

مذكرة الحادي عشر علمي الفصل الثاني
أ. فرج مبروك فرج (رئيس قسم الرياضيات)
ت. 99716213

لتحميل نماذج الاختبارات اذهب إلى الموقع التالي :
Mathpf.com

farag mabrouk
[Email address]

المجتمع الإحصائي والمعاينة

Statistical Population and Sampling

المجتمع الإحصائي : مجموعة كل المفردات (الوحدات) قيد الدراسة و لها خصائص مشتركة
و يمكن أن تكون مفرداته بشرية أو غير بشرية
كما يمكن أن تكون منتهية (عدد وحداته محدود) أو غير منتهية (عدد وحداته غير محدود)

المتغير :

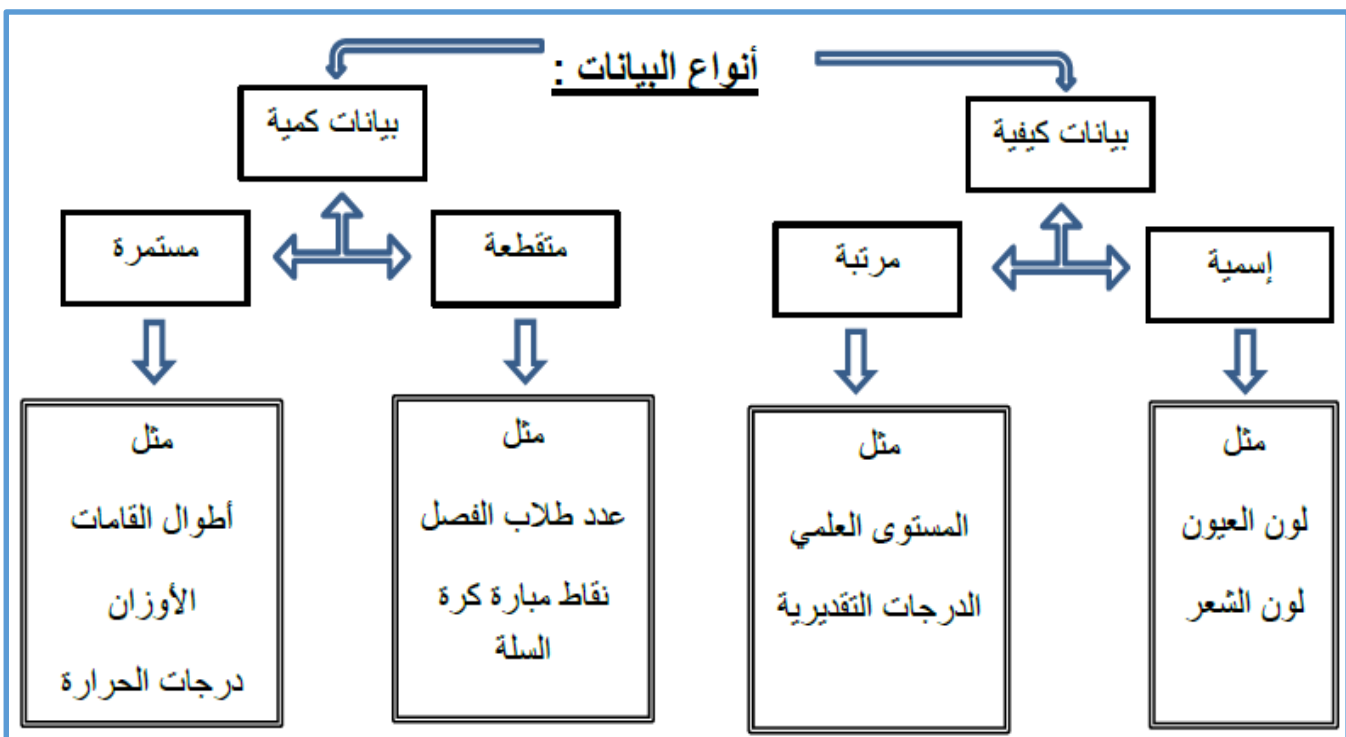
الصفة (أو الصفات) محور الدراسة في مجتمع إحصائي معين . و هذه الصفة تتغير من وحدة إلى أخرى في مجتمع الدراسة
أساليب جمع البيانات :

الحصر الشامل : هو عملية جمع بيانات جميع مفردات المجتمع الإحصائي
مميزاته : دقة النتائج - خلوه من الإخطاء

عيوبه : يتطلب وقت و جهد كبيرين - تكاليفه مرتفعة - لا يمكن إجراؤه في المجتمعات الغير منتهية -
لا يمكن إستخدامه في حالة تدمير جميع وحدات الدراسة (سحب عينة دم)

المعاينة :

هي عملية إختيار جزء من مفردات المجتمع بطريقة مدروسة تجعل هذه المفردات تمثل المجتمع و تحقق أهداف الدراسة



مثال: حدد نوع البيانات في كل مما يأتي:

- a عدد أعضاء فريق كرة القدم.
- b الوظيفة (ضابط، محاسب، محام، تاجر، مدرس، ...)
- c أطوال قامات طلاب الصف الحادي عشر.
- d تقديرات الطلاب في مادة اللغة الإنجليزية في جامعة الكويت.

