مذكرة الحادي عشر علمي الفصل الثاني

أ. فرج مبروك فرج (رئيس قسم الرياضيات)

ت.99716213

لتحميل نماذج الاختبارات اذهب إلى الموقع التالي :

Mathpf.com أو الأستاذ. فرج مبروك فرج

faragmabrouk@hotmail.com

[Email address]

المجتمع الإحصائي و المعاينة

Statistical Population and Sampling

المجتمع الإحصائي : مجموعة كل المفردات (الوحدات) قيد الدراسة و لها خصائص مشتركة

و يمكن أن تكون مفرداته بشرية أو غير بشرية

كما يمكن أن تكون منتهية (عدد وحداته محدود) أو غير منتهية (عدد وحداته غير محدود)

المتغير :

الصفة (أو الصفات) محور الدراسة في مجتمع إحصائي معين . و هذه الصفة تتغير من وحده إلى أخرى في مجتمع الدراسة

أساليب جمع البيانات :

الحصر الشامل : هو عملية جمع بيانات جميع مفردات المجتمع الإحصائي

مميزاته : دقة النتائج - خلوه من الإخطاء

عيوبه : يتطلب وقت و جهد كبيرين – تكاليفه مرتفعة – لا يمكن إجراؤه في المجتمعات الغير منتهيه – لا يمكن إستخدامه في حالة تدمير جميع وحدات الدراسة (سحب عينة دم)

المعاينة :

هي عملية إختيار جزء من مفردات المجتمع بطريقة مدروسة تجعل هذه المفردات تمثل المجتمع و تحقق أهداف الدراسة

أنواع البيانات :

بيانات كيفية

- إسمية
  - مثل
  - لون العيون
  - لون الشعر
- مرتبة
  - مثل
  - المستوى العلمي
  - الدرجات التقديرية

بيانات كمية

- متقطعة
  - مثل
  - عدد طلاب الفصل
  - نقاط مباراة كرة السلة
- مستمرة
  - مثل
  - أطوال القامات
  - الأوزان
  - درجات الحرارة

مثـــال: حدد نوع البيانات في كل مما يأتي:

a عدد أعضاء فريق كرة القدم.

b الوظيفة (ضابط، محاسب، محام، تاجر، مدرس، ...)

c أطوال قامات طلاب الصف الحادي عشر.

d تقديرات الطلاب في مادة اللغة الإنجليزية في جامعة الكويت.

طرق جمع البيانات Ways To Collect Data

عند جمع البيانات يمكن استخدام طرائق متنوعة وذلك بحسب ما هو متوفر وما هو أسهل وهي:

- المشاهدة والملاحظة
- الاستبانة
- البريد العادي أو البريد الإلكتروني
- الهاتف المنزلي أو الهاتف النقال
- المقابلة الشخصية
- الوثائق والسجلات
- الأبحاث التاريخية والأرشيف
- قواعد البيانات
- مواقع التواصل الإجتماعي

العينة العشوائية Random Sample

العينة العشوائية :

هي جزء من المجتمع الإحصائي يتم إختيارها عشوائيا بطريقة علمية دون تحيز كي تمثل هذا المجتمع أفضل تمثيلا بأقل تكلفة ممكنة

العينة العشوائية البسيطة :

مجتمع إحصائي يتضمن n من المفردات المتجانسة وأردنا دراسته انطلاقا من عينة عشوائية بسيطة

عدد مفرداتها (حجمها) m و يمكن إختيار العينة العشوائية البسيطة بطرق متعددة منها :

جدول الأعداد العشوائية ، الات حاسبة متخصصة ، برامج إحصائية في الحاسوب

مثـــال:

عدد العاملين في مؤسسة هو 90 موظفاً مرقمين من 1 إلى 90. يراد اختيار 7 موظفين لأداء فريضة الحج على نفقة المؤسسة ويتم اختيارهم بطريقة عشوائية. المطلوب سحب عينة عشوائية بسيطة باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف السادس والعمود الرابع.

مثـــال: في المثال السابق :

إذا كان المطلوب سحب العينة من جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف العاشر والعمود الخامس فما هي

2 – العينة العشوائية الطبقية Stratified Random Sample

لسحب عينة عشوائية طبقية حجمها m من مجتمع إحصائي حجمه n، حيث $n \leq m$ يكون:

$$\text{كسر المعاينة} = \frac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع الإحصائي}} = \frac{m}{n}$$

حجم العينة من كل طبقة = كسر المعاينة × حجم الطبقة المناظرة

مثـــال:

لدراسة الأداء الوظيفي والكفاءة عند الموظفين في إحدى المؤسسات، تم سحب عينة عشوائية طبقية مكونة من 80 فردًا من أصل 1 600 موظف موزعين كما يبين الجدول التالي:

المجموع	عمال ومستخدمون	تقنيون وفنيون	إداريون
1 600	1 200	300	100

ما حجم كل عينة عشوائية بسيطة مسحوبة من كل طبقة؟

مثـــال:

يبين الجدول توزيع الموظفين في إحدى المستشفيات:

المجموع	عمال	ممرضون	أطباء	إداريون
500	40	240	140	80

المطلوب سحب عينة عشوائية طبقية مكونة من 25 فردًا لدراسة كفاءة العاملين وذلك بتكوين عينات عشوائية بسيطة باستخدام جدول الأعداد العشوائية.

مثـــال: لدراسة الأداء الوظيفي والكفاءة لدى الموظفين في أحد المصارف، تم سحب عينة طبقية مكونة من 7 أفراد من 35 موظفًا موزعين كما يبين الجدول التالي:

المجموع	مستخدمون	محاسبون ومدققون	مدراء أقسام
35	5	20	10

ما حجم كل عينة عشوائية بسيطة مسحوبة من كل طبقة؟

مثـــال:

في إحدى المستشفيات يوجد 80 إداريًا مرقمين من 1 إلى 80 ، 140 طبيبًا مرقمين من 81 إلى 220 ، 240 ممرضًا مرقمين من 221 إلى 460، 40 عاملًا مرقمين من 461 إلى 500.

المطلوب سحب عينة عشوائية طبقية مكونة من 25 فردًا لدراسة كفاءة العاملين وذلك بتكوين عينات عشوائية بسيطة باستخدام جدول الأعداد العشوائية.

3 – العينة العشوائية المنتظمة Systematic Random Sample

يتم سحب مفرداتها بحسب نظام ثابت و منتظم ترقم المفردات ترقيما متسلسلا ثم يقسم المجتمع الإحصائي إلى فترات متساوية الطول بعدد مفردات العينة تسمى فترة المعاينة و يكون

$$\text{طول الفترة} = \frac{\text{حجم المجتمع الإحصائي}}{\text{حجم العينة}}$$

يمكن سحب المفردة الأولى في العينة المنتظمة بطريقة عشوائية من جدول الأعداد العشوائية

ثم تسحب باقي المفردات بطريقة منتظمة تقضي بإضافة طول فترة المعاينة على المفردة الأولى للحصول على المفردة الثانية ثم إضافة طول الفترة على المفردة الثانية للحصول على المفردة الثالثة وهكذا...

مثــــال: في أحد المصانع حيث عدد العمال 900 مرقمين من 1 إلى 900، أراد صاحب هذا المصنع مناقشة هؤلاء العمال حول كيفية تحسين الأداء وزيادة الإنتاج. المطلوب سحب عينة عشوائية منتظمة حجمها 15، مستخدمًا جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الثامن والعمود العاشر.

الحل:

مثــــال:

يبلغ عدد طلبة الصف الحادي عشر علمي في إحدى المدارس 140 طالبًا مرقمين من 1 إلى 140. المطلوب سحب عيّنة عشوائية منتظمة حجمها 7 لزيارة إحدى دور المسنين وتقديم الهدايا لهم بمناسبة حلول عيد الفطر السعيد باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف السادس والعمود التاسع.

جدول الأعداد العشوائية

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	28138	28596	04819	50138	12598	96878	55684	01488	58963	25896	36987	47856	20150	18965
2	01055	53625	47739	51063	08445	33254	22542	50954	73949	11945	29947	86107	35420	77076
3	79603	31075	71532	38497	08236	78411	18237	48743	81472	31761	49582	70411	64708	59416
4	79261	96010	82558	15977	15827	55768	29668	73188	65198	24483	16219	63827	05092	47495
5	00005	37153	07206	78041	09457	97003	49739	75180	74018	90951	96161	31749	23314	55471
6	59282	86004	13259	59537	75702	66287	77941	27095	46176	67215	93007	84125	89302	92843
7	20119	41234	01600	61772	57765	43965	60952	86606	47653	71502	85121	56804	03494	98302
8	67205	41113	34514	03273	95516	68365	79855	50202	66262	31348	37260	56557	15116	38645
9	06244	02595	08941	24615	92256	43007	05022	48195	91554	42525	30499	92203	70717	92685
10	46210	35683	67486	77091	58196	08010	54826	97006	76740	76343	93982	66126	91164	53560
11	80851	80252	02993	92649	12421	00480	53258	45140	57226	10428	36478	24600	01401	29179
12	74684	98726	87312	70956	49731	45504	70689	57849	77383	53581	05100	07629	04450	54826
13	82136	32120	31733	10371	01132	25110	67123	59517	89996	58905	75260	21509	87839	68376
14	73419	88893	89748	44745	46390	54781	31307	62656	69777	24494	91659	29133	46122	75769
15	66082	76594	77480	38397	64521	18712	50625	39027	39168	07835	13446	17758	19166	86050
16	72300	93912	87548	69024	17509	52647	64335	84663	79524	34618	72718	51651	10486	81509
17	46805	82648	27550	65291	27181	92637	13539	87601	15442	70131	62278	99491	41647	11029
18	59068	93270	15829	34926	46252	90487	92734	04850	90175	84906	46435	91518	86972	25705
19	63089	93954	30250	80347	81506	53768	75611	62054	89867	16083	45585	39555	96236	37875
20	54384	64888	28929	46575	08301	86288	52656	19225	65019	74795	25915	71637	49063	17695
21	41219	63211	39429	15290	78067	66741	08485	64653	87698	04983	47255	72768	90770	82930
22	20939	02271	71831	53134	73002	86087	98213	24484	08574	34915	03881	26259	83583	55337
23	66587	02998	73357	00128	97188	71660	47602	52022	28157	21602	30212	53762	94149	66526
24	71255	04641	38419	79552	62599	76281	10226	60287	16627	85028	41218	20667	63917	49254
25	08584	91510	57892	75011	49221	69960	90413	62400	23239	76854	66983	15964	70808	41341
26	31552	70340	48274	81006	74831	19177	49160	50762	89666	93535	12381	29770	33895	90381
27	02779	92197	83606	60964	65448	64964	19444	31357	16774	68021	46076	43831	09372	71527
28	22739	38348	29275	50087	91312	68984	37018	03447	05352	00798	61243	86397	98949	07622
29	21255	64526	97920	04791	77315	49905	74232	67222	89562	14683	81533	60057	31164	21824
30	95796	88317	77167	07879	03499	00804	27377	18693	75652	32509	38279	28588	16753	86119
31	75902	33821	35579	75020	78575	43912	99570	79216	04682	53316	95976	11938	56490	43868
32	36028	73731	05339	82203	22856	72459	00237	17627	50326	98629	71967	48402	61549	83717
33	06836	03795	80497	34107	29215	17117	69538	63274	96690	78884	38149	84592	67096	84551
34	35984	71052	01657	19690	99783	13513	37517	96508	49098	86592	10874	18125	00876	14549
35	87635	49443	55077	18157	20552	27316	12591	68157	34316	20447	53989	40096	69123	74210
36	41484	58832	43633	92072	54522	60783	05639	78371	20340	90174	90549	60250	80858	97632
37	65736	34031	37846	47294	50168	96397	50329	17390	04554	96190	02594	44229	24198	03064
38	16118	88260	28975	20036	77353	96179	08143	29222	57871	01292	52420	07130	11896	94088
39	62064	36947	31193	72328	10262	75428	50450	31620	17855	27018	75910	60965	39988	73389
40	23472	61332	48829	99113	90538	74066	38628	09270	72856	71411	78860	50745	42966	27424
41	05654	41781	99888	60787	56313	83221	82631	91989	32577	68175	24897	23456	16419	41727
42	83428	17512	78322	01942	42061	60659	32746	95367	20551	99885	79334	03732	97058	80356
43	65126	87369	56266	48697	33094	07522	92724	05676	91022	64262	24239	60242	01049	42945
44	28042	84729	34846	05880	34188	27048	30623	23204	05034	93136	19192	91674	47022	48523
45	53148	70847	48117	16103	83773	13224	76143	39148	06742	08298	52014	61711	79466	78334

تابع الأعداد جدول العشوائية

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
46	13560	38973	76536	54464	57626	10247	67051	83850	93002	30930	83842	09990	39203	85693
47	74560	04842	75720	98173	35124	18019	70681	73624	86300	76894	55504	20022	27144	03239
48	27449	10887	55047	76702	62587	20131	63452	96127	15802	65271	74663	37237	95812	19427
49	44413	47571	63342	67062	19900	42511	71024	44364	02775	41081	33177	09580	71047	33820
50	64512	50481	41107	21553	86471	16380	45959	16065	75195	31120	33822	43200	82566	43078
51	00095	29635	33618	55201	12075	97285	80296	92250	92579	69296	68423	91353	35553	77036
52	09638	68500	84152	55279	29481	48723	87785	06304	53198	79425	41344	87395	54720	72911
53	08589	28972	20500	26761	61852	87387	17967	50345	20479	37841	16337	88163	38585	02798
54	54883	36854	75468	31821	08464	13393	24322	56872	39507	16845	92039	13209	47035	57686
55	15444	18858	69256	81949	85766	20284	15914	76382	25665	84484	36409	87271	14949	12069
56	71565	25235	48604	04697	60513	89675	34337	06619	67509	03365	67431	43725	60359	33823
57	92871	06972	97272	98081	58945	98039	47815	55173	93203	03385	58309	47970	27985	73782
58	68849	33525	22034	44200	90628	39212	75363	00247	96303	51838	99956	34321	85809	87275
59	98827	81751	86350	27162	56861	00566	32360	52560	05152	97370	29229	98503	44100	59854
60	66803	20412	23097	36884	14158	51578	82839	04323	01877	91180	22403	31175	67942	14508
61	41516	62122	37492	78385	08100	01107	49028	80607	92813	75169	25796	12643	75026	04170
62	12162	72695	70213	28844	94220	04677	63128	96254	60006	42148	63974	24739	46064	93416
63	13274	51517	40925	25926	47062	06867	80018	43394	68316	19197	74832	95805	26126	29623
64	52918	26336	17452	70092	22425	68294	14624	12683	60030	18091	76824	45533	29768	59678
65	30361	58894	77995	22650	20266	21791	25773	37748	38058	73835	57440	33610	24749	56691
66	46377	07121	20251	41301	07635	66029	80470	25523	16429	40640	40041	79302	98712	95368
67	27423	28968	39623	90457	26780	14540	15082	90327	56459	77107	60727	26328	59556	93557
68	73886	44934	65197	86001	51613	92940	24998	35378	35732	05469	05791	07309	23107	37543
69	70336	30279	09961	58625	11044	73699	32481	85490	58333	12277	98355	86413	87883	23945
70	97903	34498	31282	11249	13179	41489	87962	89071	61922	02704	83626	67269	26568	09110
71	86205	97851	61543	40666	78098	05621	86072	21202	84985	65253	09306	56791	86227	73343
72	70718	31353	96295	21718	03495	83149	48733	21496	68430	91459	18409	86552	53261	30280
73	79073	05288	57087	27201	29661	08888	42984	96272	93656	50805	32057	36231	03532	64408
74	37479	85240	68508	36333	90080	46063	78129	96854	65844	71369	15432	66145	29223	87139
75	56009	81470	06181	98341	92406	61704	57770	28984	92858	88178	80042	83674	23736	64497
76	97012	75201	16764	31720	59414	81005	63959	15445	12347	71939	23651	29846	20962	77463
77	89839	94534	78223	94989	54376	61163	21914	19430	86856	38116	83201	10117	77879	04504
78	81048	37891	24924	18757	54550	54788	72430	24611	18643	55647	11806	78567	76679	58222
79	96743	96838	50696	57648	15325	72557	77193	50894	33206	44420	37986	84257	02031	65384
80	87649	00751	47483	48564	13103	20941	49793	68972	27994	75845	84616	37040	97110	95953
81	18173	87553	45854	18750	16506	57202	60428	61710	35887	19879	49893	04512	62556	63742
82	27613	72032	94334	38239	00395	05486	96365	01758	99314	41866	25760	74573	72169	25744
83	67517	04195	89100	21434	52923	90818	09206	19493	00233	62413	39127	76457	39419	35023
84	23574	88907	08133	85126	84643	94128	89259	18791	71035	84179	82500	92193	31383	34150
85	98721	90145	05695	14882	11827	56881	14143	68069	88481	08328	58607	81737	11660	96892
86	85556	83652	92934	55451	94792	45056	50732	83305	46303	37510	15539	52534	47250	75231
87	63282	48334	46961	05993	16605	63422	23375	44298	16226	10617	96722	42776	53376	94366
88	34033	36344	41107	77495	73985	79352	14844	44334	30781	16339	38031	28104	60054	05725
89	75567	31423	72507	48162	30150	44912	76250	12017	12136	47687	90279	67127	83889	87957
90	45101	69475	96924	76548	57756	14741	26052	42807	52824	61981	87866	35512	23771	43130

الأعداد المركبة   Complex Numbers

الوحدة التخيلية   Imaginary Unit

هي العدد الذي مربعه (-1) ويرمز إليه بالرمز i

$i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$

الأعداد التخيلية:

- لأي عدد حقيقي موجب m ،

$$\sqrt{-m} = \sqrt{m}\, i$$

- تسمى الأعداد التي على الصورة bi حيث $b \in \mathbb{R}^*$ أعدادًا تخيلية.

