تمرّنْ
1–1

الجذور والتعبيرات الجذرية
Roots and Radical Expressions

المجموعة A تمارين مقالية

(1) باستخدام قوانين الجذور أوجد إن أمكن:

(a) $\sqrt{400}$ **(b)** $\sqrt{1600}$ **(c)** $\sqrt{10^4}$ **(d)** $\sqrt{0.01}$

(e) $\sqrt{0.25}$ **(f)** $\sqrt{0.0064}$ **(g)** $\sqrt{\frac{-16}{49}}$ **(h)** $\sqrt{\frac{2}{50}}$

(i) $\sqrt{\frac{12}{147}}$ **(j)** $\sqrt{36\times 25}$ **(k)** $\sqrt{\frac{-1}{121}}$ **(l)** $\sqrt{75\times 300}$

(2) باستخدام قوانين الجذور أوجد:

(a) $\sqrt[3]{27}$ **(b)** $\sqrt[3]{1000}$ **(c)** $\sqrt[3]{-64}$ **(d)** $\sqrt[3]{0.125}$

(e) $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$ **(f)** $\sqrt[3]{216\times 343}$ **(g)** $\sqrt[3]{-\frac{375}{24}}$ **(h)** $\sqrt[3]{0}$

(i) $\sqrt[3]{60\times 90}$

(3) بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية مستخدمًا قوانين الجذور:

(a) $\sqrt{16x^2}$ **(b)** $\sqrt{0.25x^6}$ **(c)** $\sqrt{x^8y^{18}}$

(d) $\sqrt{8x^3},\ x\geq 0$ **(e)** $\sqrt{\frac{x^3y^5}{25x}},\ y\geq 0,\ x>0$ **(f)** $5\sqrt{216x^2+23\sqrt{64x^4}},x>0$

(g) $\sqrt[3]{-125y^6}$ **(h)** $\sqrt[3]{81x^2}$ **(i)** $\sqrt[3]{-250x^6y^5}$

(j) $\sqrt[3]{49x^2}\times\sqrt[3]{56xy^3}$ **(k)** $\sqrt[3]{256u^5v}\div\sqrt[3]{4u^2v^{10}},u\neq 0,v\neq 0$

(4) بسّط كلًّا من التعبيرات التالية مستخدمًا قوانين الجذور:

(a) $\sqrt{5}\times\sqrt{40}$ **(b)** $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{80}$ **(c)** $\frac{\sqrt[3]{640}}{\sqrt[3]{270}}$

(d) $\sqrt{5}\times(\sqrt{5}+\sqrt{15})$ **(e)** $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$ **(f)** $\sqrt{2}\times(\sqrt{50}+7)$

(g) $(5+2\sqrt{11})^2$ **(h)** $\frac{\sqrt{3.6\times 10^8}}{\sqrt{4\times 10^3}}$ **(i)** $3\sqrt[3]{16}-4\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{128}$

(j) $\sqrt{75}-4\sqrt{18}+2\sqrt{32}$ **(k)** $4\sqrt[3]{81}-3\sqrt[3]{54}$ **(l)** $\sqrt[3]{-18}\times\sqrt[3]{-12}$

(m) $(2\sqrt{7}+1)^2-(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)$

تمرّنْ
1–1

الجذور والتعبيرات الجذرية
Roots and Radical Expressions

المجموعة A تمارين مقالية

(1) باستخدام قوانين الجذور أوجد إن أمكن:

(a) $\sqrt{400}$ **(b)** $\sqrt{1600}$ **(c)** $\sqrt{10^4}$ **(d)** $\sqrt{0.01}$

(e) $\sqrt{0.25}$ **(f)** $\sqrt{0.0064}$ **(g)** $\sqrt{\frac{-16}{49}}$ **(h)** $\sqrt{\frac{2}{50}}$

(i) $\sqrt{\frac{12}{147}}$ **(j)** $\sqrt{36\times 25}$ **(k)** $\sqrt{\frac{-1}{121}}$ **(l)** $\sqrt{75\times 300}$

(2) باستخدام قوانين الجذور أوجد:

(a) $\sqrt[3]{27}$ **(b)** $\sqrt[3]{1000}$ **(c)** $\sqrt[3]{-64}$ **(d)** $\sqrt[3]{0.125}$

(e) $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$ **(f)** $\sqrt[3]{216\times 343}$ **(g)** $\sqrt[3]{-\frac{375}{24}}$ **(h)** $\sqrt[3]{0}$

(i) $\sqrt[3]{60\times 90}$

(3) بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية مستخدمًا قوانين الجذور:

(a) $\sqrt{16x^2}$ **(b)** $\sqrt{0.25x^6}$ **(c)** $\sqrt{x^8y^{18}}$

(d) $\sqrt{8x^3},\ x\geq 0$ **(e)** $\sqrt{\frac{x^3y^5}{25x}},\ y\geq 0,\ x>0$ **(f)** $5\sqrt{216x^2+23\sqrt{64x^4}},x>0$

(g) $\sqrt[3]{-125y^6}$ **(h)** $\sqrt[3]{81x^2}$ **(i)** $\sqrt[3]{-250x^6y^5}$

(j) $\sqrt[3]{49x^2}\times\sqrt[3]{56xy^3}$ **(k)** $\sqrt[3]{256u^5v}\div\sqrt[3]{4u^2v^{10}},u\neq 0,v\neq 0$

(4) بسّط كلًّا من التعبيرات التالية مستخدمًا قوانين الجذور:

(a) $\sqrt{5}\times\sqrt{40}$ **(b)** $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{80}$ **(c)** $\frac{\sqrt[3]{640}}{\sqrt[3]{270}}$

(d) $\sqrt{5}\times(\sqrt{5}+\sqrt{15})$ **(e)** $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$ **(f)** $\sqrt{2}\times(\sqrt{50}+7)$

(g) $(5+2\sqrt{11})^2$ **(h)** $\frac{\sqrt{3.6\times 10^8}}{\sqrt{4\times 10^3}}$ **(i)** $3\sqrt[3]{16}-4\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{128}$

(j) $\sqrt{75}-4\sqrt{18}+2\sqrt{32}$ **(k)** $4\sqrt[3]{81}-3\sqrt[3]{54}$ **(l)** $\sqrt[3]{-18}\times\sqrt[3]{-12}$

(m) $(2\sqrt{7}+1)^2-(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)$

في التمارين (12–6)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) التعبير الجذري الذي في أبسط صورة هو:

(a) $\sqrt[3]{216}$ (b) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$ (c) $\sqrt[3]{9}$ (d) $\sqrt{\frac{2}{3}}$

(7) لوضع الكسر $\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$ في أبسط صورة نضرب كلًّا من البسط والمقام في:

(a) $\sqrt{2}$ (b) $\sqrt[3]{2}$ (c) 2 (d) 4

(8) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ يساوي:

(a) $2-\sqrt{3}$ (b) $2+\sqrt{3}$ (c) $3-\sqrt{2}$ (d) $3+\sqrt{2}$

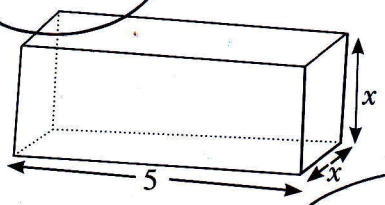
(9) إذا كان $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ فإن:

(a) $\varphi^2+\varphi=1$ (b) $\varphi^2=\varphi+1$ (c) $\varphi+\varphi^2+1=0$ (d) $\varphi^2+1=\varphi$

(10) إذا كان $x \in \mathbb{R}^-$ فإن $\frac{1}{x}\cdot|x|$ يساوي:

(a) -1 (b) $-x$ (c) 1 (d) x

(11) إذا كان حجم شبه المكعب المقابل يساوي $40\,\text{cm}^3$، فإن x تساوي:



(a) 2 cm (b) $2\sqrt{2}$ cm (c) $-2\sqrt{2}$ cm (d) 4 cm

(12) إذا كان حجم أسطوانة ارتفاعها h وطول نصف قطرها r يعطى بالعلاقة: $V=\pi r^2 h$ حيث الحجم (V) بدلالة كل من ارتفاع ونصف قطر الأسطوانة، فأي من العلاقات التالية صحيحة؟

(a) $h=\pi r^2 V$ (b) $h=\frac{\pi}{r^2}\cdot V$ (c) $r=\sqrt{\pi hV}$ (d) $r=\sqrt{\frac{V}{\pi h}}$

تمرّنْ
1–2

الأسس النسبية
Rational Exponents

المجموعة A تمارين مقالية

(1) بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية إن أمكن:

(a) $-\sqrt[4]{81}$ (b) $\sqrt[4]{-81}$ (c) $\sqrt[4]{36\times 108}$

(d) $\frac{\sqrt[5]{256}}{\sqrt[5]{8}}$ (e) $\sqrt[5]{32y^{10}}$ (f) $\sqrt[5]{-x^{20}}$

(g) $\sqrt[5]{0.01024}$ (h) $\sqrt[4]{81}+\sqrt[4]{729}$ (i) $\sqrt[4]{\frac{16x^{25}}{y^{12}}}: x, y > 0$

(2) اكتب كل عدد مما يلي بالصورة الجذرية:

(a) $x^{\frac{1}{6}}, x \geq 0$ (b) $x^{\frac{2}{7}}$ (c) $y^{-\frac{9}{8}}, y > 0$

(d) $x^{1.5}, x \geq 0$ (e) $x^{\frac{3}{4}}, x \geq 0$ (f) $7^{\frac{2}{3}}$

(g) $y^{3.2}$ (h) $x^{-\frac{2}{3}} : x \neq 0$

(3) بسّط كل عدد من الأعداد التالية (دون استخدام الآلة الحاسبة):

(a) $64^{\frac{2}{3}}$ (b) $(-32)^{-\frac{4}{5}}$ (c) $4^{1.5}$

(4) اكتب كل عدد بالصورة الأسية:

(a) $\sqrt{7x^3}, x \geq 0$ (b) $\sqrt{(7x)^3}, x \geqslant 0$ (c) $(\sqrt{7x})^3, x \geqslant 0$

(d) $\sqrt[3]{(5xy)^6}$ (e) $\sqrt[4]{81x^3}, x \geqslant 0$ (f) $\sqrt{0.0049t^{52}}$

(g) $\sqrt[5]{(1024)^3}$

(5) بسّط كلًّا مما يلي (دون استخدام الآلة الحاسبة):

(a) $2\sqrt[4]{16^3}$ (b) $\sqrt[3]{(-27)^{-4}}$ (c) $\sqrt[5]{-243}$

(d) $x^{\frac{2}{7}} \cdot x^{\frac{3}{14}}, x \geqslant 0$ (e) $x^{\frac{3}{5}} \div x^{\frac{1}{10}}, x > 0$ (f) $\frac{x^{\frac{2}{3}} \cdot y^{-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{1}{2}}}, x > 0, y > 0$

(g) $\frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{1}{3}}}{x^{-\frac{3}{4}} \cdot y^{-\frac{1}{2}}}, x > 0, y > 0$ (h) $\left((3^{\frac{3}{2}} x^{-\frac{1}{2}})^2\right)^{\frac{1}{3}}, x > 0$ (i) $\left(\frac{\sqrt{9t}}{\sqrt[3]{27t^2}}\right)^{-12}, t > 0$

(6) أوجد ناتج كلّ مما يلي:

(a) $\sqrt{\sqrt[3]{64x^6}}$ **(b)** $5^{\frac{2}{3}} \times 25^{-\frac{1}{3}}$ **(c)** $\frac{\sqrt[3]{8^2} \times \sqrt[4]{32}}{8\sqrt[8]{4}}$

(d) $\sqrt[10]{1024} - 2\sqrt[6]{2^6}$ **(e)** $\frac{(32)^{\frac{1}{2}} \times (16)^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt[6]{64}}$ **(f)** $(2 - \sqrt[3]{8})(2 + \sqrt[3]{8})$

(7) أوجد عددًا x بحيث يكون $x \times (4 + \sqrt{5})$ عددًا نسبيًّا.

(8) في التعبير $PV^{\frac{7}{5}}$، حيث P يمثل الضغط، V يمثل حجم عينة من غاز.

أوجد قيمة التعبير إذا كان: $P = 6, V = 32$

(9) تحليل الخطأ: أوجد الخطأ في الحل التالي: $5 \times (4 - 5^{\frac{1}{2}}) = 5 \times 4 - 5 \times 5^{\frac{1}{2}} = 20 - 25^{\frac{1}{2}} = 15$

(10) علم الأحياء: يستخدم التعبير: $0.036\, m^{\frac{3}{4}}$ لدراسة السوائل. أوجد قيمة التعبير، إذا كان $m = 46 \times 10^4$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $16^{-\frac{3}{4}} = 32^{-\frac{3}{5}}$ (a) (b)

(2) $x^{\frac{1}{2}} \div x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{2}{3}}$ (a) (b)

(3) $x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{-\frac{1}{6}}$ (a) (b)

(4) $\sqrt[4]{\sqrt{x}} = x\ ,\ x > 0$ (a) (b)

(5) $\sqrt{32} \times \sqrt{16^{-1}} = 4$ (a) (b)

في البنود (12–6)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا كان $n > 0$ ، فإن التعبير الذي **لا يكافئ** $\sqrt[4]{4n^2}$ هو:

(a) $(4n^2)^{\frac{1}{4}}$ (b) $2n^{\frac{1}{2}}$ (c) $(2n)^{\frac{1}{2}}$ (d) $\sqrt{2n}$

(7) إذا كان: $y > 0$ ، فإن التعبير $\frac{56^{\frac{1}{3}} \times y^{\frac{5}{3}}}{(7y^2)^{\frac{1}{3}}}$ يساوي:

(a) $14y$ (b) $\frac{1}{7}y$ (c) $2y$ (d) $\frac{8}{7}y$

(8) $\left(\sqrt[4]{x^{-2}y^4}\right)^{-2} =$

(a) $|x^{-1}|y^2$ (b) $|x|y^{-2}$ (c) xy^2 (d) $x^{-2}y^2$

(9) $\sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{5}} \times \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}} =$

(a) $5^{-\frac{1}{2}}$ (b) $\frac{1}{5}$ (c) $5^{\frac{1}{2}}$ (d) $5^{\frac{2}{3}}$

(10) إذا كان $x+y=2$, $x^2-xy+y^2=4$ فإن $\sqrt[6]{x^3+y^3}$ يساوي:

(a) $\sqrt{2}$ (b) $\sqrt[3]{2}$ (c) $\sqrt[3]{6}$ (d) 2

(11) في التعبير $P.V^{\frac{7}{5}}$ حيث P يمثل الضغط، V يمثل حجم عينة من غاز فإن قيمته عندما $P=\frac{32}{27}$, $V=\frac{243}{32}$ يساوي:

(a) $\frac{4}{81}$ (b) 4 (c) $\frac{81}{4}$ (d) $\frac{243}{4}$

(12) إن قيمة التعبير $\frac{\sqrt[3]{x^6}\cdot\sqrt[4]{x^5}}{x^3\cdot\sqrt[8]{x^2}}$, $x>0$ تساوي:

(a) x (b) $\frac{1}{x}$ (c) 1 (d) $\sqrt{x}$

تمرَّنْ
1–3

حل المعادلات
Solving Equations

المجموعة A تمارين مقالية

(1) حل كلًّا من المعادلات التالية:

(a) $3\sqrt{x}+3=15$ **(b)** $\sqrt{x+3}=5$ **(c)** $(x+5)^{\frac{2}{3}}=4$ **(d)** $(x+1)^{\frac{3}{2}}-2=25$

(e) $\sqrt{3-4x}-2=0$ **(f)** $2(2x+4)^{\frac{3}{4}}=16$ **(g)** $(5-3x)^{\frac{3}{2}}+4=3$

(2) **(a) الحجم:** يتسع خزّان كروي الشكل لِـ $424.75\ \text{m}^3$ أوجد طول قطر هذا الخزّان.

(**مساعدة:** حجم الكرة $=\frac{\pi\times d^3}{6}$).

(b) ترابط حياتي: تقاس الكمية القصوى K لتدفّق المياه في أنبوب، بالقانون: $K=m\times V$، حيث m هي مساحة المقطع العرضي للأنبوب، V هي السرعة المتجهة للمياه. أوجد قطر الأنبوب الذي يسمح بتدفق $1.48\ \text{m}^3/\text{min}$ بسرعة $183\ \text{m/min}$

(3) حل كلًّا من المعادلات التالية:

(a) $\sqrt{11x+3}-2x=0$ **(b)** $\sqrt{3x+13}-5=x$ **(c)** $\sqrt{-3x-5}=x+3$

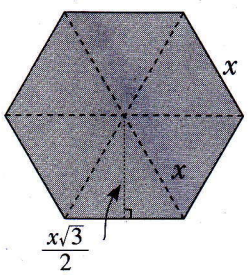
(d) $(x+3)^{\frac{1}{2}}-1=x$ **(e)** $x+8=(x^2+16)^{\frac{1}{2}}$ **(f)** $\sqrt{10x}-2\sqrt{5x-25}=0$

(g) $(3x+2)^{\frac{1}{2}}-(2x+7)^{\frac{1}{2}}=0$ **(h)** $(x-9)^{\frac{1}{2}}+1=x^{\frac{1}{2}}$ **(i)** $(2x+3)^{\frac{3}{4}}-3=5$

(j) $2(x-1)^{\frac{4}{3}}+4=36$ **(k)** $(3x+2)^{\frac{1}{2}}=8(3x+2)^{-\frac{1}{2}}$ **(l)** $(2x+1)^{\frac{1}{3}}=(3x+2)^{\frac{1}{3}}$

(m) $(2x-1)^{\frac{1}{3}}=(x+1)^{\frac{1}{6}}$ **(مساعدة:** رفع طرفي المعادلة إلى القوة 6) **(n)** $(x+5)^{\frac{1}{2}}-(5-2x)^{\frac{1}{4}}=0$

(4) الهندسة: قانون مساحة مضلّع سداسي منتظم هو: $S=\frac{3x^2\sqrt{3}}{2}$، حيث x هي طول الضلع.



(a) أوجد طول الضلع x بدلالة المساحة S

(b) أراد أحد الأشخاص صنع صندوق قاعدته مضلع سداسي منتظم ومساحته تساوي $200\ \text{cm}^2$ أوجد طول المضلع.

(c) أوجد البعد بين ضلعين متوازيين.

(5) صندوق مكعب الشكل سعته $150\,\text{m}^3$ أوجد طول ضلعه.

(6) x, y هما عددان حقيقيان.

(a) أوجد الناتج: $(x-y)(x^2+xy+y^2)$

(b) باستخدام الصيغة السابقة، اكتب الكسر $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$، بحيث يكون المقام عددًا نسبيًّا.

(7) حل كلًّا من المعادلات الأسية التالية:

(a) $5^{2x-3} = 125$ **(b)** $3^{x+1} = 1$ **(c)** $3^{x^2+5} = 3^9$

(d) $3^{x^2-5x} = \frac{1}{9^2}$ **(e)** $4^x = 2^x$ **(f)** $\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.25$

(g) $5^x = 125\sqrt{5}$ **(h)** $5^{x^2-3x} = 1$ **(i)** $(3^x - 27)(2^x - 1) = 0$

(j) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} = \left(\frac{125}{8}\right)^x$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) مجموعة حل $7^{3-x} = 1$ هي $\{3\}$ (a) (b)

(2) مجموعة حل $\sqrt{x-1} = \sqrt{1-x}$ هي $\{0\}$ (a) (b)

(3) إذا كان $\sqrt[3]{9+x^2} = 3$ فإن $x = 3\sqrt{2}$ (a) (b)

(4) $x = -1$ حلًّا للمعادلة $2^{x^2-4} = \frac{1}{32}$ (a) (b)

(5) مجموعة حل $25^{|x|+\frac{1}{2}} = 5^{1-2x}$ هي $\mathbb{R}^-$ (a) (b)

في التمارين (10–6)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

(6) مجموعة حل $(\sqrt{x^{20}})^{\frac{1}{5}} - x^2 = 0$ هي:

(a) $\{0\}$ (b) $\mathbb{R}^+$ (c) $\mathbb{R}^-$ (d) $\mathbb{R}$

(7) مجموعة حل $\sqrt[3]{x-2} = \sqrt{x-2}$ هي:

(a) $\{2\}$ (b) $\{1,2\}$ (c) $\{1,2,3\}$ (d) $\{2,3\}$

(8) مجموعة حل $\sqrt[3]{2x^2+2} = \sqrt[3]{3-x}$ هي:

(a) $\left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$ (b) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ (c) $\left\{-1, \frac{-1}{2}\right\}$ (d) $\left\{1, \frac{1}{2}\right\}$

(9) مجموعة حل $x^2 = |x|$ هي:

(a) $\{-1,0,1\}$ (b) $\{0,1\}$ (c) $\{0\}$ (d) $\{1\}$

(10) إذا كان $\left(\frac{1}{9}\right)^{x+1} = 3^{2-x}$ فإن x تساوي:

(a) -2 (b) 2 (c) -4 (d) 4

اختبار الوحدة الأولى

(1) بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

(a) $\sqrt{121x^{90}}$ **(b)** $\sqrt[3]{-64y^{81}}$ **(c)** $\sqrt[5]{32y^{25}}$

(d) $\sqrt{0.0081x^{60}}$ **(e)** $\sqrt{16x^{36}y^{96}}$ **(f)** $\sqrt{8}(\sqrt{24}+3\sqrt{8})$

(g) $2\sqrt{5x^3}\times 3\sqrt{28x^3y^2}$, ($x\geq 0$, حيث y عدد حقيقي) **(h)** $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$

(i) $\sqrt[3]{2x^2}\times\sqrt[3]{4x}$

(2) اكتب كل كسر مما يلي بحيث يكون مقامه عددًا نسبيًّا:

(a) $\frac{1}{(\sqrt{5}+2\sqrt{3})(\sqrt{5}-2\sqrt{3})}$ **(b)** $\frac{5}{4\sqrt{7}+5}$

(c) $\frac{2+\sqrt{10}}{2-3\sqrt{5}}$ **(d)** $\frac{-2+\sqrt{8}}{-3-\sqrt{2}}$

(3) بسّط كلًّا من التعابير التالية:

(a) $64^{\frac{2}{3}}$ **(b)** $25^{1.5}$ **(c)** $6^{\frac{1}{2}}\times 12^{\frac{1}{2}}$

(d) $81^{-0.25}$ **(e)** $\sqrt{8}\times\sqrt{2}-2\sqrt{75}+5\sqrt{12}$ **(f)** $\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$

(4) ليكن x العدد الحقيقي، $x=\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}$

(a) احسب x^2

(b) أثبت أن قيمة x تساوي -2

(5) اكتب كل تعبير مما يلي بالصورة الجذرية:

(a) $x^{\frac{5}{7}}$ **(b)** $y^{-\frac{2}{9}}$, $y\neq 0$ **(c)** $(\sqrt[5]{x})^2$

(d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{64}}$ **(e)** $2\sqrt{3}\times 5\sqrt[4]{3}$ **(f)** $3\sqrt{x}\times 2\sqrt[3]{x}$, $x\geq 0$

(g) $2\sqrt[3]{3}\div\sqrt[4]{3}$ **(h)** $5\sqrt{10}\times 2\sqrt[4]{10}\times\sqrt[3]{10}$ **(i)** $\sqrt{2}\div 3\sqrt[6]{8}$

(6) بسّط كلًّا من التعبيرات التالية:

(a) $(8^{-3}y^{-6})^{-\frac{2}{3}}$ **(b)** $\left(\frac{16x^{14}}{81y^{18}}\right)^{\frac{1}{2}}$, $y\neq 0$

(c) $\left((x^{-\frac{1}{2}})^2\right)^{\frac{1}{3}}$, $x\neq 0$ **(d)** $\frac{x^{\frac{1}{3}}\cdot y^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{6}}\cdot y^{\frac{3}{4}}}$, $x\neq 0$, $y\neq 0$

(7) **تحليل الخطأ:** في سبيل تبسيط الكسر $\frac{1}{(1-\sqrt{2})^2}$ كتب أحد الطلاب ما يلي:

$$\frac{1}{(1-\sqrt{2})^2} = (1-\sqrt{2})^{-2}$$
$$= 1^{-2} - (\sqrt{2})^{-2}$$
$$= 1 - \frac{1}{(\sqrt{2})^2}$$
$$= 1 - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}$$

ما الخطأ الذي ارتكبه الطالب؟

(8) حل كلًّا من المعادلات التالية:

(a) $5\sqrt{x} + 7 = 8$

(b) $\sqrt{x+2} = x$

(c) $\sqrt{4x-23} - 3 = 2$

(d) $\sqrt{2x+1} - \sqrt[4]{x+11} = 0$

(e) $\sqrt{x} - \sqrt{x-5} = 2$ (**مساعدة:** تربيع طرفي المعادلة مرتين متتاليتين)

(f) $\sqrt{3x-9} = \sqrt{2x+4}$

(9) **الفيزياء:** السرعة V لجسم ما أسقط عن سطح مبنى عال معطاة بالقانون: $V = 8\sqrt{m}$، حيث m هي ارتفاع المبنى. أوجد الارتفاع m بدلالة السرعة V

(10) إذا كان $x = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$، فأوجد قيمة $x^2(3-x)$

(11) حل كلًّا من المعادلات التالية:

(a) $2^{x^2} = 512$

(b) $4^{x^2-x} = 16$

تمارين إثرائية

(1) بسّط كلًّا مما يلي دون استخدام الآلة الحاسبة:

(a) $\sqrt[3]{-343}$ **(b)** $\sqrt[4]{810\,000}$ **(c)** $\left(\sqrt[4]{\sqrt{3}}\right)^8$

(d) $-\sqrt[4]{6\,561}$ **(e)** $\sqrt[5]{-0.00001}$ **(f)** $\sqrt{9(\sqrt{3}-2)^2}-\sqrt{4(1-\sqrt{3})^2}$

(g) $\dfrac{27^{-2}\times 45^{-3}}{36^{-5}\times 45^{4}}$ **(h)** $\dfrac{12^{3}\times 18^{-2}}{6^{-2}\times 3^{-5}}$

(2) أوجد ناتج ما يلي:

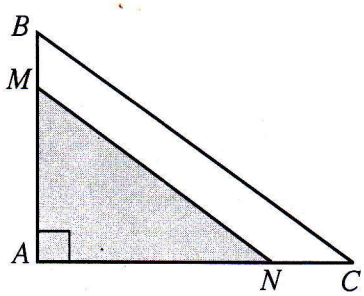
(a) $\sqrt[4]{(\sqrt[3]{4}-4)^4}-\sqrt[3]{-8(\sqrt[3]{2}+1)^6}$ **(b)** $\left(\sqrt[5]{\sqrt{32}}+3\right)(3-\sqrt[6]{8})$ **(c)** $\dfrac{\sqrt[3]{13^2}\times\sqrt{13}}{\sqrt[3]{13^{\frac{1}{2}}}}$

(3) بسّط كلًّا من التعابير التالية:

(a) $\left(\dfrac{8x^9y^3}{27x^2y^{12}}\right)^{\frac{2}{3}}$, $x\neq 0,\ y\neq 0$ **(b)** $\left(x^{\frac{-3}{8}}\cdot y^{\frac{1}{4}}\right)^{16}$, $x>0,\ y\geq 0$

(c) $\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}-\sqrt[6]{x\cdot y}\right)\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{6}}\cdot y^{\frac{1}{6}}\right)$ **(d)** $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}\times\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^{\frac{1}{2}}}}$, $x>0$

(4) ABC مثلث قائم الزاوية A



$AM=2\sqrt{3}-1$ $AN=2+\sqrt{3}$

$MB=1$ $\overleftrightarrow{MN}\,//\,\overleftrightarrow{BC}$

أوجد: **(a)** CN **(b)** MN

(5) اكتب كل كسر مما يلي بحيث يكون مقامه عددًا نسبيًّا دون استخدام الآلة الحاسبة:

(a) $\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ **(b)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$ **(c)** $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x^{\frac{1}{2}}-1}$, $x\in\mathbb{Z}^+$, $x\neq 1$

(6) أوجد قيمة x ليكون العدد $\sqrt{x}\times\sqrt{-x}$ عددًا حقيقيًّا.