Ways To Collect Data

طرق جمع البيانات

عند جمع البيانات يمكن استخدام طرائق متنوعة وذلك بحسب ما هو متوفر وما هو أسهل وهي:

- المشاهدة والملاحظة
- الاستبانة
- البريد العادي أو البريد الإلكتروني
- الهاتف المنزلي أو الهاتف النقال
- المقابلة الشخصية
- الوثائق والسجلات
- الأبحاث التاريخية والأرشيف
- قواعد البيانات
- مواقع التواصل الإجتماعي

العينة العشوائية Random Sample

العينة العشوائية :

هي جزء من المجتمع الإحصائي يتم إختيارها عشوائيا بطريقة علمية دون تحيز كي تمثل هذا المجتمع أفضل تمثيلا بأقل تكلفة ممكنة

العينة العشوائية البسيطة :

مجتمع إحصائي يتضمن n من المفردات المتجانسة وأردنا دراسته انطلاقا من عينة عشوائية بسيطة

عدد مفرداتها (حجمها) m و يمكن إختيار العينة العشوائية البسيطة بطرق متعددة منها :

جدول الأعداد العشوائية ، الات حاسبة متخصصة ، برامج إحصائية في الحاسوب

عدد العاملين في مؤسسة هو 90 موظفًا مرقمين من 1 إلى 90. يراد اختيار 7 موظفين لأداء فريضة الحج على نفقة المؤسسة ويتم اختيارهم بطريقة عشوائية. المطلوب سحب عينة عشوائية بسيطة باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف السادس والعمود الرابع.

مثال: في المثال السابق :

إذا كان المطلوب سحب العينة من جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف العاشر والعمود الخامس فما هي

2 - العينة العشوائية الطبقية Stratified Random Sample

ل سحب عينة عشوائية طبقية حجمها m من مجتمع إحصائي حجمه n ، حيث $m \leq n$ يكون:

$$\frac{m}{n} = \frac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع الإحصائي}} = \text{كسر المعاينة}$$

$$\text{حجم العينة من كل طبقة} = \text{كسر المعاينة} \times \text{حجم الطبقة المناظرة}$$

مثال:

لدراسة الأداء الوظيفي والكفاءة عند الموظفين في إحدى المؤسسات، تم سحب عينة عشوائية طبقية مكونة من 80 فرداً من أصل 1 600 موظف موزعين كما يبين الجدول التالي:

المجموع	عمال ومستخدمون	تقنيون وفنيون	إداريون
1 600	1 200	300	100

ما حجم كل عينة عشوائية بسيطة مسحوبة من كل طبقة؟

مثال:

إداريون	أطباء	ممرضون	عمال	المجموع
80	140	240	40	500

يبين الجدول توزيع الموظفين في إحدى المستشفيات:

المطلوب سحب عينة عشوائية طبقية مكونة من 25 فرداً لدراسة كفاءة العاملين وذلك بتكوين عينات عشوائية بسيطة باستخدام جدول الأعداد العشوائية.

مثال:

لدراسة الأداء الوظيفي والكفاءة لدى الموظفين في أحد المصارف، تم سحب عينة طبقية مكونة من 7 أفراد من 35 موظفًا موزعين كما يبين الجدول التالي:

مدرء أقسام	محاسبون ومدققون	مستخدمون	المجموع
10	20	5	35

ما حجم كل عينة عشوائية بسيطة مسحوبة من كل طبقة؟

مثال:

في إحدى المستشفيات يوجد 80 إدارياً مرقمين من 1 إلى 80 ، 140 طبيباً مرقمين من 81 إلى 220 ، 240 ممرضاً مرقمين من 221 إلى 460، 40 عاملاً مرقمين من 461 إلى 500. المطلوب سحب عينة عشوائية طبقية مكونة من 25 فرداً لدراسة كفاءة العاملين وذلك بتكوين عينات عشوائية بسيطة باستخدام جدول الأعداد العشوائية.

3 – العينة العشوائية المنتظمة Systematic Random Sample

يتم سحب مفرداتها بحسب نظام ثابت و منتظم ترقيم المفردات ترقيماً متسلسلاً ثم يقسم المجتمع الإحصائي إلى فترات متساوية الطول بعدد مفردات العينة تسمى فترة المعاينة و يكون

$$\text{طول الفترة} = \frac{\text{حجم المجتمع الإحصائي}}{\text{حجم العينة}}$$

يمكن سحب المفردة الأولى في العينة المنتظمة بطريقة عشوائية من جدول الأعداد العشوائية ثم تسحب باقي المفردات بطريقة منتظمة تقضي بإضافة طول فترة المعاينة على المفردة الأولى للحصول على المفردة الثانية ثم إضافة طول الفترة على المفردة الثانية للحصول على المفردة الثالثة وهكذا...

مثال: في أحد المصانع حيث عدد العمال 900 مرقمين من 1 إلى 900، أراد صاحب هذا المصنع مناقشة هؤلاء العمال حول كيفية تحسين الأداء وزيادة الإنتاج. المطلوب سحب عينة عشوائية منتظمة حجمها 15، مستخدمًا جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الثامن والعمود العاشر.

مثال:

يبلغ عدد طلبة الصف الحادي عشر علمي في إحدى المدارس 140 طالبًا مرقمين من 1 إلى 140. المطلوب سحب عينة عشوائية منتظمة حجمها 7 لزيارة إحدى دور المسنين وتقديم الهدايا لهم بمناسبة حلول عيد الفطر السعيد باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف السادس والعمود التاسع.

