مذكرة الرياضيات الفترة الثالثة

الصف الثاني عشر العلمي

FARAG MABROUK FARAG
HEAD OF MATHEMATICS DEPARTMENT

غير مخصص للبيع

Integral التكامل

Indefinite Integral التكامل غير المحدد

تعريف: المشتقة العكسية Antiderivative

تسمى الدالة F مشتقة عكسية للدالة f المعرفة على مجالها I.

إذا كان: $\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$

نظرية (1)

إذا كانت F مشتقّة عكسيّة للدالّة f على الفترة I، G مشتقّة عكسيّة أيضًا للدالّة f على الفترة I فإنّ:

$$G(x) = F(x) + C \qquad \forall x \in I$$

حيث C ثابت.

مثـــال: أثبت أن: $F(x) = 5 - \frac{1}{3}x^3$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x) = -x^2$

ثم اكتب مشتقة عكسية أخرى لها.

نظرية (2)

إذا كانت F مشتقة عكسية لِـ f على الفترة I فإن الصورة العامة للمشتقة العكسية لِـ f على الفترة I هي:

$F(x) + C$ حيث C ثابت اختياري

مثـــال: أثبت أن: $F(x) = (3x+2)^5 + 7$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x) = 15(3x+2)^4$.

مثـــال: أثبت أن: $F(x) = \frac{x^3+1}{x^2}$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = 1 - \frac{2}{x^3}$

مثـــال: تحقّق من أن F هي مشتقّة عكسيّة للدالّة f حيث:

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 10 \qquad f(x) = x^2 - 2x + 1$$

مثـــال: تحقّق من أن F هي مشتقّة عكسيّة للدالّة f حيث:

$$F(x)=\sqrt{1+x^4} \quad ، \quad f(x)=\frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}$$

Indefinite Integral تعريف: التكامل غير المحدد

التكامل غير المحدد للدالّة f بالنسبة إلى x هو مجموعة كل المشتقّات العكسيّة F ، ويكتب على الصورة:

$$\int f(x)\,dx$$

Rules of Indefinite Integral قواعد التكامل غير المحدد

1. $\int k\,dx = kx + C$ k عدد ثابت
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad , \quad n \in Q - \{-1\}$ قاعدة القوى

Properties of Indefinite Integral خواص التكامل غير المحدد

1. $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)dx \quad , \quad k \neq 0$ خاصية الضرب بعدد ثابت
2. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ خاصية الجمع والطرح

مثـــال: أوجـد التكاملات التالية :

① $\int 5dx$ ② $\int 5x^3 dx$ ③ $\int 10x^4 dx$

مثـــال: احسب: $\int (3x^2 - 4x - 1)dx$

مثـــال $\int (x^5 - 6x + 3)dx$

مثـــال:

أوجد التكاملات غير المحددة التالية:

(c) $\int \left(\frac{3x^2 - x}{x}\right)^2 dx$

(b) $\int \frac{x^2 + 5x + 4}{x + 1} dx$

(a) $\int (2x - 3)(x + 4)dx$

مثـــال: احسب التكاملات التالية :

① $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$

② $\int \frac{x^4-27x}{x^2-3x}dx$

③ $\int \left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)dx$

مثـــال: أوجـــد

a $\int x\sqrt{x}\,dx$

b $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

c $\int \frac{x^2-3x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

مثـــال: إذا كان: $F(x) = \int (2x+5)dx$ ، $F(-1) = 0$ فأوجد $F(x)$

مثـــال: إذا كان $F(x) = \int (3x^2 - 5)dx$ وكان $F(2) = 3$، فأوجد $F(x)$.

مثـــال: إذا كان $F(x) = \int (9x^2 - 4x + 5)dx$ وكان $F(-1) = 0$، فأوجد $F(x)$.