(7) **تحليل الخطأ:** أوجد الخطأ $\sqrt{16}=\sqrt{(-2)\times(-8)}=\sqrt{-2}\times\sqrt{-8}$

(8) ما قيمة x، إذا $32^{0.8}\times x=1$؟

(9) بسّط كلًّا مما يلي:

(a) $\left(\dfrac{x^{a^2}}{x^{b^2}}\right)^{\frac{1}{a-b}}$ **(b)** $\dfrac{2\times 3^{x+2}-8\times 3^{x}}{3^{x+1}+2\times 3^{x}}$ **(c)** $\left(x^{\frac{1}{2}}\times y^{-\frac{1}{3}}\right), x\geq 0\ ,\ y\neq 0$

(10) حل كلًّا من المعادلات التالية:

(a) $(0.01)^x=0.000001$ **(b)** $2^{\frac{1}{2}(x+3)}=\dfrac{2^3}{\sqrt{2}}$ **(c)** $(3^{2x}-9)(2^x-16)=0$

(d) $(3^x)^2-10\times 3^x+9=0$ (**مساعدة:** ليكن $3^x=y$) **(e)** $4^{x-1}-9\times 2^{x-1}+8=0$

تمرّنْ
2–1

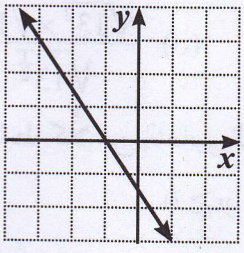
مجال الدالة

Domain of the Function

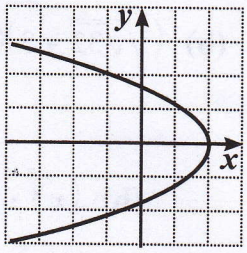
المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (6–1)، استخدم اختبار المستقيم الرأسي لتحديد ما إذا كان بيان كل علاقة مما يلي يمثل بيان دالة أم لا.

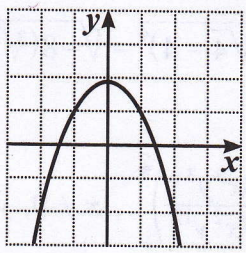
(1)



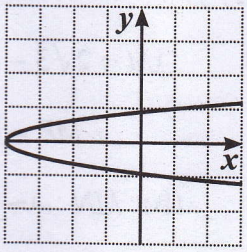
(2)



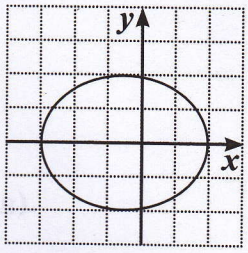
(3)



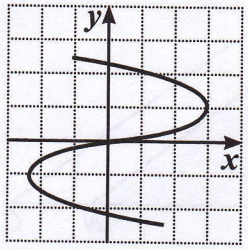
(4)



(5)



(6)



في التمارين (16–7)، حدّد مجال كلّ من الدوال التالية:

(7) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x^2 - 1$

(8) $g(x) = \sqrt{3x - 7} + 2$

(9) $t(x) = \frac{\sqrt{-2x} + 3}{x - 1}$

(10) $h(x) = -\frac{3x - 1}{5 - 2x}$

(11) $u(x) = \sqrt[3]{7 - 5x}$

(12) $v(x) = \frac{2x - 1}{\sqrt{3 + x}}$

(13) $h(x) = \frac{\sqrt{x - 2}}{5 + \sqrt{2x - 1}}$

(14) $u(x) = \frac{\sqrt{3 + 4x} - 3}{25 - 9x^2}$

(15) $v(x) = \frac{3}{x + 1} - \frac{2}{x^2 - 1}$

(16) $w(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2}(\sqrt{2x - 3})$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) مجال الدالة $f(x)=\sqrt{(x-2)^2}$ هو $\mathbb{R}$ (a) (b)

(2) مجال الدالة $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{2x-6}}$ هو $[3,\infty)$ (a) (b)

(3) مجال الدالة $f(x)=\sqrt{-x}$ هو $(-\infty,0]$ (a) (b)

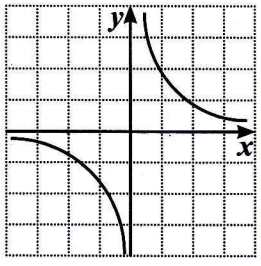
(4) مجال الدالة $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\sqrt{x+3}$ هو $[-3,\infty)$ (a) (b)

(5) مجال الدالة $f(x)=|x|-2$ هو $\mathbb{R}$ (a) (b)

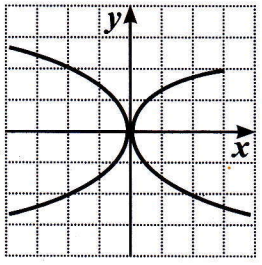
في التمارين (11–6)، ظلل رمز الدائرة الدالة على الإجابة الصحيحة.

(6) أيًّا مما يلي لا يمثل بيان دالة:

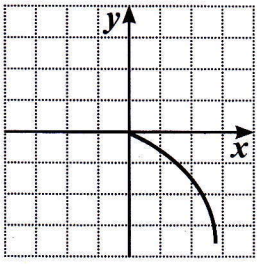
(a)



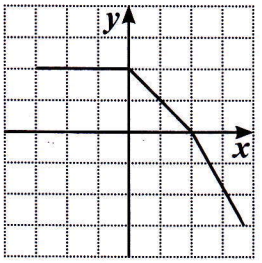
(b)



(c)



(d)



(7) مجال الدالة $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+2x+1}$ هو:

(a) $\mathbb{R}$ (b) $\mathbb{R}/\{1\}$ (c) $\mathbb{R}/\{-1,1\}$ (d) $\mathbb{R}/\{-1\}$

(8) مجال الدالة $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ هو:

(a) $\mathbb{R}/\{0\}$ (b) $[0,\infty)$ (c) $(-\infty,0)$ (d) $(0,\infty)$

(9) مجال الدالة $f(x)=\dfrac{x-1}{x-\sqrt{x}}$ هو:

(a) $\mathbb{R}/\{1\}$ (b) $\mathbb{R}/\{0,1\}$ (c) $\mathbb{R}-\{0\}$ (d) $(0,\infty)/\{1\}$

(10) مجال الدالة $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ هو:

(a) $(0,\infty)$ (b) $[1,\infty)$ (c) $(-1,\infty)$ (d) $(-1,\infty)/\{0\}$

(11) لتكن $g:[-2,2]\to\mathbb{R}, g(x)=x^2$, $f(x)=x\sqrt{x}$. فإن مجال الدالة $f\circ g$ هو:

(a) $[-2,2]$ (b) $[0,2]$

(c) $(0,2)$ (d) ليس أيًّا مما سبق صحيحًا

تمرَّنْ
2–2

الدوال التربيعية ونمذجتها

Quadratic Functions and their Modelling

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (4–1)، أوجد ناتج كلّ مما يلي:

(1) $(x-2)(7-x)+(7-2x)^2$

(2) $(x-4)(7x-8)-(x-4)(x+2)$

(3) $(x-4)(2x+1)+(x+4)^2$

(4) $(x+13)(x+1)-4(-x-2)^2$

في التمارين (12–5)، أي من الدوال التالية خطية؟ وأيها تربيعية؟

(5) $y=x+4$

(6) $f(x)=x^2-7$

(7) $y=3(x-1)^2+4$

(8) $r(x)=-7x$

(9) $f(x)=\frac{1}{2}(4x+10)$

(10) $y=3x(x-2)$

(11) $y=(2x+1)(x-2)+4-2x^2$

(12) $y=(3x+7)^2-(9x^2-49)$

(13) التفكير الناقد: ما الحد الأدنى لعدد أزواج البيانات المطلوبة لإيجاد نموذج تربيعي لمجموعة ما من البيانات؟

في التمارين (16–14)، أوجد معادلة لكل مجموعة من البيانات.

(14)

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	4	−3	−6	−5	0

(15)

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	−1	0	3	8	15

(16)

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	17	20	17	8	−7

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة وظلل (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الدالة $f(x) = kx^2 + x - 3 \ , \ k \in \mathbb{Z}$ يمكن أن تكون دالة خطية. (a) (b)

(2) الدالة $f(x) = x + \frac{|x|}{x}$ هي دالة خطية. (a) (b)

(3) النقطة $A(1, 6)$ تنتمي إلى منحنى الدالة: $f(x) = (3x)(2x) + 6$ (a) (b)

(4) الدالة $y = x(1-x) - (1-x^2)$ هي دالة خطية. (a) (b)

(5) الدالة $f(x) = \pi^2 - x$ هي دالة تربيعية. (a) (b)

في التمارين (10–6)، ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) الدالة التربيعية التي حدها الثابت يساوي -3 هي:

(a) $y = (3x+1)(-x-3)$ (b) $y = x^2 - 3x + 3$

(c) $f(x) = (x-3)(x-3)$ (d) $y = -3x^2 + 3x + 9$

(7) أي دالة مما يلي **ليست** دالة تربيعية:

(a) $y = (x-1)(x-2)$ (b) $y = x^2 + 2x - 3$

(c) $y = 3x - x^2$ (d) $y = -x^2 + x(x-3)$

(8) أي نقطة مما يلي تنتمي إلى منحنى دالة $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ ؟

(a) $(3, 12)$ (b) $(-1, -1)$ (c) $(2, 3)$ (d) $(-2, 22)$

(9) تكون الدالة $f(x) = (a^2-4)x^2 - (a-2)x + 5$ دالة تربيعية لكل a تنتمي إلى:

(a) $\mathbb{R}$ (b) $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ (c) $\mathbb{R} - \{2\}$ (d) $\mathbb{R} - \{-2\}$

(10) يمكن نمذجة العلاقة بين y , x في الجدول التالي بالدالة:

x	-1	1	2
y	-1	3	8

(a) $f(x) = x^2 + x + 1$ (b) $f(x) = x^2 + 2x - 1$

(c) $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ (d) $f(x) = x^2 + 2x$

تمرَّنْ
2–3

الدوال التربيعية والقطوع المكافئة

Quadratic Functions and Parabolas

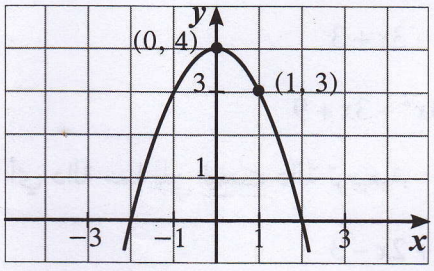
المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (4–1)، كل نقطة تقع على قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل. اكتب معادلة هذا القطع المكافئ، واذكر ما إذا كان الرسم البياني مفتوحًا إلى أعلى أم إلى أسفل.

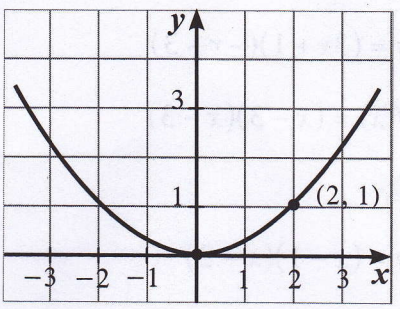
(1) $F(3, 2)$ **(2)** $F(8, -12)$ **(3)** $H(-6, -2)$ **(4)** $G(-2, 5)$

في التمارين (10–5)، اكتب معادلة كل قطع مكافئ بدلالة إحداثيات رأسه.

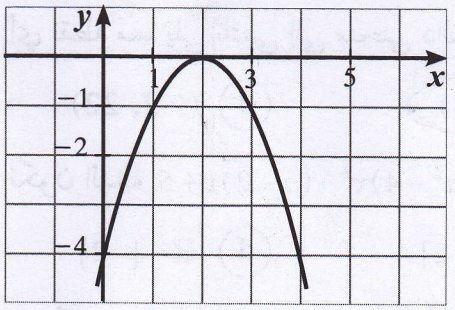
(5)



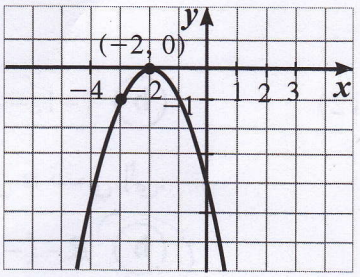
(6)



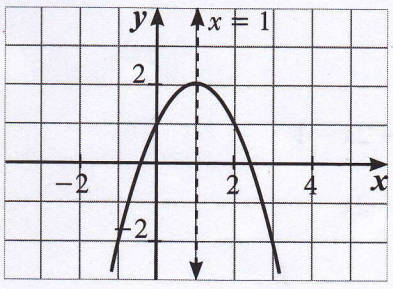
(7)



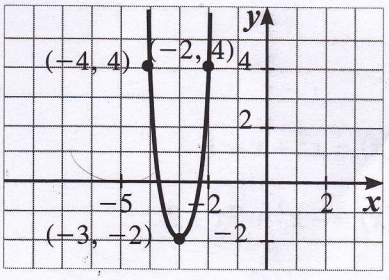
(8)



(9)



(10)



في التمارين (18–11)، ارسم منحنى كل دالة من الدوال التالية:

(11) $y=(x+3)^2$ **(12)** $y=(x-2)^2$ **(13)** $y=-(x+1)^2$

(14) $y=-x^2+3$ **(15)** $y=(x+4)^2+1$ **(16)** $y=3(x-2)^2+4$

(17) $y=-4(x+3)^2$ **(18)** $y=-2(x+1)^2-4$

(19) الكتابة: صف الخطوات التي سوف تستخدمها لرسم الدالة: $y=-2(x-3)^2+4$ بيانيًّا.

(20) السؤال المفتوح: اكتب معادلة لدالة يمثلها بيانيًّا قطع مكافئ له محور التماثل التالي: $x=-2$

في التمارين (25–21)، ارسم كل قطع مكافئ مستخدمًا المعلومات المعطاة. ثم اكتب معادلته بدلالة إحداثيات الرأس.

(21) الرأس $V(0, 0)$ ويمر بالنقطة $P(2, 10)$

(22) الرأس $V(0, 0)$ ويمر بالنقطة $P(-2, -10)$

(23) الرأس $V(0, 5)$ ويمر بالنقطة $P(1, -2)$

(24) الرأس $V(3, 1)$ والجزء المقطوع من محور الصادات -2

(25) الرأس $V(-2, 6)$ والجزء المقطوع من محور السينات 2

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة وظلل (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) المعادلة $y=2x^2-2(3-x)^2$ تمثل معادلة قطع مكافئ. (a) (b)

(2) القطع المكافئ $y=-\frac{1}{3}(x+2)^2-3$ فتحته إلى الأعلى. (a) (b)

(3) المعادلة $y=2(x-1)^2+2$ يكون بيانها أكثر اتساعًا من بيان الدالة $y=\frac{1}{2}x^2-2$ (a) (b)

(4) توجد عند رأس منحنى الدالة $y=-(x-3)^2-2$ قيمة عظمى. (a) (b)

(5) منحنى القطع المكافئ $y=(-x+2)^2+3$ يمر بالنقطة $P(2, 3)$ (a) (b)

في التمارين (11–6)، ظلل رمز الدائرة الدالة على الإجابة الصحيحة.

(6) الدالة $y=a(3-x)^2-2$ يكون رسمها أوسع من رسم بيان الدالة $y=-2x^2$ إذا كان:

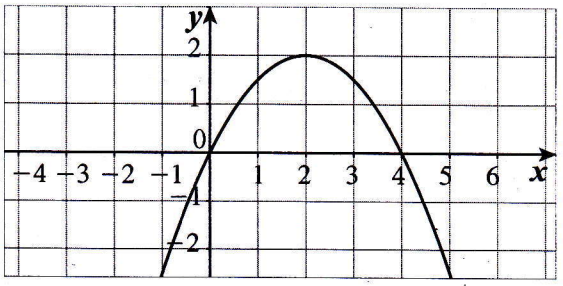
(a) $|a|=2$ (b) $|a|>2$ (c) $a<2$ (d) $|a|<2$

(7) معادلة القطع المكافئ $y=2x^2$ الذي تم إزاحة رأسه وحدتين يسارًا و4 وحدات لأعلى هي:

(a) $y=(2x+2)^2+4$ (b) $y=2(x-2)^2+4$

(c) $y=2(x+2)^2+4$ (d) $y=2(x+2)^2-4$

(8) الشكل أدناه يمثل منحنى قطع مكافئ معادلته هي:



(a) $y=(x-2)^2+2$

(b) $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+2$

(c) $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2-2$

(d) $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2+2$

(9) القطع المكافئ $y=a(x-h)^2+k$ يقطع المحورين على الأكثر في:

(a) نقطة

(b) نقطتين

(c) 3 نقاط

(d) 4 نقاط

(10) القيمة الصغرى للدالة $y=\frac{1}{3}(3-x)^2-2$ هي عند النقطة:

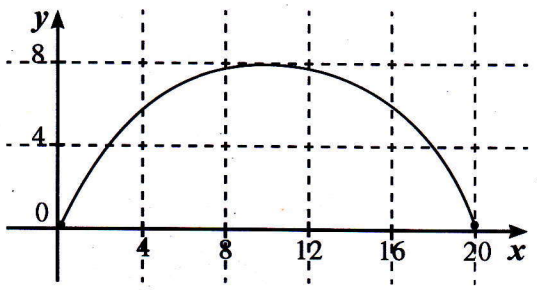
(a) $(3,-2)$

(b) $(-3,2)$

(c) $(-3,-2)$

(d) $(3,2)$

(11) يقع جسر على شكل قطع مكافئ فوق نهر. يبلغ البعد بين قاعدتيه 20 m وارتفاعه الأقصى 8 m معادلة القطع المكافئ هي:



(a) $y=0.08(x-10)^2+8$

(b) $y=-0.08(x-10)^2+8$

(c) $y=-0.08(x-20)^2+8$

(d) $y=0.08(x+10)^2+8$

تمرَّنْ
2–4

مقارنة بين صورة المعادلة التربيعية بدلالة إحداثيات رأس المنحنى والصورة العامة

Comparing Vertex and General Form Equation of Quadratic Functions

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (7–1)، اكتب كلًّا من الدوال التالية بدلالة إحداثيات الرأس:

(1) $y = x^2 - 4x + 6$ **(2)** $y = x^2 + 2x + 5$ **(3)** $y = 4x^2 + 7x$

(4) $f(x) = -2x^2 + 35$ **(5)** $y = -8x^2$ **(6)** $f(x) = 2x^2 + x$

(7) $y = -3x^2 - 2x + 1$

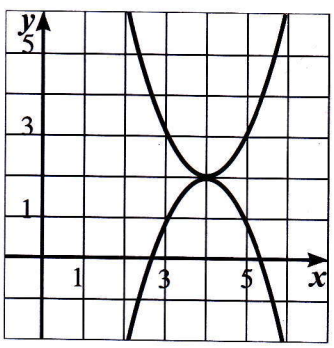
في التمارين (13–8)، اكتب معادلة كل قطع مكافئ في الصورة العامة.

(8) $y = (x+3)^2 - 4$ **(9)** $f(x) = 2(x-2)^2 + 5$ **(10)** $f(x) = -(x-7)^2 + 10$

(11) $y = (5x+6)^2 - 9$ **(12)** $f(x) = -(3x-4)^2 + 6$ **(13)** $f(x) = -2x(x+7) + 8x$

(14) التفكير الناقد: معادلة أحد الرسمين البيانيين أدناه هي: $y = x^2 - 8x + 18$

اكتب معادلة الرسم البياني الآخر في الصورة العامة.



(15) منحنى الدالة: $y = 2x^2 - 12x + c$، له رأس عند النقطة $(3, 5)$. فما قيمة c؟

(16) منحنى الدالة: $y = ax^2 + bx + 8$، له رأس عند النقطة $(-4, 2)$. فما قيم a , b؟

(17) أرادت السلطات المسؤولة في إحدى المدن إقامة بناء لرعاية الأطفال، على أن يكون أمام البناء ملعب مستطيل الشكل وأن يكون الملعب محاطًا بسور من الجهات الثلاث، حيث إن الجهة الرابعة هي البناء.

ما مساحة أكبر ملعب يمكن إحاطته بسور طوله 100 m فقط؟

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4–1)، ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) المعادلة $y = -2(x+3)^2 + 4$ هي معادلة قطع مكافئ بدلالة إحداثيات رأس المنحنى. (a) (b)

(2) المعادلة $y = 3(x-2)^2 + 4(x-2) + 1$ هي معادلة قطع مكافئ في الصورة العامة. (a) (b)

(3) رأس القطع المكافئ الذي معادلته $y = x^2 - 2x - 3$ هو $V(1, -4)$ (a) (b)

(4) معادلة محور التماثل للقطع المكافئ: $y = 3x^2 + 12x + 8$ هي $y = -4$ (a) (b)

في التمارين (12–5)، ظلل رمز الدائرة الدالة على الإجابة الصحيحة.

(5) رأس القطع المكافئ الذي معادلته $y = ax^2 + 2ax + 5,\ a \neq 0$ يمكن أن يكون:

(a) $(1, 1)$ (b) $(-1, 1)$ (c) $(1, 5)$ (d) $(-1, 5)$

(6) معادلة القطع المكافئ المار بالنقطة $(-3, 10)$ ورأسه $(0, 1)$ هي:

(a) $y = 5x^2 + 1$ (b) $y = -3x^2 + 10$ (c) $y = x^2 + 1$ (d) $y = -x^2 - 1$

(7) منحنى الدالة $y = -2x^2 + 4x - 5$ له رأس عند النقطة:

(a) $(-2, -3)$ (b) $(1, -3)$ (c) $(1, -1)$ (d) $(-1, -3)$

(8) يقع رأس منحنى $y = -x^2 - 16x - 62$ في الربع:

(a) الأوّل (b) الثاني (c) الثالث (d) الرابع .