مجموعة الجذور التربيعية الموجبة و السالبة للأعداد الحقيقية السالبة تكوّن مجموعة الأعداد التخيلية.

مثـــال: بسّط كل عدد مما يلي مستخدمًا الوحدة التخيلية i:

ⓐ $\sqrt{-2}$ ⓑ $-\sqrt{-12}$ ⓒ $\sqrt{-36}$

تعريف: العدد المركب   Complex Number

العدد المركب هو عدد على الصورة $a + bi$ حيث a , b عددان حقيقيان، i الوحدة التخيلية.

الصورة $a + bi$ تسمى الصورة الجبرية للعدد المركب.

ملاحظة: يجب التمييز بين الجزء التخيلي b والعدد التخيلي bi

مثـــال: اكتب كلًّا من الأعداد المركبة التالية على الصورة الجبرية:

ⓐ $\sqrt{-18} + 7$ ⓑ $\dfrac{10 - \sqrt{-100}}{5}$ ⓒ $\dfrac{\sqrt{-9} + 5}{7}$

Complex Numbers الأعداد المركبة

$3+2i \ , \ 1-5i \ , \ \sqrt{2}\,i+4 \ , \ 2.7+5.1i$

Real Numbers الأعداد الحقيقية

Irrational Numbers الأعداد غير النسبية

$-\sqrt{2} \ , \ \pi \ , \ e \ , \ \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

Rational Numbers الأعداد النسبية

$\dfrac{4}{7} \ , \ 0.\overline{3} \ , \ \dfrac{8}{5}$

Integers الأعداد الصحيحة

$-1 \ , \ -2 \ , \ -3$

Whole Numbers الأعداد الكلية

$0 \ , \ 1 \ , \ 3 \ , \ 7$

Imaginary Numbers الأعداد التخيلية

$2i$

$-\sqrt{3}\,i$

$7.3i$

$-\dfrac{3}{5}i$

Equal Complex Numbers تساوي عددين مركبين

يتساوى عددان مركبان إذا وفقط إذا تساوى جزءاهما الحقيقيان وتساوى جزءاهما التخيليان.

ليكن: $z_1 = a_1 + b_1 i \ , \ z_2 = a_2 + b_2 i$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \ , \ b_1 = b_2$$

مثـــال: أوجد قيم كل من $x , y \in \mathbb{R}$ في كل مما يلي:

ⓐ $x + 5i = 7 - 3yi$

ⓑ $(x+3) + y^2 i = 5 - yi$

ⓒ $3i = 2x - 5yi$

مثــــال: حل المعادلات التالية :

(1) $2x + 3yi = -14 + 9i$ (2) $14i^2 - 3i = 2x + (y+5)i$

إذا ساوى عدد مركب الصفر فإن جزءه الحقيقي يساوي الصفر وجزءه التخيلي يساوي الصفر أيضًا، والعكس صحيح.

$$x + yi = 0 \Longleftrightarrow (x = 0 \ , \ y = 0)$$

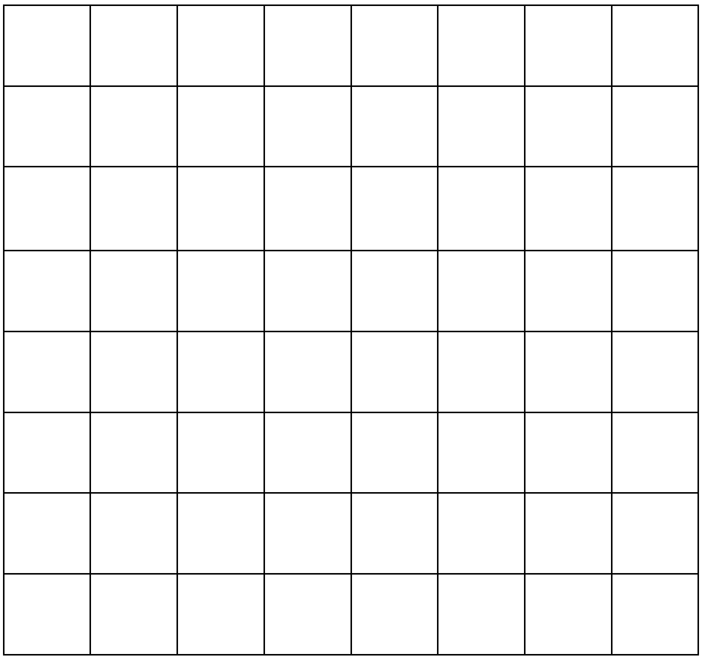
التمثيل البياني لعدد مركب Representation of a Complex Number

$$z = a + bi \longleftrightarrow M(a, b)$$

الصورة الجبرية   الصورة الديكارتية

مثــــال:

a) $z_1 = 4 - i$ b) $z_2 = -3i$ c) $z_3 = -4 - 3i$ d) $z_4 = 2$



مثـــال: اكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط $N(-4\,,1)$, $H(1,-2)$, $K(7,0)$.

العمليات على مجموعة الأعداد المركبة Operations with Complex Numbers

أولًا: جمع وطرح الأعداد المركبة Adding and Subtracting Complex Numbers

إذا كان $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ عددين مركبين فإن:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

مثـــال: إذا كان $z_3 = -0.3i$, $z_2 = 3.4 - 1.2i$, $z_1 = -2 + 5i$ فأوجد:

a) $z_1 + z_2$

b) $z_2 - z_1$

c) $z_3 - z_2 - z_1$

ملاحظات:

- الصفر هو العنصر المحايد لعملية الجمع على مجموعة الأعداد المركبة $(0 = 0 + 0i)$.
- المعكوس الجمعي للعدد المركب $z = a + bi$ هو العدد المركب $-z = -a - bi$

  مثلاً: إذا كان $z = 2 + 5i$ فإن $-z = -2 - 5i$
- إذا كان مجموع عددين مركبين يساوي صفرًا فإن كلًّا منهما معكوس جمعي للآخر والعكس صحيح.

  أي أن: $z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = -z_2$
- لإيجاد ناتج طرح: $z_1 - z_2$ يمكن إضافة المعكوس الجمعي لِـ z_2 إلى z_1 أي $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

ثانيًا: ضرب الأعداد المركبة Multiplying Complex Numbers

إذا كان $z_1 , z_2 \in \mathbb{C} , c \in \mathbb{R}$

حيث $z_1 = a_1 + b_1 i , z_2 = a_2 + b_2 i$ فإن:

1. $c\, z_1 = ca_1 + c\, b_1 i$
2. $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$

العدد 1 هو العنصر المحايد لعملية ضرب الأعداد المركبة $(1 = 1 + 0i)$

مثـــال: أوجـد ناتج :

a $(6 - 5i)(4 - 3i)$

b $(9 + 4i)(4 - 9i)$

c $(12i)(7i)(i + 1)$

مثـــال: إذا كان $z_2 = 1 + 4i$, $z_1 = 2 - 3i$ فأوجد:

b $z_1 \cdot z_2$

a $\frac{1}{2} z_1$

مثـــال: بسّط كل تعبير مما يلي:

1) $(2 + 4i) + (4 - i)$

2) $(4 + \sqrt{-9}) + (6 - \sqrt{-49})$

مثـــال : بسّط كل تعبير مما يلي:

1) $(8-\sqrt{-1})-(-3+\sqrt{-16})$

2) $(4i)(-9i)^2$

3) $-5(1+2i)+3i(3-4i)$

4) $(-2+\sqrt{-9})(6+\sqrt{-25})$

Powers of a Complex Number قوى العدد المركب

مثـــال : أوجد:

a $5(i)^{73}$

b $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{3}$

c $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{4}$

تمـــرين: إذا كان $z=\frac{1-i}{1+i}$ فأوجد: z^{27} , z^{12}

ثالثًا: قسمة الأعداد المركبة Dividing Complex Numbers

مرافق العدد المركب Complex Conjugate

معلومة:
إذا كان $z = a$ عدد حقيقي
فإن $\overline{z} = z = a$

مرافق العدد المركب

مرافق العدد المركب $z = a + bi$ هو العدد المركب $\overline{z} = \overline{a+bi} = a - bi$

خواص مرافق العدد المركب:

إذا كان $z_1 = a_1 + b_1 i \quad , \quad z_2 = a_2 + b_2 i$

فإن:

- $z_1 + \overline{z_1} = 2a_1$
- $z_1 - \overline{z_1} = 2bi$
- $z_1 \cdot \overline{z_1} = a_1^2 + b_1^2$
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $\overline{(\overline{z_1})} = z_1$

مثـــال: إذا كان $z_1 = 2 - 7i \quad , \quad z_2 = 3 + 5i$ فأوجد:

(a) $\overline{z_1} + \overline{z_2}$ (b) $\overline{z_1 - z_2}$ (d) $\overline{z_1 \cdot z_2}$ (e) $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

المعكوس الضربي لعدد مركب غير صفري $z = a + bi$ يرمز له بالرمز z^{-1}:

ويكون: $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} \times \frac{a-bi}{a-bi}$

$z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$

ملاحظة

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{a^2+b^2}$$

مثـــال: أوجد المعكوس الضربي لكل من:

a) $z_1 = -3i - 7$

b) $z_2 = 5 + 11i$

c) $z_3 = 6i$

مثـــال: أوجد ناتج قسـمة $3 - 2i$ على $1 + 2i$

مثـــال: اكتب كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية:

(a) $\dfrac{3+i}{2+5i}$ (b) $\dfrac{2-i}{2+i}$ (c) $\dfrac{\overline{5+i}}{2-3i}$

مثـــال:

إذا كان $z_1 = \sqrt{3} + i \ , \ z_2 = -\sqrt{3} + 2i$ فأوجد: $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} \ , \ \frac{z_1}{\overline{z_2}} \ , \ \frac{\overline{z_1}}{z_2}$

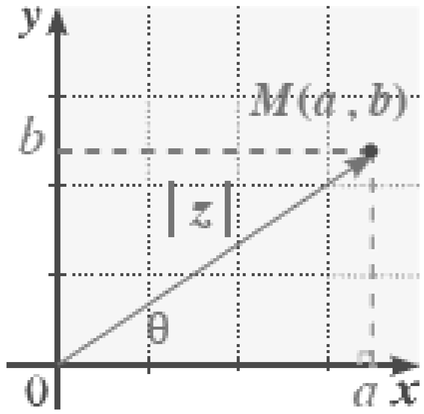
ملاحظ

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

الإحداثيات القطبية و الصورة المثلثية لعدد مركب

Polar Coordinates and Trigonometric Form of a Complex Number

Absolute Value of a Complex Number القيمة المطلقة لعدد مركب



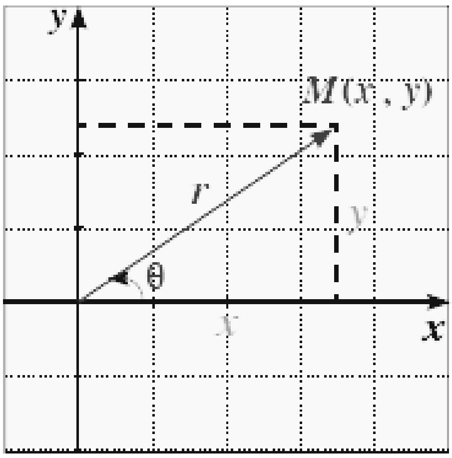
$$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$$

مثــال:

(a) $|6-4i|$

(b) $|-2+5i|$

Polar Coordinates الإحداثيات القطبية



يمثّل الزوج المرتب (r , θ) الإحداثيات القطبية للنقطة M

الزوج المرتب (x , y) يمثل الإحداثيات الديكارتية للنقطة M

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

حيث θ هي الزاوية الموجهة في الوضع القياسي التي يمر ضلعها النهائي بالنقطة M .

مثـــال: أوجد الزوج المرتب (x , y) الذي يمثل الإحداثيات الديكارتية لكل من النقطتين:

ⓑ $B\left(2 , \frac{2\pi}{3}\right)$ ⓐ $A(5 , 300°)$

ملاحظـــة:

للتحويل من الإحداثيات الديكارتية (x , y) إلى الإحداثيات القطبية (r , θ) نوجد قيمة r باستخدام القاعدة: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ثم نوجد قياس زاوية الإسناد α باستخدام: $\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right|$ بعد ذلك تحديد الربع الذي تقع فيه هذه الزاوية θ من إشارة كلٍّ من x, y ونوجدها.

مثـــال:

أوجد الزوج المرتب (r , θ) لكل نقطة مما يلي حيث $0 \leqslant \theta < 2\pi$

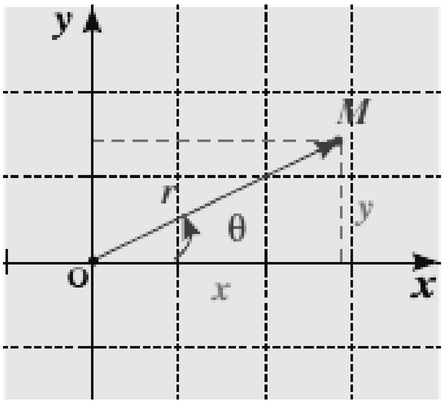
ⓑ $C(4 , -2\sqrt{5})$ ⓐ $D(3\sqrt{3} , 3)$

تذكر:

إذا كانت α زاوية الإسناد للزاوية التي قياسها θ فإن:

$$\theta = \begin{cases} \alpha & : x > 0 , y > 0 \\ \pi - \alpha & : x < 0 , y > 0 \\ \pi + \alpha & : x < 0 , y < 0 \\ 2\pi - \alpha & : x > 0 , y < 0 \end{cases}$$

الصورة المثلثية Trigonometric Form



يمكن كتابة العدد المركب $z = x + yi$ على الصورة:

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ وتعرف بالصورة المثلثية للعدد المركب z.

يسمى r مقياس العدد أو القيمة المطلقة

تسمى θ سعة العدد المركب وتتعيّن من

$\sin\theta = \frac{y}{r}$, $\cos\theta = \frac{x}{r}$ أو تتعين من $\tan\theta = \frac{y}{x}$, $x \neq 0$ وتحديد الربع.

إذا كانت $\theta \in [0, 2\pi)$ أو $0° \leqslant \theta < 360°$ فتسمى السعة في هذه الحالة بالسعة الأساسية.