مثـــال: ألقيت كرة إلى الأعلى بسرعة ابتدائية $12\ \mathrm{m/s}$ من على سطح أحد الأبنية ارتفاعه $80\ \mathrm{m}$ عن سطح الأرض.

a في أي زمن t سوف تصل الكرة إلى أعلى ارتفاع؟

b في أي زمن t سوف تصل الكرة إلى الأرض؟

(علمًا بأن عجلة الجاذبية الأرضية $a(t) = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$)

مثـــال:

ألقيت كرة إلى الأعلى بسرعة ابتدائية 16 m/s من سطح برج ارتفاعه 115 m عن سطح الأرض.

(a) في أي زمن t سوف تصل الكرة إلى أعلى ارتفاع؟

(b) في أي زمن t سوف تصل الكرة إلى الأرض؟ (علمًا أن عجلة جاذبية الأرض $a(t) = 9.8\ \text{m/s}^2$).

Integration by Substitution التكامل بالتعويض

Rule of Integration by Substitution قاعدة التكامل بالتعويض

إذا كانت F هي مشتقة عكسية للدالة f فإن:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

وإذا كان $u = g(x)$ ، $du = g'(x)dx$ فإن:

$$\int f(u)du = F(u) + C$$

معلومة:
إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق بدلالة المتغير X فإن التفاضل هو:

$$\frac{df}{dx} = f'(x)$$

$$df = f'(x)\,dx$$

مثـــال : أوجـــد ما يلي:

a $\int (x^3 + 4x^2 + x)^7 (3x^2 + 8x + 1)dx$

b $\int \sqrt[3]{x^2 - 5x + 2}\ (2x - 5)\,dx$

تعميم قاعدة القوي في التكامل غير المحدد :

$$\int (g(x))^n g'(x)\,dx = \frac{(g(x))^{n+1}}{n+1} + C \quad , \quad n \in Q - \{-1\} \ , \quad \text{ثابت } C$$

مثـــال : أوجـد ما يلي :

a $\int \sqrt[5]{(3x+7)}\,dx$

b $\int \frac{3(\sqrt[3]{x}-5)\,dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

مثـــال : أوجد: $\int x(2x-1)^3\,dx$

مثـــال : أوجد: $\int x^5\sqrt{3+x^2}\,dx$

مثـــال : أوجـد :

$$\int (2x-3)\sqrt{x^2-3x+5}\,dx$$

مثـــال : **أوجـد**

$$\int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1}\,dx$$

مثـــال : **أوجـد :**

$$\int (x^2 - 2x)(x^3 - 3x^2 + 4)^5 dx$$

مثـــال : أوجـد :

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{4 + x^3}} dx$$

مثـــال : أوجـد : $\int x^5 \sqrt[3]{x^3+1}\, dx$

تمـــــــــــــــــــارين

احسب التكاملات التالية:

$1)\int 6x^2\left(2x^3-6\right)^4 dx,\qquad 2)\int x^3\left(x^4-2\right)^5 dx,\qquad 3)\int\left(x^2+1\right)\sqrt{x^3+3x+1}\, dx$

$4)\ \int\left(x^4+2x\right)^2\left(4x^3+2\right)dx\qquad 5)\int 3\left(3x^2-1\right)^3 x\,dx\qquad 6)\int\sqrt[3]{5+x^3}\left(x^2\right)dx$

تكامل الدوال المثلثية

Integral of Trigonometric Functions

التكامل غير المحدد
1 $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
2 $\int \sin kx\,dx = -\dfrac{\cos kx}{k} + C$
3 $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
4 $\int \cos kx\,dx = \dfrac{\sin kx}{k} + C$
5 $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
6 $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
7 $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$
8 $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$

تذكر:

$\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$

$\frac{d}{dx}\left(-\frac{\cos kx}{k}\right) = \sin kx$

$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin kx}{k}\right) = \cos kx$

$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$

$\frac{d}{dx}(-\cot x) = \csc^2 x$

$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$

$\frac{d}{dx}(-\csc x) = \csc x \cot x$

مثـــال :

أوجد التكاملات غير المحددة التالية:

a $\int (\cos x + \csc^2 x)\,dx$

b $\int \sec x(\tan x + \sec x)\,dx$

c $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x}$

مثـــــال :