(9) معادلة محور التماثل للقطع المكافئ $y = x^2 - 6x + 2$ هي:

(a) $x = 12$ (b) $x = 6$ (c) $x = 3$ (d) $x = 2$

(10) المساحة العظمى بالوحدات المربعة لمستطيل محيطه 128 m هي:

(a) 4 096 (b) 1 024 (c) 256 (d) 32

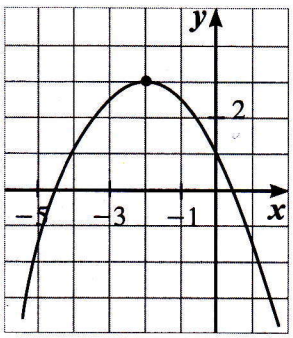
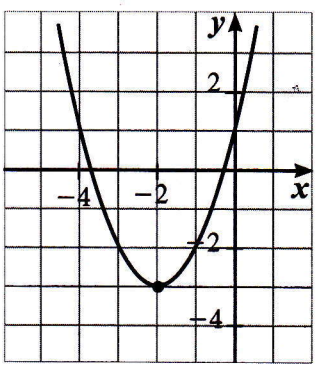
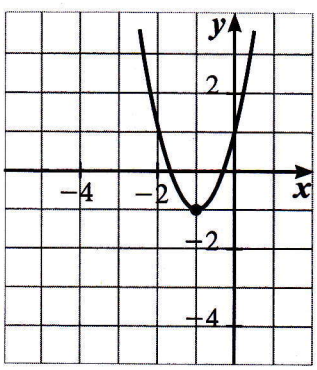
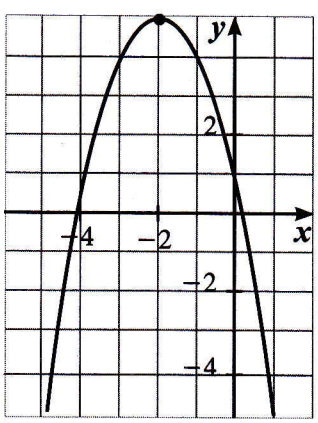
(11) ينمذج مدخول إحدى الشركات بالعلاقة $R = -15p^2 + 300p + 12\,000$ حيث p (بالدينار) هو سعر مبيع إحدى القطع المنتجة. قيمة p التي تعطي أعلى مدخول هي:

(a) 30 (b) 10 (c) 15 (d) 12

(12) أي منحنى من الدوال أدناه له خط تماثل $x = 3$؟

(a) $y = 2(x+3)^2$ (b) $y = x^2 - 6x + 9$ (c) $y = x^2 + 3x + 6$ (d) $y = 4(x+3)^2$

في التمارين (15–13) لديك قائمتان، اختر من القائمة (2) ما يناسبه في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.

القائمة (1)	القائمة (2)
التمثيل البياني للدالة:	(a) 
(13) $y = x^2 + 4x + 1$ هو:	
(14) $y = -x^2 - 4x + 1$ هو:	(b) 
(15) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ هو:	(c) 
	(d) 

تمرَّنْ
2–5

المعكوسات ودوال الجذر التربيعي

Inverses and Square Root Functions

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (3–1)، ارسم بيانيًّا الدالة المعطاة ومعكوسها على محاور الإحداثيات نفسها. ثم اكتب معادلة المعكوس.

(1) $y = \frac{1}{2}x$ **(2)** $y = \frac{x+1}{3}$ **(3)** $y = 5x + 3$

في التمارين (10–4)، اكتب معادلة المعكوس لكل دالة مما يلي:

(4) $y = \frac{1}{2}x^2$ **(5)** $y = x^2 - 1$ **(6)** $y = (x-2)^2 + 1$ **(7)** $y = \frac{x+5}{3}$

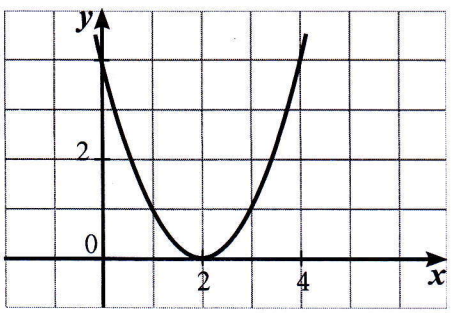
(8) $y = 6x + 2$ **(9)** $y = x^2 - 3$ **(10)** $y = (x+5)^2 + 2$

في التمارين (14–11)، ارسم كل دالة جذر تربيعي. ثم اذكر المجال والمدى.

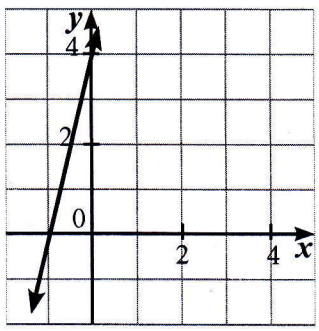
(11) $y = -\sqrt{x-1}$ **(12)** $y = -\sqrt{x} + 2$ **(13)** $y = \sqrt{x-4} + 2$ **(14)** $y = -\sqrt{x+3} - 2$

في التمرينين (16–15)، ارسم مخططًا لمعكوس الرسم البياني، ثم اكتب معادلة كل رسم بياني، ومعادلة معكوسه.

(15)



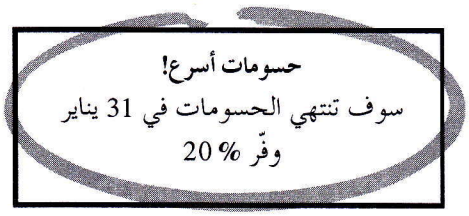
(16)



(17) (a) الرياضيات في الإعلانات التجارية: اكتب دالة تعطي ثمن البيع y للثمن الأصلي x بالنسبة إلى السلع في الإعلان المجاور.

(b) أوجد معكوس الدالة التي أوجدتها في الفقرة **(a)**.

(c) الكتابة: ماذا تمثل الدالة التي كتبتها في السؤال **(b)**؟



المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت النقطة $M(x, y)$ تنتمي لبيان الدالة f فإن النقطة $N(y, x)$ تنتمي لبيان معكوس هذه الدالة. (a) (b)

(2) إذا كانت $f(x) = x + 1, g(x) = x - 1$ فإن الدالتين كل منهما معكوس للأخرى. (a) (b)

(3) المستقيم $y = x$ هو خط انعكاس لبيان دالة f وبيان معكوسها. (a) (b)

(4) إذا مر بيان دالة بنقطة الأصل فإن بيان معكوسها يمر أيضًا بنقطة الأصل. (a) (b)

(5) لا يتغير مجال دالة الجذر التربيعي بعد إزاحة بيانها 3 وحدات يمينًا. (a) (b)

في التمارين (10–6)، ظلل رمز الدائرة الدالة على الإجابة الصحيحة:

(6) إذا انتمت النقطة $A(2, 3)$ إلى بيان دالة فإن النقطة التي تنتمي إلى بيان معكوس تلك الدالة هي:

(a) $(-2, 3)$ (b) $(2, -3)$ (c) $(3, -2)$ (d) $(3, 2)$

(7) بيان الدالة $y = \sqrt{x+2} - 2$ هو انسحاب لبيان الدالة $y = \sqrt{x}$:

(a) وحدتين إلى اليسار ووحدتين للأعلى (b) وحدتين إلى اليسار ووحدتين للأسفل

(c) وحدتين إلى اليمين ووحدتين للأعلى (d) وحدتين إلى اليمين ووحدتين للأسفل

(8) معكوس الدالة $y = x^2 + 2$ هو:

(a) $y = \sqrt{x-2}$ (b) $y = -\sqrt{x-2}$

(c) $y = \pm\sqrt{x} - 2$ (d) ليس أيًّا مما سبق صحيحًا

(9) معكوس الدالة $y = 5x - 1$ هو:

(a) $y = 5x + 1$ (b) $y = \frac{x+1}{5}$

(c) $y = \frac{x}{5} + 1$ (d) $y = \frac{x}{5} - 1$

(10) مجال معكوس الدالة $y = \sqrt{x+3} - 1$ هو:

(a) $\mathbb{R}$ (b) $(-1, \infty)$

(c) $(-\infty, 1)$ (d) $[-1, \infty)$

تمرّنْ
2–6

حل المتباينات

Solving Inequalities

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات التالية:

(a) $(x-3)(2x+5)<0$ **(b)** $2x^2-3x-5\geq 0$ **(c)** $-3x^2+2x<-1$

(d) $4x^2+12x+9\geq 0$ **(e)** $-9x^2+6x<1$ **(f)** $21+4x>x^2$

(2) لنعتبر عرض مستطيل $(x-2)$ cm وطوله $2x$ cm

(a) وضّح لماذا يجب أن تكون قيمة x أكبر من 2

(b) اكتب المعادلة التي تعطي مساحة هذا المستطيل.

(c) علمًا أنّ x عدد صحيح، أوجد قيمة x لتكون مساحة المستطيل بين $90\,\text{cm}^2$ و $100\,\text{cm}^2$، ثم استنتج طول المستطيل وعرضه.

في التمارين (9–3)، حلّ المتباينات التالية:

(3) $\dfrac{x-1}{x^2-4}<0$ **(4)** $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\leq 0$ **(5)** $\dfrac{x^2+x-12}{x^2-4x+4}>0$

(6) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-3}\leq 0$ **(7)** $\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{2}{x-1}>0$ **(8)** $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{2}{x-1}\geqslant 0$

(9) $\dfrac{2x+1}{x}+\dfrac{3x}{1-2x}\leqslant 0$

(10) عمر جدّ أحمد يساوي 8 أضعاف عمر أحمد. بعد 3 سنوات، سيتخطى تربيع عمر أحمد ضعف عمر جدّه (للمرّة الأولى). أوجد عمر أحمد وعمر جدّه الآن.

(11) لنعتبر معادلة المستقيم $(d): y=-1$، أوجد بيانيًّا الحل لـ $f(x)=y, f(x)>y, f(x)<y$ في كلّ من الحالات التالية:

(a) $f(x)=2x^2+4x-1$ **(b)** $f(x)=x^2+1$ **(c)** $f(x)=-x^2+4x-1$

(12) لنعتبر معادلة المستقيم $(d): y=2$، أوجد بيانيًّا الحل لـ $f(x)<y, f(x)\geq y$ في كلّ من الحالتين التاليتين:

(a) $f(x)=3x^2+2$ **(b)** $f(x)=x^2-x-2$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5 – 1)، ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة:

(1) مجموعة حل المتباينة $(x+3)^2 > 0$ هي $\mathbb{R}$ (a) (b)

(2) كل x ينتمي للفترة $(0, \infty)$ هو حل للمتباينة $\frac{x-1}{x^2-x} \geq 0$ (a) (b)

(3) مجموعة حل المتباينة $(x+3)^2 + 2 < 1$ هي المجموعة الخالية ϕ (a) (b)

(4) مجموعة حل المتباينة $\frac{x+2}{x+1} \geq 1$ هي $(-1, \infty)$ (a) (b)

(5) مجموعة حل المتباينة $(-x-3)^2 < 0$ هي $\{3\}$ (a) (b)

في التمارين (13–6)، ظلل رمز الدائرة الدالة على الإجابة الصحيحة.

(6) المعادلة المناظرة للمتباينة $-3(x+1)\left(x+\frac{1}{3}\right) \leq 2$ هي:

(a) $-3x^2 + 2x - \frac{5}{3} = 0$ (b) $x^2 + \frac{4}{3}x + 1 = 0$ (c) $-3x^2 + 4x - 3 = 0$ (d) $-3x^2 + 2x + 1 = 0$

(7) إن مجموعة حل المتباينة $(1-2x)(4+5x) < 0$ هي:

(a) $\left(-\frac{4}{5}, \frac{1}{2}\right)$ (b) $\left(-\infty, -\frac{4}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

(c) $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{4}{5}, \infty\right)$ (d) $\left(-\infty, -\frac{4}{5}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$

(8) إن مجموعة حل المتباينة $\frac{(x^2+1)(x-3)}{x-3} > 0$ هي:

(a) $\mathbb{R}$ (b) $\mathbb{R}^*$ (c) $\mathbb{R} - \{3\}$ (d) $\mathbb{R} - \{0, 3\}$

(9) المتباينة التي مجموعة حلها $[-2, 3]$ هي:

(a) $x^2 - x - 6 < 0$ (b) $x^2 - x - 6 \leq 0$ (c) $x^2 - x - 6 > 0$ (d) $x^2 - x - 6 \geq 0$

(10) مجموعة حل المتباينة $x^2 + |x| > 0$ هي:

(a) $\mathbb{R}$ (b) $(0, \infty)$ (c) $\mathbb{R} - \{0\}$ (d) ليس أيًّا مما سبق صحيحًا

(11) إذا كانت $f(x) = \frac{x(x+1)}{(2x-3)(3x+2)}$ فإن قيم x التي تجعل f غير معرّفة هي:

(a) $\left\{\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}\right\}$ (b) $\left\{\frac{-2}{3}, \frac{3}{2}\right\}$ (c) $\left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}$ (d) $\left\{\frac{-2}{3}, -\frac{3}{2}\right\}$

(12) مجموعة حل المعادلة $x^2 + |x| - 2 = 0$ هي:

(a) $\{1, -2\}$ (b) $\{-1, 2\}$ (c) $\{-1, 1\}$ (d) $\{-2, 2\}$

(13) إذا كانت $f(x) = -3x^2 + x - \frac{1}{12}$ فإن قيم x التي تجعل $f(x)$ غير موجبة ولا تساوي الصفر هي:

(a) $(-\infty, 0)$ (b) $(0, \infty)$ (c) $\left\{\frac{1}{6}\right\}$ (d) $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{6}\right\}$

اختبار الوحدة الثانية

في التمرينين (2–1)، أوجد مجال كلّ من الدوال التالية:

(1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{9x^2-4}+2}{2x-3}$

(2) $g(x)=\dfrac{\sqrt{-x+2}-3}{\sqrt{x^2-4}}$

(3) يبيّن الجدول العلاقة بين ربح إحدى الشركات y بآلاف الدنانير وعدد القطع المنتجة x

x	1	2	3	4	5
y	0	−1	0	3	8

. اكتب دالة تربيعية تنمذج العلاقة بين x, y

في التمرينين (5–4)، ارسم كل مجموعة بيانات مما يلي، ثم اكتب معادلة كلّ منها:

(4)

x	−1	0	1	2	3	4
$f(x)$	−1	−3	−1	5	15	29

(5)

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	−2	1	6	13	22

في التمرينين (7–6)، ارسم منحنى القطع المكافئ إذا عرفت إحداثيات الرأس ونقطة إضافية يمر بها.

(6) الرأس $V(0,0)$, $A(-3,3)$

(7) الرأس $V(1,5)$, $A(2,11)$

في التمارين (11–8)، ارسم كل دالة تربيعية. ثم حدّد إحداثيات الرأس.

(8) $f(x)=x^2-7$

(9) $f(x)=x^2+2x+6$

(10) $f(x)=-x^2+5x-3$

(11) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2-8$

في التمارين (15–12)، أوجد معكوس كل دالة مما يلي:

(12) $y=4x+1$

(13) $y=\frac{2}{3}x-6$

(14) $y=x^2-10$

(15) $y=(x+2)^2-3$

(16) سؤال مفتوح: اكتب معادلة دالة، حيث منحنى معكوسها هو قطع مكافئ.

في التمارين (20–17)، اكتب كل دالة بدلالة إحداثيات الرأس. ثم ارسم منحنى القطع المكافئ وحدّد إحداثيات الرأس.

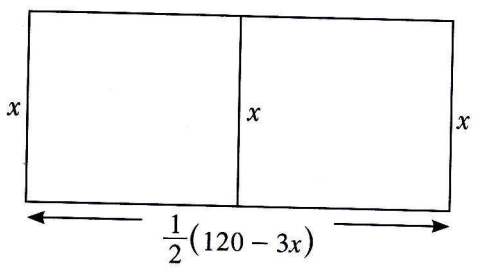
(17) $y=x^2-6x+5$

(18) $y=-x^2+8x-10$

(19) $y=2x^2-3x+1$

(20) $y=-\frac{1}{2}x^2+4x-9$

(21) أوجد أكبر مساحة لحديقة مكونة من مستطيلين لهما ضلع مشترك ويمكن إحاطتهما بشريط طوله 120 m. (انظر الصورة المقابلة).



تمارين إثرائية

في التمرينين (2–1)، أوجد مجال كلّ من الدوال التالية:

(1) $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}-\dfrac{x}{\sqrt{2+x}}+\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{9-x^2}}$

(2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{\sqrt{x^2+7}-4}$

(3) في إحدى مباريات كرة القدم، تواجد أحد اللاعبين منفردًا وجهًا لوجه مع حارس مرمى الفريق المنافس فقرر رفع الكرة فوق الحارس آملًا ألا تعلو مرمى الفريق المنافس، وكان هذا اللاعب على بعد 16 m من خط المرمى، بينما الحارس يقف على بعد 7 m من اللاعب. ينمذج مسار الكرة المنطلقة من الأرض عبر تسديدة اللاعب على شكل قطع مكافئ معادلته: $y=a(x-10)^2+3$

(a) أوجد قيمة a معتبرًا نقطة انطلاق تسديدة اللاعب هي نقطة الأصل.

(b) علمًا أن الحارس عند استخدام يديه يصل إلى ارتفاع 2.53 m وأن ارتفاع المرمى هو 2.44 m فهل ستتخطى الكرة الحارس؟ وهل سيسجل اللاعب هدفًا؟

(4) في إحدى دورات كرة المضرب، تواجد أحد اللاعبين على بعد 3 m من الشبكة، فقرر اللاعب الثاني المتواجد على الخط الخلفي من الملعب رفع الكرة فوق منافسه على أن تأتي الكرة داخل ملعب منافسه. علمًا أن طول ملعب كرة المضرب 23.8 m تتوسطه الشبكة التي تقسم الملعب إلى قسمين متساويين.

(a) إذا اعتبرنا أن مسار الكرة من مضرب اللاعب على ارتفاع 1 m على شكل قطع مكافئ معادلته: $y=-0.08(x-9)^2+k$ فما قيمة k؟

(b) ما الارتفاع الأقصى للكرة عن أرض الملعب؟

(c) هل ستتخطى الكرة اللاعب المنافس إذا كان أقصى ارتفاع يمكن الوصول إليه باستخدام مضربه هو 3.3 m؟

(d) هل ستسقط الكرة داخل ملعب اللاعب المنافس؟ إذا كانت إجابتك نعم، أوجد بعدها عن خط الملعب.

(5) (a) ارسم بيانيًّا منحنى الدالة: $y=x^2-4x$

(b) أوجد معكوس الدالة، ثم ارسمه على المستوى الإحداثي نفسه.

في التمارين (10–6)، حلّ كلًّا من المتباينات التالية:

(6) $(x-3)(x+2)>(x-3)(2x-1)$

(7) $4x^2-9\le(3-2x)(x+1)$

(8) $x^2(x-3)>0$

(9) $(x-6)^2(x-5)>0$

(10) $\dfrac{3x-1}{(2x-7)^2}\ge 0$

(11) **(a)** أكمل الجدولين التاليين. اكتب في الصف الأخير من كل منهما الفرق بين قيم y المتتالية.

جدول (1)

x	0	1	2	3	4	5
$y = 2x$	0	2	4	6	8	10
الفرق			2	2		

جدول (2)

x	0	1	2	3	4	5
$y = 2x^2$	0	2	8	18	32	50
الفرق		2	6			

(b) أي من الدالتين دالة تربيعية؟

(c) أي نمط تراه في الصف الأخير من الجدول (1)؟ ومن الجدول (2)؟

(d) كوّن جدولًا لكلّ من الدالتين: $y = -x + 4, y = -x^2 + 4$ مستخدمًا قيم x نفسها في الفقرة **(a)**. هل ترى الأنماط نفسها كما في الفقرة **(c)**؟

(e) كيف تساعدك قيم y لمجموعة البيانات في توقع ما إذا كانت الدالة الخطية أو الدالة التربيعية هي النموذج الأفضل؟

(12) يبيّن الجدول التالي العلاقة بين عمق المياه في المحيط y بالأمتار (m) وسرعة التسونامي x (متر في الثانية m/s).

x	52	58	61	65	71	76	82	98
y	270.40	336.40	372.10	422.50	504.10	577.60	672.40	960.40

استخدم البيانات المدونة في الجدول لإيجاد معادلة تربيعية تنمذج العلاقة بين x, y ثم تحقق.

(استخدام الآلة الحاسبة)

تمرَّنْ
3–1

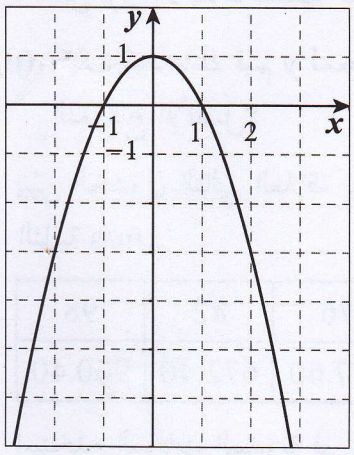
دوال القوى ومعكوساتها

Power Functions and their Inverses

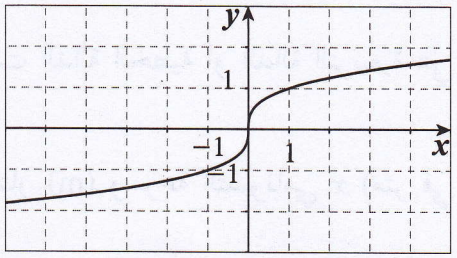
المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (4–1)، الأشكال التالية تمثل دوال. صف تماثل كل دالة ثم وضّح هل هي زوجية أم فردية أم ليست زوجية وليست فردية.

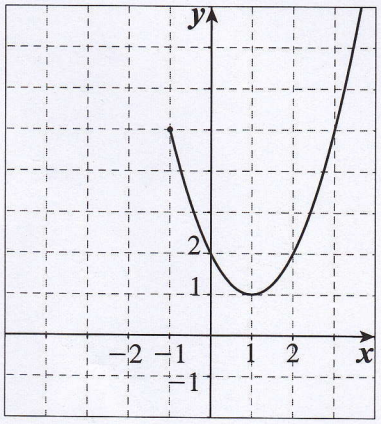
(1) $y = -x^2 + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$



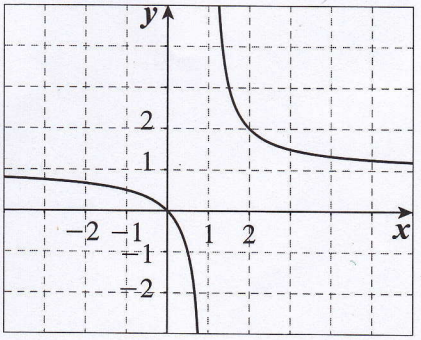
(2) $y = \sqrt[3]{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$



(3) $y = x^2 - 2x + 2 \quad \forall x \in [-1, \infty)$



(4) $y = \frac{x}{x-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}/\{1\}$



في التمارين (9–5)، اذكر ما إذا كانت كل من الدوال التالية فردية أم زوجية أم ليست فردية وليست زوجية.

(5) $y = x^3$ **(6)** $y = (x-1)^3 + 2$ **(7)** $y = x^4$

(8) $y = -x^4 + 3$ **(9)** $y = -\sqrt[4]{x}$

في التمارين (15–10)، أوجد معكوس كل دالة مما يلي:

(10) $y = \frac{1}{3}x^3$ **(11)** $y = 2\sqrt[4]{x}$ **(12)** $y = \frac{1}{3}x^4$

(13) $y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{x}$ **(14)** $y = \sqrt[3]{x-1}$ **(15)** $y = (x+2)^4 - 3$

(16) **(a)** تمثل العلاقة: $M = 0.008p^3$، وزن بطيخة «M» بالجرام حيث محيطها «p» بالسنتيمتر (cm).

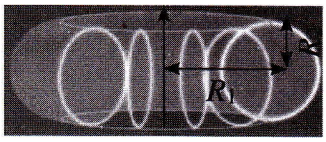
قدّر وزن بطيخة محيطها 80 cm

(b) حل المعادلة: $M = 0.008p^3$ بدلالة p

(c) أوجد محيط البطيخة التي وزنها 3.250 kg

(17) **السؤال المفتوح:** اكتب دالة قوى يقع رسمها البياني في الربع الثاني والربع الرابع.

(18) عندما تدور دائرة حول خط مثل الخط الموضح في الشكل أدناه، فإن السطح الناتج يسمى تتوءًا مستديرًا (torus or donut) ويعطى حجمه بالعلاقة: $V = 2\pi^2 R_1 R_2^2$



(a) افرض أن: $R_1 = 3R_2$، تحقّق أن: $V = 6\pi^2 R_2^3$

(b) أوجد V إذا $R_1 = 3R_2$، حيث $R_2 = 1.27$ cm. قرّب الناتج إلى أقرب جزء من 10

(19) وضّح كيف أن المقدار $(-64)^{\frac{1}{2}}$ لا يمثّل عددًا حقيقيًّا، في حين أن المقدار $(-64)^{\frac{1}{3}}$ يمثّل عددًا حقيقيًّا.

(20) **التفكير الناقد:** صف بيان الدالة $f(x) = ax^n$ بحسب الشروط الموضوعة على n , a.