مثـــال: ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية:

ⓐ $z_1 = \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}}i$

ⓑ $z_2 = -1 - i$

ⓒ $z_3 = -2 + 2\sqrt{3}i$

تذكر:	تذكر:	تذكر:
$\cos(-\theta) = \cos\theta$ $\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta$	$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$ $\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$
معلومة: إذا كانت θ بالقياس السالب فإن السعة الأساسية تساوي: $\theta + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{N}$		تذكر: $\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$ $\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$

مثـــال: ضع كلًا مما يلي في الصورة المثلثية: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

a) $3\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

b) $2\left(\sin\frac{\pi}{4} + i\cos\frac{\pi}{4}\right)$

c) $-\sqrt{3}\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

d) $3(\cos 50° - i\sin(-130°))$

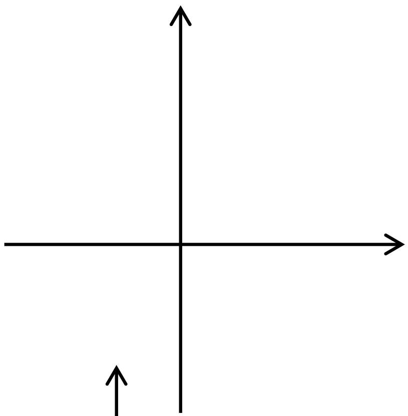
مثـــال: ضع كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية:

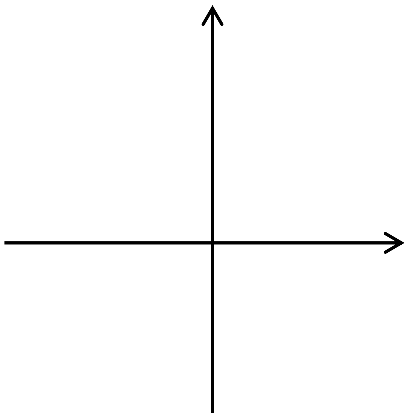
b $z_2 = \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

a $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

الصورة المثلثية في حالات خاصة Trigonometric Form In Special Cases

العدد	المقياس	سعة (بالراديان) (rad)
a	a	0
$-a$	$\lvert -a \rvert = a$	π
bi	b	$\frac{\pi}{2}$
$-bi$	$\lvert -b \rvert = b$	$\frac{3\pi}{2}$



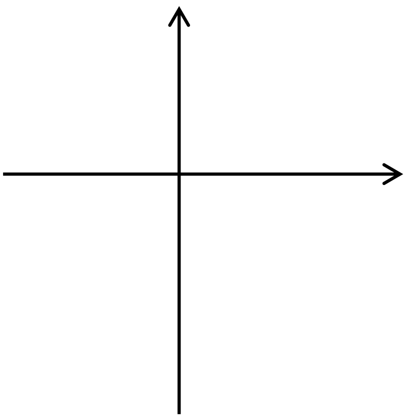


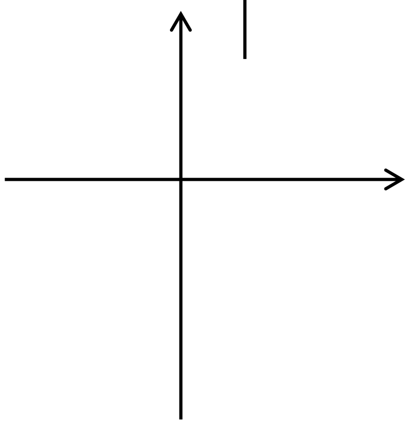
ملاحظة:

إذا كان $z = 0$ ، فإن:

$x = 0 \ , y = 0 \ , r = 0$

θ غير معيّنة.





مثـــال: ضع في الصورة المثلثية كلًّا من الأعداد التالية:

a) $z_1 = 2i$

b) $z_2 = 5$

c) $z_3 = \frac{-3}{4}$

d) $z_4 = -\frac{5}{2}i$

حل معادلات

Solving Equations

أولًا: حل معادلات من الدرجة الأولى في $\mathbb{C}$

Solving First Degree Equations in $\mathbb{C}$

مثـــال: أوجد مجموعة حل المعادلة: $2z + i = 3 + 2i$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$.

مثـــال: أوجد مجموعة حل المعادلة: $z + i = 2\bar{z} + 1$ في $\mathbb{C}$.

ثانيًا: حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد في $\mathbb{C}$

Solving Quadratic Equations With One Variable in $\mathbb{C}$

مثـــال: أوجد مجموعة حل كل معادلة مما يلي حيث $x \in \mathbb{C}$:

a $3x^2 + 48 = 0$

b $-5x^2 - 150 = 0$

c $8x^2 + 2 = 0$

مثـــال: أوجد مجموعة حل المعادلة: $z^2 - 2z + 2 = 0$ في $\mathbb{C}$.

معلومة:
إذا كان z_1, z_2 جذرين تربيعيين للعدد z فإن:
$z_1 + z_2 = 0$

معلومة:
إذا كان $z_1 = z_2$ فيكون:
$|z_1| = |z_2|$.

معلومة:
إذا كان $z = a + bi, b \neq 0$ جذرًا لمعادلة معاملاتها أعدادًا حقيقية فإن $\overline{z} = a - bi$ هو جذر آخر لها.

تذكر:
في المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a , b , c \in \mathbb{R} \ , \ a \neq 0$
مجموع الجذرين $\frac{-b}{a}$
حاصل ضرب الجذرين $\frac{c}{a}$

مثـــال: لتكن المعادلة: $2z^2 - 6z + 5 = 0$

a أثبت أن العدد المركب $z_1 = \frac{3-i}{2}$ هو جذر لهذه المعادلة.

b أوجد الجذر الثاني.

Square Root of a Complex Number الجذر التربيعي لعدد مركب

لإيجاد جذر تربيعي لعدد مركب z نبحث عن عدد w يكون مربعه يساوي z.

ليكن $z = a + bi$

ابحث عن $w = m + ni$، بحيث يكون $w^2 = z$

$$(m+ni)^2 = a + bi$$

$$m^2 - n^2 + 2mni = a + bi$$

$$\therefore \begin{cases} m^2 - n^2 = a \\ 2mn = b \end{cases}$$

للمساعدة على حل هذا النظام ندخل معادلة ثالثة ناتجة عن كون $|w|^2 = |z|$،

أي $(\sqrt{m^2+n^2})^2 = \sqrt{a^2+b^2}$.

مثـــال: أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = -3 - 4i$

مثـــال: أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 5 + 12i$.

مثـــال: أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 5 + 12i$.

مثـــال: أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 7 + 24i$

حساب المثلثــات Trigonometry

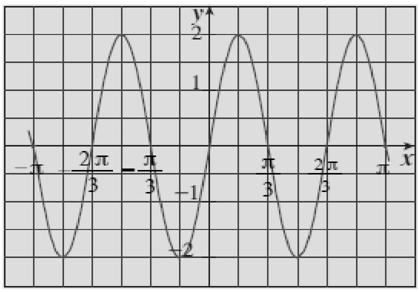
التمثيل البياني للدوال المثلثية (الجيب، جيب التمام، الظل)

Graphs of Trigonometric Functions (Sine, Cosine and Tangent)

الدوال الجيبية Sinusoidal Functions

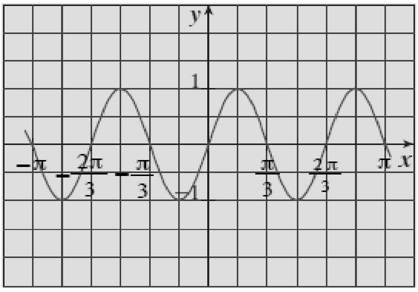
تسمّى الدالة على الصورة $y = a\sin bx$ **دالة الجيب** والدالة على الصورة $y = a\cos bx$ دالة **جيب التمام** حيث $b \neq 0$ ، $a \neq 0$ وهما دالتان جيبيتان وكل منهما دورية.

تمثل الأشكال التالية بيانات بعض دوال الجيب:



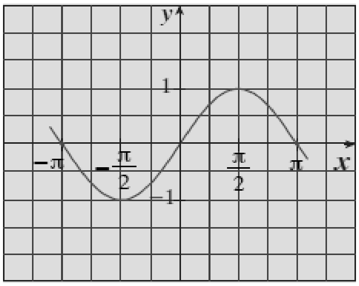
$y = 2\sin 3x$

شكل (3)



$y = \sin 3x$

شكل (2)



$y = \sin x$

شكل (1)

1. تسمى $|a|$ سعة الدالة الجيبية.
2. $|b|$ تمثل عدد الدورات في الفترة $[0, 2\pi]$
3. $\frac{2\pi}{|b|}$ تمثل دورة الدالة.

مثـــال:

أوجد الدورة والسعة لكل دالة مما يلي:

b $y = \frac{1}{2}\cos(-x)$

a $y = -2\cos 5x$

مثـــال: اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\cos bx$ إذا كانت:

a الدورة هي $\frac{\pi}{3}$ ، $a = -2$

b الدورة هي π ، $a = 0.25$

c الدورة هي 2 ، $a = 1$

التمثيل البياني للدوال المثلثية Graph of Trigonometric Functions

أوّلًا: دالة الجيب The Sine Function

$y = \sin x$ هي دالة مثلثية مجالها $\mathbb{R}$ ومداها $[-1,1]$، وهي دالة دورية ذات دورة 2π وسعتها تساوي واحد.

مثـــال: أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

b $y = -4\sin x \ , \ x \in [-\pi \ , \ 2\pi]$

a $y = \frac{1}{2}\sin 4x$

ثانيًا: دالة جيب التمام The Cosine Function

$y = \cos x$ هي دالة مثلثية مجالها هو أيضًا $\mathbb{R}$ ومداها هو $[-1,1]$، وهي دالة دورية ذات دورة 2π وسعتها تساوي واحد.

مثـــال: أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

(a) $y = 3\cos 2x$

(b) $y = -2\cos\left(\frac{3}{4}x\right)\ ,\ 0 \le x \le 2\pi$

ثالثًا: دالة الظل Tangent Function

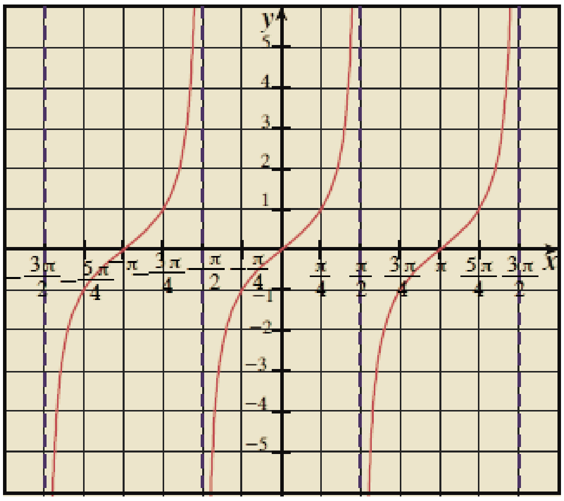
هي الدالة المثلثية على الصورة $y = \tan x$ وتكتب:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \ : \ \cos x \neq 0$$

مجالها: $D = \mathbb{R} - \left\{x : x = \frac{\pi}{2} + n\pi \ , \ n \in \mathbb{Z}\right\}$

ومداها: $\mathbb{R}$

وهي دالة دورية ذات دورة π



من بيان دالة الظل نلاحظ أن دالة الظل:

1. ليس لها سعة.
2. لأي عدد صحيح n فإن $\tan(n\pi) = 0$
3. لأي عدد صحيح n فإن $\tan\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ غير معرف. وتسمى المستقيمات $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ محاذيات رأسية لبيان الدالة $y = \tan x$
4. دالة فردية لأن: $\tan(-x) = -\tan x \ , \ \forall x \in D$
5. منحناها متناظر حول نقطة الأصل.

وبصفة عامة: الدالة $y = a\tan bx$ ،

مثـــال: أوجد الدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

(b) $y = \frac{1}{2}\tan x$

(a) $y = -\tan x$

خصائص الدوال المثلثية باعتبار $n \in \mathbb{Z}$

الخاصية	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
الدورة	2π	2π	π
المجال	$(-\infty\ ,\ \infty)$	$(-\infty\ ,\ \infty)$	$\mathbb{R}-\left\{x\ ,x=\frac{\pi}{2}+n\pi\right\}$
المدى	$[-1\ ,\ 1]$	$[-1\ ,\ 1]$	$(-\infty\ ,\ \infty)$
الأصفار	$x=n\pi$	$x=\frac{\pi}{2}+n\pi$	$x=n\pi$
زوجية أو فردية	فردية	زوجية	فردية

التحويلات الهندسية للدوال الجيبية

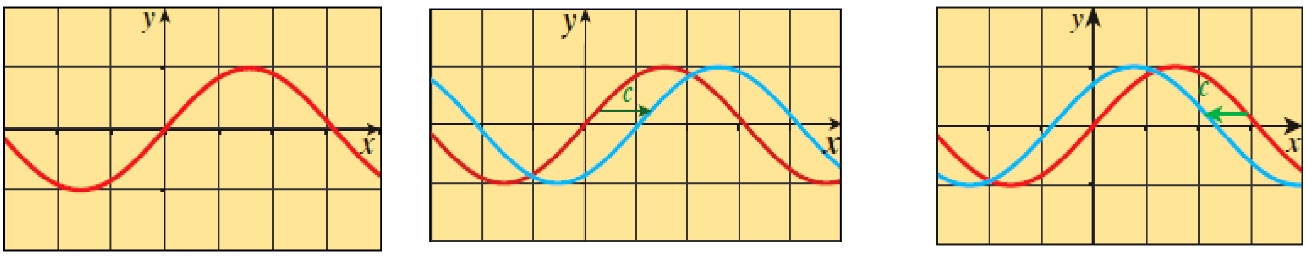
Geometric Transformations of Sinusoid Functions

الإزاحة الأفقية — Horizontal Translation

بيان الدالة $y=f(x-c)$ ينتج من إزاحة أفقية لبيان الدالة $y=f(x)$ بمقدار c

إذا كان c موجبًا فإن الإزاحة تكون جهة اليمين.

إذا كان c سالبًا فإن الإزاحة تكون جهة اليسار.



$y=f(x)$

$y=f(x-c)$ $c>0$

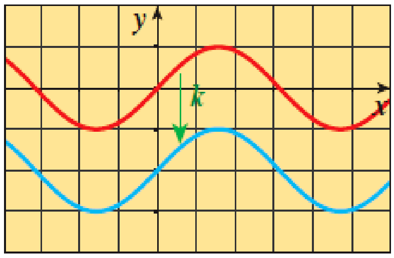
$y=f(x-c)$ $c<0$

الإزاحة الرأسية Vertical Translation

بيان الدالة $y = f(x) + k$ ينتج من إزاحة رأسية لبيان الدالة $y = f(x)$ بمقدار k

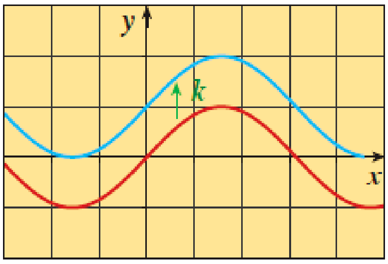
إذا كان k موجبًا فإن الإزاحة تكون إلى الأعلى.

إذا كان k سالبًا فإن الإزاحة تكون إلى الأسفل.



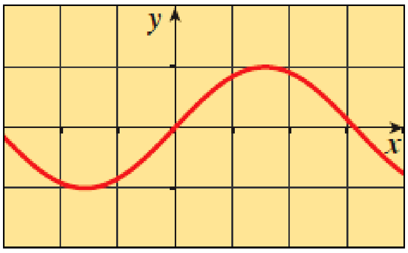
$y = f(x) + k$

$k < 0$



$y = f(x) + k$

$k > 0$



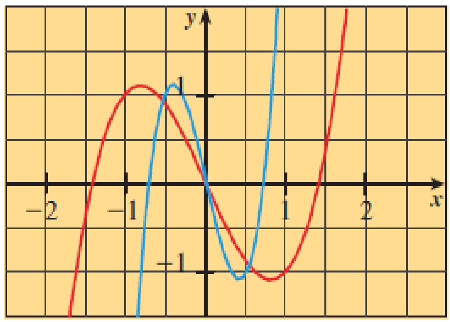
$y = f(x)$

التمدد / الانكماش الأفقي Horizontal Stretch or Shrink

ليكن b عددًا موجبًا.