أوجد:

a $\int \sin 5x\,dx$

b $\int (x^2 + \cos 2x)\,dx$

c $\int x \sec^2(x^2 + 2)\,dx$

مثـــال: احسب التكاملات التالية :

$$1) \int \sin 4x dx, \qquad 2) \int \cos 2x dx,$$

مثـــال : احسب التكاملات التالية :

$$1)\int\left[\sin(3x+2)+\cos(2-3x)\right]dx, \qquad 2)\int \sec^2(4x)dx$$

مثـــال : احسب التكاملات التالية :

$$(1)\ \int(\sec x\tan x+\sin x)\,dx \qquad (2)\ \int\left(\frac{-1}{x^2}+5\sin 3x\right)dx$$

مثـــال: احسب التكاملات التالية :

a $\int \cos^3(2x-3)\cdot\sin(2x-3)\,dx$

b $\int x^2\cdot\sin(x^3-1)\,dx$

c $\int (3+\sin 2x)^5 \cos 2x\,dx$

مثـــال: احسب التكاملات التالية :

1) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx$

2) $\int \csc^3 x \cot x\,dx$

3) $\int \sqrt{\tan x}\,\sec^2 x\,dx$

4) $\int \sqrt{1+\sin x}\,\cos x\,dx$

5) $\int \frac{dx}{(\cos^2 x)\sqrt{1+\tan x}}$

6) $\int \frac{3\sin(2-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx.$

مثـــال: أوجد: $\int \csc^5 x \cot x \, dx$

مثـــال : أوجـد $\int \sec^3 x \tan x \, dx$

الدوال الأسية واللوغاريتمية

Exponential and Logarithmic Function

تذكر:

$\ln e = 1$

$\ln e^{m} = m$

$m > 0 \ , \ n > 0$

(1) $\ln(m \cdot n) = \ln m + \ln n$

(2) $\ln \frac{m}{n} = \ln m - \ln n$

(3) $\ln m^{k} = k \ln m$

(4) $e^{\ln m} = m$

تذكر:

الدالة f : $f(x) = a^{x}$ هي دالة أسية حيث

$a \in \mathbb{R}^{+} - \{1\}$

Derivative of Exponential Functions   اشتقاق الدوال الأسية

قاعدة (1)

$$\frac{d}{dx} a^{x} = a^{x} \ln a$$

إذا كانت u دالة في x قابلة للاشتقاق فإن:

$$\frac{d}{dx} a^{u} = a^{u} \ln a \frac{du}{dx}$$

في القاعدة (1) وبوضع $a = e$ نحصل على القاعدة التالية:

قاعدة (2)

$$\frac{d}{dx} e^{x} = e^{x}$$

وفي حالة u دالة في x قابلة للاشتقاق فإن:

$$\frac{d}{dx}(e^{u}) = e^{u} \frac{du}{dx}$$

مثـــال : أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

a $f(x) = 10^x$ b $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$ c $f(x) = 5^{\cos x}$

مثـــال: أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

a $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ b $g(x) = e^{x^2-4}$ c $h(x) = e^{\tan x}$

مثـــال: أوجد $\frac{dy}{dx}$.

(1) $y = 5^{\sqrt{x+1}}$ (2) $y = e^{x^2-x+1}$ (3) $y = 8^{\tan x}$

(4) $y = e^{\csc x}$ (5) $y = e^{-2x}\sin 3x$ (6) $y = 5e^{\sin 2x} - x$

اشتقاق دوال اللوغاريتمات الطبيعية

Derivatives of Natural Logarithmic Functions

تذكر:

(1) مجال الدالة f : $f(x) = \ln x$ هو $\mathbb{R}^+$

(2) مجال الدالة f : $f(x) = \ln(g(x))$ هو $\{x : g(x) > 0\}$

تذكر:

$\ln e^x = x \; , \; x \in \mathbb{R}$

$e^{\ln x} = x \; , \; x > 0$

قاعدة (3)

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

إذا كانت u دالة في x قابلة للاشتقاق:

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

لاحظ أن: $\frac{d}{dx}(\ln g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

مثـــال:

a) $f(x) = \ln(2x + x^3)$

b) $g(x) = \ln \frac{1}{2x+1}$

c) $h(x) = \ln(1 + \sqrt{3}x)$

d) $h(x) = \ln(\sin x)$

قاعدة (4)

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$$

مثـــال:

أوجد $\frac{dy}{dx}$.