(a) n عدد صحيح زوجي، $a > 0$ **(b)** n عدد صحيح زوجي، $a < 0$

(c) n عدد صحيح فردي، $a > 0$ **(d)** n عدد صحيح فردي، $a < 0$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة، و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $y = \sqrt{x^4}$ دالة قوى (a) (b)

(2) $f : [-3,3] \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^5$ دالة فردية (a) (b)

(3) $y = x\sqrt{x}$ دالة زوجية (a) (b)

(4) $y = (x+4)^2$ دالة زوجية (a) (b)

(5) المستقيم الذي معادلته $y = x$ هو خط تناظر بين النقاط التي تمثل العلاقة r والنقاط التي تمثل معكوسها.

(a) (b)

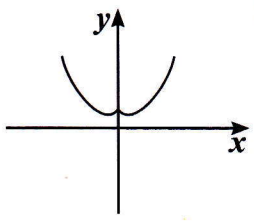
في التمارين (6–10)، ظلّل دائرة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) معكوس دالة القوى $y = 0.2x^4$ هو:

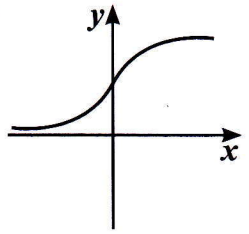
(a) $y = \sqrt[4]{\frac{x}{0.2}}$ (b) $y = \pm\sqrt[4]{\frac{x}{0.2}}$ (c) $y = \pm\sqrt[4]{\frac{x}{2}}$ (d) $y = \pm\sqrt[4]{5x}$

(7) أي مما يلي تمثل دالة زوجية.

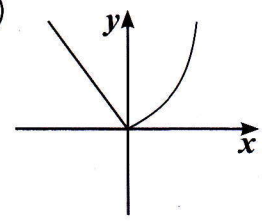
(a)



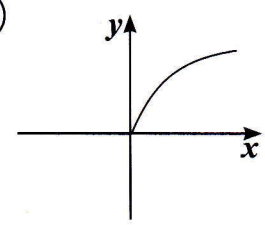
(b)



(c)



(d)



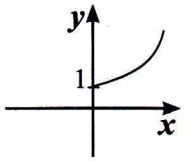
(8) الدالة $y = 4.9t^2$ دالة زوجية إذا كان مجالها:

(a) $[-4,4)$ (b) $[-4,2)$ (c) $[-2,2]$ (d) $[0,\infty)$

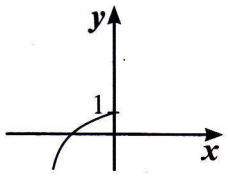
(9) إذا كانت $f:[-4,4] \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3}{64}$ فإن مجال f^{-1} هو:

(a) $\mathbb{R}$ (b) $\mathbb{R}^+$ (c) $[-4,4]$ (d) $[-1,1]$

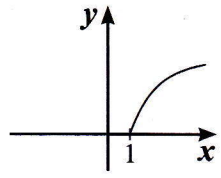
(10) ليكن بيان f^{-1} كما هو موضح في الشكل المقابل. بيان f يمكن أن يكون:



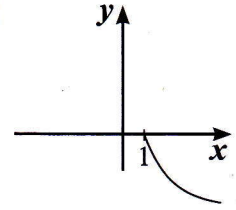
(a)



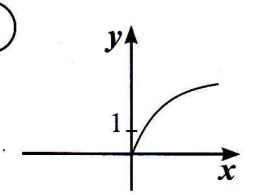
(b)



(c)



(d)



في التمرينين (11–12)، لديك قائمتان اختر من القائمة (2) ما يناسب السؤال في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.

القائمة (1)	القائمة (2)
(11) بيان دالة زوجية متماثل حول:	(a) المستقيم الذي معادلته $x = 0$
(12) بيان دالة فردية متماثل حول:	(b) المستقيم الذي معادلته $y = 0$
	(c) المستقيم الذي معادلته $y = x$
	(d) نقطة الأصل

تمرَّنْ
3–2

الدوال الحدودية

Polynomial Functions

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (9–1)، اكتب كل كثيرة حدود مما يلي بالصورة العامة ثم صنفها تبعًا للدرجة وعدد الحدود.

(1) $(2x^2+9)-(3x^2-7)$

(2) $(7x^2+8x-5)+(9x^2-9x)$

(3) $(7x^3+9x^2+8x+11)-(5x^3-13x-16)$

(4) $(30x^3-49x^2+7x)+(50x^3-75x-60x^2)$

(5) $\dfrac{3x^5+4x}{6}$

(6) $5x^2(6x-2)$

(7) $(x^2+1)^2$

(8) $(2c-3)(2c+4)(2c-1)$

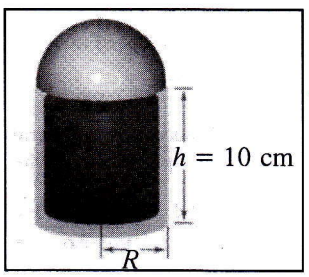
(9) $(w-1)^4$

(10) السؤال المفتوح: اكتب دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة.

كوّن جدولًا للقيم وارسم الدالة بيانيًّا.

أوجد الأجزاء المقطوعة من محور السينات ومحور الصادات.

(11) تصميم العبوات: الشكل أدناه يوضّح زجاجة عطر تتكوّن من قاعدة أسطوانية وغطاء نصف كرويّ.



(a) اكتب مقدارًا يعبّر عن حجم الأسطوانة.

(b) اكتب مقدارًا يعبّر عن حجم الغطاء نصف الكرويّ.

(c) اكتب كثيرة حدود تمثّل الحجم الكليّ.

في التمارين (16–12) عيّن سلوك النهاية لبيان كل دالة.

(12) $y=3x+2$

(13) $f(x)=-x^2+x$

(14) $f(x)=\frac{1}{2}x^4-2$

(15) $y=-4x^4+5x^5$

(16) $f(x)=-\frac{1}{2}x^3-4x^2+x-1$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) كثيرة الحدود، $f(x) = ax^3 + (a+2)x^2 + 5 \ , \ \forall a \in \mathbb{R}$ هي من الدرجة الثالثة. (a) (b)

(2) المعامل الرئيسي لكثيرة الحدود $f(x) = 2x^5 - 3x^3(1-x^2)$ هو 2 (a) (b)

(3) كثيرة الحدود $(1-x^2)^3(x+1)$ هي من الدرجة السابعة. (a) (b)

(4) إذا كانت الدالة الحدودية من الدرجة n فإن لها n حدًّا. (a) (b)

في التمارين (7–5)، ظلّل دائرة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) $(x+1)^3$ يساوي:

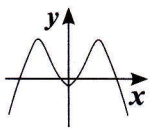
(a) x^3+1 (b) $(x+1)(x^2+x+1)$

(c) x^3+3x^2+3x+1 (d) x^3+x^2+x+1

(6) أي مما يلي يساوي $2x^4-3x+6$ ؟

(a) $(x^4-2x^2+3)-(x^4-x^2-9)$ (b) $2x^4-3(x+6)$

(c) $(3x^4-x+3)+(3-2x-x^4)$ (d) $x(2x^3-3x)+6$

(7) سلوك نهاية الدالة  هو:

(a) $(\nwarrow, \nearrow)$ (b) $(\swarrow, \searrow)$ (c) $(\swarrow, \nearrow)$ (d) $(\nwarrow, \searrow)$

في التمارين (11–8) لديك قائمتان، اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في من القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.

القائمة (1)	القائمة (2)
سلوك نهاية الدالة:	(a) $(\nwarrow, \nearrow)$
(8) $f(x) = x^4 - 2x^5$	(b) $(\swarrow, \searrow)$
(9) $g(x) = 2x + x^3 + 5$	(c) $(\swarrow, \nearrow)$
	(d) $(\nwarrow, \searrow)$
سلوك نهاية الدالة:	(a) $(\nwarrow, \nearrow)$
(10) $f(x) = -x^6 + 7x$	(b) $(\swarrow, \searrow)$
(11) $g(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2$	(c) $(\swarrow, \nearrow)$
	(d) $(\nwarrow, \searrow)$

تمرَّنْ
3–3

العوامل الخطية لكثيرات الحدود

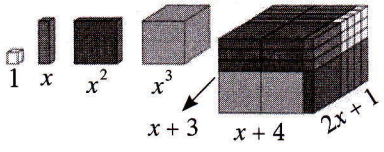
Linear Factors of Polynomials

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (3–1)، اكتب كل دالة كثيرة حدود في الصورة العامة واذكر درجتها.

(1) $y=(x+3)(x+4)(x+5)$ **(2)** $y=(x-3)^2(x-1)$ **(3)** $y=x(x-1)(x+1)$

(4) الهندسة: إذا كان طول صندوق $2x+1$ من الوحدات، وعرضه $x+4$ من الوحدات، وارتفاعه $x+3$ من الوحدات، وقد كونته باستخدام الكتل الخشبية x^3، x^2، x، الوحدة (1). فإلى كم كتلة تحتاج من كل منها؟



(5) الهندسة: صندوق على شكل شبه مكعب طوله: $2x+3$ من الوحدات، عرضه $2x-3$ من الوحدات، ارتفاعه $3x$ من الوحدات. عبّر عن حجم الصندوق في صورة كثيرة حدود.

في التمارين (8–6)، عيّن أصفار كل دالة وتكرارها.

(6) $y=(x-1)(x+2)$ **(7)** $y=(x+3)^3$ **(8)** $y=x(x-2)^2(x+9)$

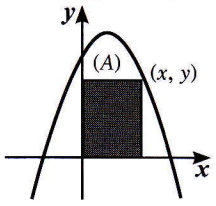
في التمارين (12–9)، أوجد أصفار كل دالة مما يلي ثم ارسم بيانًا تقريبيًّا لكل منها مراعيًا سلوك النهاية لبيان كل دالة.

(9) $y=(x-2)(x+2)$ **(10)** $y=(x+1)(x-2)(x-3)$

(11) $y=x(x+2)^2$ **(12)** $y=(x+1)^2(x-2)(x-1)$

(13) التفكير الناقد: كيف تعرف نقاط تقاطع الرسم البياني لدالة كثيرة الحدود مع محور الصادات دون رسمها بيانيًّا؟

(14) الهندسة التحليلية: يوضح الشكل أدناه منطقة مستطيلة الشكل، أحد أركانها يقع على الرسم البياني للدالة: $y=-x^2+2x+4$



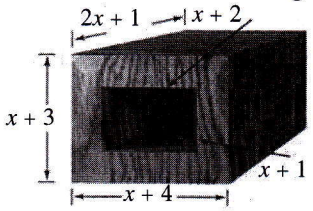
(a) اكتب مساحة المنطقة المستطيلة (A) كدالة كثيرة حدود في الصورة العامة.

(b) أوجد مساحة المنطقة المستطيلة إذا كانت $x=2\frac{1}{2}$

(15) السؤال المفتوح: اكتب دالة كثيرة حدود لها المميزات التالية:

ثلاثة أصفار مختلفة، أحد أصفارها هو العدد 1، وصفر آخر من أصفارها مكرر مرتين.

(16) الصناعات الخشبية: بدأ نجار عمله باستخدام كتلة خشبية كالموضحة في الشكل.



(a) عبّر عن حجم الكتلة الخشبية الأصلية وحجم التجويف في شكل كثيرتي حدود في الصورة العامة.

(b) اكتب كثيرة حدود لحجم الخشب المتبقي.

في التمارين (20–17)، اكتب دالة كثيرة الحدود في الصورة العامة مستخدمًا الأصفار المعطاة:

(17) $1, -1$ **(18)** $0, 1, 2$ **(19)** $-4, -1, 3$ **(20)** $\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 2$ (مكرر مرتين)

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت f تقبل القسمة على $(2x+3)$ فإن $f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ (a) (b)

(2) إذا كانت $(x+2)$ عامل من عوامل الحدودية g فإن $g(-2) = 0$ (a) (b)

(3) إذا قبلت $f(x) = x^4 - 2x^2 + k + 1$ القسمة على x فإن $k = -1$ (a) (b)

(4) باقي قسمة حدودية من الدرجة n على حدودية من الدرجة الأولى هو عدد ثابت. (a) (b)

(5) $(x+1)$ عامل من عوامل الحدودية: $p(x) = x^3 - x^2 - 2x$ (a) (b)

في التمارين (13–6)، ظلّل دائرة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة.

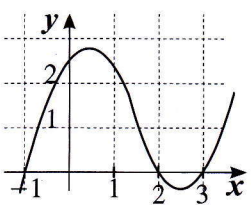
(6) إذا كان $x = -2a$ صفر من أصفار كثيرة حدود فإن أحد عواملها هو:

(a) $(x-2a)$ (b) $(2x+a)$ (c) $(2x-a)$ (d) $(x+2a)$

(7) أي من المقادير التالية إذا ضرب في $(x-1)$ يصبح الناتج كثيرة حدود تكعيبية ثلاثية:

(a) $(x-1)^2$ (b) $x^2 - x$ (c) $x^2 - 1$ (d) $x^2 + 1$

(8) ليكن بيان f كما في الشكل المرسوم فإن مجموعة حل المعادلة $f(x) = 0$ هي:



(a) $\{-1, 2, 3\}$ (b) $\{1, -2, -3\}$

(c) $\{-1, 0, 2, 3\}$ (d) $\{0\}$

(9) شبه مكعب أبعاده $3x$ ، $2x-3$ ، $2x+3$ فتكون دالة الحجم $f(x)$ تساوي:

(a) $4x^2 - 9$ (b) $3x(4x^2+9)$ (c) $12x^2 - 9x$ (d) $12x^3 - 27x$

(10) قيمة k التي تجعل $(x-1)$ عاملًا من عوامل $f(x) = (x^2 + x - 2) + 2k$ هي:

(a) 1 (b) 2 (c) 0 (d) $\frac{1}{2}$

(11) $f(x)=x^3-x$ تقبل القسمة على $x-k$ إذا كان k ينتمي إلى المجموعة:

(a) $\{0\}$ (b) $\{-1\}$ (c) $\{1\}$ (d) $\{0,-1,1\}$

(12) إذا كانت $f(x)$ تقبل القسمة على $(x-2)^2$ فإن:

(a) $x=2$ صفر من أصفار الدالة f

(b) $x=2$ صفر مكرر من أصفار الدالة f

(c) $x=-2$ صفر من أصفار الدالة f

(d) $x=-2$ صفر مكرر من أصفار الدالة f

(13) $x+m$ عامل من عوامل:

(a) $f(x)=x^2+m$ (b) $f(x)=x^3+mx$

(c) $f(x)=x^3+mx^2$ (d) $f(x)=x^2+m^2$

تمرَّنْ
3–4

قسمة كثيرات الحدود

Dividing Polynomials

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (4–1)، اقسم مستخدمًا قسمة كثيرة الحدود المطولة.

(1) $(x^2 - 3x - 40) \div (x + 5)$

(2) $(x^3 + 3x^2 - x + 2) \div (x - 1)$

(3) $(x^3 - 13x - 12) \div (x - 4)$

(4) $(9x^3 - 18x^2 - x + 2) \div (3x + 1)$

في التمرينين (6–5)، بيّن ما إذا كانت كل ثنائية حد عاملًا من عوامل $x^3 + 4x^2 + x - 6$

(5) $x - 3$

(6) $x + 2$

في التمارين (11–7)، اقسم مستخدمًا القسمة التركيبية.

(7) $(x^3 + 3x^2 - x - 3) \div (x - 1)$

(8) $(-2x^3 + 5x^2 - x + 2) \div (x + 2)$

(9) $(2x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 45) \div (x + 3)$

(10) $(x^3 - 3x^2 - 5x - 25) \div (x - 5)$

(11) $(2x^3 + 4x^2 - 10x - 9) \div (x - 3)$

في التمرينين (13–12)، استخدم القسمة التركيبية والعامل المعطى لتحليل كل دالة كثيرة حدود بالكامل.

(12) $y = x^3 + 2x^2 - 5x - 6 \; ; \; x + 1$

(13) $y = x^3 - 4x^2 - 9x + 36 \; ; \; x + 3$

(14) الهندسة: يعطى حجم صندوق بالمعادلة: $V(x) = x^3 + x^2 - 6x$ بالأمتار المكعبة (m^3)

ما الأبعاد الممكنة لهذا الصندوق؟

في التمارين (18–15)، استخدم القسمة التركيبية ونظرية الباقي لإيجاد $f(a)$

(15) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 8x - 6 \; ; \; a = -2$

(16) $f(x) = x^3 - 7x^2 + 15x - 9 \; ; \; a = 3$

(17) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 10x + 5 \; ; \; a = \frac{1}{2}$

(18) $f(x) = 2x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 45 \; ; \; a = -3$

(19) (a) التفكير المنطقي: كثيرة حدود $f(x)$ قسمت على ثنائية الحدّ $(x - a)$ والباقي صفر.

ماذا يمكنك أن تستنتج؟ فسّر.

(b) تفكير ناقد: وضّح لماذا $x^2 + 1$ لا يمكن تحليلها باستخدام أعداد حقيقية؟

(c) اكتشاف الخطأ: حلّل طالب كثيرة الحدود: $x^3 - x^2 - 2x$ إلى ثلاثة عوامل، وكان $(x - 1)$ أحد هذه العوامل. استخدم القسمة لتثبت أن الطالب ارتكب خطأ.

في التمارين (22–20)، اقسم ما يلي:

(20) $(2x^3+9x^2+14x+5)\div(2x+1)$ **(21)** $(x^5+1)\div(x+1)$

(22) $(3x^4-5x^3+2x^2+3x-2)\div(3x-2)$

في التمارين (25–23)، اقسم ثمّ أوجد نمطًا في الإجابات.

(23) $(x^2-1)\div(x-1)$ **(24)** $(x^3-1)\div(x-1)$ **(25)** $(x^4-1)\div(x-1)$

(26) مستخدمًا الأنماط، اقسم $(x^5-1)\div(x-1)$

في التمارين (29–27)، اقسم ثمّ أوجد نمطًا في الإجابات.

(27) $(x^3+1)\div(x+1)$ **(28)** $(x^5+1)\div(x+1)$ **(29)** $(x^7+1)\div(x+1)$

(30) مستخدمًا الأنماط، أوجد $(x^9+1)\div(x+1)$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كان باقي قسمة كثيرة الحدود $f(x)$ على $(x+\alpha)$ يساوي صفرًا فإن α عامل من عوامل f (a) (b)

(2) الدالة $f(x)=(x-2)^2-1$ تقبل القسمة على $(x-1)$ (a) (b)

(3) باقي قسمة (x^3+a^3) على $(x-a)$ هو $2a^3$ (a) (b)

(4) ناتج قسمة حدودية من الدرجة n حيث $n\geqslant 2$ على حدودية من الدرجة الثانية تكون حدودية من الدرجة $(n-2)$ (a) (b)

(5) ناتج قسمة حدودية من الدرجة السادسة على حدودية من الدرجة الثالثة تكون حدودية من الدرجة الثانية. (a) (b)

في التمارين من (12–6)، ظلّل دائرة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) باقي قسمة $f(x)$ على $g(x)=x-k$ هو:

(a) $g(k)$ (b) $f(k)$ (c) $f(-k)$ (d) $-k$

(7) إذا كانت f حدودية من الدرجة $(n+2)$ حيث $n\geqslant 2$، g حدودية من الدرجة الثالثة فإن باقي قسمة f على g <u>لا</u> يمكن أن يكون من الدرجة:

(a) الصفرية (b) $n-1$ (c) n (d) $n-2$

(8) باقي قسمة (x^4+2) على $(x-3)$ هو:

(a) 3 (b) 27 (c) 81 (d) 83

(9) ناتج قسمة $(2x^4 - 8x^2)$ على $(x+2)$ يساوي:

(a) $2x^3 - 4x^2$ (b) $2x^3 - 8x^2$ (c) $x^3 - 4x^2$ (d) $2x^3 - 4x^2 + 2x$

(10) إذا كان 0 هو باقي قسمة $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + kx - 1$ على $(x+1)$ فإن k تساوي:

(a) 7 (b) -7 (c) -3 (d) 3

(11) إذا كان باقي قسمة $f(x) = x^4 - kx^2 + x - k$ على $(x-1)$ هو 3 فإن k تساوي:

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 3 (c) $-\frac{1}{2}$ (d) $\frac{5}{2}$

(12) إذا كان $f(-1) = f(0) = f(3) = -2$ فإن $f(x)$ يمكن أن تكون:

(a) $x^3 - x^2 + 3x - 2$ (b) $x^3 - 2x^2 - 3x$

(c) $2x^3 - 2x^2 - 3x - 2$ (d) $2x^3 - 4x^2 - 6x - 2$

تمرَّنْ
3–5

حل معادلات كثيرات الحدود

Solving Polynomial Equations

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (9–1)، حل كل معادلة مما يأتي وقرّب إجابتك لأقرب جزء من مئة عندما يكون ذلك ضروريًّا.

(1) $6y^2 = 48y$

(2) $3x^3 - 6x^2 - 9x = 0$

(3) $12x^3 - 60x^2 + 75x = 0$

(4) $4x^3 = 4x^2 + 3x$

(5) $2a^4 - 5a^3 - 3a^2 = 0$

(6) $2d^4 + 18d^3 = 0$

(7) $x^3 - 6x^2 + 6x = 0$

(8) $x^3 + 13x = 10x^2$

(9) $2x^3 - 5x^2 = 12x$

في التمارين (12–10)، استخدم التقسيم لحل كل من المعادلات التالية:

(10) $x^3 - 2x^2 - 3 = x - 5$

(11) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$

(12) $x^3 + 2x(x-1) = 1$

في التمارين (18–13)، استخدم الأصفار النسبية الممكنة لحل المعادلات التالية:

(13) $x^4 + 2x^3 + x^2 = 4x^2 + 8x + 4$

(14) $x^3 - 3x + 2 = 0$

(15) $x^3 + x^2 - 8x - 12 = 0$

(16) $x^3 - 7x + 6 = 0$

(17) $x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8 = 0$

(18) $2x^4 - 5x^3 - 17x^2 + 41x - 21 = 0$

(19) السؤال المفتوح: لحل معادلة كثيرة حدود، يمكنك استخدام طريقة أو أكثر من الطرق التالية: الرسم البياني، التحليل إلى عوامل، القانون العام لحل المعادلة التربيعية. اكتب معادلة وحلها لتوضح كل طريقة.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) مجموعة حل المعادلة $9x^2 + 16 = 0$ هي $\left\{-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right\}$ (a) (b)

(2) مجموعة حل المعادلة $2x^3 + 2 = 0$، $x \in \mathbb{R}$ هي مجموعة أحادية. (a) (b)

(3) إذا كانت $2k$ تنتمي إلى مجموعة حل المعادلة $(4x^2 + 1)\left(\frac{x^2}{4} - 1\right) = 0$ فإن $k \in \{-1, 1\}$ (a) (b)

(4) إن $\{1\}$ هي مجموعة حل المعادلة $3x^4 + 12x^2 - 15 = 0$ (a) (b)

(5) $\frac{2}{3}$ يمكن أن يكون صفرًا للحدودية $f(x) = 2x^3 + bx^2 + cx - 3$ حيث $b, c \in \mathbb{R}$ (a) (b)

في التمارين (8–6)، ظلّل دائرة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) 5 يمكن أن يكون صفرًا من أصفار الحدودية $f(x)$ تساوي:

(a) $ax^3 + x^4 + 5$ (b) $x^5 - 1$ (c) $5x^3 + 6x - 1$ (d) $(x+5)(x^2+25)$

(7) أي قيمة مما يلي ليست حلًّا للمعادلة: $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

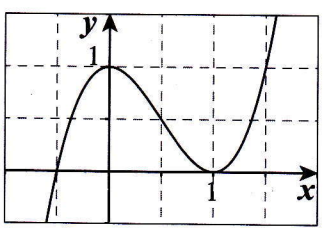
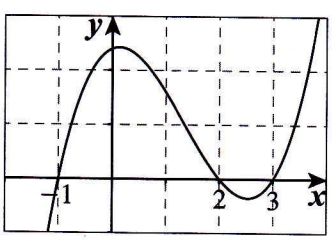
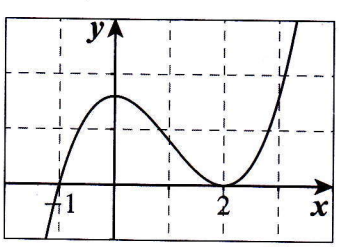
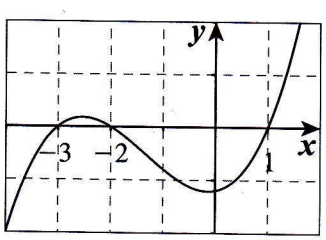
(a) -1 (b) -3 (c) 3 (d) 2

(8) إذا كان $f(m) = f(n) = f(-1) = 0$ فإن f ممكن أن تكون:

(a) $f(x) = (x-1)(x+m)(x+n)$ (b) $f(x) = (x-1)(x-m)^2(x-n)$

(c) $f(x) = (x+1)(x-m)(x-n)^2$ (d) $f(x) = (x+1)(x-mn)$

في التمارين (11–9)، لديك قائمتان اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.