جدول الأعداد العشوائية

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	28138	28596	04819	50138	12598	96878	55684	01488	58963	25896	36987	47856	20150	18965
2	01055	53625	47739	51063	08445	33254	22542	50954	73949	11945	29947	86107	35420	77076
3	79603	31075	71532	38497	08236	78411	18237	48743	81472	31761	49582	70411	64708	59416
4	79261	96010	82558	15977	15827	55768	29668	73188	65198	24483	16219	63827	05092	47495
5	00005	37153	07206	78041	09457	97003	49739	75180	74018	90951	96161	31749	23314	55471
6	59282	86004	13259	59537	75702	66287	77941	27095	46176	67215	93007	84125	89302	92843
7	20119	41234	01600	61772	57765	43965	60952	86606	47653	71502	85121	56804	03494	98302
8	67205	41113	34514	03273	95516	68365	79855	50202	66262	31348	37260	56557	15116	38645
9	06244	02595	08941	24615	92256	43007	05022	48195	91554	42525	30499	92203	70717	92685
10	46210	35683	67486	77091	58196	08010	54826	97006	76740	76343	93982	66126	91164	53560
11	80851	80252	02993	92649	12421	00480	53258	45140	57226	10428	36478	24600	01401	29179
12	74684	98726	87312	70956	49731	45504	70689	57849	77383	53581	05100	07629	04450	54826
13	82136	32120	31733	10371	01132	25110	67123	59517	89996	58905	75260	21509	87839	68376
14	73419	88893	89748	44745	46390	54781	31307	62656	69777	24494	91659	29133	46122	75769
15	66082	76594	77480	38397	64521	18712	50625	39027	39168	07835	13446	17758	19166	86050
16	72300	93912	87548	69024	17509	52647	64335	84663	79524	34618	72718	51651	10486	81509
17	46805	82648	27550	65291	27181	92637	13539	87601	15442	70131	62278	99491	41647	11029
18	59068	93270	15829	34926	46252	90487	92734	04850	90175	84906	46435	91518	86972	25705
19	63089	93954	30250	80347	81506	53768	75611	62054	89867	16083	45585	39555	96236	37875
20	54384	64888	28929	46575	08301	86288	52656	19225	65019	74795	25915	71637	49063	17695
21	41219	63211	39429	15290	78067	66741	08485	64653	87698	04983	47255	72768	90770	82930
22	20939	02271	71831	53134	73002	86087	98213	24484	08574	34915	03881	26259	83583	55337
23	66587	02998	73357	00128	97188	71660	47602	52022	28157	21602	30212	53762	94149	66526
24	71255	04641	38419	79552	62599	76281	10226	60287	16627	85028	41218	20667	63917	49254
25	08584	91510	57892	75011	49221	69960	90413	62400	23239	76854	66983	15964	70808	41341
26	31552	70340	48274	81006	74831	19177	49160	50762	89666	93535	12381	29770	33895	90381
27	02779	92197	83606	60964	65448	64964	19444	31357	16774	68021	46076	43831	09372	71527
28	22739	38348	29275	50087	91312	68984	37018	03447	05352	00798	61243	86397	98949	07622
29	21255	64526	97920	04791	77315	49905	74232	67222	89562	14683	81533	60057	31164	21824
30	95796	88317	77167	07879	03499	00804	27377	18693	75652	32509	38279	28588	16753	86119
31	75902	33821	35579	75020	78575	43912	99570	79216	04682	53316	95976	11938	56490	43868
32	36028	73731	05339	82203	22856	72459	00237	17627	50326	98629	71967	48402	61549	83717
33	06836	03795	80497	34107	29215	17117	69538	63274	96690	78884	38149	84592	67096	84551
34	35984	71052	01657	19690	99783	13513	37517	96508	49098	86592	10874	18125	00876	14549
35	87635	49443	55077	18157	20552	27316	12591	68157	34316	20447	53989	40096	69123	74210
36	41484	58832	43633	92072	54522	60783	05639	78371	20340	90174	90549	60250	80858	97632
37	65736	34031	37846	47294	50168	96397	50329	17390	04554	96190	02594	44229	24198	03064
38	16118	88260	28975	20036	77353	96179	08143	29222	57871	01292	52420	07130	11896	94088
39	62064	36947	31193	72328	10262	75428	50450	31620	17855	27018	75910	60965	39988	73389
40	23472	61332	48829	99113	90538	74066	38628	09270	72856	71411	78860	50745	42966	27424
41	05654	41781	99888	60787	56313	83221	82631	91989	32577	68175	24897	23456	16419	41727
42	83428	17512	78322	01942	42061	60659	32746	95367	20551	99885	79334	03732	97058	80356
43	65126	87369	56266	48697	33094	07522	92724	05676	91022	64262	24239	60242	01049	42945
44	28042	84729	34846	05880	34188	27048	30623	23204	05034	93136	19192	91674	47022	48523
45	53148	70847	48117	16103	83773	13224	76143	39148	06742	08298	52014	61711	79466	78334