1) $y = 5^{\sqrt{x+1}}$ 2) $y = 8^{\tan x}$ 3) $y = 3e^{\frac{x}{5}}$

مثـــال: أوجـد مشتقة كل مما يلي :

1) $y = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$ 2) $y = e^{\csc x}$ 3) $y = e^{2\sqrt{x}+3}$

4) $y = \ln(2 - \cos x)$ 5) $y = \ln(\ln x)$

تكامل بعض الدوال الأسية واللوغاريتمية

Integrals of some Exponential and Logarithmic Functions

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

والجدول التالي يبيّن تكامل بعض الدوال الأسية واللوغاريتمية حيث: $u = g(x)$

قاعدة المشتقة	التكامل غير المحدد
$\frac{d}{dx}e^x = e^x$	$\int e^x\,dx = e^x + C$
$\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx} = u'e^u$	$\int u'e^u\,dx = e^u + C$
$\frac{d}{dx}\ln\|x\| = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\|x\| + C$
$\frac{d}{dx}\ln\|u\| = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{u'}{u}$	$\int \frac{u'}{u}dx = \ln\|u\| + C$

لاحظ أن: $\int \frac{g'(x)dx}{g(x)} = \ln|g(x)| + C$

مثـــال: **أوجد تكامل كل من الدوال التالية :**

a) $\int e^{3x}dx$

---

b) $\int (2x-1).e^{x^2-x+3}dx$

مثـــال: أوجـد تـكـامـل كـل مـن الـدوال الـتـالـيـة :

a $\int (x^2-2)e^{x^3-6x}dx$

b $\int \frac{1}{x^2}.e^{\frac{1}{x}}dx$

مثـــال : **أوجــد**

a $\int \frac{-5}{3x-2}dx$

c $\int \frac{x^3+4}{x} dx$

مثـــال : **أوجـــد**

a $\int \frac{x+1}{x^2+2x+5} dx$

b $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$

c $\int \frac{x^2+1}{x}dx$

مثـــال:

اوجـد : $\int \tan x \, dx$

Integration by Parts التكامل بالتجزيء

Integration by Parts Formula قاعدة التكامل بالتجزيء

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

مثـــال: أوجد: $\int x\cos x\,dx$

مثـــال: أوجد:

ⓐ $\int (x-3)e^{x-3}\,dx$

ⓑ $\int 4x\,e^{-5x}\,dx$

مثـــال: أوجد: $\int \ln(x+1)dx$

مثـــال: أوجد: $\int \ln x \, dx$

مثـــال: أوجد: $\int (x+1)\ln(x+1)dx$

مثـــال: أوجد: $\int x^2 \sin x \, dx$

مثـــال: أوجد: $\int x^2 e^{x+2} \, dx$

مثـــال: أوجد: $\int e^{x} \cos x \, dx$

مثـــال: أوجد: $\int e^x \sin x \, dx$

مثـــال: أوجد التكاملات التالية :

(2) $\int x\sin(5x)\,dx$

(1) $\int x\cos(3x)\,dx$

مثـــال: أوجد التكاملات التالية :

(2) $\int \ln(2x-1)\,dx$

(1) $\int (x-5)e^{x-5}\,dx$

مثـــال: أوجد التكاملات التالية :

(2) $\int (x^2 + 3x)\sin x \, dx$

(1) $\int (2x+1)\ln(x+1)\, dx$

مثـــال: أوجد التكاملات التالية :

(2) $\int \sin(\ln x)dx$

(1) $\int x^2 e^{2x-3}dx$

التكامل باستخدام الكسور الجزئية

Integration Using Partial Fractions

أولًا: المقام يمكن تحليله إلى عوامل خطية (عوامل من الدرجة الأولى) غير مكررة

المقام $h(x)$ عبارة عن ناتج ضرب عوامل خطية غير مكررة.