القائمة (1)	القائمة (2)
(9) مجموعة حل $f(x) = 0$ هي $\{-1, 2, 3\}$ ∴ بيان الدالة f يمكن أن يكون:	(a) 
(10) مجموعة حل $f(x) = 0$ هي $\{-1, 2\}$ ∴ بيان الدالة f يمكن أن يكون:	(b) 
(11) مجموعة حل $f(x) = 0$ هي $\{1, -2, -3\}$ ∴ بيان الدالة f يمكن أن يكون:	(c) 
	(d) 

اختبار الوحدة الثالثة

في التمارين (4–1)، أوجد معكوس كل دالة مما يلي:

(1) $y = \frac{1}{2}x^4$ **(2)** $y = (x+1)^3$ **(3)** $y = (x+1)^2 - 3$ **(4)** $y = \sqrt{x+5}$

في التمارين (7–5)، اكتب كل دالة كثيرة حدود في الصورة العامة، ثم صنّفها بحسب عدد الحدود وبحسب الدرجة.

(5) $f(x) = 3x^2 - 7x^4 + 9 - x^4$ **(6)** $f(x) = 11x^2 + 8x - 3x^2$ **(7)** $f(x) = 2x(x-3)(x+2)$

في التمرينين (9–8)، أوجد أصفار الدالة ثم ارسم بيانًا تقريبيًّا لها مراعيًا سلوك النهاية. (قرّب إلى أقرب جزء من عشرة عند الضرورة).

(8) $f(x) = x(x-3)(x+2)$ **(9)** $f(x) = (x-2)^2(x-1)$

في التمارين (13–10)، حلّ كل معادلة. أعط الإجابة الدقيقة أو قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

(10) $(x-3)(x^2+3x-4) = 0$ **(11)** $(x+2)(x^2+5x+1) = 0$

(12) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ **(13)** $x^4 - 2x^2 - x + 2 = 0$

في التمرينين (15–14)، اكتب دالة كثيرة حدود في الصورة العامة إذا علمت أصفارها:

(14) $0, 4, -2$ **(15)** $2, -1$ (مكرر مرتين)

في التمرينين (17–16)، اقسم مستخدمًا قسمة كثيرة الحدود المطولة.

(16) $(x^3 + 7x^2 - 36) \div (x+3)$ **(17)** $(x^3 + 7x^2 - 5x - 6) \div (x+2)$

في التمرينين (19–18)، اقسم مستخدمًا القسمة التركيبية.

(18) $(x^3 + x^2 + x - 14) \div (x-3)$ **(19)** $(x^4 - 5x^2 + 4x + 12) \div (x+1)$

في التمرينين (21–20)، استخدم القسمة التركيبية ونظرية الباقي لإيجاد $f(a)$

(20) $f(x) = 2x^4 + 19x^3 - 2x^2 - 44x - 24$, $a = \frac{-2}{3}$

(21) $f(x) = -x^3 - x^2 + x$, $a = 0$

تمارين إثرائية

(1) لتكن: $g(x) = (m+1)x^3 + 11x^2 + 4x - 4$

أوجد قيمة m بحيث يكون $\frac{1}{2}$ أحد أصفار كثيرة الحدود.

(2) أوجد مجموعة حل:

(a) $2x^4 + x^3 - 11x^2 + 11x - 3 = 0$ **(b)** $4x^4 - x^2 + 6x - 9 = 0$

(3) أوجد قيمة a بحيث تكون: $f(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - (a+5)x - (a-3)$ قابلة للقسمة على $(x+1)^2$

(4) بسّط ما يلي: $\dfrac{x^3 - 7x + 6}{x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6}$

(5) $g(x) = 4x^4 - 11x^3 - 2x^2 + 23x - 14$

(a) حلّل $g(x)$ إلى عوامل.

(b) أوجد مجموعة حل المعادلة: $g(x) = 0$. قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.

(6) لتكن: $f(x) = x^3 - (3a+2b)x^2 + (a+b)x$

(a) أوجد قيم a, b بحيث تكون $(x-2), (x-1)$ من عوامل $f(x)$

(b) حلّل في هذه الحالة $f(x)$ إلى عوامل.

(7) أوجد دالة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية تقبل القسمة على $(2x-1), (x+5)$ وباقي قسمتها على $(x-3)$ يساوي 40

(8) لتكن: $g(x) = x^3 + 8$

(a) أوجد صفرًا لكثيرة الحدود.

(b) حلّل $g(x)$ إلى عوامل.

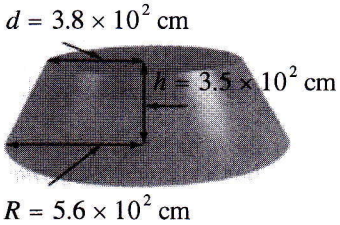
(9) **(a)** اكتب $V(x) = (x^2 + ax + b)^2$ في الصورة العامة.

(b) أثبت أن: $f(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$ هي مربع لكثيرة حدود من الدرجة الثانية.

(10) أوجد نموذجًا تكعيبيًّا للدالة التي تمر في: $(2,0), (1,-1), (0,0), (-1,-3)$، ثم استخدم هذا النموذج لتقدير قيمة y عندما $x = 17$

(11) الهندسة: استخدم العلاقة: $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rd + d^2)$، لإيجاد حجم المخروط الناقص الموضح في الشكل.

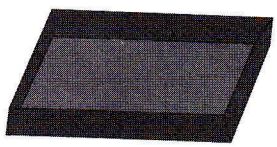
اكتب إجابتك في الصورة العلمية.



(12) الهندسة: صندوق يقل عرضه 2 m عن طوله، و يقل ارتفاعه 1 m عن طوله.

أوجد طول الصندوق عندما يكون حجمه $60\ \text{m}^3$

(13) تريد شركة للتخزين صنع صندوق للتخزين حجمه مثلي حجم أكبر صندوق تخزين لديها، إذا كانت أبعاد أكبر صندوق تخزين لديها هي 120 cm طولًا، 100 cm عرضًا،



90 cm ارتفاعًا، ويراد صنع الصندوق الجديد بزيادة كل بعد المقدار نفسه، فأوجد الزيادة في كل بعد.

(14) الحساب الذهني: إذا كان ناتج ضرب ثلاثة أعداد صحيحة متتالية: $(n-1),\ n,\ (n+1)$ هو 210، فاكتب معادلة وأوجد حلها لإيجاد الأعداد.

(15) الهندسة: حجم خزّان (V) يمثّل بالدالة: $V(x) = x^3 + 8x^2 + 15x$. لنفرض أن x تمثل العرض، $x+3$ تمثّل الطول، $x+5$ تمثل الارتفاع، حجم الخزّان $70\ \text{m}^3$، فما أبعاده؟

تمرّنْ
4–1

استكشاف النماذج الأسية
Exploring Exponential Models

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (5–1)، اذكر ما إذا كانت كل دالة تمثّل نموًّا أسيًّا أو تضاؤلًا أسيًّا. ما النسبة المئوية لزيادة الدالة أو نقصانها؟

(1) $y = 1298(1.63)^x$ **(2)** $y = 0.65(1.3)^x$ **(3)** $f(x) = 2(0.65)^x$

(4) $f(t) = 0.8\left(\frac{1}{8}\right)^t$ **(5)** $y = 5(6)^x$

(6) الدراسات الاجتماعية: يعرض الجدول التالي معلومات عن عدد السكان في أكبر أربع مدن في العالم في سنة 1994.

الترتيب في سنة 1994	المدينة (الدولة)	عدد السكان في سنة 1994	متوسط معدل النمو السنوي (I)
1	طوكيو (اليابان)	26 518 000	1.4%
2	نيويورك (الولايات المتحدة)	16 271 000	0.3%
3	ساوباولو (البرازيل)	16 110 000	2.0%
4	مكسيكو (المكسيك)	15 525 000	0.7%

(a) لنفترض استمرار هذه المعدلات للنمو، اكتب معادلة تمثّل النمو المستقبلي لعدد السكان في كل مدينة.

(b) استخدم معادلاتك كي تتوقع عدد سكان كل مدينة في سنة 2004. هل تغير الترتيب؟

في التمرينين (8–7)، مثّل كل دالة بيانيًّا. بيّن ما إذا كانت الدالة تمثل نموًّا أسيًّا أو تضاؤلًا أسيًّا محددًا العامل.

(7) $y = 100(0.5)^x$ **(8)** $f(x) = 2^x$

(9) السؤال المفتوح: اكتب مسألة حياتية تمثّل نموًّا أسيًّا أو تضاؤلًا أسيًّا لكل دالة في التمرينين (7) و(8).

(10) الاقتصاد: افترض أنك تريد شراء سيارة ثمنها 4 500 دينار. من المتوقع أن تنخفض قيمتها بمعدل 20% سنويًّا، إذا أخذت قرضًا مدته أربع سنوات لشراء السيارة، فكم ستكون قيمة السيارة بعد أن تسدد القرض في أربع سنوات؟

في التمارين (14–11)، اكتب دالة أسيّة لتمثيل (نمذجة) كل موقف مما يلي. أوجد قيمة الدالة بعد خمس سنوات.

(11) تجمّع من الضفادع مؤلف من 250 ضفدعة، يتزايد بمعدل 22% سنويًّا.

(12) مجموعة طوابع ثمنها 35 دينارًا، يتزايد ثمنها بمعدل 7.5% سنويًّا.

(13) سيارة شحن صغيرة ثمنها 1 750 دينارًا تنخفض قيمتها بمعدل 11% سنويًّا.

(14) قطيع من الماعز عدده 115 يتناقص بمعدل 1.25% سنويًّا.

(15) لنفترض أنك تشتري سيارة جديدة، وتريد أن يكون لهذه السيارة أعلى قيمة بعد مرور خمس سنوات على شرائها، أي اختيار من الاختيارات الثلاثة الموضحة في الجدول التالي سوف تختار؟

السيارة	السعر الأساسي	قيمة الانخفاض المتوقع
1	4 275 دينارًا	10%
2	4 500 دينار	12%
3	4 850 دينارًا	15%

المجموعة B تمارين موضوعية

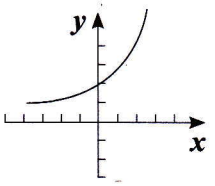
في التمارين (4–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الدالة $y = 3(2)^x$ تمثل تضاؤلًا أسيًّا. (a) (b)

(2) الدالة $y = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$ تمثل نموًا أسيًّا. (a) (b)

(3) عامل النمو للدالة $y = \frac{1}{3}(2)^{2x}$ هو 2 (a) (b)

(4) إذا كان بيان الدالة $y = b^x$ كما في الشكل المقابل فإن $b > 1$ (a) (b)



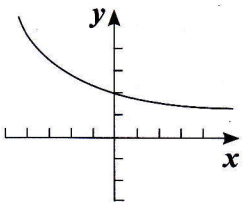
في التمارين (8–5)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) عامل النمو للدالة $y = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right)^x$ هو:

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{9}$ (c) 3 (d) 9

(6) ليكن بيان الدالة: $y = 2b^x$ كما في الشكل المقابل:

فإن b يمكن أن تساوي:

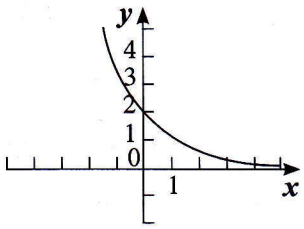


(a) -2 (b) 0 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 2

(7) الدالة الأسية $y = ab^x$ تنمذج التزايد السكاني، إذا كان معدل التزايد السكاني في مدينة ما هو 2.5% فإن عامل النمو يساوي:

(a) 0.025 (b) 1.25 (c) 1.025 (d) 3.5

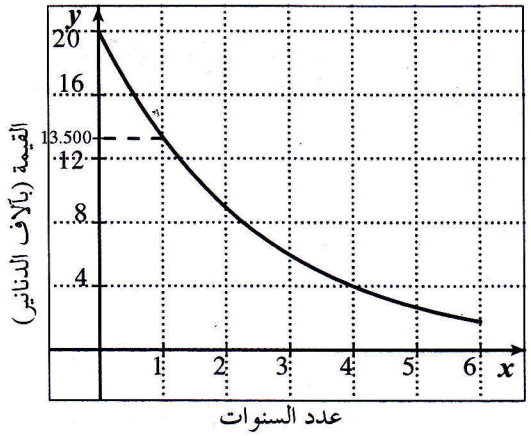
(8) أي من الدوال الأسية التالية يمكن أن يمثلها الرسم البياني المقابل:



(a) $y = \frac{1}{3}(2)^x$ (b) $y = 2\left(\frac{1}{3}\right)^x$ (c) $y = -3(2)^x$ (d) $y = -2(3)^x$

في التمارين (11–9)، لديك قائمتان اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين من القائمة (1) للحصول على إجابة صحيحة.

يبيّن التمثيل البياني الأسي المقابل الانخفاض في قيمة سيارة خلال 4 سنوات.



القائمة (1)	القائمة (2)
(9) مقدار التغير (بالآلاف)=	(a) −0.325
(10) نسبة التغير =	(b) 0.675
(11) عامل الانخفاض =	(c) 0.325
	(d) 6.5

تمرَّنْ
4–2

الدوال الأسية وتمثيلها بيانيًّا

Exponential Functions and their Graphs

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (4–1)، مثّل بيانيًّا كلًّا من الدوال الأسية التالية:

(1) $y = 4^x$ **(2)** $y = 6^x + 3$ **(3)** $y = 2^{-x}$ **(4)** $y = -3^{x+4}$

في التمارين (8–5)، مثّل بيانيًّا كلًّا من الدوال الأسية التالية مستخدمًا دالة المرجع:

(5) $y = (5)^x - 1$ **(6)** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$ **(7)** $y = (4)^{x-2} + 3$ **(8)** $y = -2(3)^{2x} + 1$

في التمارين (13–9)، استخدم آلتك الحاسبة لإيجاد ناتج كل مقدار مقرّبًا الناتج إلى أربعة أرقام عشرية.

(9) e^3 **(10)** $5e^6$ **(11)** $\left(\frac{5}{4}\right)e^{\frac{1}{2}}$

(12) $\frac{4}{e^6}$ **(13)** e^e

(14) أوجد قيمة a التي يصبح عندها الرسم البياني للدالة: $y = ab^x$ خطًّا أفقيًّا.

(15) **(a)** **الكيمياء:** تعطي العلاقة: $A = Pe^{-0.0001t}$ الكمية المتبقية «A» بالميكروجرام من مادة إشعاعية معينة بعد «t» سنة من التضاؤل؛ «P» هي الكمية الأولية للمادة المشعة. استخدم العلاقة لإكمال الجدول التالي:

الكمية الأولية من المادة (P)	السنوات (t)	الكمية المتبقية من المادة (A)
10 000	5	
7 500	5	
6 000	5	
5 000	5	
2 500	5	
2 000	5	

(b) قارن بين قيم كل من P , A. ماذا تلاحظ؟

(16) **علم المحيطات:** كلما غصنا في أعماق المحيط، قلت شدة أشعة الشمس. إذا كانت شدة أشعة الشمس على سطح المحيط هي y، فإن النسبة المئوية من y التي تصل إلى عمق x m تعطى بالعلاقة: $y = 20 \times (0.92)^x$

(يعد هذا النموذج مناسبًا للأعماق من 6 m إلى 180 m تحت مستوى سطح البحر).

(a) أوجد النسبة المئوية لأشعة الشمس الموجودة على عمق 15 m تحت مستوى سطح البحر.

(b) إذا كان أقصى عمق مسجل لرياضة الغطس هو 107 m تحت مستوى سطح البحر، فأوجد النسبة المئوية لأشعة الشمس عند هذا العمق.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة، و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) جميع الدوال الأسية على الصورة: $y = ab^x \quad a \neq 0 \ , \ b > 0, \ b \neq 1$ متقاطعة. (a) (b)

(2) بيان الدالة $y = -2^x$ هو انعكاس في محور السينات لبيان الدالة $y = 2^x$ (a) (b)

(3) بيان الدالة $y = -(3)^x$ هو انعكاس في محور الصادات لبيان الدالة $y = -(3)^{-x}$ (a) (b)

(4) بيان الدالة $y = 3(5)^{x-2}$ هو انسحاب لبيان الدالة $y = 3(5)^x$ (a) (b)
بمقدار وحدتين جهة اليمين.

(5) بيان الدالة $y = 3(2)^x$ يقطع جزءًا من محور الصادات قدره 3 وحدات. (a) (b)

في البنود (12–6)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) لتكن $y = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} + 5$ فإن دالة المرجع لها يمكن أن تكون:

(a) $y = 3(2)^x$ (b) $y = 3(2)^{-x}$ (c) $y = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$ (d) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

(7) باستخدام بيان الدالة $y = \frac{1}{3}(4)^x$ كدالة مرجع يمكن رسم بيان الدالة:

(a) $y = 3(4)^x$ (b) $y = 3(4)^{-x}$ (c) $y = \frac{1}{3}(2)^{2x} + 1$ (d) $y = \frac{1}{3}(2)^{3x}$

(8) قيمة x التي تجعل بيان الدالة $y = 8\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + 3$ خطًّا أفقيًّا هي:

(a) -3 (b) -2 (c) -8 (d) 0

(9) بيان الدالة: $f(x) = 3(5)^x - 1$ هو انعكاس في محور الصادات لبيان الدالة: $g(x) =$

(a) $3(5)^x + 1$ (b) $3(5)^{-x} - 1$ (c) $-3(5)^x + 1$ (d) $3(5)^{-x} + 1$

(10) يمكن رسم بيان الدالة $y = \frac{1}{2}(5)^{x+2} - 3$ باستخدام بيان الدالة $y = \frac{1}{2}(5)^x$ بانسحاب:

(a) وحدتين جهة اليسار و3 وحدات لأسفل (b) وحدتين جهة اليمين و3 وحدات لأسفل

(c) 3 وحدات جهة اليمين ووحدتين لأعلى (d) وحدتين جهة اليمين و3 وحدات لأعلى

(11) معادلة الدالة الأسية التي على الصورة $y = a(b)^x$ حيث الأساس يساوي 0.6 ويمر رسمها البياني بالنقطة $(2 \ , \ 1.8)$ هي:

(a) $y = 1.8(2)^x$ (b) $y = 0.2(1.8)^x$ (c) $y = 2(0.6)^x$ (d) $y = 5(0.6)^x$

(12) أي من الدوال التالية تنمذج بيانات الجدول المقابل:

x	0	1	2	3
y	4	5.2	6.76	8.79

(a) $y = x^2 + \frac{1}{2}x + 4$ (b) $y = 4(1.3)^x$ (c) $y = 1.6(4)^x$ (d) $y = 4(0.6)^x + 2.8$

تمرَّنْ
4–3

الدوال اللوغاريتمية وتمثيلها بيانيًّا
Logarithmic Functions and their Graphs

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (8–1)، اكتب كل معادلة مما يلي في الصورة اللوغاريتمية:

(1) $4^2 = 16$ **(2)** $7^3 = 343$ **(3)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$ **(4)** $8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$

(5) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ **(6)** $10^{-2} = 0.01$ **(7)** $6^{\frac{3}{2}} = 6\sqrt{6}$ **(8)** $5^{-3} = \frac{1}{125}$

في التمارين (14–9)، اكتب كل معادلة مما يلي في الصورة الأسية:

(9) $\log_2 128 = 7$ **(10)** $\log_4 64 = 3$ **(11)** $\log 100 = 2$

(12) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ **(13)** $\log 0.0001 = -4$ **(14)** $\log_3 \frac{1}{243} = -5$

في التمارين (20–15)، أوجد قيمة كل لوغاريتم مما يلي:

(15) $\log_2 4$ **(16)** $\log_2 8$ **(17)** $\log_8 8$

(18) $\log_2 2^5$ **(19)** $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$ **(20)** $\log 0.01$

في التمارين (23–21)، أوجد مجال التعريف لكل دالة مما يلي:

(21) $y = \log_6 (x+1)$ **(22)** $y = \log_8 (x) - 2$ **(23)** $y = \log (x^2 - 4)$

(24) يساوي تركيز أيون الهيدروجين $[H^+]$ في الليم (نوع من الليمون) حوالى 1.26×10^{-2}
أوجد رقمه الهيدروجيني (pH) علمًا أن $pH = -\log[H^+]$.

(25) يساوي الرقم الهيدروجيني لعصير خل التفاح (Cider Vinegar) حوالى 3.1
أوجد تركيز أيونه الهيدروجيني $[H^+]$.

(26) الزلازل: كانت قوة زلزال ألاسكا عام 1964، 9.2 بمقياس ريختر، وكانت قوته أكبر من قوة زلزال سان فرانسيسكو عام 1906 بحوالى 150 مرة. قدّر قوة زلزال عام 1906 إذا ما قيس بمقياس ريختر علمًا بأن الطاقة المنطلقة من الزلزال تساوي $E \times (30)^x$ ، x هي درجة قوة الزلزال بمقياس ريختر.

في التمرينين (28–27)، مثّل بيانيًّا كل دالة لوغاريتمية معينًا المجال والمدى.

(27) $y = \log_3(x)$

(28) $y = \log_3(x-1)+2$

(29) اشرح لماذا b لا تستطيع أن تأخذ قيمة 1 في الدالة: $y = \log_b(x)$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت $y = 3^x$ فإن $x = \log y$ (a) (b)

(2) إذا كانت $\log_2(-y) = x$ فإن $y = 2^{-x}$ (a) (b)

(3) إذا كانت $4^x = 5$ فإن $2x = \log_2 5$. (a) (b)

(4) مجال الدالة $f(x) = \log(x^2)$ هو $\mathbb{R}$ (a) (b)

(5) بيان الدالة $y = \log_3 x$ هو انعكاس في المستقيم $y - x = 0$ لبيان الدالة $y = 3^x$ (a) (b)

في التمارين (11–6)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) معكوس الدالة $y = \log_2 x$ هو:

(a) $y = \log_x 2$ (b) $y = x^2$ (c) $y = 2^x$ (d) $y = \log 2^x$

(7) مجال الدالة $y = \log|x-1|$ هو:

(a) $\mathbb{R}$ (b) $\mathbb{R}^+$ (c) $(1,\infty)$ (d) $\mathbb{R}/\{1\}$

(8) مجال الدالة $y = \log(x^2+1)$ هو:

(a) $\mathbb{R}$ (b) $\mathbb{R}^+$ (c) $[1,\infty)$ (d) $(1,\infty)$

(9) باستخدام دالة المرجع $y = \log_5 x$ يمكن تمثيل الدالة:

(a) $y = \log(x-1)-1$ (b) $y = \log_5(5x)$

(c) $y = \log_5(x-1)-1$ (d) $y = \log_5(x^2+1)$

(10) يمكن رسم بيان الدالة $y = \log(x+1)-2$ معتبرًا دالة المرجع $y = \log x$ بانسحاب:

(a) وحدة إلى اليسار ووحدتين لأسفل (b) وحدة إلى اليمين ووحدتين لأسفل

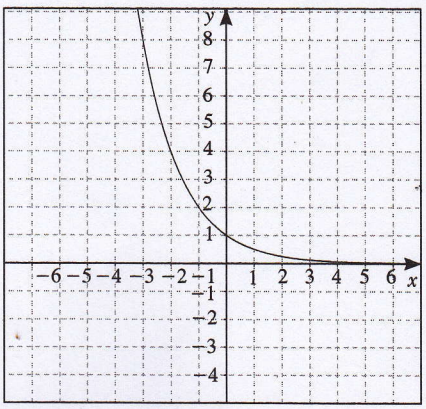
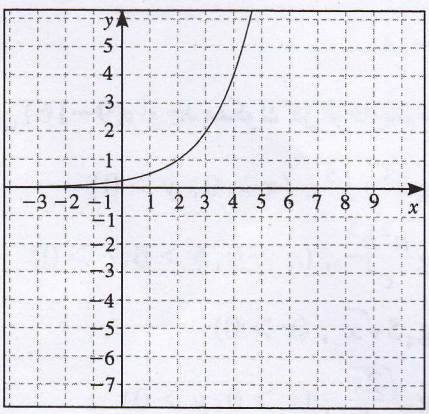
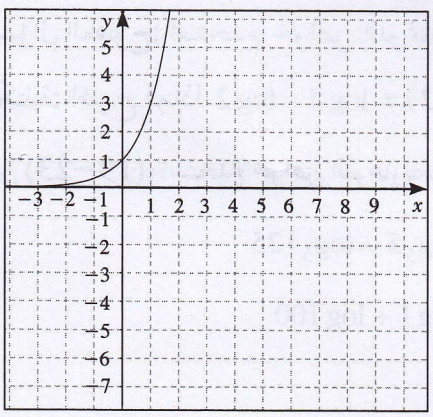
(c) وحدتين إلى اليمين ووحدة لأعلى (d) وحدتين إلى اليسار ووحدة لأعلى

(11) يعطى الرقم الهيدروجيني (pH) بالعلاقة: $\text{pH} = -\log[H^+]$ إذا كان تركيز أيون الهيدروجيني $[H^+]$ في السبانخ هو 4×10^{-6} فإن الرقم الهيدروجيني للسبانخ هو:

(a) -6.6 (b) 6.6 (c) -5.4 (d) 5.4

في البنود (15–12)، لديك قائمتان اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.

