصغر من 4

(c) عدد فردي أو عدد أولي.

(d) 4 أو عدد أصغر من 6

(11) في إحدى المدن، وافق 40% من السكان على مرور القطار السريع في الغابة قرب مدينتهم. اختير 10 أشخاص عشوائيًّا من سكان المدينة، فما احتمال أن يكون 4 منهم قد وافقوا على مرور القطار السريع؟

(12) يستخدم حوالى 11% من الطلاب اليد اليسرى للكتابة. يوجد في أحد الصفوف 30 طالبًا. فما احتمال أن يكون 4 طلاب من هذا الصف يستخدمون اليد اليسرى للكتابة؟

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إن اختيار لون السيارة عشوائيًّا، اختيار الدواليب عشوائيًّا هما حدثان مستقلان. (a) (b)

(2) الحدثان m، n مستقلان، $P(m)=\frac{12}{17}$, $P(n)=\frac{3}{8}$ إذًا $P(m\cap n)=\frac{9}{17}$ (a) (b)

(3) عند رمي حجر نرد، فإن احتمال ظهور العدد 4 أو ظهور عدد زوجي يساوي $\frac{1}{2}$ (a) (b)

(4) في اختبار صح – خطأ، أجبت عن 5 أسئلة عشوائيًّا. احتمال أن تكون 3 من إجاباتك صحيحة هو $\frac{5}{16}$ (a) (b)

في التمارين (11–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) الحدثان m، n مستقلان، $P(m)=\frac{1}{3}$، $P(n)=\frac{9}{10}$ إذًا $P(m\cap n)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{25}{30}$

(c) $\frac{3}{10}$ (d) $\frac{11}{30}$

(6) الحدثان t، r متنافيان $P(t)=\frac{3}{5}$، $P(r)=\frac{1}{3}$ إذًا $P(t\cup r)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{14}{15}$

(c) $\frac{4}{15}$ (d) 0

(7) الحدثان t، r متنافيان $P(t)=\frac{1}{7}$، $P(r)=60\%$ إذًا $P(t\cup r)$ تساوي:

(a) 28% (b) 42%

(c) $\frac{16}{35}$ (d) $\frac{26}{35}$

(8) عند رمي حجر نرد فإن احتمال ظهور عدد زوجي أو عدد أولي يساوي:

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{5}{6}$

(c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

(9) يحتوي كيس على 5 كرات من اللون الأزرق، 3 كرات من اللون الأحمر. أخذت عشوائيًّا كرتان معًا من الكيس. احتمال الحدث: «أن تكون كرة حمراء والأخرى كرة زرقاء» هو:

(a) $\frac{1}{14}$ (b) $\frac{28}{15}$

(c) $\frac{2}{7}$ (d) $\frac{15}{28}$

(10) يتوزّع طلاب مدرستين B، A على الصفوف الثلاثة الأخيرة وفق النسب التالية:

المدرسة / الصف	العاشر	الحادي عشر	الثاني عشر
A	37%	35%	28%
B	38%	34%	28%

اختير عشوائيًا طالب من كل مدرسة. احتمال أن يكون طالب من الصف العاشر أو الصف الحادي عشر من المدرسة A وطالب من الصف الثاني عشر من المدرسة B هو:

(a) 20.16%　　(b) 100%

(c) 0%　　(d) 79.84%

(11) 90% من القمصان التي تنتجها إحدى الشركات لا عيب فيها. اختار مراقب الجودة 8 قمصان عشوائيًا. احتمال أن يكون 3 قمصان من هذه المجموعة فيها عيب هو:

(a) 0.033　　(b) 5.9×10^{-4}

(c) 4×10^{-4}　　(d) 2.955

اختبار الوحدة الحادية عشرة

(1) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار 5 ممثلين من مجموعة مؤلفة من 11 ممثلًا لتحضير عمل مسرحي؟

(2) بكم طريقة مختلفة يمكن توزيع 15 طالبًا على مجموعات كل منها من 3 طلاب؟

(3) أنت تبحث عن منزل. هناك 5 منازل للإيجار، بكم طريقة مختلفة يمكن زيارة هذه المنازل؟

(4) أوجد مفكوك: $(1-2t)^4$

(5) أوجد قيمة التعبير: $2({}_5C_4)-{}_3C_2$

في التمرينين (7—6)، رميت حجري نرد. في كل حالة، حدّد ما إذا كان الحدثان متنافيين أم لا، ثم أوجد $P(A\cup B)$.

(6) A: «مجموع العددين الظاهرين = 12»؛ B: «كل من العددين هو عدد فردي».

(7) A: «العددان متساويان»؛ B: «مجموعهما من مضاعفات العدد 3».

(8) احتمال النجاح = 0.2، أوجد احتمال النجاح في 4 محاولات من بين 10

(9) احتمال الفوز = 0.6، أوجد احتمال الفوز 3 مرات في 8 محاولات.