بيان الدالة $y = f(bx)$ ينتج من انكماش / تمدد أفقي لبيان الدالة $y = f(x)$

إذا كان $b > 1$ ؛ انكماش بمعامل $\frac{1}{b}$

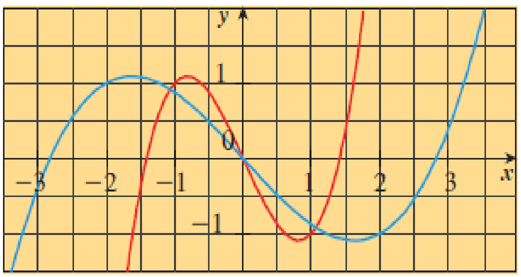


$y = f(x) = x^3 - 2x$

$y = f(2x) = (2x)^3 - 2(2x)$

انكماش أفقي بمعامل $\frac{1}{2}$

إذا كان $b < 1$ ؛ تمدد بمعامل $\frac{1}{b}$



$y = f(x) = x^3 - 2x$

$y = f(0.5x) = (0.5x)^3 - 2(0.5)x$

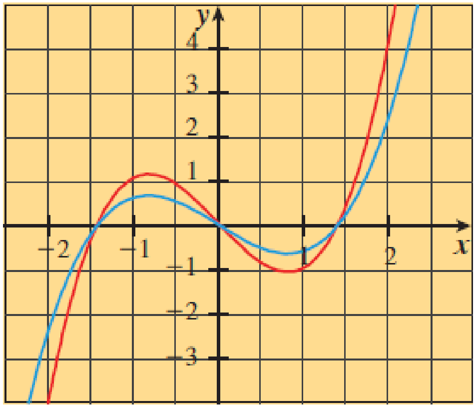
تمدد أفقي بمعامل $\frac{1}{0.5}$

التمدد/الانكماش الرأسي
Vertical Stretch or Shrink

ليكن a عددًا موجبًا $a \neq 0$

بيان الدالة $y = af(x)$ ينتج من انكماش/تمدد رأسي لبيان الدالة $y = f(x)$

إذا كان $|a| < 1$ انكماش بمعامل $|a|$

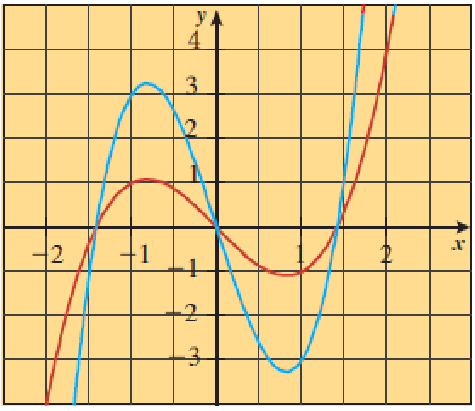


$y = f(x) = x^3 - 2x$

$y = 0.6f(x) = 0.6x^3 - 1.2x$

انكماش رأسي بمعامل 0.6

إذا كان $|a| > 1$ تمدد بمعامل $|a|$



$y = f(x) = x^3 - 2x$

$y = 3f(x) = 3x^3 - 6x$

تمدد رأسي بمعامل 3

تكون الدالة جيبية إذا أمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$f(x) = a\sin(bx - h) + k$$

أو $$f(x) = a\cos(bx - h) + k$$

حيث a, b, h, k ثوابت $b \neq 0$, $a \neq 0$

التمدد/الانكماش الرأسي و سعة الدالة الجيبية
Vertical Stretch/Shrink and the Amplitude of a Sinusoid

سعة الدالة $f(x) = a\sin(bx - h) + k$ أو $f(x) = a\cos(bx - h) + k$ هي $|a|$.

مثـــال: صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين: $y_2 = \frac{1}{3}\sin x$, $y_1 = \sin x$.

التمدد/الانكماش الأفقي ودورة الدالة

Horizontal Stretch/Shrink and the Period

عند تطبيق التمدد الأفقي أو الانكماش الأفقي على دالة جيبية فإن خاصية الدالة التي تتغير تسمى **دورة الدالة** حيث:

دورة كلّ من: $y = a\cos(bx)$ ، $y = a\sin(bx)$ هي $\frac{2\pi}{|b|}$

مثـــال: صف العلاقة بين التمثيلين البيانيين لكل من: $y_2 = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ ، $y_1 = \cos x$

ارسم دورتين من الدالة: $y_2 = \cos\frac{x}{2}$

مثـــال: صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين: $y_1 = \cos x \; , \; y_2 = 2\cos\left(-\frac{1}{3}x\right)$

مثـــال:
صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين h , f لكل مما يلي:

(a) $f(x) = \cos 2x \; , \; h(x) = \frac{5}{3}\cos 2x$

(b) $f(x) = \sin\frac{x}{3} \; , \; h(x) = \frac{-2}{3}\sin\frac{x}{3}$

(c) $f(x) = \sin x \; , \; h(x) = \sin 3x$

(d) $f(x) = \cos x \; , \; h(x) = \cos\frac{x}{5}$

الإزاحة الأفقية   Horizontal Translation

بيان $y = a\sin(bx - h)$

ينتج من إزاحة أفقية لبيان $y = a\sin bx$، بمقدار $\frac{h}{b}$ إلى جهة اليمين عندما $h > 0$، وإلى جهة اليسار عندما $h < 0$

وبالمثل لبيان الدالة: $y = a\cos(bx - h)$

مثــــال:

صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين:

ⓑ $y_1 = \sin 3x\ ,\ y_2 = \sin(3x - 7)$

ⓐ $y_1 = \cos x\ ,\ y_2 = \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$

لكل قيم x يكون التالي صحيحًا:

1. $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin x$
2. $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$
3. $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$
4. $\cos(x\pm 2\pi)=\cos x$
5. $\sin(x\pm 2\pi)=\sin x$
6. $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x$

الإزاحة الرأسية

بيان الدالة $y=a\sin(bx-h)+k$ ينتج عن إزاحة رأسية لبيان الدالة $y=a\sin(bx-h)$ بمقدار k (إلى أعلى إذا كانت k موجبة، وإلى أسفل إذا كانت k سالبة).

مثـــال: صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين: $y_2=\frac{3}{4}\sin x+2$, $y_1=\frac{3}{4}\sin x$

مثـــال: $h(x)=3\sin\frac{x}{2}-1$, $f(x)=3\sin\frac{x}{2}$

ملخص التحويلات على الدوال الجيبية

Transformations Sinusoid Functions

التحويل	بالتطبيق على $y=\cos x$	بالتطبيق على $y=\sin x$
التمدد الرأسي/الانكماش (السعة)	$y=a\cos x$	$y=a\sin x$
التمدد الأفقي/الانكماش (الدورة)	$y=\cos bx$	$y=\sin bx$
الإزاحة الأفقية	$y=\cos(x-h)$	$y=\sin(x-h)$
الإزاحة الرأسية	$y=\cos x+k$	$y=\sin x+k$
الانعكاس في محور السينات	$y=-\cos x$	$y=-\sin x$
الانعكاس في محور الصادات	$y=\cos(-x)=\cos x$	$y=\sin(-x)=-\sin x$

مثـــال:

وضّح كيف يمكن الحصول على التمثيل البياني لكل من الدالتين التاليتين عن طريق التمثيلات البيانية للدوال المثلثية:

$\sin x$ أو $\cos x$. أوجد أيضًا سعة كل دالة ودورتها.

(a) $y=\cos(1-x)+2$

(b) $y=2\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)-1$

مثـــال:

وضّح كيف يمكن الحصول على التمثيل البياني لكل من الدالتين التاليتين باستخدام تحويلات الدوال المثلثية $y = \sin\theta$ أو $y = \cos\theta$، ثم أوجد سعة كل دالة ودورتها:

(a) $y = -2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 1$

(b) $y = 3.5\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) - 1$

قانون الجيب

في أي مثلث ABC :

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$$

استخدام قانون الجيب   Using the Law of Sine

مثـــال: حل ΔABC حيث: $\alpha=36^\circ \ , \ \beta=48^\circ \ , \ a=8\,\text{cm}$

ملاحظة : يسمح قانون الجيب بحل مثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما.

مثـــال: حل ΔABC حيث: $\alpha = 26.3^\circ$, $b = 6\text{ cm}$, $a = 7\text{ cm}$

مثـــال: حلّ المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 43°\,, a = 32\text{ cm}\,, b = 28\text{ cm}$

مثـــال: حل المثلث ABC : $m(\widehat{B}) = 57°\,, a = 11\,\text{cm}\,, b = 10\,\text{cm}$

قانون جيب التمام Law of Cosine

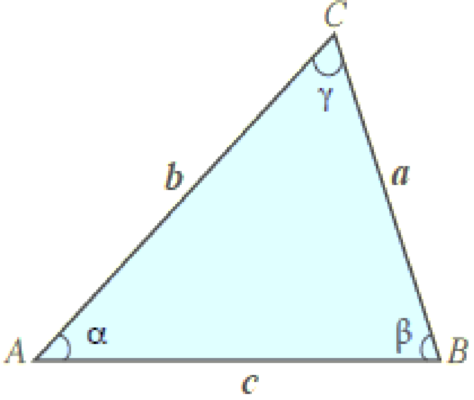
قانون جيب التمام Law of Cosine

في ΔABC

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$



استخدام قانون جيب التمام Using the Law of Cosine

يسمح قانون جيب التمام بحل مثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

مثال: حل ΔABC حيث: $a = 11\text{ cm}\ ,\ b = 5\text{ cm}\ ,\ \gamma = 20°$

معلومة:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

مثـــال: في ΔABC حيث: $a = 9\,\text{cm}\ ,\ b = 7\,\text{cm}\ ,\ c = 5\,\text{cm}$

أوجد قياس الزاوية الأكبر.

معلومة:
يمكن حل أي مثلث معلوم فيه ضلعين وزاوية ليست محصورة بينهما باستخدام قانون الجيب أو جيب التمام.

مثـــال: حل ΔABC حيث: $a = 5\text{ cm} \;,\; b = 6.5\text{ cm} \;,\; \alpha = 25^\circ$

Area of Triangle مساحة المثلث

مثـــال: أوجد مساحة المثلث ABC حيث: $a = 5\,\text{cm}\ ,\ b = 6\,\text{cm}\ ,\ c = 8\,\text{cm}$

مثـــال: أوجد مساحة المثلث ABC حيث: $a = 5\,\text{cm}\ ,\ b = 6\,\text{cm}\ ,\ c = 8\,\text{cm}$

قاعدة هيرون Heron's Formula

يمكننا أيضًا إيجاد مساحة مثلث بمعرفة أطوال أضلاعه الثلاثة بالقاعدة التالية:

قاعدة هيرون

تعطى مساحة مثلث ABC أطوال أضلاعه a , b , c بالقاعدة:

$$\text{Area}(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

حيث: $s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \text{semiperimeter}$ (نصف محيط المثلث)

مثـــال: أوجد مساحة المثلث ABC حيث: $a = 4\text{ cm}$, $b = 4\text{ cm}$, $c = 3\text{ cm}$

مثـــال: في أحد سباقات المراكب الشراعية وضعت اللجنة المنظمة شرطًا ألا تتعدى مساحة شراع المركب $7.5\ m^2$.

إذا كان شراع أحد المراكب على شكل مثلث أبعاده: $3\ m$, $5\ m$, $6\ m$

فهل يسمح له بالمشاركة في السباق؟

The Trigonometric Identities المتطابقات المثلثية

Trigonometric Identities المتطابقات المثلثية الأساسية

- متطابقات القسمة (الظل وظل التمام) Quotient Identities (Tangent and Cotangent

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad , \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

- متطابقات المقلوب Reciprocal Identities

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad , \quad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad , \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

- متطابقات فيثاغورث Pythagorian Identities

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \quad , \quad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \quad , \quad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

المتطابقات بند (1-9) معلق

إثبات صحة متطابقات مثلثية

Confirming Trigonometric Identities

مثـــال: أثبت صحة المتطابقة: $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=2\csc\theta$

مثـــال: أثبت صحة المتطابقة: $\frac{1+\sin x}{1-\sin x}-\frac{1-\sin x}{1+\sin x}=4\tan x\cdot\sec x$

مثـــال: أثبت صحة المتطابقة: $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=(\csc x-\cot x)^2$

مثـــال: أثبت أن: $\frac{\sec x+\tan x}{\cot x+\cos x}=\sin x+\sin x\tan^2 x$

مثـــال: أثبت صحة المتطابقة: $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$

إرشاد: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

حل معادلات مثلثية

Solving Trigonometric Equations

تذكر أن:

معلومة:

إذا كانت θ تقع في الربع الأول، فإن زاوية الإسناد α تساوي θ

تذكر:

إذا كانت الزاوية θ تقع في الربع الأول فإن الزاوية $(\pi - \theta)$ تقع في الربع الثاني ويكون:

$\sin\theta = \sin(\pi - \theta)$

وحل المعادلة:

$\sin x = \sin\theta$

هو: $x = \theta + 2k\pi$

أو $x = (\pi - \theta) + 2k\pi$

حيث $k \in Z$

تذكر:

إذا كانت θ تقع في الربع الأول فإن الزاوية $(-\theta)$ تقع في الربع الرابع ويكون:

$\cos\theta = \cos(-\theta)$

وحل المعادلة:

$\cos x = \cos\theta$

هو: $x = \theta + 2k\pi$

أو $x = -\theta + 2k\pi$

حيث $k \in Z$

مثـــال: حل المعادلة: $\sqrt{2}\cos x = 1$

مثـــال: حل المعادلة: $5\sin\theta - 3 = \sin\theta$

مثـــال: حل المعادلة: $\tan x = 1$

مثـــال: حل المعادلة: $\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$

مثـــال: حل المعادلة: $\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0$

مثـــال: حل كلًّا من المعادلات التالية:

(1) $\sqrt{3}\tan a = 1$

(2) $2\cos x\sin x - \cos x = 0$

معادلات تحتوي على مضاعفات الزوايا   Equations Involving Multiples of Angles

يقال للمعادلة: $2\cos 3x = \sqrt{2}$ أنها **معادلة مضاعفات الزاوية**، لأن الزاوية في هذه المعادلة $3x$، وهي من مضاعفات x.

مثــال: حل المعادلة: $4\cos 2x = 2$ حيث $0° \leq x < 360°$

مثـــال: حل المعادلة: $4\cos^2 2x = 1$

مثـــال: أوجد جميع حلول المعادلة على الفترة $[0, 2\pi)$

(1) $2\cos 3x = 1$

(2) $\tan 2x = 1$

مثـــال: حل المعادلة التالية : $2\sin^2 x + 3\sin x = 2$

متطابقات المجموع و الفرق

Sum and Difference Identities

متطابقات الدوال المتكافئة

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta \qquad \sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\csc\theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sec\theta$$

مثـــال: أثبت أن: $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\theta$

مثـــال: أثبت أن: $\sec\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\csc\theta$

Sum and Difference Identities   متطابقات المجموع والفرق

متطابقات المجموع والفرق

$$\cos(\beta+\alpha)=\cos\beta\cos\alpha-\sin\beta\sin\alpha$$

$$\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha$$

$$\sin(\beta+\alpha)=\sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha$$

$$\sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha$$

$$\tan(\beta+\alpha)=\frac{\tan\beta+\tan\alpha}{1-\tan\beta\tan\alpha}$$

$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

مثـــال: أوجد دون استخدام الآلة الحاسبة كلًّا مما يلي:

a $\sin 15^\circ$ b $\cos 75^\circ$ c $\tan 105^\circ$

مثـــال: إذا كان: $\sin\alpha = \frac{4}{5}\ ,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\cos\beta = \frac{-12}{13}\ ,\ \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$

أوجد كلًّا مما يلي:

a) $\cos(\alpha+\beta)$ b) $\tan(\alpha+\beta)$ c) $\sin(\beta-\alpha)$

متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

Double–Angle and Half–Angle Identities

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$	$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
$\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$	$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$
	$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

مثـــال: إذا كان $\sin x = \frac{5}{13}$ استخدم متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية لإيجاد: $\cos 2x$

مثـــال: إذا كان $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ، $\cos\theta = \frac{3}{5}$ فأوجد $\sin 2\theta$.