القائمة (1)	القائمة (2)
معكوس الدالة:	(a) $y = 4^x$
(12) $y = -\log_{\frac{1}{4}} x$ هو	(b) $y = \left(\frac{-1}{4}\right)^{-x}$
(13) $y = -\log_4 x$ هو	(c) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$
	(d) $y = (-4)^{-x}$

القائمة (1)	القائمة (2)
بيان معكوس كل دالة مما يلي هو:	(a) 
(14) $y = \log_3(x)$	(b) 
(15) $y = \log_2(4x)$	(c) 

تمرَّنْ
4–4

خواص اللوغاريتمات
Properties of Logarithms

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (8–1)، اكتب كل مقدار لوغاريتمي في صورة لوغاريتم واحد.

(1) $\log 7 + \log 2$

(2) $\frac{1}{2}\log_4 y - \log_4 x \ , \ (x > 0 \ , \ y > 0)$

(3) $4\log M - \log N \ , \ (M > 0 \ , \ N > 0)$

(4) $\log x + \log y + \log z \ , \ (x > 0, y > 0, z > 0)$

(5) $\log \frac{a}{4} + \log \frac{b}{3} - \log \frac{c}{2} \ , \ (a > 0, \ b > 0, \ c > 0)$

(6) $\log a + 3\log b \ , \ (a > 0, b > 0)$

(7) $\frac{1}{2}(\log_7 x + \log_7 y) - 3\log_7 a \ , \ (x > 0, y > 0, a > 0)$

(8) $7\log r - \log x + \log n \ , \ (r > 0, x > 0, n > 0)$

في التمارين (16–9)، أوجد مفكوك كل لوغاريتم مما يلي:

(9) $\log_5 \frac{y}{x} \ , \ (x > 0, y > 0)$

(10) $\log x^3 + y^5 \ , \ (x > 0, \ y > 0)$

(11) $\log_3 7(2x-3)^2 \ , \ \left(x > \frac{3}{2}\right)$

(12) $\log \frac{a^2 b^3}{c^4} \ , \ (a > 0, b > 0, c > 0)$

(13) $\log 3M^4 N^{-2} \ , \ (M > 0, N > 0)$

(14) $\log_4 5\sqrt{x} \ , \ (x > 0)$

(15) $\log\big(2(x+1)\big)^3 \ , \ (x > -1)$

(16) $\log\sqrt{\frac{2x}{y}} \ , \ (x > 0, y > 0)$

(17) السؤال المفتوح: استخدم خواص اللوغاريتمات لإعادة كتابة $\log 64$ بأربع طرائق مختلفة.

(18) الكتابة: اشرح لماذا $\log(5 \times 2) \neq \log 5 \times \log 2$

في التمارين (23–19)، استخدم خواص اللوغاريتمات لإيجاد قيمة كل مقدار.

(19) $\log_2 4 - \log_2 16$

(20) $\log_5 5 - \log_5 125$

(21) $3\log_2 2 - \log_2 4$

(22) $\log 1 + \log 100$

(23) $\log 5 + \log 8 - 2\log 2$

في التمارين (28–24)، لنفترض أن $\log 6 \simeq 0.7782$, $\log 5 \simeq 0.6990$, $\log 4 \simeq 0.6021$. استخدم خواص اللوغاريتمات لإيجاد قيمة كل مقدار. دون استخدام آلتك الحاسبة قرّب إجاباتك إلى أقرب جزء من ألف.

(24) $\log 20$ **(25)** $\log 16$ **(26)** $\log 1.25$

(27) $\log 125$ **(28)** $\log \frac{1}{36}$

(29) العلوم: يستطيع الإنسان سماع مدى واسع من شدة الصوت، وهذا ما يوضحه الجدول التالي. شدة الصوت هي قياس كمية الطاقة الناتجة عن مصدر الصوت، ويعتمد مستوى شدة الصوت على شدة الصوت، وعلى المسافة بين مصدر الصوت والشخص الذي يسمعه. ويعرف مستوى شدة الصوت المقاس بالديسيبل (dB) بالمعادلة التالية: مستوى شدة الصوت $= 10 \log \frac{I}{I_0}$، حيث I شدة الصوت، I_0 شدة الصوت بالكاد مسموع.

أكمل الجدول التالي:

نوع الصوت	الشدة W/m^2	مستوى شدة الصوت (ديسيبل dB)
صوت عالٍ	1	120
صوت آلة ثقب	10^{-2}	
صوت شارع مزدحم	10^{-5}	
صوت محادثة	10^{-6}	
صوت همس	10^{-10}	
حفيف أوراق الأشجار	10^{-11}	
صوت بالكاد مسموع	10^{-12}	0

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (6–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\log(x-1)^2 = 2\log|x-1|$ (a) (b)

(2) $\log \frac{1}{x^2} = -2\log x, x > 0$ (a) (b)

(3) $\log\left(\frac{\sqrt{m}}{n}\right) = \frac{1}{2}\log m - \log n,\ m > 0, n > 0$ (a) (b)

(4) $\log_2 16 - \log_2 2 = \log_2 8$ (a) (b)

(5) $\log(x-y) = \frac{\log x}{\log y}$, $x, y \in \mathbb{R}^+/\{1\}$ (a) (b)

(6) $\log_6 4 + \log_6 9 = 2$ (a) (b)

في التمارين (13–7)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(7) المقدار $2\log_4 8 + \log_5 125$ يساوي:

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 15

(8) إذا كان $\log 5 = y$, $\log 3 = x$ فإن $\log 45$ تساوي:

(a) $x+y$ (b) $2x+y$ (c) $2y+x$ (d) x^2y

(9) $\log_2 x + \log_2 2x + \log\frac{1}{x^2}, x > 0$ يساوي:

(a) 1 (b) 2 (c) x (d) $2x$

(10) إذا كان $\log 3 = n, \log 2 = m$ فإن المقدار $m+n-1$ يساوي:

(a) $\log 0.06$ (b) $\log 0.6$ (c) $\log 6$ (d) $\log 60$

(11) عندما $n = 2$, $m = 3$ فإن المقدار الأكبر قيمة فيما يلي هو:

(a) $\log n^2 - \log m^3$ (b) $\log m^2 - \log n^2$ (c) $3\log n - 2\log m$ (d) $2\log m - 3\log n$

(12) مفكوك المقدار $\log\left(\sqrt[3]{\frac{8}{x^3}}\right)$ هو:

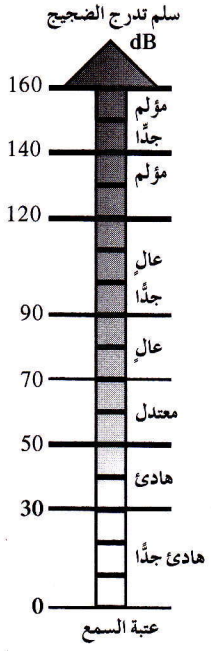
(a) $3\log\frac{8}{x^3}$ (b) $\frac{1}{3}(\log(8-x^3))$ (c) $\log 2 - \log x$ (d) $\log 2 - 3\log x$

(13) إذا كان مستوى شدة صوت صفارة إنذار (L) تساوي 140 dB والتي تقاس بالعلاقة: $L = 10\log\frac{I}{10^{-12}}$ فإن شدة صوتها I تساوي:

(a) 1 (b) 1000 (c) 10 (d) 100

في التمرينين (15–14)، لديك قائمتان اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.

استخدم العلاقة: $L = 10\log\frac{I}{10^{-12}}$ والشكل المقابل.



القائمة (1)	القائمة (2)
إذا كانت شدة صوت ما (I) هي:	(a) هادئة
(14) 10^{-5} فإن قوته تكون:	(b) مؤلمة
(15) 1.65×10^{-2} فإن قوته تكون:	(c) عالية
	(d) عالية جدًّا

تمرّنْ
4–5

المعادلات الأسية واللوغاريتيمية
Exponential and Logarithmic Equations

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (8–1)، حلّ كل معادلة مما يلي. اختبر صحة كل حل:

(1) $9^{2y} = 66$ **(2)** $12^{y-2} = 20$ **(3)** $5 - 3^{x} = -40$ **(4)** $25^{2x+1} = 144$

(5) $3x^{\frac{3}{2}} = 27, x > 0$ **(6)** $2 + 8r^{\frac{5}{3}} = 26$ **(7)** $\sqrt[7]{n^2} - 12 = 5$ **(8)** $-3 + 2\sqrt[4]{x^3} = 33$

في التمارين (13–9)، استخدم قاعدة تغيير الأساس لإيجاد قيمة كل لوغاريتم مما يلي:

(9) $\log_2 7$ **(10)** $\log_3 33$ **(11)** $\log_{21} 0.085$

(12) $\log_5 510$ **(13)** $\log_4 1.116$

(14) باعتبار المعادلة: $2^{\frac{x}{3}} = 80$

(a) حلّ المعادلة بأخذ اللوغاريتم بأساس 2 لكل طرف.

(b) حلّ المعادلة بأخذ اللوغاريتم بأساس 10 لكل طرف.

(c) قارن بين إجاباتك في الفقرتين (b) ,(a). أي طريقة تفضلها؟ ولماذا؟

في التمارين (20–15)، حل كل معادلة لوغاريتمية مما يلي:

(15) $\log 6x - 3 = -4$ **(16)** $\log x - \log 3 = 8$

(17) $\log_2(3x - 5) = 1$ **(18)** $\log(2x) + \log(x - 3) = \log 8$

(19) $\log(3x) - \log(x + 20) = -\log 2$ **(20)** $\log_{(2x-1)} 49 = 2$

(21) $\log_{(5x-3)} 64 = \log 4$

(22) الأحياء البرية: لنفرض أن فصيلة معينة من الحيوانات البرية المعرضة لخطر الانقراض تتناقص أعدادها بمعدل 3.5% سنويًّا وقد أحصيت 80 حيوانًا من هذه الفصيلة في موطنها الذي تقوم بدراسته.

(a) توقع عدد حيوانات هذه الفصيلة الذي سيبقى بعد 10 سنوات.

(b) بعد كم سنة سوف يتناقص عدد حيوانات هذه الفصيلة لأول مرة إلى أقل من 15 حيوانًا، بالمعدل نفسه؟

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حل المعادلة $9^x = 3$ هو $x = \frac{1}{2}$ (a) (b)

(2) حل المعادلة $2\log x = -1$ هو $x = 10^{-0.5}$ (a) (b)

(3) إذا كان $\log(x+6) = 0$ فإن $x = -5$ (a) (b)

(4) حل المعادلة $14^{9x} = 146$ هو $x = \frac{\log 146}{\log 14}$ (a) (b)

(5) حل المعادلة $3\log x - \log 6 + \log 2.4 = 9$ هو 5×10^4 (a) (b)

في التمارين (14–6)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا كان $(1.5)^x = 356$ فإنّ:

(a) $x \approx 15$ (b) $x \approx 14.5$ (c) $x \approx 15.3$ (d) $x \approx 16.3$

(7) حل المعادلة $10^x + 8 = 1008$ هو:

(a) $x = 6$ (b) $x \approx 3.5$ (c) $x = 3$ (d) $x = 2$

(8) إذا كان $2^{x^2} = 512$ فإنّ:

(a) $x = 3$ (b) $x = 9$ (c) $x = 3\ ,\ x = -3$ (d) $x = -9$

(9) إذا كان $2\log x = -2$ فإنّ:

(a) $x = 10^{-1}$ (b) $x = 10^{0.5}$ (c) $x = 10^{-2}$ (d) $x = 10^{-0.5}$

(10) مجموعة حل المعادلة: $\log(x^2+2) = \log(5x-4)$ هي:

(a) $\{2\}$ (b) $\{3\}$ (c) $\{2,3\}$ (d) $\{-2,-3\}$

(11) مجموعة حل المعادلة: $\log_2(x^2-x) = 1$ هي:

(a) $\{-1\}$ (b) $\{1,2\}$ (c) $\{-1,2\}$ (d) $\{-1,-2\}$

(12) حل المعادلة $\log(x+21) + \log x = 2$ هو:

(a) 4 (b) $-25\ ,\ 4$ (c) 25 (d) $4\ ,\ 25$

(13) يكون $x = 3$ حلًا للمعادلة:

(a) $\log_3(6-x^2) = 1$ (b) $\log_x 9 = \frac{2}{3}$ (c) $\log_3(x^2+1) = 2$ (d) $\log_3 x^3 + \log_3 x = 4$

(14) حل المعادلة $\log_x 81 - \log_x 9 = 2$ هو:

(a) -3 (b) $\frac{1}{3}$ (c) 3 (d) 9

تمرّنْ
4–6

اللوغاريتم الطبيعي
Natural Logarithm

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (8–1)، اكتب كل تعبير مما يلي كلوغاريتم طبيعي واحد:

(1) $3\ln 5$

(2) $\ln 24 - \ln 6$

(3) $\ln 3 - 5\ln 3$

(4) $5\ln m + 3\ln n \ , \ (m > 0 \ , \ n > 0)$

(5) $2\ln 8 - 3\ln 4$

(6) 7

(7) $\ln a - 2\ln b + \frac{1}{2}\ln c \ , \ (a > 0, \ b > 0, \ c > 0)$

(8) $\frac{1}{3}(\ln x + \ln y) - 4\ln c, (x > 0, \ y > 0, \ c > 0)$

(9) أوجد قيمة y في: $y = 15 + 3\ln 7.2$

(10) أوجد قيمة y في: $y = 0.05 - 10\ln x, x = 0.09$

في التمرينين (12–11)، استخدم العلاقة: $V = -0.0098t + C\ lnR$، حيث R نسبة كتلة الصاروخ، t زمن اشتعاله، C سرعة انطلاق البخار، V سرعة الصاروخ.

(11) أوجد أقصى سرعة لصاروخ نسبة كتلته 20 وسرعة انطلاق بخاره 2.7 km/s وزمن اشتعاله 30 s

(12) أوجد نسبة كتلة صاروخ سرعة انطلاق بخاره 3.15 km/s وزمن اشتعاله 50 s وله أقصى سرعة 6.9 km

في التمارين (18–13)، استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل كل معادلة مما يلي:

(13) $3e^{2x} = 12$

(14) $e^{x+1} = 30$

(15) $e^{\frac{x}{9}} - 8 = 6$

(16) $4e^{x+2} = 32$

(17) $2e^{3x-2} + 4 = 16$

(18) $2e^{x-2} = e^{x} + 7$

في التمارين (28–19)، حلّ كل معادلة مما يلي:

(19) $\ln 3x = 6$

(20) $\ln(4x - 1) = 36$

(21) $\ln(x-1)^2 = 3$

(22) $\ln\left(\frac{x-1}{2}\right) = 4$

(23) $2\ln 2x^2 = 1$

(24) $\ln x - 3\ln 3 = 3$

(25) $\frac{1}{2}\ln x + \ln 2 - \ln 3 = 3$

(26) $1.1 + \ln x^2 = 6$

(27) $\ln(2x - 1) = 0$

(28) $\ln(5x-3)^{\frac{1}{3}} = 2$

(29) التفكير الناقد: هل يمكن كتابة $\ln 5 + \log_2 10$ على شكل لوغاريتم واحد؟ اشرح.

(30) تعطي العلاقة: $b = 40\ e^{\frac{-n}{300}}$ القوة الخارجة (b) بالواط (W) لقمر صناعي بعد n يوم، فما مدة تشغيل القمر الصناعي إذا كانت القوة الخارجة 15 W؟

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\log_4(ln e^4) = 1$ (a) (b)

(2) $4ln8 + ln10 = 4ln80$ (a) (b)

(3) $lne^2 = 2$ (a) (b)

(4) حل المعادلة: $lnx = -2$ هو e^2 (a) (b)

(5) حل المعادلة: $e^{\frac{x}{5}} + 4 = 7$ هو $5ln3$ (a) (b)

في التمارين (14–6)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) $3ln4 - 5ln2$ على شكل لوغاريتم واحد تكتب:

(a) $ln(-18)$ (b) $ln\left(\frac{6}{5}\right)$ (c) $ln2$ (d) $ln32$

(7) e^{ln10} تساوي:

(a) 10 (b) e^{10} (c) 0 (d) $\frac{1}{10}$

(8) حل المعادلة $ln(2m+3) = 8$ هو:

(a) $e^8 - 3$ (b) $\frac{e^8}{2} - 3$ (c) $\frac{e^8 - 3}{2}$ (d) $e^4 - 3$

(9) حل المعادلة $ln4r^2 = 3$ هو:

(a) $\frac{e^{\frac{3}{2}}}{2}$ (b) $\frac{e^{\frac{3}{2}}}{2}, \frac{-e^{\frac{3}{2}}}{2}$ (c) $\frac{e^{-\frac{3}{2}}}{2}$ (d) $e^{\frac{3}{2}}, -e^{\frac{3}{2}}$

(10) حل المعادلة $e^{2x} = 10$ هو:

(a) $x = \frac{ln10}{2}$ (b) $ln5$ (c) $\frac{5}{e}$ (d) $2ln10$

(11) e^2 حل للمعادلة:

(a) $lnx = 2$ (b) $lnx^2 = 2$ (c) $lnx^2 = 4$ (d) $lnx = 4$

(12) حل المعادلة $e^{x+1} = 13$ هو:

(a) $x = ln13 + 1$ (b) $x = ln13 - 1$ (c) $x = ln13$ (d) $x = ln12$

(13) حل المعادلة $ln(x-2)^2 = 6$ هو:

(a) $2 + e^3$ (b) $2 - e^3$ (c) $2 \pm e^3$ (d) $2 \pm e^6$

(14) حل المعادلة $e^{\frac{x}{2}+1} + 3 = 8$ هو:

(a) $x = 2ln5 - 1$ (b) $x = 2ln5 - 2$ (c) $x = 2ln4$ (d) $x = \frac{1}{2}(ln5 - 1)$

اختبار الوحدة الرابعة

في التمارين (4–1)، ارسم كلًّا من الدوال التالية:

(1) $y = -3(0.25)^x$ **(2)** $f(x) = \frac{1}{2}(6)^{-x}$ **(3)** $y = 0.1(10)^{x-2}$ **(4)** $f(x) = (2)^{x+1} + 3$

(5) الكتابة: وضّح كيف يمكنك تحديد ما إذا كانت الدالة الأسية تمثّل نموًّا أسيًّا أم تضاؤلًا أسيًّا. اعرض مثالًا لكل منها.

في التمارين (8–6)، اكتب معادلة تصف الدالة الأسية التي على الصورة: $y = ab^x$، بمعلومية الأساس المعطى والتي يمر رسمها البياني بالنقطة المعطاة.

(6) الأساس 3، النقطة (2, 3)

(7) الأساس 4، النقطة (−1, 1)

(8) الأساس 2، النقطة (0, 3)

(9) علم الزلازل: كم مرة يكون زلزال قوته 5.2 بمقياس ريختر أقوى من زلزال قوته 3 علمًا بأن الطاقة المنطلقة تساوي $E \times 30^x$، x هي درجة قوة الزلزال بمقياس ريختر.

(10) ارسم بيان الدالة $y = \log_8 x$ ثم استخدمها كدالة مرجع لرسم بيان كل من الدوال اللوغاريتمية التالية:

(a) $y = \log_8(x+2)$ **(b)** $y = \log_8 x - 1$ **(c)** $y = \log_8(x+2) - 1$

في التمارين (14–11)، أوجد مفكوك كل من اللوغاريتمات التالية:

(11) $\log_4 r^2 n$, $(r > 0 , n > 0)$ **(12)** $\log_2(x+1)^2$, $(x > -1)$

(13) $\log_7 \frac{a}{b}$, $(a > 0 , b > 0)$ **(14)** $\log 3x^3y^2$, $(x > 0 , y > 0)$

في التمارين (18–15)، استخدم خواص اللوغاريتمات لإيجاد ناتج كل من المقادير التالية:

(15) $\log_3 27 - \log_3 9$ **(16)** $2\log_2 64 - \log_2 2$

(17) $-\log_4 \frac{1}{16} - \log_4 64$ **(18)** $2\log 5 + \log 40$

(19) سؤال مفتوح: اكتب مقدارين لوغاريتميين. أي منهما له القيمة الأكبر؟ اشرح.

في التمارين (30–20)، حل كلًّا من المعادلات التالية:

(20) $x^{\frac{3}{4}} = 81$ **(21)** $3k^{\frac{3}{2}} = 24$ **(22)** $\log 4x = 3$

(23) $2\log x = -4$ **(24)** $\log 2x + \log x = 1$ **(25)** $\log x - \log(x-1) = 1$

(26) $\log_x(3x+4)=2$ **(27)** $ln(x-2)+ln\ x=1$ **(28)** $ln(x+1)+ln(x-1)=4$

(29) $ln\,x+ln(2x-1)=7$ **(30)** $3\,ln\,x-ln\,2=4$

(31) لنفترض أن ثمن آلة تستخدم في صناعة سلعة ما لها عامل تضاؤل سنوي قيمته 0.75. إذا بلغ ثمن الآلة 10 000 دينار بعد 5 سنوات من الاستخدام، فما قيمتها الأساسية؟

(32) **الدراسات الاجتماعية:** عام 1991 كان عدد سكان كاراتشي في باكستان حوالى 8 ملايين نسمة، وكان عامل النمو السنوي في هذا الوقت 1.039.

(a) ما عدد السكان المتوقع في عام 2010؟

(b) ما معدل الزيادة السنوية المتوقع؟

(c) متى يصل عدد السكان إلى 10 ملايين نسمة؟

(33) **سكان العالم:** بلغ عدد سكان العالم في عام 1994 حوالى 5.63 بلايين نسمة، ويقال إنه ينمو بمعدل 2% سنويًا.

(a) اكتب معادلة أسية لوصف هذا النمو.

(b) صف نمو عدد السكان كل 35 سنة.

(c) صف نمو عدد السكان في نصف المدة الزمنية المحددة في الجزء (b).

تمارين إثرائية

(1) أوجد مجموعة حل المعادلة: $(e^x - 1)e^x = 3e^x - 3$

(2) أوجد مجموعة حل المعادلة: $3(e^x)^2 - e^x - 4 = 0$

(3) أوجد مجموعة حل المعادلة: $ln\sqrt{3x-1} + ln\sqrt{x-1} = ln\sqrt{x-2}$

(4) هل صحيح أن: $a^{ln\,b} = b^{ln\,a},\ a > 0,\ b > 0$ ؟

(5) أثبت أن: $\frac{4e^{2x}}{e^{2x}+3} = \frac{4}{1+3e^{-2x}}$

(6) حلّ المعادلة: $e^x + 2e^{-x} = 3$

(7) أوجد مجموعة حل المعادلة: $2(lnx)^2 - 5\,lnx - 3 = 0$

(8) **الصناعات:** لنفرض أنك تعمل في مصنع للمكانس الكهربائية، وقد ساهمت في صنع تصميم مستخدمًا مكونات جديدة تعمل على تخفيض شدة صوت طراز معين من $10^{-4}\,w/m^2$ إلى $6.31 \times 10^{-6}\,w/m^2$، ما النسبة المئوية لانخفاض الصوت الذي حققه استخدام هذه المكونات الجديدة؟

(استخدم $I_0 = 10^{-12}\,w/m^2$).

(9) إذا كان كل من الدالتين: $y = \log_b x, y = b^x$، معكوس للأخرى، استخدم الخاصية $\log_b b^x = x$ وبرهان الخطوة الواحدة لخاصية ناتج الضرب في اللوغاريتمات، لمساعدتك على برهنة كل من خاصية القسمة وخاصية القوى.

(10) باعتبار المعادلة: $a^x = b$

(a) حلّ المعادلة باستخدام اللوغاريتم للأساس 10

(b) حلّ المعادلة باستخدام اللوغاريتم للأساس a

(c) استخدم نتائجك في الفقرتين (a), (b) لتحقق قاعدة تغيير الأساس.

(11) **الهندسة:** تأخذ بعض قطرات المطر شكلًا كرويًّا. لنفرض أن نصف قطر قطرة مطر متساقطة يتناقص بمقدار 0.02 mm نتيجة التبخر، إذا كان حجم قطرة المطر الآن $7\,mm^3$، فما طول نصف القطر الأصلي لقطرة المطر؟

(12) تصف الدالة: $f(x) = 1.31\,e^{0.548x}$، التزايد الأسي لعدد مستخدمي الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت) بالمليون من عام 1990 إلى عام 1995. لنفرض أن x تمثّل الزمن بالسنوات منذ عام 1990.