(10) في مدرستك اشترى 30% من الطلاب شعار المدرسة، اخترت 5 طلاب عشوائيًا. فما احتمال أن يكون:

(a) اثنان منهم قد اشتريا شعار المدرسة؟

(b) على الأقل اثنان قد اشتريا شعار المدرسة؟

(11) يوجد في واجهة أحد المحلات التجارية 6 مصابيح كهربائية. عند الاستخدام العادي، إمكانية أن يبقى كل مصباح يعمل لمدة سنتين هي95%

(a) فما احتمال أن تبقى المصابيح الستة تعمل لمدة سنتين؟

(b) فما احتمال أن تبقى 5 مصابيح تعمل خلال سنتين؟

(12) تقول إحدى الشركات أن 99% من علب رقائق الذرة التي تبيعها وزنها مطابق لما هو مدوّن على العلبة.

(a) في صندوق من 10 علب. ما احتمال ألا يطابق وزن علبة واحدة فقط ما هو مدوّن عليها؟

(b) ما احتمال أن تكون أوزان 3 علب من هذا الصندوق غير مطابقة لما هو مدوّن عليها؟

تمارين إثرائية

(1) يقول صاحب أحد محلات بيع الخضار والفاكهة أن 90% من ثمار الأناناس التي يبيعها تصبح ناضجة خلال 4 أيام. أوجد احتمال كل مما يلي لصندوق يحتوي على 12 ثمرة أناناس.

(a) كل الثمرات تصبح ناضجة خلال 4 أيام.

(b) على الأقل 10 ثمرات تصبح ناضجة خلال 4 أيام.

(c) ليس أكثر من 9 ثمرات تصبح ناضجة خلال 4 أيام.

(2) باستخدام الأحرف A, B, C نريد كتابة كلمات من 10 أحرف.

(a) ما عدد الكلمات التي يمكن كتابتها؟

(b) ما عدد الكلمات التي يمكن كتابتها:

(i) تبدأ بـ A؟

(ii) تنتهي بـ ABC؟

(iii) تتضمن الحرف A في الخانة السادسة؟

(iiii) الأحرف الثلاثة الأولى A, B, C دون الأخذ بعين الاعتبار الترتيب؟

(c) ما عدد الكلمات التي يمكن كتابتها وتتضمن:

(i) على الأقل حرف A مرة واحدة؟

(ii) بالتحديد 4 مرات الحرف B.

(iii) على الأكثر مرة واحدة C؟

(3) تتكوّن الشيفرة السرية لفتح الخزنة من حرف يليه عدد من 3 أرقام.

(a) الحرف هو أحد أحرف كلمة «كويت». فما عدد الشيفرات الممكنة؟

(b) الحرف هو ك لكن لا يوجد رقم متكرر.

(c) الحرف هو أحد أحرف كلمة «كويت» وعدد الشيفرة هو عدد زوجي.

(d) الحرف هو ت، يتضمن العدد على الأقل أحد الأرقام 9 ,8 ,7

(4) رمز المنزل مكوّن من 4 أرقام لا صفر فيها ولا تكرار. اختار يوسف رمزًا عشوائيًّا. فما احتمال أن يكون صحيحًا؟

(5) حل في n: $_nC_3 + {_nC_2} = 5n(n-1)$

(6) تتألف الموسوعة العلمية من 20 جزءًا. وقد وضعت عشوائيًّا على رف المكتبة. فما احتمال أن يكون الجزءان 2 ,1 قرب بعضهما بعضًا.

(7) يوجد في واجهة أحد المحال التجارية صف من المصابيح الكهربائية. تعطى إمكانية أن تبقى بعض هذه المصابيح تعمل لأكثر من سنتين بالتعبير: $_5C_2\,(0.15)^2 \times (0.85)^3$

(a) ما عدد مصابيح واجهة المحل؟

(b) ما عدد المصابيح التي يتوقع أن تبقى تعمل لأكثر من سنتين؟

(c) ما احتمال أن تبقى جميع المصابيح تعمل لأكثر من سنتين؟

(8) في الكيس الأول 6 كرات سوداء اللون و4 بيضاء اللون. في الكيس الثاني، 8 كرات سوداء اللون و12 كرة بيضاء اللون. نختار كيسًا عشوائيًّا ثم نختار أيضًا عشوائيًّا كرة من الكيس.
فما احتمال أن تكون الكرة بيضاء اللون؟

(9) رميت قطعة نقود معدنية 6 مرات. احتمال الحصول على صورة 3 مرات وكتابة 3 مرات يساوي 0.3125، هل قطعة النقود هذه معدّلة؟

(10) لنفرض أنه اختير عشوائيًّا عدد من 10 إلى 100 ضمنًا.

(a) ما احتمال أن يكون من مضاعفات العدد 5؟

(b) ما احتمال أن يكون من مضاعفات العدد 4؟

(c) هل الحدثان متنافيان؟ اشرح.

(d) ما احتمال أن يكون العدد من مضاعفات العدد 5 والعدد 4؟

(11) في اختبار «الاختيار من متعدد» هناك 4 إجابات لكل سؤال.

(a) اختار طالب إجابة عشوائيًّا، فما احتمال أن تكون صحيحة؟

(b) اختار طالب ثلاثة أسئلة من الاختبار وأجاب عنها عشوائيًّا. فما احتمال أن تكون الإجابات الثلاث صحيحة؟