تابع الأعداد جدول العشوائية

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
46	13560	38973	76536	54464	57626	10247	67051	83850	93002	30930	83842	09990	39203	85693
47	74560	04842	75720	98173	35124	18019	70681	73624	86300	76894	55504	20022	27144	03239
48	27449	10887	55047	76702	62587	20131	63452	96127	15802	65271	74663	37237	95812	19427
49	44413	47571	63342	67062	19900	42511	71024	44364	02775	41081	33177	09580	71047	33820
50	64512	50481	41107	21553	86471	16380	45959	16065	75195	31120	33822	43200	82566	43078
51	00095	29635	33618	55201	12075	97285	80296	92250	92579	69296	68423	91353	35553	77036
52	09638	68500	84152	55279	29481	48723	87785	06304	53198	79425	41344	87395	54720	72911
53	08589	28972	20500	26761	61852	87387	17967	50345	20479	37841	16337	88163	38585	02798
54	54883	36854	75468	31821	08464	13393	24322	56872	39507	16845	92039	13209	47035	57686
55	15444	18858	69256	81949	85766	20284	15914	76382	25665	84484	36409	87271	14949	12069
56	71565	25235	48604	04697	60513	89675	34337	06619	67509	03365	67431	43725	60359	33823
57	92871	06972	97272	98081	58945	98039	47815	55173	93203	03385	58309	47970	27985	73782
58	68849	33525	22034	44200	90628	39212	75363	00247	96303	51838	99956	34321	85809	87275
59	98827	81751	86350	27162	56861	00566	32360	52560	05152	97370	29229	98503	44100	59854
60	66803	20412	23097	36884	14158	51578	82839	04323	01877	91180	22403	31175	67942	14508
61	41516	62122	37492	78385	08100	01107	49028	80607	92813	75169	25796	12643	75026	04170
62	12162	72695	70213	28844	94220	04677	63128	96254	60006	42148	63974	24739	46064	93416
63	13274	51517	40925	25926	47062	06867	80018	43394	68316	19197	74832	95805	26126	29623
64	52918	26336	17452	70092	22425	68294	14624	12683	60030	18091	76824	45533	29768	59678
65	30361	58894	77995	22650	20266	21791	25773	37748	38058	73835	57440	33610	24749	56691
66	46377	07121	20251	41301	07635	66029	80470	25523	16429	40640	40041	79302	98712	95368
67	27423	28968	39623	90457	26780	14540	15082	90327	56459	77107	60727	26328	59556	93557
68	73886	44934	65197	86001	51613	92940	24998	35378	35732	05469	05791	07309	23107	37543
69	70336	30279	09961	58625	11044	73699	32481	85490	58333	12277	98355	86413	87883	23945
70	97903	34498	31282	11249	13179	41489	87962	89071	61922	02704	83626	67269	26568	09110
71	86205	97851	61543	40666	78098	05621	86072	21202	84985	65253	09306	56791	86227	73343
72	70718	31353	96295	21718	03495	83149	48733	21496	68430	91459	18409	86552	53261	30280
73	79073	05288	57087	27201	29661	08888	42984	96272	93656	50805	32057	36231	03532	64408
74	37479	85240	68508	36333	90080	46063	78129	96854	65844	71369	15432	66145	29223	87139
75	56009	81470	06181	98341	92406	61704	57770	28984	92858	88178	80042	83674	23736	64497
76	97012	75201	16764	31720	59414	81005	63959	15445	12347	71939	23651	29846	20962	77463
77	89839	94534	78223	94989	54376	61163	21914	19430	86856	38116	83201	10117	77879	04504
78	81048	37891	24924	18757	54550	54788	72430	24611	18643	55647	11806	78567	76679	58222
79	96743	96838	50696	57648	15325	72557	77193	50894	33206	44420	37986	84257	02031	65384
80	87649	00751	47483	48564	13103	20941	49793	68972	27994	75845	84616	37040	97110	95953
81	18173	87553	45854	18750	16506	57202	60428	61710	35887	19879	49893	04512	62556	63742
82	27613	72032	94334	38239	00395	05486	96365	01758	99314	41866	25760	74573	72169	25744
83	67517	04195	89100	21434	52923	90818	09206	19493	00233	62413	39127	76457	39419	35023
84	23574	88907	08133	85126	84643	94128	89259	18791	71035	84179	82500	92193	31383	34150
85	98721	90145	05695	14882	11827	56881	14143	68069	88481	08328	58607	81737	11660	96892
86	85556	83652	92934	55451	94792	45056	50732	83305	46303	37510	15539	52534	47250	75231
87	63282	48334	46961	05993	16605	63422	23375	44298	16226	10617	96722	42776	53376	94366
88	34033	36344	41107	77495	73985	79352	14844	44334	30781	16339	38031	28104	60054	05725
89	75567	31423	72507	48162	30150	44912	76250	12017	12136	47687	90279	67127	83889	87957
90	45101	69475	96924	76548	57756	14741	26052	42807	52824	61981	87866	35512	23771	43130

Complex Numbers

الأعداد المركبة

Imaginary Unit

الوحدة التخيلية

هي العدد الذي مربعه (-1) ويرمز إليه بالرمز i
 $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$

الأعداد التخيلية:

• لأي عدد حقيقي موجب m ،

$$\sqrt{-m} = \sqrt{m}i$$

• تسمى الأعداد التي على الصورة bi حيث $b \in \mathbb{R}^*$ أعداداً تخيلية.

مجموعة الجذور التربيعية الموجبة والسالبة للأعداد الحقيقية السالبة تكوّن مجموعة الأعداد التخيلية.

مثال: بسّط كل عدد مما يلي مستخدماً الوحدة التخيلية i :

a $\sqrt{-2}$

b $-\sqrt{-12}$

c $\sqrt{-36}$

Complex Number

تعريف: العدد المركب

العدد المركب هو عدد على الصورة $a + bi$ حيث a, b عدنان حقيقيان، i الوحدة التخيلية.

ملاحظة:

يجب التمييز بين الجزء
 التخيلي b والعدد التخيلي bi

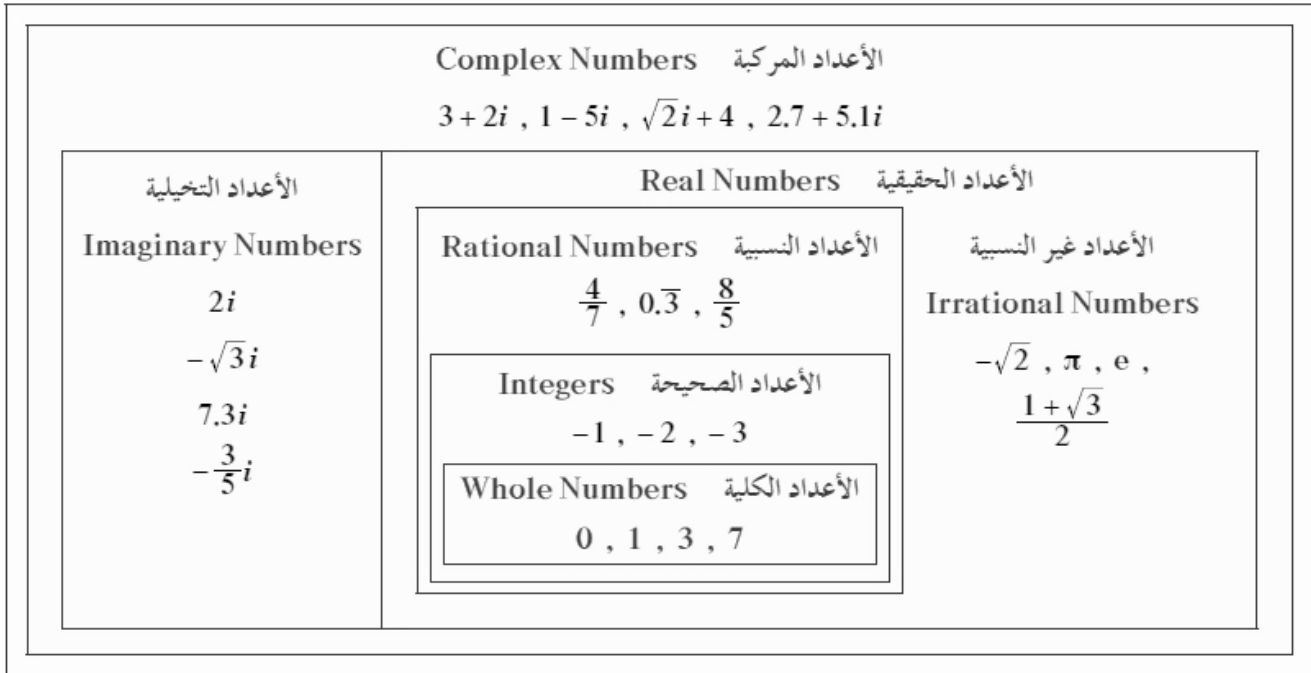
الصورة $a + bi$ تسمى الصورة الجبرية للعدد المركب.