(a) ما أول عام كان عدد مستخدمي الإنترنت فيه 13 مليون مستخدم؟

(b) ما المدة المستغرقة لتضاعف عدد مستخدمي الإنترنت منذ عام 1990؟

(c) حلّ المعادلة: $f(x) = 1.31\,e^{0.548x}$ في x

(d) **الكتابة:** اشرح كيف يمكنك استخدام معادلتك من الفقرة (c) لتتحقق من إجاباتك عن الفقرتين (a), (b). ما الناتج الذي حصلت عليه؟

تمارين إثرائية

(1) أوجد مجموعة حل المعادلة: $(e^x - 1)e^x = 3e^x - 3$

(2) أوجد مجموعة حل المعادلة: $3(e^x)^2 - e^x - 4 = 0$

(3) أوجد مجموعة حل المعادلة: $ln\sqrt{3x-1} + ln\sqrt{x-1} = ln\sqrt{x-2}$

(4) هل صحيح أن: $a^{ln\,b} = b^{ln\,a},\ a > 0,\ b > 0$؟

(5) أثبت أن: $\frac{4e^{2x}}{e^{2x}+3} = \frac{4}{1+3e^{-2x}}$

(6) حلّ المعادلة: $e^x + 2e^{-x} = 3$

(7) أوجد مجموعة حل المعادلة: $2(lnx)^2 - 5\,lnx - 3 = 0$

(8) **الصناعات:** لنفرض أنك تعمل في مصنع للمكانس الكهربائية، وقد ساهمت في صنع تصميم مستخدمًا مكونات جديدة تعمل على تخفيض شدة صوت طراز معين من $10^{-4}\,w/m^2$ إلى $6.31 \times 10^{-6}\,w/m^2$، ما النسبة المئوية لانخفاض الصوت الذي حققه استخدام هذه المكونات الجديدة؟

(استخدم $I_0 = 10^{-12}\,w/m^2$).

(9) إذا كان كل من الدالتين: $y = b^x, y = \log_b x$، معكوس للأخرى، استخدم الخاصية $\log_b b^x = x$ وبرهان الخطوة الواحدة لخاصية ناتج الضرب في اللوغاريتمات، لمساعدتك على برهنة كل من خاصية القسمة وخاصية القوى.

(10) باعتبار المعادلة: $a^x = b$

(a) حلّ المعادلة باستخدام اللوغاريتم للأساس 10

(b) حلّ المعادلة باستخدام اللوغاريتم للأساس a

(c) استخدم نتائجك في الفقرتين (a), (b) لتحقق قاعدة تغيير الأساس.

(11) **الهندسة:** تأخذ بعض قطرات المطر شكلًا كرويًّا. لنفرض أن نصف قطر قطرة مطر متساقطة يتناقص بمقدار 0.02 mm نتيجة التبخر، إذا كان حجم قطرة المطر الآن $7\,mm^3$، فما طول نصف القطر الأصلي لقطرة المطر؟

(12) تصف الدالة: $f(x) = 1.31\,e^{0.548x}$، التزايد الأسي لعدد مستخدمي الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت) بالمليون من عام 1990 إلى عام 1995. لنفرض أن x تمثّل الزمن بالسنوات منذ عام 1990.

(a) ما أول عام كان عدد مستخدمي الإنترنت فيه 13 مليون مستخدم؟

(b) ما المدة المستغرقة لتضاعف عدد مستخدمي الإنترنت منذ عام 1990؟

(c) حلّ المعادلة: $f(x) = 1.31\,e^{0.548x}$ في x

(d) **الكتابة:** اشرح كيف يمكنك استخدام معادلتك من الفقرة (c) لتتحقق من إجاباتك عن الفقرتين (a), (b). ما الناتج الذي حصلت عليه؟

(10) لنأخذ في المستوى الإحداثي النقاط: $A(3,2), B(1,5), C(7,4)$

(a) أوجد إحداثيات النقطة D حيث: $< \overrightarrow{BD} > = -\frac{1}{2} < \overrightarrow{BA} >$

(b) أوجد إحداثيات النقطة E حيث: $< \overrightarrow{AE} > = \frac{3}{2} < \overrightarrow{AC} >$

(c) أثبت أن: $< \overrightarrow{BC} >$, $< \overrightarrow{DE} >$ لهما الاتجاه نفسه.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

لنأخذ في المستوى الإحداثي النقاط التالية: $A(2,1), B(-3,0), C(3,-4), D(x,y)$

(1) الزوج المرتب الذي يمثل متجه الموضع لـ $\overrightarrow{BA}$: هو $< -5,-1 >$ (a) (b)

(2) مركّبات $\overrightarrow{BC}$ هي $< 6,4 >$ (a) (b)

(3) المثلث ABC هو متطابق الضلعين. (a) (b)

(4) $m(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 90°$ (a) (b)

(5) إذا كان $< \overrightarrow{AB} > = < \overrightarrow{CD} >$ فإن: $x = -2, y = -5$ (a) (b)

في التمارين (10–6)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) في المستوى الإحداثي إذا كان $\vec{u} = < -2,2 >$

فإن قياس الزاوية التي يصنعها $\vec{u}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات يساوي:

(a) $45°$ (b) $-45°$ (c) $135°$ (d) $225°$

(7) لنأخذ في المستوى الإحداثي $< \frac{12}{13} , y >$. إذا كان $\vec{u}$ متجه وحدة فإن y يساوي:

(a) $\frac{1}{13}$ (b) $\frac{\sqrt{13}}{13}$ (c) $\frac{5}{13}$ (d) $\pm\frac{5}{13}$

(8) لتكن في المستوى الإحداثي النقاط: $A(1,3), B(3,2), C(0,-1), D(-4,1)$ فيكون:

(a) $< \overrightarrow{AB} > = < \overrightarrow{CD} >$ (b) $< \overrightarrow{AB} > = - < \overrightarrow{CD} >$

(c) $< \overrightarrow{CD} > = -2 < \overrightarrow{AB} >$ (d) $< \overrightarrow{AB} > = -2 < \overrightarrow{CD} >$

(9) لنأخذ في المستوى الإحداثي النقاط: $E(2,4), F(-1,-5), G(x,y)$ إذا كان: $< \overrightarrow{EF} > = < \overrightarrow{EG} >$ فإن (x, y) يساوي:

(a) $(-1,-5)$ (b) $(-5,-13)$ (c) $(5,13)$ (d) $(1,5)$

(10) لنأخذ في المستوى الإحداثي النقطتين: $P(-2,3), Q(x,y)$ والمتجه $\overrightarrow{OM} = < 4,-2 >$.

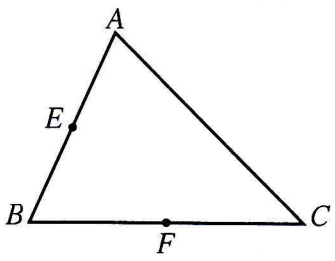
إذا كان $< \overrightarrow{OM} >$ متجه الموضع للمتجه $< \overrightarrow{PQ} >$ فإن (x, y) يساوي:

(a) $(6, -5)$ (b) $(2, 1)$ (c) $(-2, -1)$ (d) $(-6, 5)$

تمرّنْ
5–2

جمع المتجهات وطرحها
Addition and Subtraction of Vectors

المجموعة A تمارين مقالية

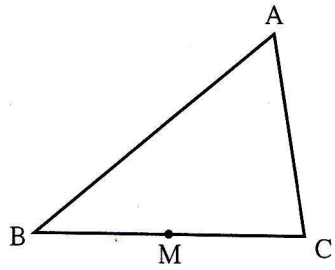


(1) في المثلث ABC المقابل E منتصف $\overline{AB}$ و F منتصف $\overline{BC}$

(a) عيّن النقطة M حيث: $<\overrightarrow{BM}>=<\overrightarrow{BE}>+<\overrightarrow{BF}>$

(b) عيّن النقطة N حيث: $<\overrightarrow{AN}>=<\overrightarrow{AE}>+<\overrightarrow{AF}>$

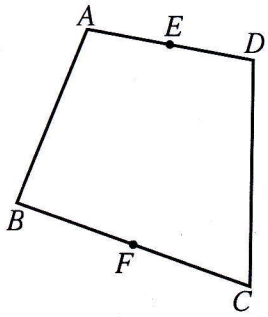
(c) أثبت أن: $<\overrightarrow{AB}>=<\overrightarrow{MN}>$



(2) في المثلث ABC المقابل، M منتصف $\overline{BC}$

(a) عيّن النقطة P حيث: $<\overrightarrow{BP}>=<\overrightarrow{MA}>+<\overrightarrow{MC}>$

(b) عيّن النقطة Q حيث: $<\overrightarrow{BQ}>=<\overrightarrow{AC}>+<\overrightarrow{MB}>$



(3) في الشكل الرباعي $ABCD$ المقابل E منتصف $\overline{AD}$ و F منتصف $\overline{BC}$

(a) عيّن النقطة P حيث: $<\overrightarrow{CP}>=<\overrightarrow{CD}>+<\overrightarrow{BA}>$

(b) أثبت أن: $<\overrightarrow{CP}>=<\overrightarrow{CE}>+<\overrightarrow{BE}>$

(c) أثبت أن: $2<\overrightarrow{EF}>=<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{DC}>$

(4) A, B, C, D نقاط في المستوى، بسّط:

(a) $2<\overrightarrow{AB}>+4<\overrightarrow{BC}>+2<\overrightarrow{CD}>+2<\overrightarrow{DA}>$

(b) $2<\overrightarrow{AB}>-3<\overrightarrow{AC}>+<\overrightarrow{AD}>+2<\overrightarrow{BD}>$

(5) انطلق مركب صيد من الميناء ناحية الشرق واجتاز مسافة 250 km، ثم انحرف عموديًّا باتجاه الشمال ليجتاز مسافة 40 km، ثم عاد مباشرة بخط مستقيم إلى النقطة التي انطلق منها في الميناء بمتوسط سرعة يساوي 50 km/h

(a) استخدم المتجهات لتنمذج مسار المركب في رحلته.

(b) ما الوقت الذي استغرقه المركب للعودة إلى الميناء؟

(6) يسبح خالد من ضفة النهر الجنوبية إلى الضفة الشمالية المقابلة بمتوسط سرعة يساوي 35 km/h وتتحرك المياه باتجاه الشرق بمتوسط سرعة يساوي 12 km/h.

(a) استخدم المتجهات لتنمذج معطيات المسألة.

(b) أوجد متوسط السرعة الناتجة التي ينتقل بها خالد من ضفة النهر الجنوبية إلى الضفة الشمالية المقابلة.

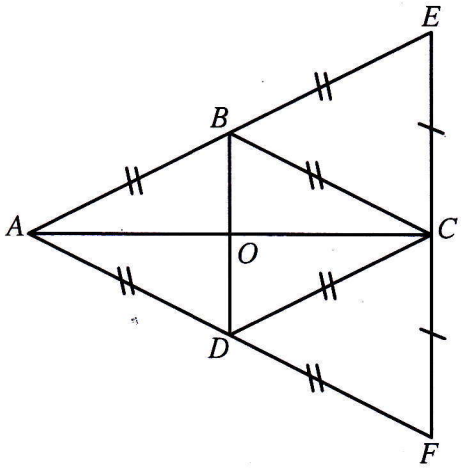
(9) $ABCD$ متوازي أضلاع حيث: $A(-2,1), B(0,-2), C(3,-1)$. إذًا إحداثيات D هي:

(a) $(2,2)$ (b) $(-1,2)$ (c) $(1,2)$ (d) $(1,-2)$

(10) $\vec{U}=4\vec{i}-2\vec{j}$, $\vec{V}=x\vec{i}-\vec{j}$ هما متجهان متوازيان. قيمة x هي:

(a) 2 (b) -2 (c) 8 (d) -8

في التمارين (11–14) لديك قائمتان، اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.



من الشكل أعلاه

القائمة (1)	القائمة (2)
(11) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=$	(a) $\overrightarrow{BD}$
(12) $\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CF}=$	(b) $\overrightarrow{AC}$
	(c) $\vec{0}$
	(d) $\overrightarrow{DB}$

القائمة (1)	القائمة (2)
(13) $\overrightarrow{EA}=$	(a) $2\overrightarrow{BA}$
(14) $2\overrightarrow{OC}=$	(b) $2\overrightarrow{BE}$
	(c) $-\overrightarrow{CA}$
	(d) $\overrightarrow{CA}$

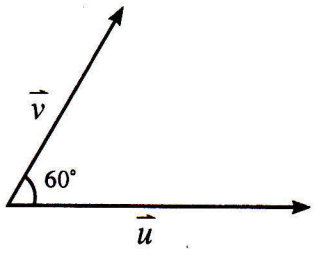
تمرّنْ
5–3

الضرب الداخلي
Scalar Product

المجموعة A تمارين مقالية

(1) في كل شكل مما يلي أوجد: $\vec{u}\cdot\vec{v}$

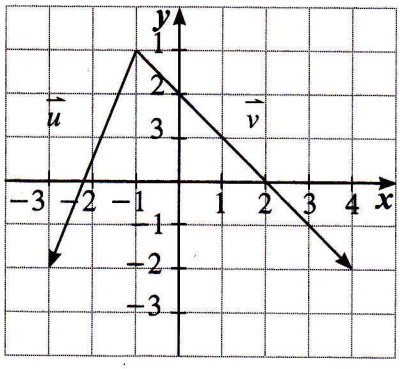
(a)



$\|\vec{u}\| = 4\ units$

$\|\vec{v}\| = 3\ units$

(b)



(2) لنأخذ: $\vec{u}=<2,-1>, \vec{v}=<-3,2>, \vec{w}=<1,2>$ أوجد:

(a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$ **(b)** $\vec{u}\cdot\vec{w}$ **(c)** $\vec{v}\cdot\vec{w}$

(d) $(3\vec{u})\cdot(-2\vec{v})$ **(e)** $(-4\vec{u})\cdot(3\vec{v})$

(3) $\vec{u}, \vec{v}$ متجهان في المستوى الإحداثي حيث: $\vec{u}\cdot\vec{v}=-6$, $\|\vec{v}\|=5$, $\|\vec{u}\|=4$. أوجد:

(a) $(2\vec{u}+3\vec{v})^2$ **(b)** $(3\vec{u}-2\vec{v})\cdot(-2\vec{u}+\vec{v})$

(4) لنأخذ $\vec{u}=<x,4>$, $\vec{v}=<2,-3>$

(a) أوجد قيمة x بحيث يكون $\vec{u}$ متعامد مع $\vec{v}$.

(b) أوجد قيمة x بحيث يكون $\|\vec{u}\| = 5$ units.

(5) لنأخذ في المستوى الإحداثي النظامي المتعامد $\vec{u}=<2,-2>, \vec{v}=<-\sqrt{2},0>$

أوجد $m(\vec{u},\vec{v})$

(6) $A(-1,3), B(-3,1), C(3,-1)$ ثلاث نقاط في المستوى الإحداثي المنتظم المتعامد.

(a) أوجد: $\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{AC}\|$, $\|\overrightarrow{BC}\|$

(b) أوجد: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ثم استنتج نوع المثلث ABC.

في التمارين (10–7)، أوجد $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

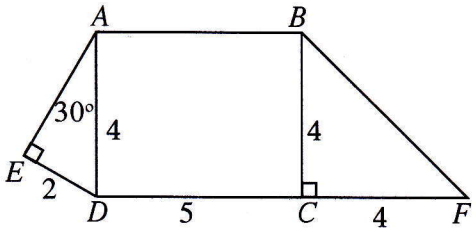
(7) $\|\vec{u}\|=2,\|\vec{v}\|=3,m(\vec{v},\vec{u})=30^\circ$

(8) $\|\vec{u}\|=\sqrt{2},\|\vec{v}\|=5,m(\vec{u},\vec{v})=135^\circ$

(9) $\|\vec{u}\|=\sqrt{3},\|\vec{v}\|=4,m(\vec{u},\vec{v})=180^\circ$

(10) $\|\vec{u}\|=4\sqrt{2},\|\vec{v}\|=7\sqrt{6},m(\vec{u},\vec{v})=90^\circ$

في التمارين (14–11)، استخدم الشكل المقابل لإيجاد:



(11) $\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{DE}$

(12) $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BC}$

(13) $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}$

(14) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BF}$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (6–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$، فإن $\vec{u}\perp\vec{v}$ (a) (b)

(2) إذا كان $\vec{u}\perp\vec{v}$, $\vec{u}=<-2,x>,\vec{v}=<5,1>$، فإن $x=-10$ (a) (b)

(3) إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{w}=-5,\vec{v}\cdot\vec{w}=3$، فإن $(\vec{u}-\vec{v})\cdot\vec{w}=-8$ (a) (b)

(4) إذا كانت $A(-1,2),B(2,3),C(-4,5)$، فإن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-6$ (a) (b)

(5) إذا كانت $L(-3,4),M(0,5)$، فإن $\|\overrightarrow{LM}\|=10$ (a) (b)

(6) $\vec{A},\vec{B}$ متجهان في المستوى حيث $\vec{A}=<2,-3>,\vec{B}=<1,0>$ (a) (b)

$$\therefore\ \cos(\vec{A},\vec{B})=2\frac{\sqrt{13}}{13}$$

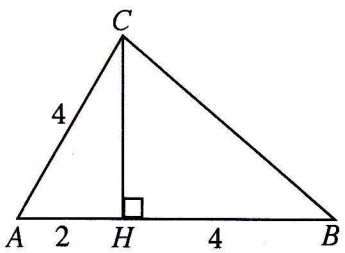
في التمارين (14–7)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

(7) إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{v}=3$, $\vec{u}=<2,-2>$, $\vec{v}=<-1,m>$، فإن m تساوي:

(a) $-\frac{5}{2}$ (b) $\frac{5}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}$

(8) في مثلث ABC، H هو المسقط العمودي لـ C على $\overrightarrow{AB}$.

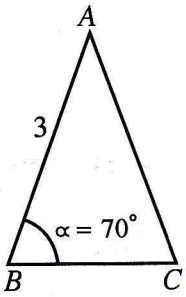
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$



(a) -6 (b) 12 (c) -12 (d) 6

(9) في الشكل المقابل $AB = AC = 3\,cm\,, m(\overrightarrow{BC}\,, \overrightarrow{BA}) = 70^\circ$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ يساوي تقريبًا:

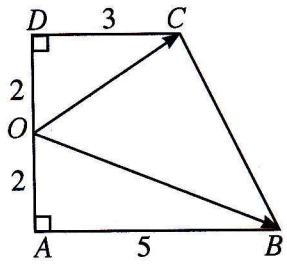


(a) 2.3 (b) 6.89 (c) 3 (d) −2.3

(10) $ABCD$ شبه منحرف قائم (انظر الشكل المقابل) حيث:

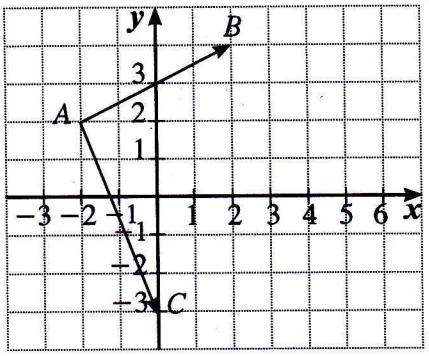
$AB = 5\,\text{cm}\,, AO = 2\,\text{cm}\,, OD = 2\,\text{cm}\,, CD = 3\,\text{cm}$

$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$ يساوي:



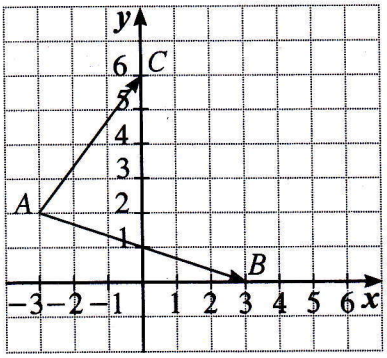
(a) 11 (b) −11 (c) 12 (d) −12

(11) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$



(a) 2 (b) −2 (c) 18 (d) 0

(12) في الشكل المقابل، $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) =$



(a) 0 (b) $\frac{3}{5}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{10}}$

(13) إذا كان $\vec{u} \perp \vec{v}$، $\vec{u} = <-5, m>, \vec{v} = <2, 3>$ فإن m تساوي:

(a) $\frac{10}{3}$ (b) $-\frac{3}{10}$ (c) $\frac{-10}{3}$ (d) $\frac{15}{2}$

(14) إذا كان $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -2$ فإن $m(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ **لا يمكن** أن يساوي:

(a) 60° (b) 28° (c) 122° (d) 50°

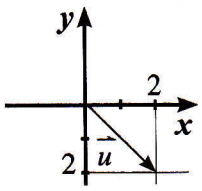
اختبار الوحدة الخامسة

(1) ليكن $A(2,3), B(-1,5), C(3,-4)$

(a) عيّن الزوج المرتب الذي يمثل متجه الموضع لـ $\overrightarrow{BA}$

(b) إذا كان متجه الموضع $\overrightarrow{OM}$ يمثل القطعة الموجهة $\overrightarrow{AC}$، فأوجد إحداثيات M.

(2) إذا كان $\vec{u} = < 2,-2 >$



فارسم متجه الموضع، ثم أوجد المعيار، وقياس الزاوية θ التي يصفها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

(3) إذا كان $\vec{u} = < \frac{2\sqrt{2}}{3}, y >$، فأوجد قيمة y بحيث يصبح $\vec{u}$ متجه وحدة.

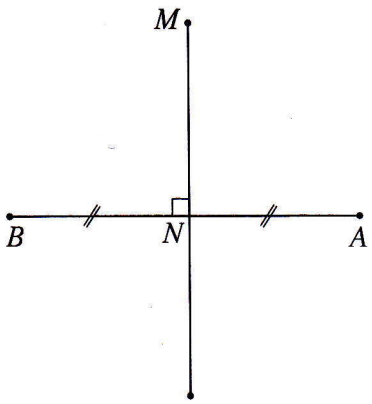
(4) A, B, C, D أربع نقاط في المستوى. لتكن النقطة N بحيث:

$$< \overrightarrow{AN} > = < \overrightarrow{AD} > + < \overrightarrow{AB} > + < \overrightarrow{DC} >$$

(a) اكتب المتجه $< \overrightarrow{AN} >$ بدلالة $< \overrightarrow{AB} >, < \overrightarrow{AC} >$

(b) استنتج أن المضلع $ABNC$ هو متوازي أضلاع.

(5) استخدم الرسم المقابل:



(a) أوجد $< \overrightarrow{AM} >$ بدلالة $< \overrightarrow{NM} >, < \overrightarrow{NA} >$

(b) أثبت أن: $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \| \overrightarrow{AB} \|^2$

(6) ABC مثلث بحيث: $\| \overrightarrow{AC} \| = 2\sqrt{3}, \| \overrightarrow{AB} \| = 6, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 18$.

أوجد قياس الزاوية $m(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

(7) ليكن: $\vec{a} = < x-5, x-5 >, \vec{b} = < 1, 1-x >$ أوجد:

(a) قيمة x بحيث يكون المتجه $\vec{a}$ له اتجاه $\vec{b}$

(b) قيمة x بحيث يكون المتجه $\vec{a}$ متعامدًا مع المتجه $\vec{b}$

(8) ليكن: $\vec{a} = \langle 2,-1 \rangle, \vec{b} = \langle 1,2 \rangle$ متجهين في مستوى إحداثي. أوجد:

(a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

(b) $\| \vec{b} \|^2$

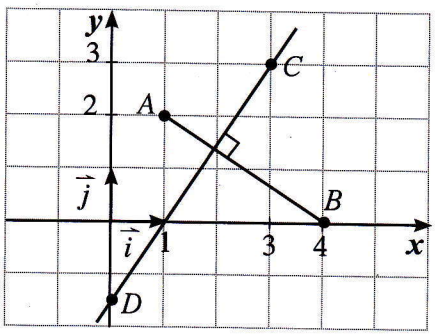
(c) $< 3\vec{a} + \vec{b} > \cdot < \vec{a} + \vec{b} >$

(d) $< \vec{a} + 2\vec{b} > \cdot < 2\vec{a} - \vec{b} >$

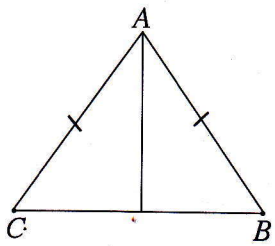
(9) لتكن النقاط: $A(1,2), B(4,0), C(3,3)$ في مستوى إحداثي منتظم متعامد.

المستقيم المتعامد مع $\overrightarrow{AB}$ المار بالنقطة C يقطع محور الصادات بالنقطة D.

أوجد إحداثيات النقطة D.



(10) ABC مثلث متطابق الأضلاع، طول ضلعه 4 cm



ليكن: $\vec{a} = <\overrightarrow{AB}>, \vec{b} = <\overrightarrow{AC}>$

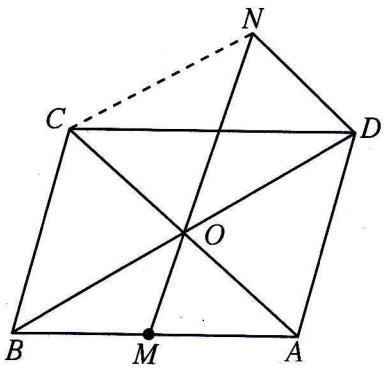
(a) أوجد $<\overrightarrow{CB}>$ بدلالة $\vec{a}, \vec{b}$ واستنتج $\|\vec{a}-\vec{b}\|$

(b) أنشئ النقطة D بحيث $<\overrightarrow{AD}> = \vec{a}+\vec{b}$

(c) ما نوع الرباعي $ABDC$؟

(d) أوجد $\|\vec{a}+\vec{b}\|$

(11) $ABCD$ متوازي أضلاع، مركزه O.