لتكن $f(x) = \frac{r(x)}{h(x)}$ حيث المقام $h(x)$ على الصورة:

$$h(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\dots(a_kx + b_k)$$

حيث لا يوجد عوامل مكررة ولا يوجد عامل ثابت مضروب بآخر.

في هذه الحالة تكون الدالة f على صورة كسور جزئية كالتالي:

$$\frac{r(x)}{h(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \dots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}$$

مثـــال: لتكن الدالة f : $f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - 4x + 3}$

فأوجد:

a الكسور الجزئية

b $\int f(x)\,dx$

مثـــال: أوجد: $\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x}\,dx$

مثـــال: أوجد: $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx$

ثانيًا: المقام يمكن تحليله إلى عوامل خطية بعضها متكرر

المقام $h(x)$ عبارة عن ناتج ضرب عوامل خطية بعضها متكرر. لكل عامل من عوامل $h(x)$ على الصورة $(mx+n)^k$، يجب أن يحتوي التفكيك إلى كسور جزئية على مجموع حدود عددها k:

$$\frac{A_1}{mx+n}+\frac{A_2}{(mx+n)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(mx+n)^k}$$

مثـــال: أوجد: $\int \frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x}\,dx$

مثـــال: أوجد: $\int \frac{4x^2-4x+1}{x^3-2x^2+x}\,dx$

مثـــال: أوجـد $\int \frac{3x^2 - 4x + 3}{x^3 - 3x^2} dx$

مثـــال: أوجـد $\int \frac{-6x+25}{x^3-6x^2+9x}\,dx$

عندما تكون درجة البسط في الحدودية النسبية $f(x)=\frac{r(x)}{h(x)}$ مساوية أو أكبر من درجة المقام، نوجد أولًا ناتج القسمة $q(x)$ باستخدام القسمة المطولة ثم نكتب الدالة على الصورة: $f(x)=q(x)+\frac{p(x)}{h(x)}$ حيث $p(x)$ هو الباقي.

مثـــال: أوجد: $\int \frac{x^3-2x^2-4}{x^3-2x^2}\,dx$

مثـــال: $\int \frac{2x^2 + x + 3}{x^2 - 1}\, dx$

مثـــال: $\int \frac{x^2+3x+2}{(x-3)^2}\,dx$

مثـــال: أوجد: $\int \frac{x^3-7x+9}{x^2-3x+2}\,dx$

مثـــال: أوجـد $\int \frac{x^3 - 2}{x^2 + x}\,dx$

مثـــال: أوجـد $\int \frac{x^4-2x^3+x^2+2x-1}{x^2-2x+1}dx$

مثـــال: أوجد: $\int \frac{2x^4 + 3x^2 - 7}{x^3 - 6x^2 + 9x}\,dx$

تمارين

احسب التكاملات التالية :

$1)\int 6x^2\left(2x^3-6\right)^4 dx,\qquad 2)\int x^3\left(x^4-2\right)^5 dx,\qquad 3)\int\left(x^2+1\right)\sqrt{x^3+3x+1}\,dx$

احسب التكامل التالي :

$$1)\int \frac{2x^3+1}{x^4+2x+1}dx, \quad 2)\int \frac{xe^{2x^2}}{e^{2x^2}+5}dx, \quad 3)\int \frac{\sec^2 x}{5-\tan x}dx, \quad 4)\int \frac{x+\cos 2x}{x^2+\sin 2x}\,dx$$

احسب التكاملات التالية:

1) $\int (2\sqrt{x} - 3x^4)dx$

2) $\int \left(\frac{3}{x^4} - 4x^2 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$