مثـــال: إذا كان $\tan\theta = \sqrt{3}$ ، استخدم متطابقة ظل ضعف الزاوية لإيجاد $\tan 2\theta$

مثـــال: أثبت صحة المطابقة: $2\cos 2\theta = 4\cos^2\theta - 2$

مثـــال: أثبت صحة المطابقة: $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

متطابقات نصف الزاوية

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

مثـــال: استخدم متطابقات نصف الزاوية لإيجاد $\cos 15°$

مثـــال: إذا كانت: $180° < \theta < 270°$ ، $\sin\theta = -\frac{24}{25}$ ،
فأوجد $\sin\frac{\theta}{2}$. $\tan\frac{\theta}{2}$, $\cos\frac{\theta}{2}$

الهندسة الفراغية (هندسة الفضاء)

Space Geometry

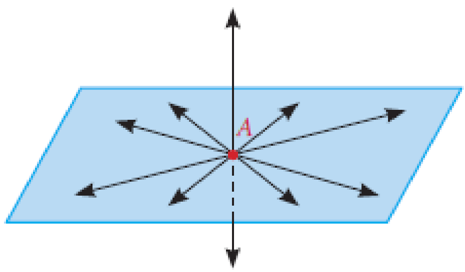
مسلمات (موضوعات) الفضاء Space Postulates

a

(i) أي نقطتين مختلفتين في الفضاء يمر بهما مستقيم وحيد (واحد فقط).

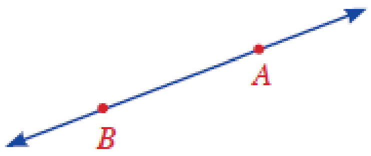
(ii) كل مستقيم يحوي على الأقل نقطتين مختلفتين.

(iii) من نقطة خارج مستقيم يوجد مستقيم وحيد يمر بالنقطة ويوازي المستقيم المعلوم.



نقطة واحدة

عدد لا نهائي من المستقيمات

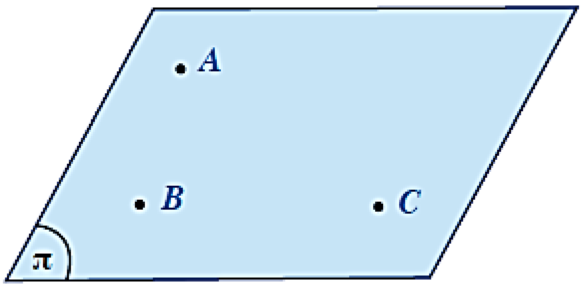


نقطتان مختلفتان

مستقيم واحد فقط

b

(i) في كل مستوٍ يوجد على الأقل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.

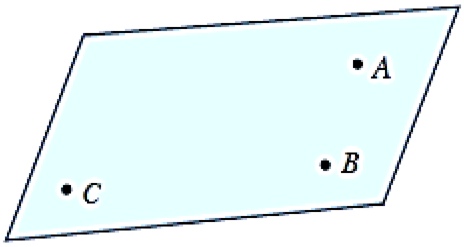


A, B, C ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة

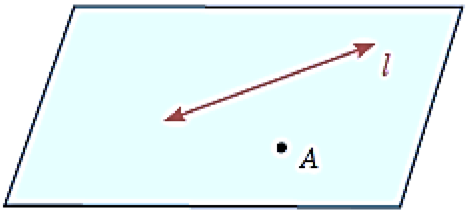
(ii) أي ثلاث نقاط مختلفة وليست على استقامة واحدة يحويها مستوٍ وحيد.

حالات تعيين المستوي في الفضاء

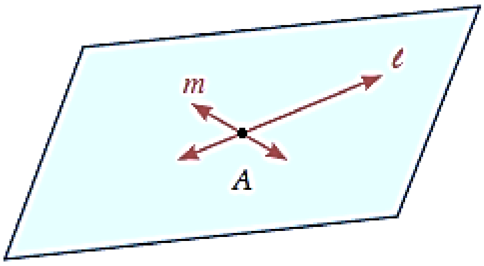
- أي ثلاث نقاط مختلفة ليست على استقامة واحدة تعيّن مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيم ونقطة خارجة عنه يعيّنان مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيمان متقاطعان يعينان مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيمان متوازيان مختلفان يعينان مستويًا واحدًا فقط.



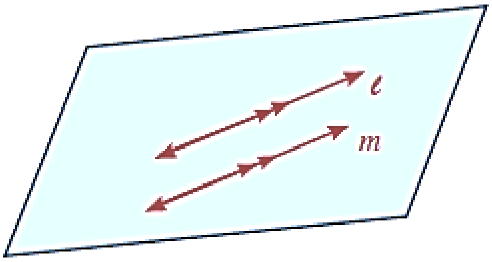
ثلاث نقاط غير مستقيمة



مستقيم ونقطة خارجة عنه

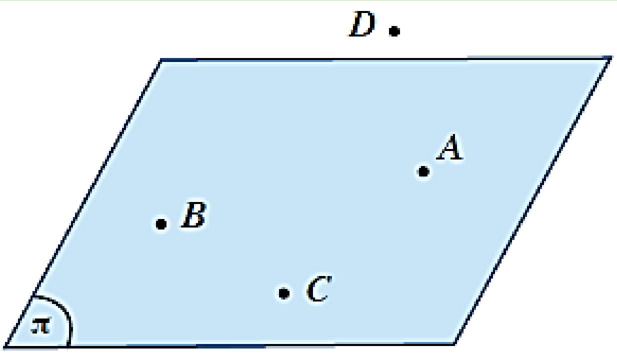


مستقيمان متقاطعان



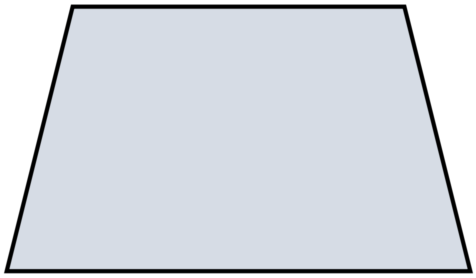
مستقيمان متوازيان

c يحوي الفضاء على الأقل أربع نقاط مختلفة غير مستوية.



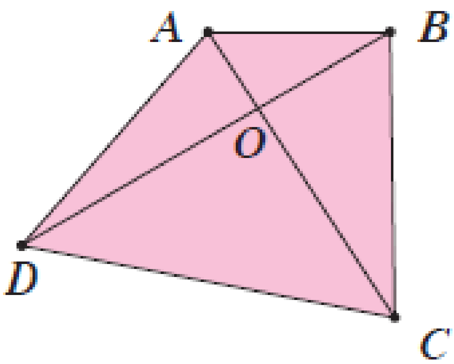
النقاط A, B, C, D لا تقع في مستوٍ واحد

مثـــال: أثبت أن أضلاع أي شبه منحرف تقع جميعها في مستوٍ واحد.



مثـــال: في الشكل المقابل $\overline{BD}$, $\overline{AC}$ يتقاطعان في O

أثبت أن أضلاع الرباعي $ABCD$ تقع جميعها في مستوٍ واحد.



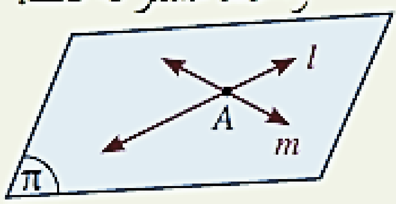
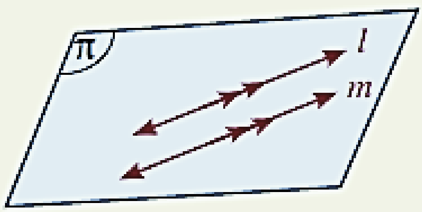
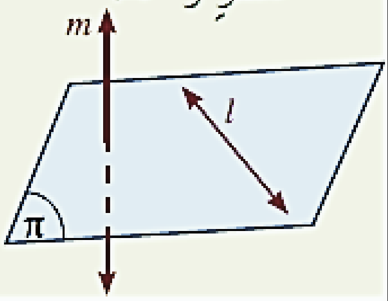
أوضاع المستقيمات في الفضاء Positions of Lines in Space

l, m مستقيمان مختلفان في الفضاء.

في الهندسة المستوية يكون مستقيمان متوازيين أو متقاطعين.

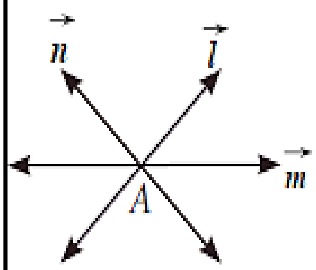
أما في الهندسة الثلاثية الأبعاد فهناك **ثلاثة أوضاع: متقاطعان أو متوازيان أو متخالفان.**

يقال لمستقيمين مختلفين في الفضاء أنهما:

a متقاطعان	b متوازيان	c متخالفان
إذا وقعا في مستوٍ واحد وكان بينهما نقطة واحدة مشتركة فقط. 	إذا وقعا في مستوٍ واحد وكانا غير متقاطعين. 	إذا كان لا يحويهما مستوٍ واحد. 
$\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \{A\}$ مستقيمان متقاطعان	$\overleftrightarrow{l} \subset \pi\ ,\ \overleftrightarrow{m} \subset \pi\ ,$ $\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \phi \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ مستقيمان متوازيان	$\overleftrightarrow{l} \subset \pi\ ,\ \overleftrightarrow{m} \not\subset \pi$ $\Rightarrow \overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \phi$ مستقيمان متخالفان

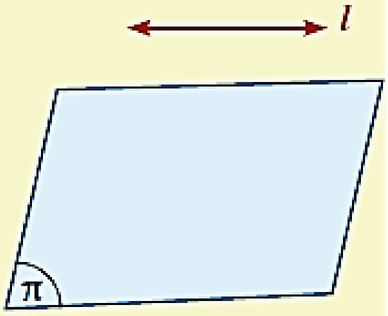
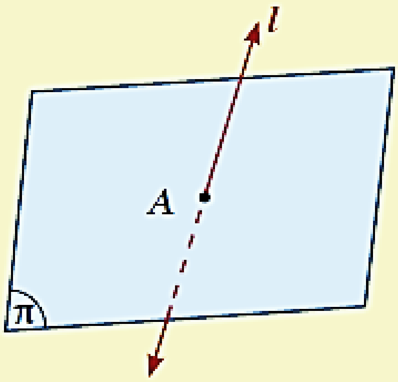
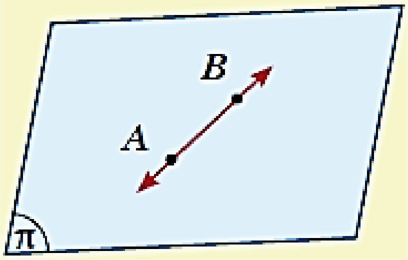
ملاحظات:

- تتقاطع عدة مستقيمات مختلفة إذا وجدت نقطة وحيدة مشتركة بينها أي أن:
  $\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} \cap ... \cap \overleftrightarrow{n} = \{A\}$
- مستقيمات الفضاء لا يمكن أن تقع جميعها في مستوٍ واحد.
- كل مستقيم يوازي نفسه.



Positions of a Line and a Plane in Space أوضاع مستقيم ومستوٍ في الفضاء

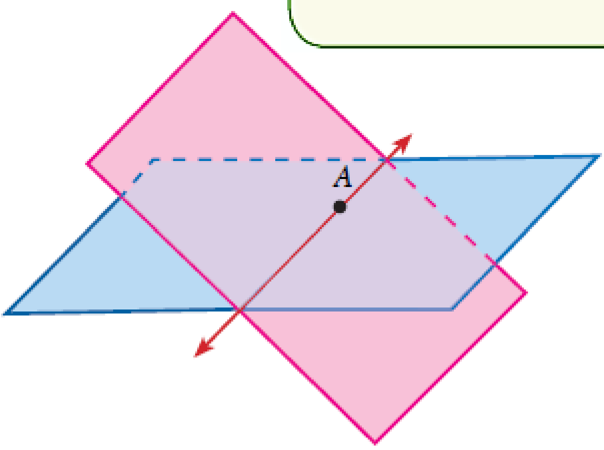
إن معرفة عدد النقاط المشتركة بين مستقيم ومستوٍ في الفضاء تسمح بمعرفة أوضاعهما وهي:

a صفر نقطة مشتركة:	b نقطة مشتركة واحدة:	c نقطتان مختلفتان مشتركتان على الأقل
المستقيم موازٍ للمستوي (في هذه الحالة يكون البعد بينهما ثابت). 	المستقيم يقطع المستوي. 	المستقيم يقع بكامله (بتمامه) في المستوي (المستقيم يوازي المستوى). 
$\overleftrightarrow{l} \cap \pi = \phi \Rightarrow \overleftrightarrow{l} /\!/ \pi$	$\overleftrightarrow{l} \cap \pi = \{A\}$	$\overleftrightarrow{AB} \cap \pi = \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \subset \pi$ $\therefore\ \overleftrightarrow{AB} /\!/ \pi$

Positions of Two Planes in Space أوضاع مستويين في الفضاء

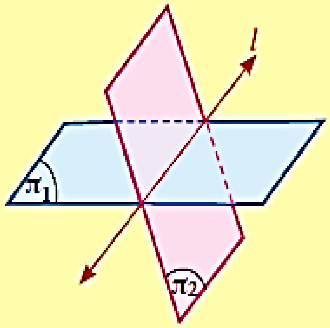
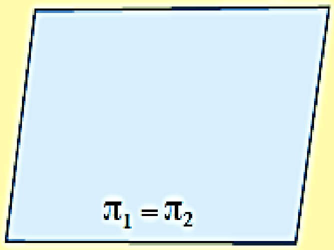
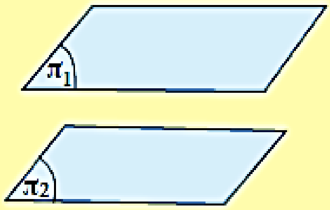
إذا اشترك مستويان مختلفان في نقطة فإنه يوجد على الأقل نقطة أخرى مشتركة بين هذين المستويين.

إذا تقاطع مستويان مختلفان فإنهما يتقاطعان في مستقيم.



إذا اشترك مستويان في ثلاث نقاط مختلفة وليست على استقامة واحدة يكون المستويان منطبقين.

يمكن حصر أوضاع مستويين في الفضاء بثلاث حالات:

<table>
<tr>
<td>a المستويان متقاطعان في مستقيم.

</td>
<td>b المستويان منطبقان (يشتركان في جميع النقاط).

</td>
<td>c المستويان متوازيان (لا توجد نقاط مشتركة بينهما).

</td>
</tr>
<tr>
<td>$\pi_1 \cap \pi_2 \neq \phi \Longrightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l}$</td>
<td>$\pi_1 = \pi_2 \Longrightarrow \pi_1 \,/\!/\, \pi_2$</td>
<td>$\pi_1 \cap \pi_2 = \phi \Longrightarrow \pi_1 \,/\!/\, \pi_2$</td>
</tr>
</table>

مثـــال: $\overleftrightarrow{n}$, $\overleftrightarrow{m}$, $\overleftrightarrow{l}$ ثلاثة مستقيمات مختلفة تتقاطع في A.

المستقيم t يقطع المستقيمات الثلاثة في B, C, D على الترتيب.

أثبت أن المستقيمات l , m , n , t تقع في مستوٍ واحد.

المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء

Parallel Lines and Planes in Space

نظرية (1)

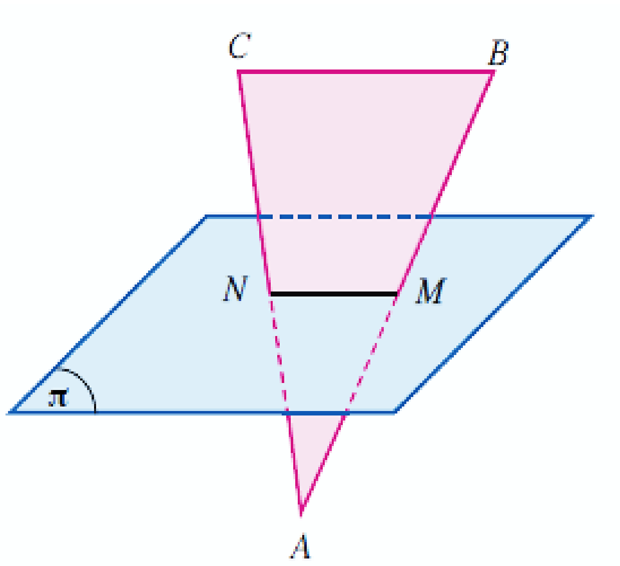
إذا وازى مستقيم خارج مستوٍ مستقيمًا في المستوي، فإنه يوازي المستوي.