مثال: اكتب كلاً من الأعداد المركبة التالية على الصورة الجبرية:

a $\sqrt{-18} + 7$

b $\frac{10 - \sqrt{-100}}{5}$

c $\frac{\sqrt{-9} + 5}{7}$



تساوي عددين مركبين Equal Complex Numbers

يتساوى عددان مركبان إذا وفقط إذا تساوى جزءاهما الحقيقيان وتساوى جزءاهما التخيليان.
 ليكن:
 $z_1 = a_1 + b_1i, z_2 = a_2 + b_2i$
 $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$

مثال: أوجد قيم كل من $x, y \in \mathbb{R}$ في كل مما يلي:

- a** $x + 5i = 7 - 3yi$
b $(x + 3) + y^2i = 5 - yi$
c $3i = 2x - 5yi$

مثال: حل المعادلات التالية :

(1) $2x + 3yi = -14 + 9i$

(2) $14i^2 - 3i = 2x + (y + 5)i$

إذا ساوى عدد مركب الصفر فإن جزئه الحقيقي يساوي الصفر وجزئه التخيلي يساوي الصفر أيضاً، والعكس صحيح.

$$x + yi = 0 \Leftrightarrow (x = 0, y = 0)$$

Representation of a Complex Number التمثيل البياني لعدد مركب

$$M(a, b) \longleftrightarrow z = a + bi$$

الصورة الديكارتية الصورة الجبرية

مثال:

a $z_1 = 4 - i$

b $z_2 = -3i$

c $z_3 = -4 - 3i$

d $z_4 = 2$

مثال: اكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط $K(7, 0)$, $H(1, -2)$, $N(-4, 1)$.

العمليات على مجموعة الأعداد المركبة Operations with Complex Numbers

أولاً: جمع وطرح الأعداد المركبة Adding and Subtracting Complex Numbers

إذا كان $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$ عددين مركبين فإن:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

مثال: إذا كان $z_1 = -2 + 5i$, $z_2 = 3.4 - 1.2i$, $z_3 = -0.3i$ فأوجد:

a $z_1 + z_2$

b $z_2 - z_1$

c $z_3 - z_2 - z_1$

ملاحظات:

- الصفر هو العنصر المحايد لعملية الجمع على مجموعة الأعداد المركبة $(0 = 0 + 0i)$.
- المعكوس الجمعي للعدد المركب $z = a + bi$ هو العدد المركب $-z = -a - bi$
- مثالاً: إذا كان $z = 2 + 5i$ فإن $-z = -2 - 5i$
- إذا كان مجموع عددين مركبين يساوي صفرًا فإن كلاً منهما معكوس جمعي للآخر والعكس صحيح.
- أي أن: $z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = -z_2$
- لإيجاد ناتج طرح: $z_1 - z_2$ يمكن إضافة المعكوس الجمعي لـ z_2 إلى z_1 أي $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

ثانياً: ضرب الأعداد المركبة Multiplying Complex Numbers

إذا كان $z_1, z_2 \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{R}$
حيث $z_1 = a_1 + b_1i, z_2 = a_2 + b_2i$ فإن:

1 $c z_1 = ca_1 + c b_1i$

2 $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$

العدد 1 هو العنصر المحايد لعملية ضرب الأعداد المركبة $(1 = 1 + 0i)$

مثال: أوجد ناتج:

a $(6 - 5i)(4 - 3i)$

b $(9 + 4i)(4 - 9i)$

c $(12i)(7i)(i + 1)$

مثال: إذا كان $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 1 + 4i$ فأوجد:

a $\frac{1}{2} z_1$

b $z_1 \cdot z_2$

مثال: بسّط كل تعبير مما يلي:

1) $(2 + 4i) + (4 - i)$

2) $(4 + \sqrt{-9}) + (6 - \sqrt{-49})$

- مثال : بسّط كل تعبير مما يلي:
- 1) $(8 - \sqrt{-1}) - (-3 + \sqrt{-16})$
 - 2) $(4i)(-9i)^2$
 - 3) $-5(1 + 2i) + 3i(3 - 4i)$
 - 4) $(-2 + \sqrt{-9})(6 + \sqrt{-25})$

قوى العدد المركب Powers of a Complex Number

مثال: أوجد:

a $5(i)^{73}$

b $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^3$

c $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^4$

تمرين: إذا كان $z = \frac{1-i}{1+i}$ فأوجد: z^{12} , z^{27}

Dividing Complex Numbers

ثالثًا: قسمة الأعداد المركبة

Complex Conjugate

مرافق العدد المركب

معلومة:
إذا كان $z = a$ عدد حقيقي
فإن $\bar{z} = z = a$

مرافق العدد المركب

مرافق العدد المركب $z = a + bi$ هو العدد المركب $\bar{z} = a - bi$

- $z_1 + \bar{z}_1 = 2a_1$
- $z_1 - \bar{z}_1 = 2bi$
- $z_1 \cdot \bar{z}_1 = a_1^2 + b_1^2$
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- $\overline{(\bar{z}_1)} = z_1$