3) $\int \sqrt{x}(x-3)^2\,dx$

4) $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)dx$

5) $\int 3(3x^2-1)^3 x\,dx$

6) $\int (x^4+2x)^2(4x^3+2)dx$

7) $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$

8) $\int 5(5x^7+2)^2 x^6\,dx$

9) $\int \sqrt{1-4x}\,dx$

10) $\int \sqrt[3]{5+x^3}(x^2)dx$

11) $\int \frac{(1+3x)dx}{\sqrt{2x+3x^2}}$

12) $\int (3x-x^3)^5(1-x^2)dx$

13) $\int \frac{t^3-4t+3\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$

14) $\int \frac{\sec x \tan x}{3+2\sec x}dx$

15) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx$

احسب التكاملات التالية:

1) $\int \cos^3 x \sin x\,dx$

2) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}\,dx$

3) $\int (1+\sin t)^2 \cos t\,dt$

4) $\int x\cos(3x^2)dx$

5) $\int x^2 \sec^2 x^3\,dx$

6) $\int \cos^3 2t \sin 2t\,dt$

7) $\int \cos 4\theta\sqrt{2-\sin 4\theta}\,d\theta$

8) $\int \tan^3 5x \sec^2 5x\,dx$

9) $\int \sin 3\theta \sec^2 \cos 3\theta\ d\theta$

10) $\int (1-\cos x)^3 \sin x\,dx$

11) $\int (1-\sin 2\vartheta)^{\frac{1}{3}} \cos 2\vartheta\ d\vartheta$

12) $\int x^7 \tan(8x^8+6)dx$

13) $\int \sin(7-\cos 3x)\sin 3x\,dx$

14) $\int te^{t^2}\sec(2+e^{t^2})\tan(2+$

15) $\int \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$

16) $\int \frac{\sec x \tan x}{(3+2\sec x)^2}dx$

17) $\int \frac{\cos x - \sin x}{(\sin x + \cos x)^3}dx$

18) $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{5-\tan x}}dx$

19) $\int \frac{x+\cos 2x}{\sqrt[3]{x^2+\sin 2x}}dx$

20) $\int \frac{3\cot\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$

21) $\int (2+\tan^2 x)\sec^2 x\,dx$

احسب التكاملات التالية:

1) $\int \left(e^{-x} + \cos 2x + 1\right)dx$

2) $\int 2e^{2x+\cos x}(2 - \sin x)dx$

3) $\int \sec x \tan x \, e^{5+2\sec x} dx$

4) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$

5) $\int 3^{2x} e^{5-3^{2x}} dx$

6) $\int e^{1+\cos x} \sin x dx$

7) $\int \frac{e^{5-\frac{2}{x^2}}}{x^3} dx$

8) $\int \frac{e^{3+\ln 2x}}{x} dx$

9) $\int \frac{e^{1+\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}} dx$

10) $\int (e^{-x} + e^{x})^2 dx$

11) $\int e^{2x} \sec\left(e^{2x} - 1\right)dx$

12) $\int 5e^{2x} e^{1+e^{2x}} dx$

13) $\int \frac{e^{3-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

14) $\int \frac{11^{13+\csc 2x}}{\sin 2x \ \tan 2x} dx$

15) $\int 2^{1+\cot 5t} \csc^2 5t dt$

احسب التكاملات التالية:

1) $\int \cos^2 x dx$

2) $\int \ln(5x+3)dx$

3) $\int xe^{-3x} dx$

4) $\int x\sqrt{x+4}dx$

5) $\int xe^{1-3x} dx$

6) $\int x \sec x \tan x dx$

7) $\int x(x+5)^{-10} dx$

8) $\int x^2 e^x dx$

9) $\int x^2 \cos(5x^2)dx$

احسب التكاملات الآتية

1) $\int \frac{x^2+1}{x(x^2-1)} dx$

2) $\int \frac{x+3}{x^2-3x+2} dx$

3) $\int \frac{dx}{x^2-16}$

4) $\int \frac{3xdx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

5) $\int \frac{2x^2+3}{x^2(x-1)} dx$

6) $\int \frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)} dx$

7) $\int \frac{2t^2-4}{(t+1)(t-2)(t-3)} dt$

8) $\int \frac{t-5}{t^2+6t+5} dt$

9) $\int \frac{3t+7}{t^2-2t-3} dt$

التكامل المحدد

Definite Integral

إذا كانت f دالة متصلة على $[a\,,b]$ وكانت الدالة F مشتقة عكسية للدالة f فإن التكامل المحدد للدالة f من a إلى b وهو العدد الحقيقي: $F(b)-F(a)$