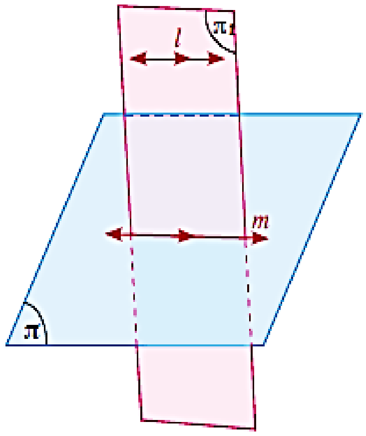
مثـــال:

في الشكل المقابل: المثلث ABC فيه M منتصف $\overline{AB}$، N منتصف $\overline{AC}$،

M، N تنتميان إلى المستوي π .

أثبت أن $\pi \,/\!/\, \overleftrightarrow{BC}$.



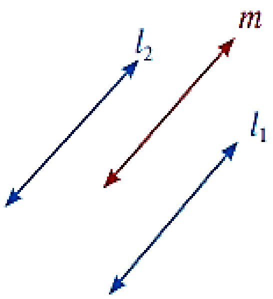


نظرية (2)

إذا وازى مستقيم مستويًا، فكل مستوٍ مار بالمستقيم ويقطع المستوي، يقطعه في مستقيم موازٍ للمستقيم المعلوم.

$\because\ \overleftrightarrow{l} \parallel \pi\ ,\ \overleftrightarrow{l} \subset \pi_1\ ,\ \pi_1 \cap \pi = \overleftrightarrow{m}$

$\therefore\ \overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{l}$



نظرية (3)

المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث في الفضاء متوازيان.

$\because \overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{m}\ ,\ \overleftrightarrow{l_2} \parallel \overleftrightarrow{m}$

$\therefore\ \overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{l_2}$

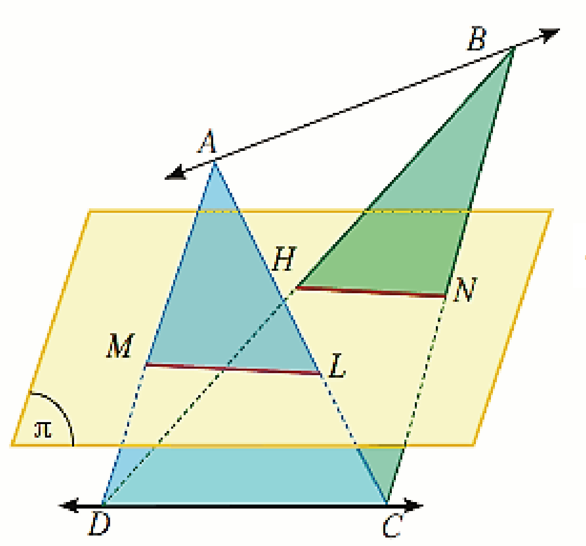
مثـــال: في الشكل المقابل: إذا كان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متخالفان، $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$.

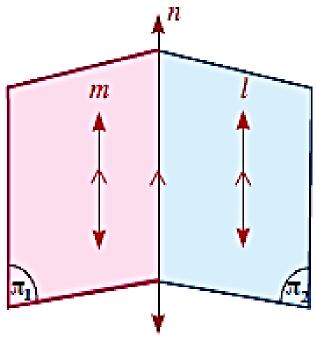
$\overleftrightarrow{AD}$ تقطع π في M، $\overleftrightarrow{AC}$ تقطع π في L.

$\overleftrightarrow{BD}$ تقطع π في H، $\overleftrightarrow{BC}$ تقطع π في N.

أثبت أن: $\overleftrightarrow{LM} \parallel \overleftrightarrow{NH}$

إذا كان $\overleftrightarrow{AB} \parallel \pi$ فأثبت أن $LMHN$ متوازي أضلاع.





نتيجة (1)

إذا توازى مستقيمان ومرّ بهما مستويان متقاطعان،

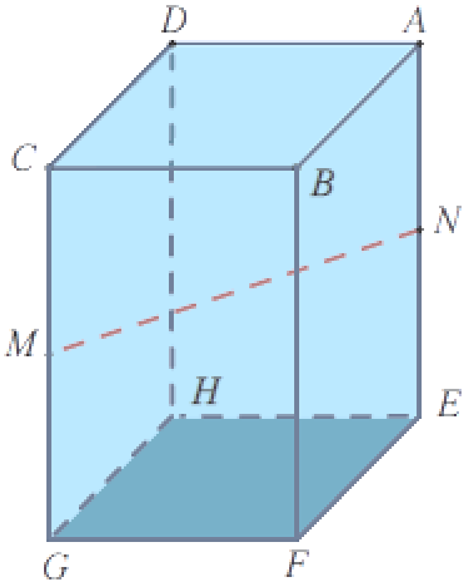
فإن تقاطعهما هو مستقيم يوازي كلًّا من هذين المستقيمين.

$$(\overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{l}\ ,\ \overleftrightarrow{m} \subset \pi_1\ ,\ \overleftrightarrow{l} \subset \pi_2\ ,\ \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{n}) \Rightarrow (\overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{n})$$

مثــال: $ABCDEFGH$ شبه مكعب.

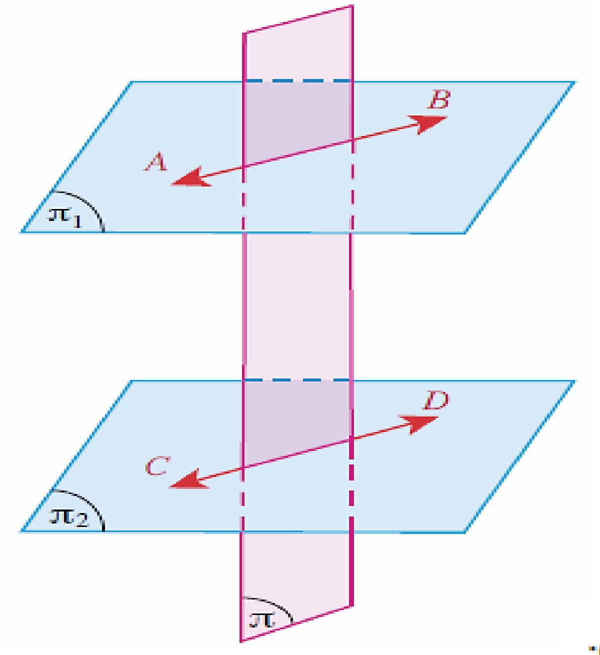
M منتصف $\overline{CG}$, N منتصف $\overline{AE}$.

أثبت أن $(EFGH)$ يوازي $\overleftrightarrow{MN}$.



نظرية (4)

إذا قطع مستوٍ مستويين متوازيين فإن خطي تقاطعه معهما يكونان متوازيين.

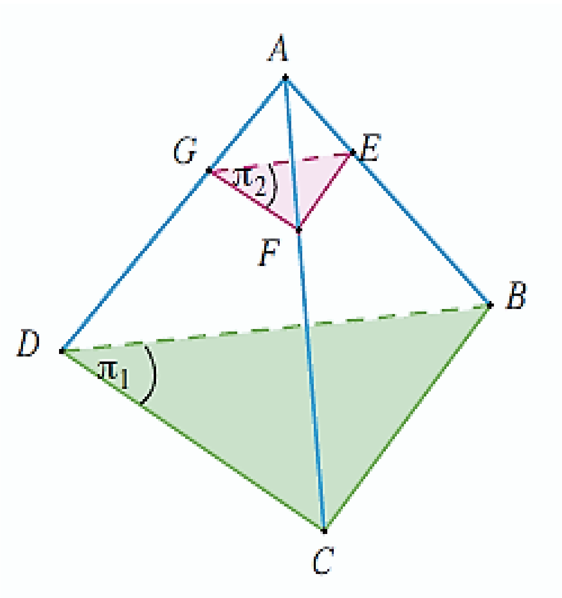


مثـــال: في الشكل المقابل، $ABCD$ هرم ثلاثي.

المستويان π_2 ، π_1 متوازيان.

إذا كان $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$ ، $FG = 6\text{ cm}$

فأوجد DC

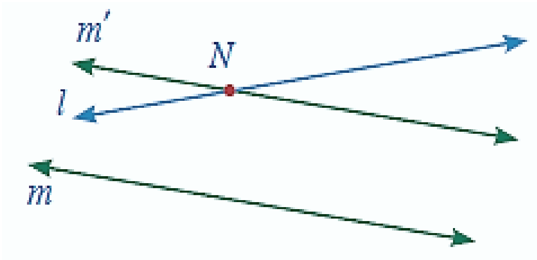


تعامد مستقيم مع مستوٍ

Perpendicular Line With a Plane

الزاوية بين مستقيمين متخالفين Angle Between Two Skew Lines

الزاوية بين مستقيمين متخالفين هي الزاوية التي يصنعها أحدهما مع أي مستقيمٍ قاطعٍ له ومواز للآخر.



تعريف

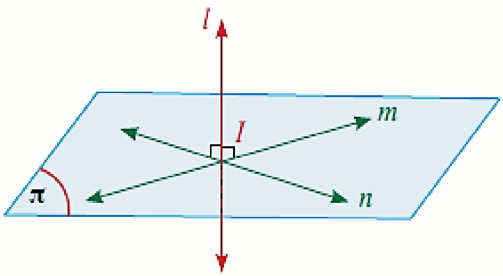
يكون المستقيم l عموديًا على المستوي π إذا كان $\overleftrightarrow{l}$ عموديًا على جميع المستقيمات الواقعة في π ويرمز لذلك بـ : $\overleftrightarrow{l} \perp \pi$

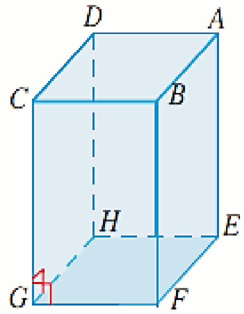
نقول أيضًا إن π عمودي على $\overleftrightarrow{l}$

ونرمز لذلك بـ: $\pi \perp \overleftrightarrow{l}$

والعكس صحيح ،

فإذا كان $\pi \perp \overleftrightarrow{l}$ فإن l عموديًا على كل المستقيمات في المستوي π

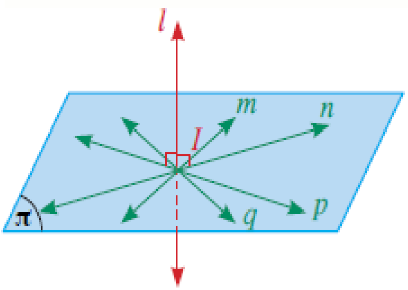




نظرية (5)

المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين يكون عموديًا على مستويهما.

$$\left.\begin{array}{l} \overleftrightarrow{GF} \cap \overleftrightarrow{GH} = \{G\} \\ \overleftrightarrow{CG} \perp \overleftrightarrow{GF} \ , \ \overleftrightarrow{CG} \perp \overleftrightarrow{GH} \end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{CG} \perp (EFGH)$$



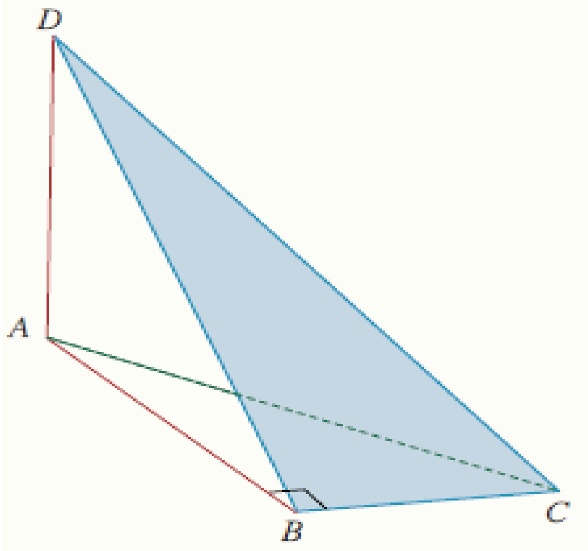
نتيجة (2)

جميع المستقيمات العمودية على مستقيم معلوم من نقطة تنتمي إلى هذا المستقيم تكون محتواة في مستوٍ واحد عموديًا على المستقيم المعلوم.

مثــال: في الشكل المقابل، المثلث ABC قائم في

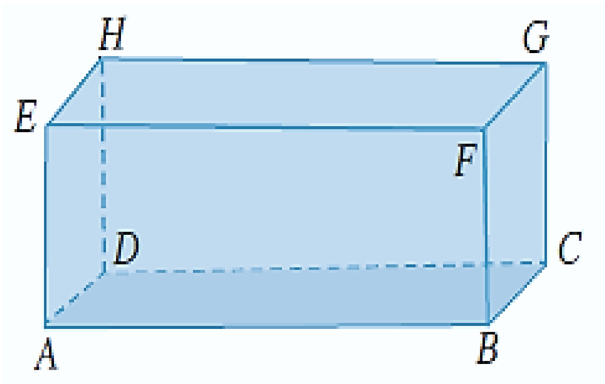
$\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$.

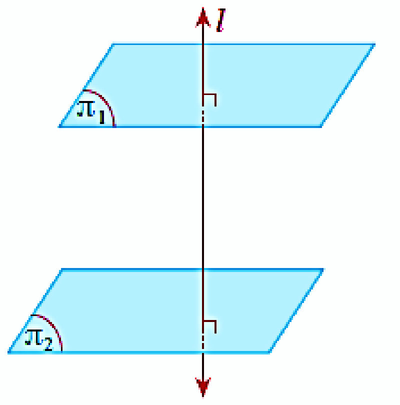
أثبت أن المثلث DBC قائم في $\widehat{B}$



مثــال: في شبه المكعب المقابل،

أثبت أن المثلث BEH قائم في $\widehat{E}$.

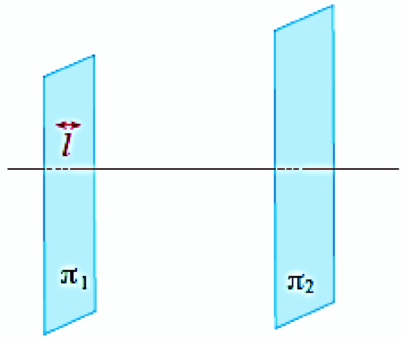




نظرية (6)

إذا كان مستقيم عموديًا على كلٍّ من مستويين مختلفين فإنهما يكونان متوازيين.

$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1 \ , \ \overleftrightarrow{l} \perp \pi_2 \implies \pi_1 \parallel \pi_2$$



نظرية (7)

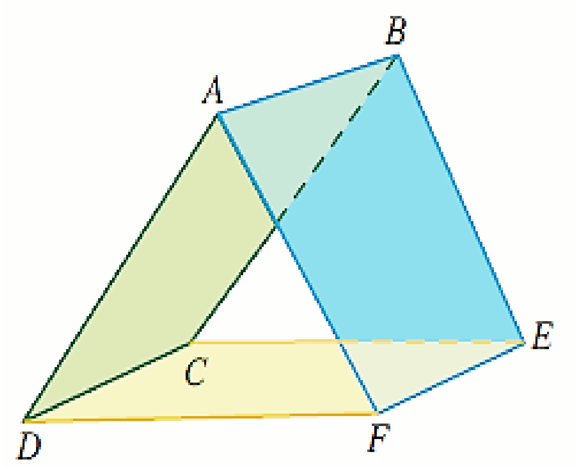
إذا كان مستقيم عموديًا على أحد مستويين متوازيين فإنه يكون عموديًا على المستوي الآخر.