خواص مرافق العدد المركب:

إذا كان $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$

فإن:

مثال: إذا كان $z_1 = 2 - 7i$, $z_2 = 3 + 5i$ فأوجد:

a $\bar{z}_1 + \bar{z}_2$

b $\overline{z_1 - z_2}$

d $\overline{z_1 \cdot z_2}$

e $\overline{z_1 \cdot z_2}$

المعكوس الضربي لعدد مركب غير صفري $z = a + bi$ يرمز له بالرمز z^{-1} :

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} \times \frac{a - bi}{a - bi} \text{ ويكون:}$$

مثال: أوجد المعكوس الضربي لكل من:

a $z_1 = -3i - 7$

b $z_2 = 5 + 11i$

c $z_3 = 6i$

ملاحظة

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2}$$

مثال: أوجد ناتج قسمة $2i - 3$ على $1 + 2i$

مثال: اكتب كلاً مما يلي في الصورة الجبرية:

a $\frac{3+i}{2+5i}$

b $\frac{2-i}{2+i}$

c $\frac{5+i}{2-3i}$

مثال: إذا كان $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = -\sqrt{3} + 2i$ فأوجد: $\frac{\overline{z_1}}{z_2}$, $\frac{z_1}{\overline{z_2}}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$

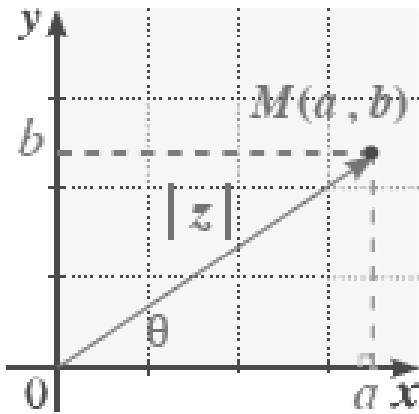
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

ملاحظ

الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب Polar Coordinates and Trigonometric Form of a Complex Number

القيمة المطلقة لعدد مركب Absolute Value of a Complex Number

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

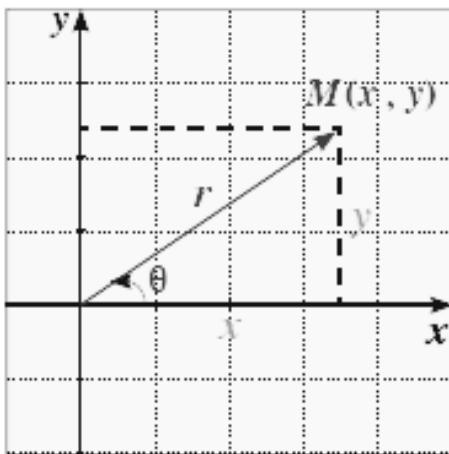


a $|6 - 4i|$

b $|-2 + 5i|$

مثال:

الإحداثيات القطبية Polar Coordinates



يمثل الزوج المرتب (r, θ) الإحداثيات القطبية للنقطة M
الزوج المرتب (x, y) يمثل الإحداثيات الديكارتية للنقطة M

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned}$$

حيث θ هي الزاوية الموجهة في الوضع القياسي التي يمر ضلعها النهائي بالنقطة M .

مثال: أوجد الزوج المرتب (x, y) الذي يمثل الإحداثيات الديكارتية لكل من النقطتين:

a $A(5, 300^\circ)$

b $B\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$

ملاحظة:

للتحويل من الإحداثيات الديكارتية (x, y) إلى الإحداثيات القطبية (r, θ) نوجد قيمة r باستخدام القاعدة: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ثم نوجد قياس زاوية الإسناد α باستخدام: $\tan \alpha = \left| \frac{y}{x} \right|$ بعد ذلك تحديد الربع الذي تقع فيه هذه الزاوية θ من إشارة كل من x, y ونوجدتها.

تذكر:

إذا كانت α زاوية الإسناد للزاوية التي قياسها θ فإن:

$$\theta = \begin{cases} \alpha & : x > 0, y > 0 \\ \pi - \alpha & : x < 0, y > 0 \\ \pi + \alpha & : x < 0, y < 0 \\ 2\pi - \alpha & : x > 0, y < 0 \end{cases}$$

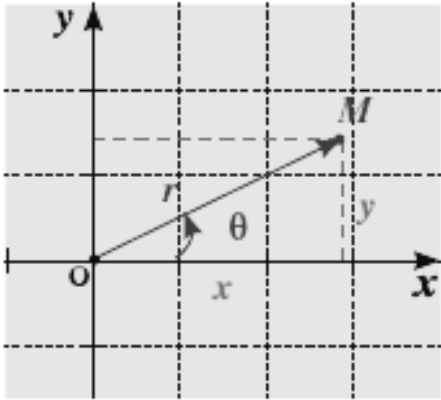
مثال:

أوجد الزوج المرتب (r, θ) لكل نقطة مما يلي حيث $0 \leq \theta < 2\pi$

a $D(3\sqrt{3}, 3)$

b $C(4, -2\sqrt{5})$

الصورة المثلثية Trigonometric Form



يمكن كتابة العدد المركب $z = x + yi$ على الصورة:
 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ وتعرف بالصورة المثلثية للعدد المركب z .

يسمى r مقياس العدد أو القيمة المطلقة
 تسمى θ سعة العدد المركب وتعيّن من

أو تتعين من $\sin \theta = \frac{y}{r}$, $\cos \theta = \frac{x}{r}$ $\tan \theta = \frac{y}{x}$, $x \neq 0$ وتحديد الربع.