حيث:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b$$
$$= [F(x)]_a^b$$
$$= F(b)-F(a)$$

ويسمّى a, b حدّي التكامل، والقواعد التي سبق ذكرها في التكامل غير المحدد تطبق على التكامل المحدد.

مثـــال: أوجد: $\int_2^7 (x^3-2x^2+2)\,dx$

Properties of the Definite Integral خواص التكامل المحدد

إذا كانت f دالة متصلة على الفترة I ، $k \in \mathbb{R}$ ، $a, b, c \in I$ فإن:

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
2. $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
3. $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$
4. $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$
5. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

لاحظ في خاصية 3 أنه: إذا كان $k = 1$ فإن: $\int_a^b dx = b - a$

مثـــال أوجد:

a) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\sin 2x - \csc^2 x\right)dx$

b) $\int_2^{-3} 5\,dx$

c) $\int_3^3 (-2x^3 + x^2)\,dx$

d) $\int_2^4 \frac{dx}{x-1}$

مثـــال: أوجد:

a $\int_{-3}^{4}|2x-4|dx$

b $\int_{1}^{3}|x+2|dx$

لتكن f دالة متصلة على $[a\,,b]$

6 إذا كانت: $f(x) \geqslant 0 \quad \forall \quad x \in [a\,,b]$

فإن: $\int_{a}^{b} f(x)\,dx \geqslant 0$

7 إذا كانت: $f(x) \leqslant 0 \quad \forall \quad x \in [a\,,b]$

فإن: $\int_{a}^{b} f(x)\,dx \leqslant 0$

مثـــال: دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_{-1}^{0}(x^2+x)dx \leqslant 0$

مثـــال: دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_{-4}^{2}(x^2+2x-8)dx \leq 0$

8 لتكن الدالتين f, g متصلتين على $[a, b]$ وكانت: $f(x) \leqslant g(x) \quad \forall x \in [a, b]$

فإن: $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$

مثـــال: دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_{-1}^{2} (x^2+1)\,dx \geqslant \int_{-1}^{2} (x-1)\,dx$

مثـــال: دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_0^1 (x^2-3x+7)dx \ge \int_0^1 (4x-5)dx$

تمرين: احسب التكاملات المحدودة التالية:

1) $\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx$

2) $\int_0^2 (2-4x)dx$

3) $\int_{-1}^2 |2x-3|\,dx$

4) $\int_2^3 \frac{x^2-2}{x^2}dx$

5) $\int_{-1}^1 x^2\sqrt{2-x^3}\,dx$

6) $\int_0^3 f(x)$, حيث $f(x)=\begin{cases}2x, & x\le 1\\ 2, & x>1\end{cases}$

7) $\int_{-2}^2 f(x)dx$, حيث $f(x)=\begin{cases}3, & x\le 0\\ x+3, & x>0\end{cases}$

8) $\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$

9) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos x)dx$

10) $\int_0^1 \frac{x}{x+1}dx$

11) $\int_{-1}^2 x\sqrt{9-x^2}\,dx$

12) $\int_0^2 (x^3-1)^{\frac{2}{3}}x^2dx$

التفسير البياني للتكامل المحدد Graphical Interpretation of Definite Integral

في المستوى الإحداثي لتكن f دالة متصلة على $[a , b]$،

A تمثل مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات

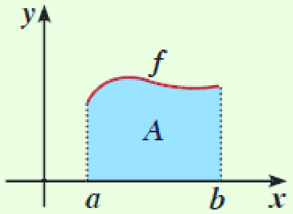
والمستقيمين $x = b$, $x = a$

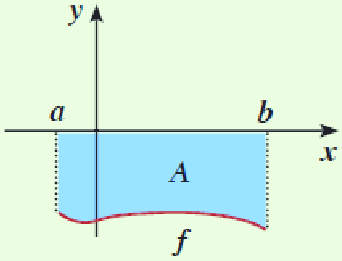
1 إذا كانت: $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [a , b]$