$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1 \ , \ \pi_1 \parallel \pi_2 \implies \overleftrightarrow{l} \perp \pi_2$$

مثـــال: في الشكل المقابل:

$ABEF, ABCD$ مستطيلان

أثبت أن: $(AFD) \parallel (BEC)$



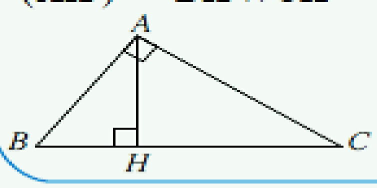
تذكر:

إذا كان $\triangle ABC$ قائم الزاوية A و H المسقط العمودي لـ A على $\overleftrightarrow{BC}$ فإن:

$(AB)^2 = BH \times BC$

$(AC)^2 = CH \times CB$

$(AH)^2 = BH \times CH$



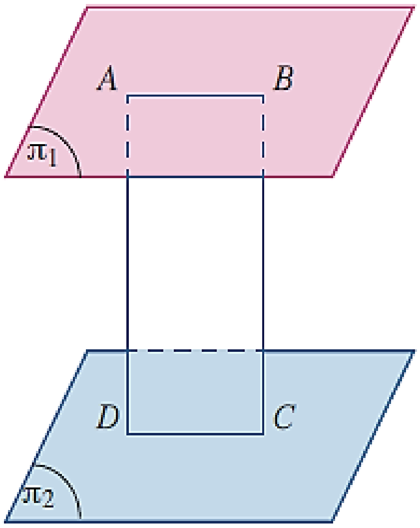
مثــال: في الشكل المقابل: $\pi_1 \parallel \pi_2$

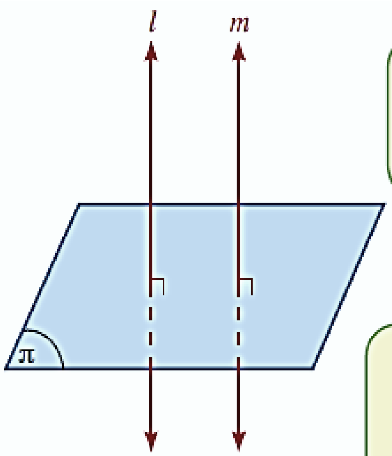
A, B نقطتان في π_1،

C, D نقطتان في π_2 حيث: A, B, C, D في مستوى واحد

$\overline{AD} \perp \pi_2 \;,\; \overline{BC} \perp \pi_2$

أثبت أن $ABCD$ مستطيل.





نظرية (8)

المستقيمان العموديان على مستوٍ متوازيان.

$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi \;,\; \overleftrightarrow{m} \perp \pi \implies \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$$

نظرية (9)

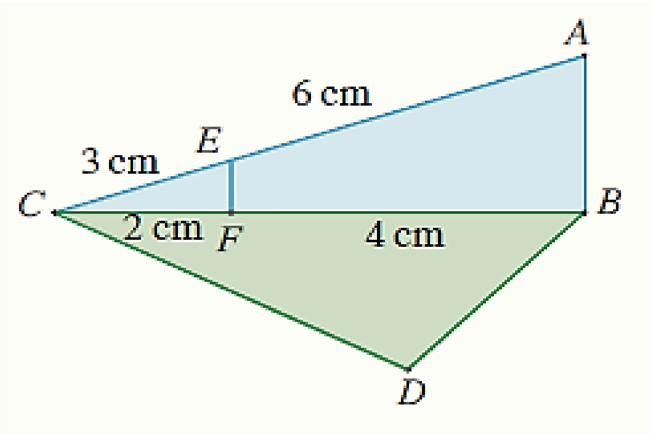
إذا توازى مستقيمان أحدهما عموديًا على مستوٍ كان المستقيم الآخر عموديًا على المستوي أيضًا.

$$\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m} \;,\; \overleftrightarrow{l} \perp \pi \implies \overleftrightarrow{m} \perp \pi$$

مثـــال: في الشكل المقابل إذا كان $\overline{AB} \perp (BCD)$

وكان $FB = 4\text{ cm}$, $CF = 2\text{ cm}$, $EA = 6\text{ cm}$, $CE = 3\text{ cm}$

أثبت أن: $\overline{EF} \perp \overline{DB}$



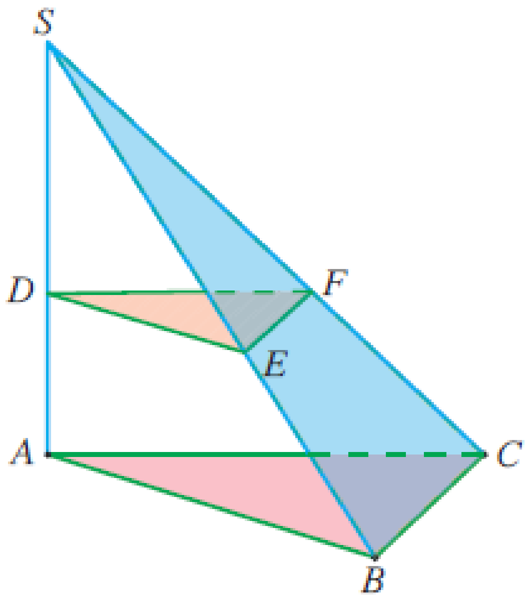
مثـــال: في الشكل المقابل:

المستويان $(ABC), (DEF)$ متوازيان

$\overleftrightarrow{SA} \perp (ABC)$

إذا كان: $AC = 6\text{ cm}$, $BC = 5\text{ cm}$, $DA = 2\text{ cm}$, $SD = 3\text{ cm}$, $SE = 5\text{ cm}$

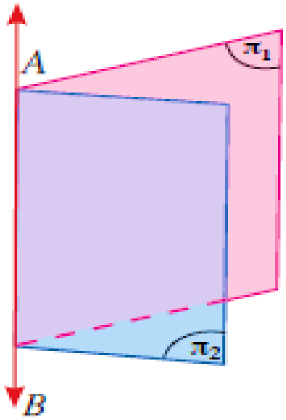
فأوجد محيط المثلث DEF

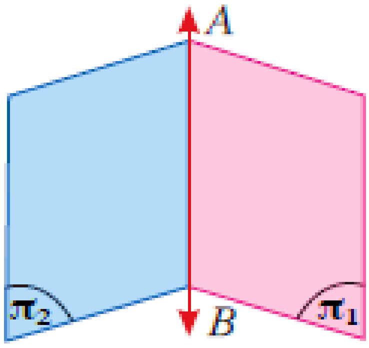


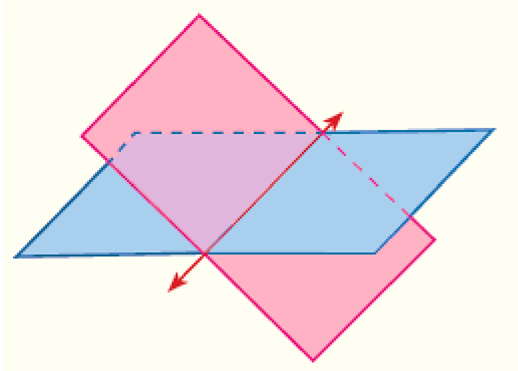
الزاوية الزوجية

The Dihedral Angle

The Dihedral Angle   الزاوية بين مستويين (الزاوية الزوجية)





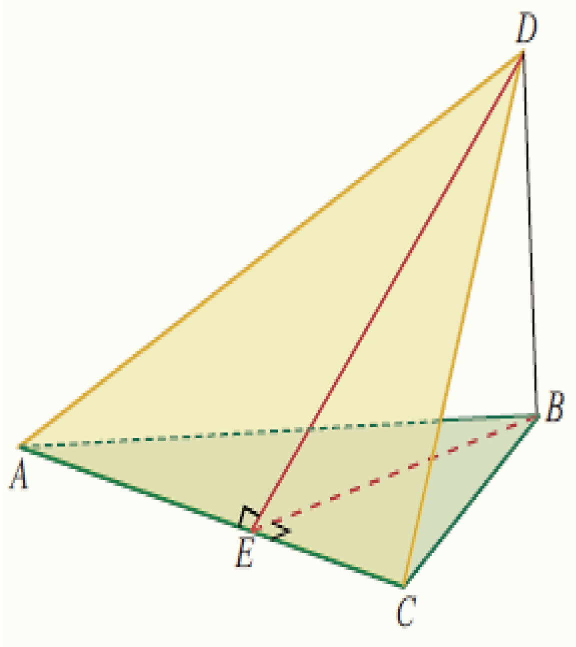


نقرأ الزاوية الزوجية بحافتها فنقول الزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{AB}$، أو في حال وجود أكثر من زاوية زوجية: $(\pi_1 , \overleftrightarrow{AB} , \pi_2)$

تعريف: الزاوية المستوية لزاوية زوجية

هي الزاوية التي تنشأ من تقاطع الزاوية الزوجية مع مستوٍ عمودي على حافتها.

مثـــال:



في الشكل المقابل D نقطة خارج مستوى المثلث ABC،

$DB = 5\text{ cm}$ ، $AB = 10\text{ cm}$ ، $m(B\hat{A}C) = \frac{\pi}{6}$

$\overline{DB} \perp (ABC)$

$\overline{BE} \perp \overline{AC}$ ،$\overline{DE} \perp \overline{AC}$

أوجد:

a) BE , DE

b) قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC , DAC

مثـــال: في الشكل المقابل D نقطة خارج مستوى المثلث ABC،

$DB = 5\text{ cm}$ ، $AB = 10\text{ cm}$ ، $m(B\hat{A}C) = \frac{\pi}{6}$

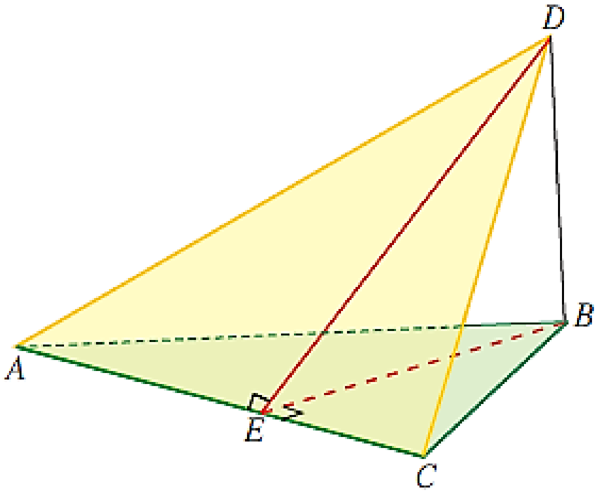
$\overline{DB} \perp (ABC)$

$\overline{BE} \perp \overline{AC}$ ، $\overline{DE} \perp \overline{AC}$

أوجد:

a) BE , DE

b) قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC , DAC

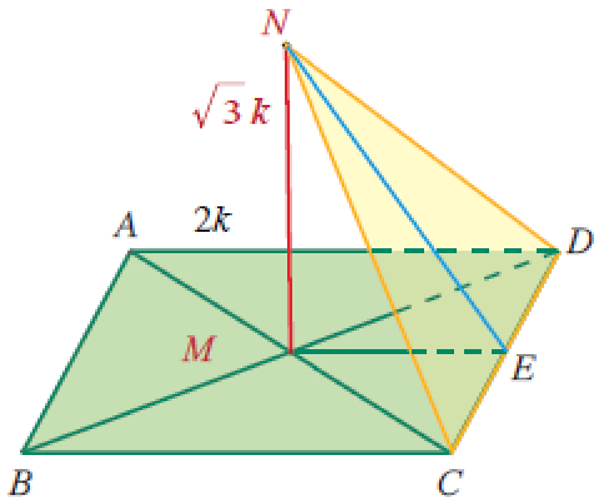


مثـــال:

$ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M، وفيه $AD = 2k$

أقيم $\overline{NM}$ عمودًا على $(ABCD)$ حيث N خارج مستواه بحيث $MN = \sqrt{3}\,k$

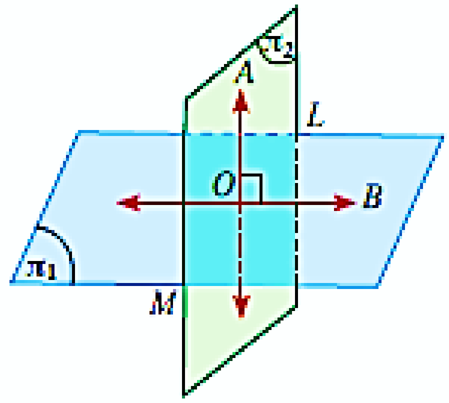
أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين NCD ، $ABCD$



المستويات المتعامدة

Perpendicular Planes

Perpendicular Planes   المستويات المتعامدة

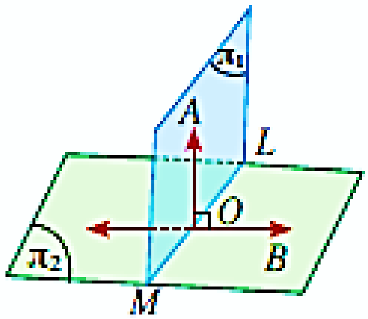


يكون المستويان متعامدين إذا كانت الزاوية المستوية بينهما زاوية قائمة أي أن قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $90°$.

في المستوي π_1: $\overleftrightarrow{OB} \perp \overleftrightarrow{LM}$

في المستوي π_2: $\overleftrightarrow{OA} \perp \overleftrightarrow{LM}$

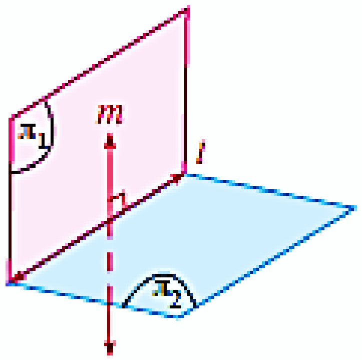
$\therefore$ $\overleftrightarrow{OA} \perp \overleftrightarrow{OB}$ فإن المستويين متعامدان.



نظرية (10)

إذا كان مستقيم عموديًا على مستوٍ فكل مستوٍ يمر بذلك المستقيم يكون عموديًا على المستوي.

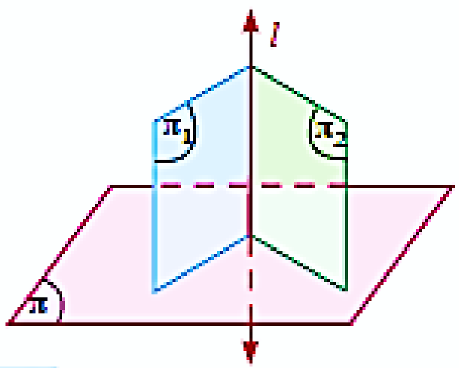
$$\overleftrightarrow{OA} \perp \pi_2 \; , \; \overleftrightarrow{OA} \subset \pi_1 \implies \pi_1 \perp \pi_2$$



نتيجة (3)

إذا تعامد مستويان ورسم في أحدهما مستقيم عمودي على خط تقاطعهما فإنه يكون عموديًا على المستوي الآخر.

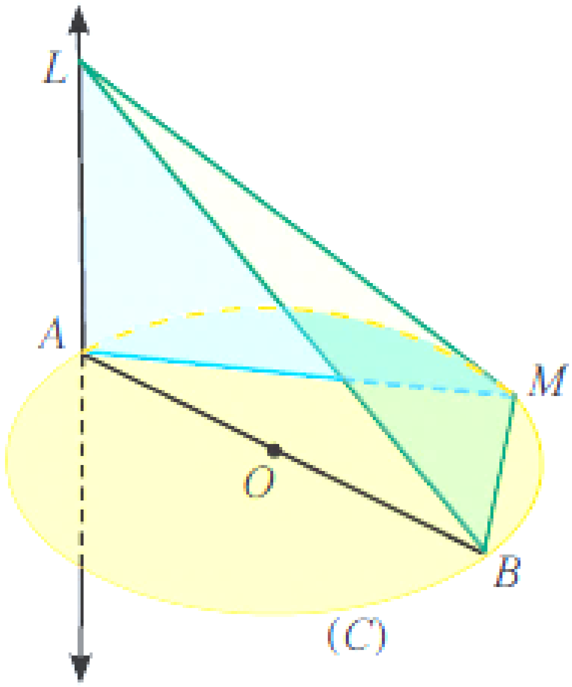
$$\pi_1 \perp \pi_2 \; , \; \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l} \; , \; \overleftrightarrow{m} \subset \pi_1 \; , \; \overleftrightarrow{m} \perp \overleftrightarrow{l} \implies \overleftrightarrow{m} \perp \pi_2$$



نتيجة (4)

إذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودي على مستوٍ ثالث فإن خط تقاطع المستويين يكون عموديًا على هذا المستوي الثالث.

$$\pi_1 \perp \pi \; , \; \pi_2 \perp \pi \; , \; \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l} \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \perp \pi$$



مثـــال:

في الشكل المقابل، C دائرة مركزها O، $\overline{AB}$ قطر.