إذا كانت $\theta \in [0, 2\pi)$ أو $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ فتسمى السعة في هذه الحالة بالسعة الأساسية.

مثال: ضع كلاً مما يلي في الصورة المثلثية:

a $z_1 = \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}}i$

b $z_2 = -1 - i$

c $z_3 = -2 + 2\sqrt{3}i$

تذكر:
$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$
$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$
تذكر:
$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$
$\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$

تذكر:
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$

تذكر:
$\cos(-\theta) = \cos \theta$
$\sin(-\theta) = -\sin \theta$
معلومة:
إذا كانت θ بالقياس السالب
فإن السعة الأساسية تساوي:
$\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{N}$

مثال: ضع كلاً مما يلي في الصورة المثلثية: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

- a $3\left(-\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$ b $2\left(\sin \frac{\pi}{4} + i \cos \frac{\pi}{4}\right)$
- c $-\sqrt{3}\left(-\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}\right)$ d $3(\cos 50^\circ - i \sin(-130^\circ))$

مثال: ضع كلاً مما يلي في الصورة الجبرية:

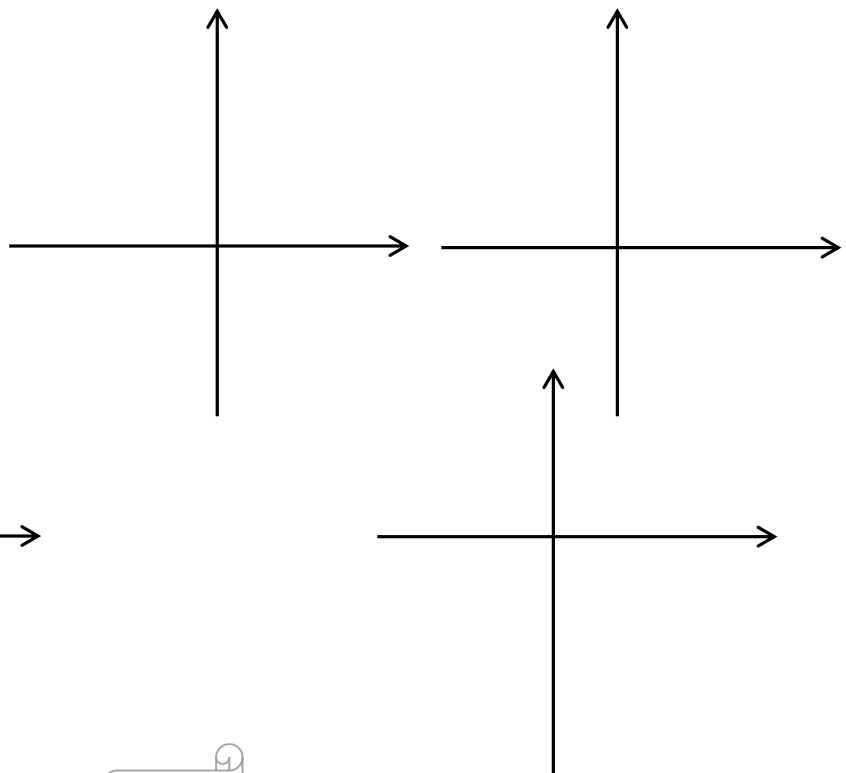
a $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

b $z_2 = \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

الصورة المثلثية في حالات خاصة Trigonometric Form In Special Cases

العدد	المقياس	سعة (بالراديان) (rad)
a	a	0
$-a$	$ -a = a$	π
bi	b	$\frac{\pi}{2}$
$-bi$	$ -b = b$	$\frac{3\pi}{2}$

ملاحظة:
إذا كان $z = 0$ ، فإن:
 $x = 0$, $y = 0$, $r = 0$
 θ غير معينة.



مثال: ضع في الصورة المثلثية كلاً من الأعداد التالية:

a $z_1 = 2i$

b $z_2 = 5$

c $z_3 = \frac{-3}{4}$

d $z_4 = -\frac{5}{2}i$

حل معادلات
Solving Equations

أولاً: حل معادلات من الدرجة الأولى في \mathbb{C}
Solving First Degree Equations in \mathbb{C}

مثال: أوجد مجموعة حل المعادلة: $2z + i = 3 + 2i$ في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} .

مثال: أوجد مجموعة حل المعادلة: $z + i = 2\bar{z} + 1$ في \mathbb{C} .

ثانياً: حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد في \mathbb{C}

Solving Quadratic Equations With One Variable in \mathbb{C}

مثال: أوجد مجموعة حل كل معادلة مما يلي حيث $x \in \mathbb{C}$:

a $3x^2 + 48 = 0$

b $-5x^2 - 150 = 0$

c $8x^2 + 2 = 0$

مثال: أوجد مجموعة حل المعادلة: $x^2 - 2x + 2 = 0$ في \mathbb{C} .

تذكر:
في المعادلة التربيعية
 $ax^2 + bx + c = 0$ حيث
 $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$
مجموع الجذرين $-\frac{b}{a}$
حاصل ضرب الجذرين $\frac{c}{a}$

معلومة:
إذا كان $z = a + bi, b \neq 0$
جذرًا لمعادلة معاملاتها
أعدادًا حقيقية فإن
 $\bar{z} = a - bi$ هو جذر آخر
لها.

معلومة:
إذا كان z_1, z_2 جذرين
تريعيين للعدد z فإن:
 $z_1 + z_2 = 0$

معلومة:
إذا $z_1 = z_2$ فيكون:
 $|z_1| = |z_2|$

مثال: لتكن المعادلة: $2z^2 - 6z + 5 = 0$

a أثبت أن العدد المركب $z_1 = \frac{3-i}{2}$ هو جذر لهذه المعادلة.

b أوجد الجذر الثاني.