فإن: $\int_a^b f(x)\,dx = A$

2 إذا كانت: $f(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in [a , b]$

فإن: $\int_a^b f(x)\,dx = -A$





مثـــال : أوجد قيمة $\int_1^5 (2 - 2x)dx$ بيانيًّا.

مثـــال: أوجــد

(a) $\int_{-5}^{5} \sqrt{25-x^2}\,dx$

(b) $\int_{0}^{4} -\sqrt{16-x^2}\,dx$

مثـــال: أوجد: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \cos 2x \, dx$

مثـــال: أوجـــد

(a) $\int_{-1}^{1} \left((x+1)\sqrt{x^2+2x+5}\right) dx$

(b) $\int_{2}^{5} x\sqrt{x-1} \, dx$

مثـــال: أوجد: $\int_{-2}^{0} \frac{x}{e^x}\, dx$

مثـــال: أوجد: $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x \sec^2 x \, dx$

مثـــال: أوجد: $\int_4^7 \frac{3x^2-17}{x^2-x-6}\,dx$

اختبار الوحدة الخامسة

(1) أثبت أن: $F(x)=\frac{1}{3}\sqrt{(2x^2+6x+5)^3}+8$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x)=(2x+3)\sqrt{2x^2+6x+5}$.

(2) إذا كان: $F(x)=\int(3x^2-2x)dx$ وكان: $F(2)=6$، فأوجد $F(x)$.

في التمارين (3–20)، أوجد:

(3) $\int (x+2)\sqrt{x^2+4x+7}\,dx$

(4) $\int \frac{2x-1}{(x^2-x+7)^5}\,dx$

(5) $\int x^2\sqrt[3]{x-3}\,dx$

(6) $\int x^3\sqrt{x^2-8}\,dx$

(7) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$

(8) $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx$

(9) $\int \sin x\sqrt[3]{\cos^2 x}\,dx$

(10) $\int \sec^7 x\tan x\,dx$

(11) $\int \left(e^{3x}+\frac{4}{2x-1}\right)dx$

(12) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}\,dx$

(13) $\int \frac{x^2-4x}{x^3-6x^2+1}\,dx$

(14) $\int \frac{e^{2x}+x}{e^{2x}+x^2+3}\,dx$

(15) $\int (x^2-4)\cos x\,dx$

(16) $\int \ln(3x+2)\,dx$

(17) $\int 3x\,e^{2x+1}\,dx$

(18) $\int x^2e^{2x-1}\,dx$

(19) $\int \frac{x^2-3x}{x^2-3x-28}\,dx$

(20) $\int \frac{x^4+2x^2+6x}{x^3+4x^2+4x}\,dx$

في التمارين (21–26)، أوجد:

(21) $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$

(22) $\int_{-1}^{1} 2x\sin(1-x^2)\,dx$

(23) $\int_0^5 |2x-5|\,dx$

(24) $\int_{-6}^{0} -\sqrt{36-x^2}\,dx$

(25) $\int_3^5 \frac{x^2-3}{x^2-3x+2}\,dx$

(26) $\int_1^3 \frac{x^3-2x^2+2}{x^3+6x^2+9x}\,dx$

في التمارين (27–29)، دون حساب قيمة التكامل أثبت أن:

(27) $\int_2^5 (-x^2+7x+8)\,dx \ge 0$

(28) $\int_{-4}^{-2} (x^2+7x+10)\,dx \le 0$

(29) $\int_{-5}^{-4} (x^2+13x+9)dx \le \int_{-5}^{-4} (5x-6)dx$