M نقطة تنتمي إلى الدائرة.

$\overleftrightarrow{LA}$ متعامدة مع مستوي الدائرة.

أثبت أن:

a) $\overleftrightarrow{BM} \perp (LAM)$

b) $(LBM) \perp (LAM)$

مثـــال: في شبه المكعب $ABCDEFGH$ المقابل:

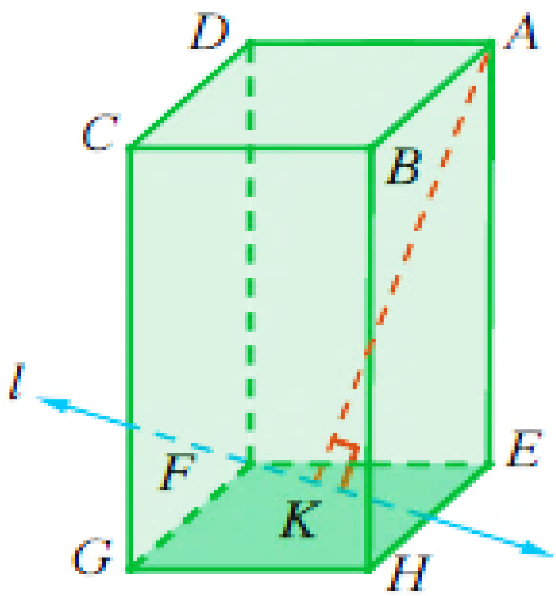
$\overleftrightarrow{l}$ مستقيم في $(EFGH)$ يمر في F.

$\overline{AK} \perp \overleftrightarrow{l}$

أثبت أن:

a) $\overline{EK} \perp \overleftrightarrow{l}$

b) $(FDK) \perp (AEK)$



الجبر المتقطع

Discrete Algebra

مبدأ العد و التباديل و التوافيق

Counting Principle, Permutations and Combinations

مبدأ العد Counting Principle

لإجراء عملية على عدد من المراحل المتتابعة، كما يلي:

المرحلة الأولى بـ r_1 طريقة مختلفة،

المرحلة الثانية بـ r_2 طريقة مختلفة،

المرحلة الثالثة بـ r_3 طريقة مختلفة،

.....وهكذا حتى المرحلة n بـ r_n طريقة مختلفة

فإن عدد طرائق إجراء هذه العملية هو: $r_1 \times r_2 \times r_3 \times ... \times r_n$

مثـــال: لتكن: $A = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

يراد تكوين أعداد ذات ثلاثة منازل باستخدام عناصر A

أوجد:

a عدد الأعداد الفردية الممكن تكوينها.

b عدد الأعداد الزوجية الممكن تكوينها.

c عدد الأعداد الزوجية المختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

مثـــال: لتكن: $B = \{0, 3, 4, 5, 7, 9\}$

تم تكوين أعداد ذات أربعة منازل باستخدام عناصر المجموعة B أوجد :

a عدد الأعداد مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

b عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 10 الممكن تكوينها.

c عدد الأعداد مختلفة الأرقام والأكبر من 5 000 الممكن تكوينها.

التباديل Permutations

قانون التباديل Law of Permutations

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$$

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

حيث: $n, r \in \mathbb{Z}^+ \;,\; n \geq r$

ملاحظة: ${}_nP_0 = 1 \;,\; {}_nP_n = n! \;,\; {}_nP_1 = n$

فمثلًا:

${}_7P_3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$

${}_5P_0 = 1$

${}_6P_6 = 6! = 720$

${}_8P_1 = 8$

مثـــال: ما عدد الطرائق المختلفة لوصول اليخوت الثلاثة الأوائل إذا اشترك في السباق 10 يخوت؟

مثـــال: حل المعادلات التالية:

a $_nP_7 = 12 \times {}_nP_5$

b $_8P_r = 4 \times {}_8P_{r-1}$

Combinations التوافيق

Law of Combinations قانون التوافيق

$$_nC_r = \frac{_nP_r}{r!}$$

$$_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

حيث: $n \geq r$, $n, \ r \in \mathbb{Z}^+$

ملاحظة:

$_nC_0 = 1$, $_nC_1 = n$, $_nC_n = 1$

مثـــال:

في مكتبة المدرسة 15 كتابًا مختلفًا من مجموعة روايات التاريخ الإسلامي.

a بكم طريقة مختلفة يمكنك اختيار 7 كتب؟

b بكم طريقة مختلفة يمكنك اختيار 8 كتب؟

c ماذا تلاحظ؟

مثـــال:

ترشح 10 طلاب لتمثيل القسم العلمي من مدرستك. يجري اختيار الممثلين الثلاثة بالاقتراع السري.

بكم طريقة مختلفة يمكنك الاقتراع لـ 5 طلاب أو أقل؟

مثـــال: في الصف الحادي عشر 28 طالبًا وفي الصف الثاني عشر 24 طالبًا.
أراد معلم الرياضة اختيار 5 طلاب لتشكيل فريق لكرة السلة، شرط أن يتضمن الفريق على الأقل لاعبين من الصف الثاني عشر؟

خواص أخرى للتوافيق

$${}_nC_m = {}_nC_{n-m}$$

$${}_nC_m = {}_{n-1}C_m + {}_{n-1}C_{m-1}$$

مثـــال:

يتكون فريق كرة القدم في المدرسة من 18 لاعبًا. يريد المدرب تشكيل فريق من 11 لاعبًا.

a أوجد عدد الفرق المختلفة الممكن تكوينها.

b أوجد عدد الفرق المختلفة الممكن تكوينها إذا أراد المدرب أن يتضمن الفريق اللاعب عبد العزيز.

c أوجد عدد الفرق المختلفة الممكن تكوينها إذا استثنى المدرب اللاعب عبد العزيز من تشكيلة الفريق بطريقتين مختلفتين.

مثـــال: أوجد قيمة n في كلٍّ مما يلي:

ⓑ $_{n}C_{4} = {}_{n}C_{5}$

ⓐ $_{n}C_{2} = 105$

نظرية ذات الحدين
The Binomial Theorem

مفكوك ذات الحدين — Binomial Expanding

إذا فككت المقدار الذي على الصورة $(x+y)^n$، حيث $n = 0, 1, 2, \ldots, 5$، ستحصل على مفكوك يسمى مفكوك ذات الحدين عدد حدوده $(n+1)$ حدًّا، كما هو موضح أدناه:

$$(x+y)^0 = 1$$
$$(x+y)^1 = 1x^1y^0 + 1x^0y^1$$
$$(x+y)^2 = 1x^2y^0 + 2x^1y^1 + 1x^0y^2$$
$$(x+y)^3 = 1x^3y^0 + 3x^2y^1 + 3x^1y^2 + 1x^0y^3$$
$$(x+y)^4 = 1x^4y^0 + 4x^3y^1 + 6x^2y^2 + 4x^1y^3 + 1x^0y^4$$
$$(x+y)^5 = 1x^5y^0 + 5x^4y^1 + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5x^1y^4 + 1x^0y^5$$

مثلث باسكال — Pascal's Triangle

$(x+y)^0$	row 1	1
$(x+y)^1$	row 2	1 1
$(x+y)^2$	row 3	1 2 1
$(x+y)^3$	row 4	1 3 3 1
$(x+y)^4$	row 5	1 4 6 4 1
$(x+y)^5$	row 6	1 5 10 10 5 1

نظرية ذات الحدين The Binomial Theorem

نظرية ذات الحدين

لأي عدد صحيح موجب n،

$$(x+y)^n = {}_nC_0x^n + {}_nC_1x^{n-1}y + {}_nC_2x^{n-2}y^2 + \ldots\ldots + {}_nC_rx^{n-r}y^r + \ldots\ldots + {}_nC_{n-1}xy^{n-1} + {}_nC_ny^n$$

خواص نظرية ذات الحدين Properties of the Binomial Theorem

1. مفكوك $(x+y)^n$ يتضمن $n+1$ حدًّا يرمز لها بـ: $T_1, T_2, \ldots, T_{r+1}, \ldots, T_n, T_{n+1}$
2. الحد الأول في المفكوك هو x^n، ثم ينقص أس x في الحدود التالية بمقدار الواحد على التوالي.
3. يبدأ ظهور العدد y في الحد الثاني، ثم يزيد أس العدد y بمقدار الواحد على التوالي حتى نصل إلى الحد الأخير في المفكوك ويكون y^n.
4. مجموع أسي x و y في أي حد من حدود المفكوك ثابت ويساوي الأس n.
5. معامل الحد T_1 يساوي معامل الحد T_{n+1}، ومعامل الحد T_2 يساوي معامل الحد T_n، وهكذا ...
6. الحد العام الذي رتبته $r+1$ يرمز له بالرمز: T_{r+1}

$$\boxed{T_{r+1} = {}_nC_r \cdot x^{n-r} \cdot y^r}$$

مثـــال: استخدم نظرية ذات الحدين لفك كل من:

ⓐ $(a-b)^4$ ⓑ $(d+2)^7$ ⓒ $(2x-y^2)^5$

مثـــال: في مفكوك: $(3x^2 - y)^{15}$ أوجد معامل T_{12}

مثـــال: أوجد الحد الذي يحتوي على x^2y^3 في مفكوك $(3x - y)^5$

الاحتمال

Probability

التجربة العشوائية

هي تجربة لها عدة نواتج مختلفة ممكنة ولكن لا يمكن التأكد مسبقًا من أن أي ناتج منها سوف يتحقق عند إجراء التجربة.

أنواع الأحداث Types of Events

حدث بسيط Simple Event

مجموعة جزئية من فضاء العينة (S) تحوي ناتجًا واحدًا من نواتج التجربة العشوائية (مجموعة تحوي عنصرًا واحدًا) فإذا كان A حدثًا بسيطًا فإن $n(A) = 1$

حدث مركب Compound Event

مجموعة جزئية تحوي أكثر من ناتج واحد من نواتج التجربة العشوائية.

فإذا كان B حدثًا مركبًا فإن $n(B) > 1$

حدث مستحيل Impossible Event

مجموعة جزئية خالية $\varnothing$ من فضاء العينة (S)، فإذا كان D حدثًا مستحيلًا فإن $n(D) = 0$

حدث مؤكد Certain Event

مجموعة جزئية تساوي فضاء العينة (S)، فإذا كان F حدثًا مؤكدًا فإن $n(F) = n(S)$

حدثان متنافيان Mutually Exclusive Events

يقال للحدثين A, B أنهما متنافيان إذا كان وقوع أحدهما ينفي (يمنع) وقوع الآخر أثناء التجربة.

أي أن: $A \cap B = \phi$ ويكون $n(A \cap B) = n(\phi) = 0$

حدث متمم Complement Event

الحدث المتمم للحدث A هو الحدث الذي يحوي جميع عناصر فضاء العينة (S) التي لا تنتمي إلى الحدث A

نرمز إلى الحدث المتمم بالرمز $\overline{A}$

A، $\overline{A}$ هما حدثان متنافيان. ويكون: $A \cap \overline{A} = \phi$ ، $A \cup \overline{A} = S$

حدثان مستقلان Independant Events

يقال للحدثين A, B أنهما مستقلان إذا كان وقوع أحدهما لا يؤثر على وقوع الآخر أثناء التجربة العشوائية.

الاحتمال Probability

إذا كانت جميع نواتج التجربة العشوائية لها فرصة الظهور نفسها فإن احتمال الحدث هو:

$$P(E)=\frac{E\ \text{عدد نواتج الحدث}}{S\ \text{عدد نواتج فضاء العينة}}=\frac{n(E)}{n(S)}$$

خواص الاحتمال لحدث ما Properties of the Probabilty of an Event

E حدث في فضاء عينة S حيث S منته وغير خالٍ

a) $0 \le P(E) \le 1$

b) إذا كان E حدثًا مستحيلًا، فإن $P(E)=0$

c) إذا كان E حدثًا مؤكدًا، فإن $P(E)=1$

d) مجموع احتمالات كل الأحداث البسيطة في فضاء العينة = 1

مثـــال:

يبيّن الجدول المقابل وسيلة النقل التي يستخدمها طلاب الصف الحادي عشر بشعبتيه للمجيء إلى المدرسة.

وسيلة النقل	الشعبة A	الشعبة B	المجموع
الحافلة المدرسية	16	15	31
مع الأهل	6	8	14
سيارة نقل عام	2	5	7
المجموع	24	28	52

اختير طالب عشوائيًا من بين طلاب شعبتي الصف الحادي عشر.

a) ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الذين يقلونهم أهلهم إلى المدرسة؟

b) ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الشعبة B؟

مثـــال:

حصل الطلاب: مصطفى، محمد، طه، أحمد، أمين على الدرجة النهائية العظمى في اختبار الرياضيات وأراد مدير المدرسة اختيار 3 منهم لتمثيل المدرسة في مسابقة ثقافية.

ما احتمال اختيار (محمد)؟ **إذا** اعتذر طه عن المشاركة. فما احتمال اختيار (محمد)؟

رئيس

درست فيما سبق بعض القواعد التي تساعد في إيجاد احتمال بعض الأحداث A، B في فضاء العينة S.

A، B حدثان فإن		$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
A، B حدثان متنافيان	$\Longleftrightarrow$	$P(A \cap B) = 0$
A، B حدثان مستقلان	$\Longleftrightarrow$	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
$\overline{A}$ هو الحدث المتمم للحدث A	$\Longleftrightarrow$	$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

مثــال:

حوالي 53% من طلاب إحدى الجامعات عمرهم أصغر من 25 عامًا وحوالي 21% من طلاب هذه الجامعة عمرهم أكبر من 34 عامًا.

اختير طالب عشوائيًا من هذه الجامعة. أوجد احتمال كل حدث مما يلي:

a عمر الطالب بين 25 عامًا و 34 عامًا.

b عمر الطالب 34 عامًا وأقل.

مثـــال: رُمي حجر نرد منتظم. فما احتمال الحصول على أحد مضاعفات العدد 3 أو عدد زوجي؟
ما احتمال الحصول على عدد زوجي أو عدد أولي؟

احتمال ذات الحدين **Binomial Probability**

إقامة تجربة n مرّة وتسجيل نتائجها علمًا أن هناك فقط لكل تجربة نتيجتين H أو T

إذا كان $P(H) = m$، الحدث E وH تحقق فقط k مرّة فبالتالي:

$$P(E) = {}_nC_k \cdot P(H)^k \cdot P(T)^{n-k}$$
$$= {}_nC_k \cdot m^k (1-m)^{n-k}$$
$$= \frac{n!}{k!(n-k)} \cdot m^k (1-m)^{n-k}$$

يستخدم احتمال ذات الحدين:

- في حالة تكرار حدث عدة مرات.
- إذا كان للحدث ناتجان فقط:

ربح – خسارة، نجاح – فشل، كتابة – صورة، ...

مثـــال:
خلال شهر التسوق يقدم أحد المحلات العرض التالي: عند شراء كل صنف تحصل على بطاقة. تفوز 40% من البطاقات بجوائز ويتم اختيار هذه البطاقات الرابحة بشكل عشوائي. مع راشد 3 بطاقات. ما احتمال أن يفوز راشد بجائزتين؟

ما احتمال أن يفوز راشد بجائزة واحدة فقط؟

مثـــال: في إحدى الآلات الحاسبة 4 بطاريات. احتمال أن تخدم كل بطارية مدة عام كامل يساوي 90%

ما احتمال أن تخدم كل من البطاريات الأربع مدة عام؟

ما احتمال أن تخدم 3 بطاريات فقط مدة عام كامل؟

تم بحمد الله