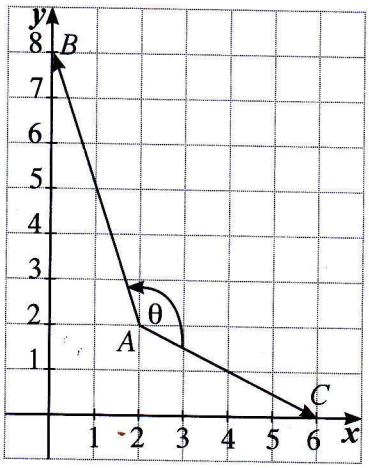
M منتصف $<\overrightarrow{AB}>$، N النقطة حيث: $<\overrightarrow{DN}> = <\overrightarrow{OC}>$

(a) أوجد $<\overrightarrow{ON}>$ بدلالة $<\overrightarrow{BC}>$

(b) أثبت أن: $<\overrightarrow{BC}> = <\overrightarrow{OD}> + <\overrightarrow{OC}>$

(c) أثبت أن النقاط M, N, O تقع على استقامة واحدة.

(12) أوجد قياس الزاوية θ المحددة بالمتجهين $<\overrightarrow{AB}>, <\overrightarrow{AC}>$



تمارين إثرائية

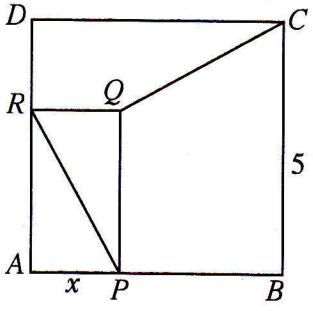
(1) لنأخذ في المستوى الإحداثي المنتظم المتعامد النقاط:

$A(2,2), B(4,5), C(4-m,0)$ حيث m عدد حقيقي.

(a) أوجد قيمة m بحيث يكون المثلث ABC قائم A.

(b) لقيمة m التي وجدتها، أثبت أن ABC مثلث متطابق الضلعين.

(2) الشكل المقابل يمثل مربعًا رسم في داخله مستطيل.



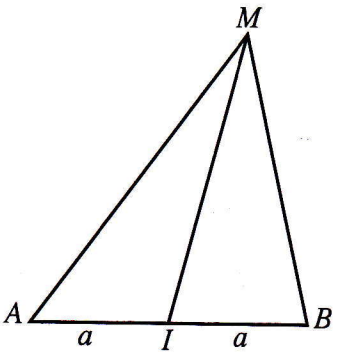
أثبت أن المستقيمين:

$\overleftrightarrow{CQ}$, $\overleftrightarrow{PR}$ متعامدين.

(**مساعدة:** استخدم علاقة شال)

(3) في المثلث MAB الأدناه أثبت أن:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - a^2$$

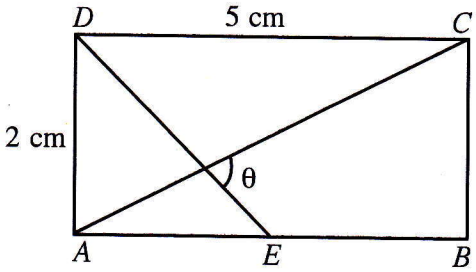


(4) إذا كان: $\vec{v} + 2\vec{u} = -\vec{w}$, $\vec{u} + \vec{u} = \vec{w}$، فأثبت أن:

$\vec{u}$, $\vec{v}$ لهما الاتجاه نفسه.

(5) في المستطيل المقابل E منتصف $\overline{AB}$.

أوجد θ (استخدم الآلة الحاسبة).



تمرّنْ
6–1

المجتمع الإحصائي والمعاينة
Statistical Population and Sampling

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أذكر مراحل البحث الإحصائي الأربعة مرتبة.

(2) ما هي أساليب جمع البيانات.

في التمرينين (4–3)، اذكر ما نوع البيانات التي تصف كلًّا من الحالات التالية:

(3) عدد التذاكر المباعة لإحدى المسرحيات.

(4) أنواع منتجات معجون الأسنان المباعة للمستهلك.

(5) حدّد نوع البيانات لكل مما يلي:

(a) أوزان طلّاب الصف الحادي عشر في مدرستك. **(b)** أنواع الكتب في مكتبة المدرسة.

(c) الدخل الشهري للأسرة في دولة ما. **(d)** ألوان أحذية الطلّاب في صفك.

(6) عرف المجتمع المنتهي والمجتمع غير المنتهي.

(7) عرّف كلًّا من:

(a) علم الإحصاء. **(b)** المجتمع الإحصائي. **(c)** الحصر الشامل.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) المواليد في العالم سنة 2010 عبارة عن مجتمع غير منته. (a) (b)

(2) وحدة الدراسة لعدد زوار مركز علمي في يوم واحد هي أي زائر. (a) (b)

(3) يمكن استخدام الحصر الشامل في دراسة أنواع السمك الموجودة في أحد المحيطات. (a) (b)

(4) عدد الصفحات في كتاب ما هو بيانات كمية مستمرة. (a) (b)

(5) عند ترتيب الأشياء نستخدم بيانات كيفية مرتبة. (a) (b)

في التمارين (10–6)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) البيانات الكيفية تكون:

(a) اسمية أو مرتبة (b) مرتبة فقط

(c) متقطعة (d) اسمية فقط

(7) البيانات المستمرة هي بيانات:

(a) اسمية (b) مرتبة (c) كمية (d) كيفية

(8) عند إجراء تحاليل الدم نستخدم:

(a) الحصر الشامل (b) المعاينة

(c) الحصر الشامل والمعاينة (d) ليس أيًّا مما سبق

(9) البيانات الكمية تكون:

(a) اسمية أو مرتبة (b) مرتبةً فقط

(c) متقطعة أو مستمرة (d) مستمرة فقط

(10) عدد المشاهدين في مباراة كرة قدم هو عبارة عن بيانات:

(a) كيفية اسمية (b) كيفية مرتبة

(c) كمية متقطعة (d) كمية مستمرة

تمرّنْ
6–2

العينات

Samples

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أوجد كسر المعاينة عندما يكون حجم العينة 8 وحجم المجتمع 100.

(2) أوجد حجم المجتمع الإحصائي إذا كان طول الفترة 5 وحجم العينة 100.

(3) ما الفرق بين العينة العشوائية البسيطة والعينة العشوائية الطبقية؟

(4) شركة دراسات تريد استفتاء العمّال وأصحاب العمل في منطقة معيّنة. يبلغ عدد العمّال 200 عامل وأصحاب العمل 40.

(a) أي نوع عينة عشوائية تستخدم في هذه الحالة؟

(b) كم يساوي كسر المعاينة إذا كنا نريد عينة من 60 شخص؟

(c) هل نستخدم جدول الأعداد العشوائية في هذه الدراسة؟

(d) نرقّم العمّال من 1 إلى 200 وأصحاب العمل من 201 إلى 240.

استخدم الصف السادس والعمود السادس وعدّد أوّل 5 أعداد للسحب العشوائي من كل طبقة.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) للحصول على أفضل تمثيل للمجتمع نختار العينة بطريقة عشوائية. (a) (b)

(2) لا يوجد فرق بين العينة العشوائية البسيطة والعينة العشوائية الطبقية. (a) (b)

(3) حجم المجتمع = $\frac{\text{كسر المعاينة}}{\text{حجم العينة}}$ (a) (b)

(4) حجم المجتمع الإحصائي = طول الفترة × حجم العينة (a) (b)

(5) إذا كان طول الفترة يساوي 70، والمفردة الأولى تساوي 43،
فالمفردة الخامسة تساوي 322 (a) (b)

في التمارين (10–6)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

(6) يتوافر في العينة العشوائية البسيطة:

(a) شرط التحيز
(b) الإتاحة لكل عنصر فيها الفرصة نفسها في الظهور
(c) شرط العشوائية والانتظام
(d) كل مما سبق.

(7) يتوفر في العينة المنتظمة:

(a) شرط العشوائية والانتظام
(b) شرط الانتظام فقط
(c) شرط العشوائية فقط
(d) ليس أيًّا مما سبق

(8) عند استخدام العينة الطبقية يفضل أن:

(a) تكون عشوائية ومنتظمة
(b) تكون طبقات المجتمع متجانسة بداخلها مختلفة في ما بينها
(c) لا تتيح لكل عنصر فيها الفرصة نفسها في الظهور
(d) ليس أيًّا مما سبق

(9) إذا كان حجم العينة يساوي 100 وحجم المجتمع الإحصائي يساوي 2 000، فكسر المعاينة يساوي:

(a) 0.3 (b) 0.5 (c) 0.05 (d) 0.02

(10) إذا كان طول الفترة يساوي 40 وحجم المجتمع الإحصائي يساوي 1000، فحجم العينة يساوي:

(a) 35 (b) 25 (c) 40 (d) 30

تمرّنْ
6–3

أساليب عرض البيانات
Ways to Display Data

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أثناء عمل الطلاب في مجموعات على نشاط معين في الصف سجل المعلم الملاحظات المبيّنة في الجدول التالي:

الفئة	يحاور ويناقش	يستمع فقط	يتخذ قرارًا	غير مشارك	المجموع
التكرار	5	7	4	6	22

(a) أوجد التكرار النسبي والتكرار المئوي لكل فئة.

(b) اعرض هذه البيانات باستخدام القطاعات الدائرية.

(2) يبيّن الجدول التالي وقت خروج السيارات من أحد المنتجات السياحية بعد ظهر أحد الأيام.

الفئة	4–	5–	6–	7–	8–	9–	المجموع
التكرار	17	31	25	14	7	6	100

(a) أكمل الجدول بإضافة مراكز الفئات.

(b) ارسم المنحنى التكراري.

(c) ارسم المدرج التكراري ومنه المنحنى التكراري.

(3) يعرض مدير أحد مطاعم الوجبات السريعة في الجدول التالي عدد الوجبات المرسلة إلى المنازل خلال أحد الأسابيع، وبُعد هذه المنازل عن المطعم.

البعد (km)	0–	4–	8–	12–	16–	20–	24–	المجموع
التكرار	12	25	21	20	12	8	4	102

(a) أكمل الجدول بإضافة مراكز الفئات.

(b) ارسم المنحنى التكراري.

(c) ارسم المدرج التكراري ومنه المنحنى التكراري.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) التكرار النسبي يساوي: قياس الزاوية المركزية لقطاع × 360° (a) (b)

(2) التكرار النسبي $= \dfrac{\text{مجموع التكرارات}}{\text{تكرار القيمة}}$ (a) (b)

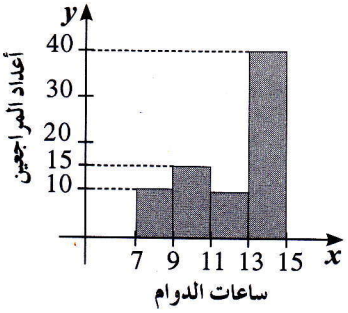
(3) مركز فئة 20– طولها 10 يساوي 30 (a) (b)

(4) لا يمكن رسم المنحنى التكراري قبل المدرج التكراري. (a) (b)

(5) يمكن تمثيل بيانات كمية مستمرة بالقطاعات الدائرية. (a) (b)

في التمارين (10–6)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

في التمرينين (7–6) استخدم المدرج التكراري المقابل الذي يمثل أعداد المراجعين في إحدى الوزارات خلال ساعات الدوام اليومي في دولة ما.



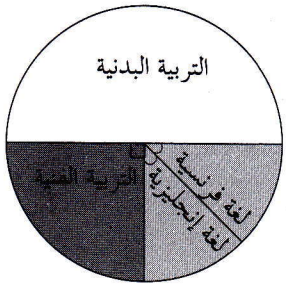
(6) إجمالي عدد المراجعين هو:

(a) 80 (b) 65 (c) 70 (d) 75

(7) طول الفترة يساوي:

(a) 4 (b) 3 (c) 2 (d) 1

في التمارين (10–8) استخدم الشكل البياني المقابل الذي يمثل المواد الاختيارية المفضلّة لدى طلّاب إحدى المدارس البالغ عددهم 200 طالب.



(8) كم يساوي قياس الزاوية المركزية لقطاع التربية البدنية؟

(a) 120° (b) 45° (c) 180° (d) 90°

(9) كم يبلغ عدد الطلّاب المسجّلين باللّغة الإنجليزية؟

(a) 30 (b) 25 (c) 35 (d) 40

(10) كم يبلغ عدد الطلّاب المسجلين بالمواد اللغويّة؟

(a) 50 (b) 40 (c) 55 (d) 60

تمرّنْ
6–4

الانحراف المعياري
Standard Deviation

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أوجد الانحراف المعياري للبيانات التالية: 5 , 5 , 5 , 5. فسّر إجابتك.

(2) سجّل صاحب متجر أن مبيع السلع بحسب أسعارها هو كما يلي:

الفئة (بالدينار)	0–	10–	20–	30–	40–	50–	المجموع
التكرار	190	300	470	280	260	100	1 600

(a) أوجد المتوسّط الحسابي.

(b) أوجد التباين والانحراف المعياري لأسعار السلع.

(3) تصنع مؤسسة عبوات لحفظ الأجبان على أن تحتوي العلبة الواحدة على 170 g من الجبنة. ولكن عند وزن 200 علبة، جاءت الأوزان كما يبين الجدول التكراري التالي:

الوزن g	167	168	169	170	171	172	173	174	المجموع
التكرار	10	15	24	55	48	34	8	6	200

(a) أوجد المتوسّط الحسابي لهذه الأوزان.

(b) أوجد التباين والانحراف المعياري لهذه الأوزان.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا أضفنا العدد نفسه على جميع الأعداد في البيانات، نحصل على الانحراف المعياري نفسه. (a) (b)

(2) إذا ضربنا الأعداد في البيانات بالعدد نفسه، لا يتغيّر الانحراف المعياري. (a) (b)

(3) الانحراف المعياري يكون دائمًا أصغر من المتوسّط الحسابي. (a) (b)

(4) الانحراف المعياري يكون دائمًا موجبًا. (a) (b)

في التمرينين (6–5)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) إذا كان التباين يساوي 100، الانحراف المعياري يساوي:

(a) ± 10 (b) -10 (c) 10 (d) ليس أيًا مما سبق

(6) الانحراف المعياري للبيانات التالية: 6 , 5 , 5 , 4 , 4 , 3 , 2 , 1 يساوي:

(a) 0.78 (b) 1.56 (c) 2.78 (d) 3.78

(7) الانحراف المعياري يساوي صفرًا إذا كانت البيانات:

(a) متساوية (b) نصفها هو المعكوس الضربي للنصف الآخر

(c) نصفها هو المعكوس الجمعي للنصف الآخر (d) لا يمكن أن يساوي الانحراف المعياري صفرًا.

(8) الانحراف المعياري هو مقياس:

(a) تمركز القيم في البيانات (b) تشتتّ القيم في البيانات

(c) انحراف القيم في البيانات (d) ليس أيًّا مما سبق

(9) يساوي انحراف معياري لبيانات معيّنة 4. بعد ضرب البيانات في العدد 3، يصبح الانحراف المعياري:

(a) 13 (b) 12 (c) 11 (d) 10

تمرّنْ
6–5

القاعدة التجريبية
Empirical Rule

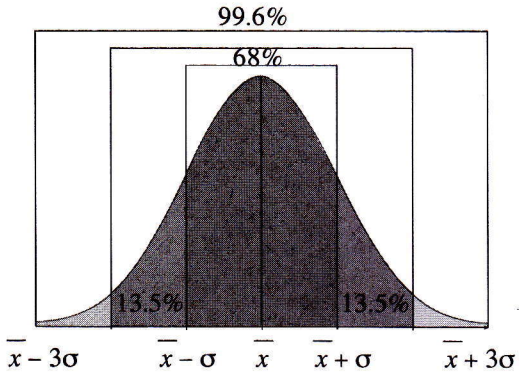
المجموعة A تمارين مقالية

(1) ما هو التوزيع الطبيعيّ؟

(2) ما هي خصائص التوزيع الطبيعيّ؟

(3) ما الشكل الذي يأخذه التوزيع الطبيعيّ؟

(4) أكمل الرسم أدناه:



(5) تبين لإحدى المؤسسات الصناعية أن المتوسط الحسابي لأرباحها الشهرية 250 1 دينارًا بانحراف معياري 225 دينارًا وأن المنحنى التكراري لهذه الأرباح هو على شكل الجرس (توزيع طبيعي).

(a) طبق القاعدة التجريبية.

(b) هل وصلت أرباح هذه المؤسسة إلى 000 2 دينار؟

(6) يعلن مصنع لإنتاج الأسلاك المعدنية أن متوسط تحمل السلك هو 1 400 kg بانحراف معياري 200 kg. على افتراض أن المنحنى الممثل لتوزيع تحمل الأسلاك المعدنية يقترب كثيرًا من التوزيع الطبيعي:

(a) طبق القاعدة التجريبية.

(b) أوجد النسبة المئوية للأسلاك المعدنية التي يزيد متوسط تحملها عن 1 000 kg.

تمرَّنْ
6–6

القيمة المعيارية
Standarized Value

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أكمل الجملة التالية:

القيمة المعيارية هي مؤشر يدل على ..... قيمة مفردة من بيانات عن ..... .

وذلك باستخدام ..... لقيم هذه البيانات.

(2) في أحد الاختبارات حيث الدرجة العظمى 20، جاءت درجة أحد الطلاب 15 مع متوسط حسابي 14 وانحراف معياري 4. ما القيمة المعيارية للدرجة 15 مقارنة ببقية درجات هذا الاختبار؟

(3) لنأخذ البيانات: 7، 7، 6، 5، 5.

(a) أوجد: المتوسط الحسابي $\overline{x}$، والانحراف المعياري σ لهذه البيانات.

(b) أوجد القيمة المعيارية لهذه البيانات.

(4) في المدينة A يزن أحد الرجال 75 kg مع متوسط حسابي للرجال 70 kg وانحراف معياري 5 kg.

وفي المدينة B يزن أحد الرجال 80 kg مع متوسط حسابي للرجال 76 kg وانحراف معياري 8 kg.

أوجد القيمة المعيارية z_1 لوزن 75 kg في المدينة A والقيمة المعيارية z_2 لوزن 80 kg في المدينة B.

(5) في اختبارات مادة الرياضيات نال خالد الدرجات التالية من 20: 17، 16، 15، 12.

أما في اختبارات مادة الكيمياء فقد نال الدرجات التالية من 20: 9، 15، 13، 11.

(a) أوجد القيمة المعيارية z_1 للدرجة 15 في مادة الرياضيات والقيمة المعيارية z_2 للدرجة 15 في مادة الكيمياء.

(b) في أيّ مادة كانت الدرجة 15 هي أفضل مقارنة ببقية الدرجات؟

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) القيمة المعيارية $= \frac{\overline{x} - x}{\sigma}$ (a) (b)

(2) القيمة المعيارية تؤشر إلى تشتت قيمة عن بقية قيم البيانات. (a) (b)

(3) في بيانات حيث المتوسط الحسابي $\overline{x} = 14$ والانحراف المعياري $\sigma = 4$

فإن القيمة المعيارية للمفردة $x = 16$ هي: $z = 0.5$ (a) (b)

(4) في بيانات حيث المتوسط الحسابي $\bar{x} = 12$ والقيمة المعيارية للمفردة $x = 15$ هي: $z = 0.4$ ، فإن الانحراف المعياري: $\sigma = 7.5$

(a) (b)

في التمارين (8–5)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) القيمة المعيارية للمفردة 14 مقارنة بقيم بيانات حيث المتوسط الحسابي 12.5 والانحراف المعياري 6 هي:

(a) -0.25 (b) 0.25 (c) 2.5 (d) -2.5

(6) القيمة المعيارية لمفردة من بيانات هي 0.625 والمتوسط الحسابي 12 والانحراف المعياري 8 فإن هذه المفردة تساوي:

(a) 7 (b) -7 (c) 17 (d) -17

(7) القيمة المعيارية للمفردة 14 من بيانات هي 0.6 والمتوسط الحسابي 11 فإن الانحراف المعياري لقيم هذه البيانات هو:

(a) 0.2 (b) -0.2 (c) -5 (d) 5

(8) القيمة المعيارية للمفردة 18 من بيانات هي 0.75 والانحراف المعياري 8 فإن المتوسط الحسابي هو:

(a) 24 (b) 12 (c) -12 (d) -24

اختبار الوحدة السادسة

(1) هل يمكن استخدام الحصر الشامل في دراسة المجتمعات الإحصائية التالية أم لا؟ اشرح السبب.

(a) دراسة كمية السكر الموجودة في الدم عند أحد الأشخاص.

(b) إيجاد المتوسط الحسابي لأوزان طلاب صفك.

(2) في إحدى المؤسسات تمّ سحب عينة عشوائية طبقية مكونة من 70 فردًا وكسر المعاينة لهذه العينة 0.08

(a) أوجد عدد الأفراد العاملين في هذه المؤسسة (المجتمع الإحصائي).

(b) علمًا أن المؤسسة مكونة من ثلاث فئات: الفئة A حيث حجم العينة الطبقية 30 ، الفئة B حيث حجم العينة الطبقية 30، الفئة C حيث حجم العينة الطبقية 10، أوجد حجم العينة المناظرة لكلّ فئة.

(3) في إحدى الشركات تمّ سحب عينة عشوائية منتظمة مكونة من 25 فردًا بحيث إن طول الفترة 50، أوجد حجم المجتمع الاحصائي (عدد أفراد العاملين في الشركة).

(4) في استطلاع أجري على الصف الثاني عشر علمي لمعرفة آرائهم حول مهنة المستقبل جاءت الإجابات كما يبيّن الجدول التالي:

المهنة	معلم	ضابط	مهندس	طبيب	محام	رجل أعمال	المجموع
التكرار	2	3	6	7	5	2	25

(a) أكمل الجدول لإيجاد التكرار النسبي والنسبة المئوية للتكرار.

(b) مثّل هذه البيانات بالقطاعات الدائرية.

(5) في البيانات التالية: 3، 9، 4، 5، 6، 8، 7. أوجد المتوسط الحسابي $\bar{x}$، التباين v والانحراف المعياري σ

(6) على افتراض أن المتوسط الحسابي لأرباح إحدى الشركات هو 850 دينارًا والانحراف المعياري 175 دينارًا والمنحنى التكراري لأرباح هذه الشركة هو على شكل جرس (توزيع طبيعي).

(a) طبّق القاعدة التجريبية على المتوسط الحسابي لأرباح هذه الشركة.

(b) هل انخفضت أرباح هذه الشركة إلى 300 دينار؟ اشرح ذلك.

(c) هل وصلت أرباح هذه الشركة إلى 1400 دينار؟ اشرح ذلك.

تمارين إثرائية

(1) هل يمكن استخدام الحصر الشامل في دراسة المجتمعات الإحصائية التالية، أم لا؟ مع ذكر السبب.

(a) دراسة أنواع الحشرات في دولة الكويت.

(b) دراسة نسبة عدد الإناث إلى عدد الذكور العاملين في أحد المصارف في دولة الكويت.

(2) **الكتابة في الرياضيات:** اذكر أمثلة تتضمن ما يلي:

(a) مجتمع إحصائي منته – وحدة الدراسة – المتغير المراد دراسته.

(b) مجتمع إحصائي غير منته – وحدة الدراسة – المتغير المراد دراسته.

(3) في أحد مصانع غزل النسيج، الذي يحوي 600 عامل مرقمين من 1 إلى 600. أراد صاحب المصنع مناقشة عدد من العمال في كيفية تحسين الإنتاج. المطلوب سحب عينة عشوائية بسيطة مكونة من 15 عاملًا باستخدام جدول الأعداد العشوائية.

(4) أراد مدير عام شركة كبرى لإنتاج مواد الدهان تقييم أداء كافة الموظفين، علمًا أن الشركة تضم 80 مهندسًا تمّ ترقيمهم من 201 إلى 280، 120 اختصاصي مختبر تمّ ترقيمهم من 301 إلى 420، وأخيرًا 220 عاملًا تمّ ترقيمهم من 501 إلى 720. المطلوب سحب عينة عشوائية طبقية مكونة من 21 فردًا تمثل جميع العاملين باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف السابع والعمود الأوّل.

(5) أراد معلم في أصول تعليم القرآن الكريم تشكيل مجموعات في الصفوف الثانوية لإحدى المدارس التي تحوي 144 طالبًا مرقمين من 1 إلى 144. المطلوب سحب عينة عشوائية منتظمة مكونة من 16 طالبًا باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الثالث والعمود الثالث.

(6) يتألف فريق العمل في إحدى الشركات من 360 موظفًا وهم من الجنسين أي ذكور وإناث ويعملون إما بدوام كامل أو بدوام جزئي كما هو مبيّن في الجدول التالي:

ذكور/دوام كامل	180 مرقمين من 1 إلى 180
ذكور/دوام جزئي	36 مرقمين من 181 إلى 217
إناث/دوام كامل	18 مرقمين من 218 إلى 236
إناث/دوام جزئي	126 مرقمين من 237 إلى 363

المطلوب أخذ عينة طبقية حجمها 40 موظفًا، وفقًا للفئات أعلاه باستخدام برنامج إحصائي.