الجذر التربيعي لعدد مركب Square Root of a Complex Number

لإيجاد جذر تربيعي لعدد مركب z نبحث عن عدد w يكون مربعه يساوي z .

$$z = a + bi \text{ ليكن}$$

ابحث عن $w = m + ni$ ، بحيث يكون $w^2 = z$

$$(m + ni)^2 = a + bi$$

$$m^2 - n^2 + 2mni = a + bi$$

$$\therefore \begin{cases} m^2 - n^2 = a \\ 2mn = b \end{cases}$$

للمساعدة على حل هذا النظام ندخل معادلة ثالثة ناتجة عن كون $|w|^2 = |z|$

$$\text{أي } (\sqrt{m^2 + n^2})^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

مثال: أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = -3 - 4i$

مثال: أوجد الجذرين التربيعين للعدد المركب $z = 5 + 12i$.

مثال: أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 5 + 12i$.

مثال: أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 7 + 24i$.

حساب المثلثات Trigonometry

التمثيل البياني للدوال المثلثية (الجيب، جيب التمام، الظل)

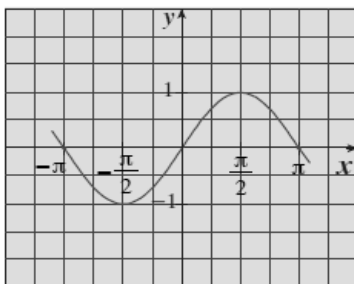
Graphs of Trigonometric Functions
(Sine, Cosine and Tangent)

Sinusoidal Functions

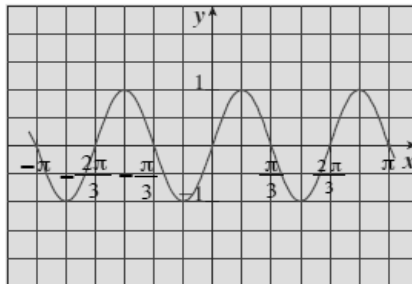
الدوال الجيبية

تسمى الدالة على الصورة $y = a \sin bx$ دالة الجيب والدالة على الصورة $y = a \cos bx$ دالة جيب التمام حيث $a \neq 0$, $b \neq 0$ وهما دالتان جيبيتان وكل منهما دورية.

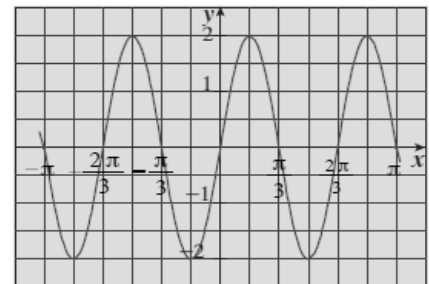
تمثل الأشكال التالية بيانات بعض دوال الجيب:



$y = \sin x$
شكل (1)



$y = \sin 3x$
شكل (2)



$y = 2 \sin 3x$
شكل (3)

- 1 تسمى $|a|$ سعة الدالة الجيبية.
- 2 $|b|$ تمثل عدد الدورات في الفترة $[0, 2\pi]$
- 3 $\frac{2\pi}{|b|}$ تمثل دورة الدالة.

مثال:

أوجد الدورة والسعة لكل دالة مما يلي:

a $y = -2 \cos 5x$

b $y = \frac{1}{2} \cos(-x)$

مثال:

اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a \cos bx$ إذا كانت:

a) الدورة هي $\frac{\pi}{3}$ ، $a = -2$

b) الدورة هي π ، $a = 0.25$

c) الدورة هي 2 ، $a = 1$

Graph of Trigonometric Functions التمثيل البياني للدوال المثلثية

The Sine Function أولاً: دالة الجيب

$y = \sin x$ هي دالة مثلثية مجالها \mathbb{R} ومداهما $[-1, 1]$ ، وهي دالة دورية ذات دورة 2π وسعتها تساوي واحد.

مثال: أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

a $y = \frac{1}{2} \sin 4x$

b $y = -4 \sin x, x \in [-\pi, 2\pi]$

The Cosine Function **ثانيًا: دالة جيب التمام**

$y = \cos x$ هي دالة مثلثية مجالها هو \mathbb{R} ومداهما هو $[-1, 1]$ ، وهي دالة دورية ذات دورة 2π وسعتها تساوي واحد.

مثال: أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

a $y = 3 \cos 2x$

b $y = -2 \cos\left(\frac{3}{4}x\right), 0 \leq x \leq 2\pi$

ثالثًا: دالة الظل Tangent Function

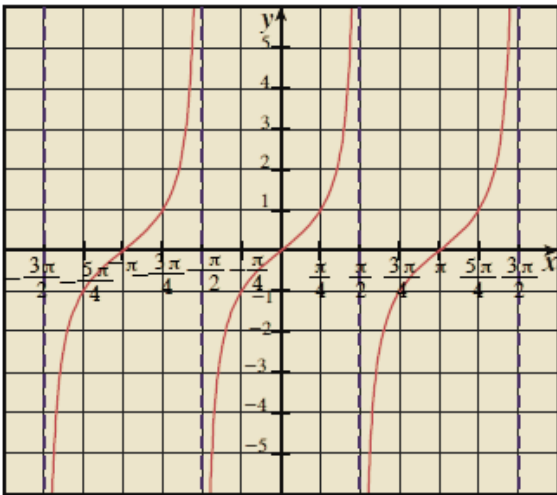
هي الدالة المثلثية على الصورة $y = \tan x$ وتكتب:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} : \cos x \neq 0$$

مجالاتها: $D = \mathbb{R} - \left\{ x : x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \right\}$

ومداها: \mathbb{R}

وهي دالة دورية ذات دورة π



من بيان دالة الظل نلاحظ أن دالة الظل:

1 ليس لها سعة.

2 لأي عدد صحيح n فإن $\tan(n\pi) = 0$

3 لأي عدد صحيح n فإن $\tan\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ غير معرف.

وتسمى المستقيمات $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ محاذيات

رأسية لبيان الدالة $y = \tan x$

4 دالة فردية لأن: $\tan(-x) = -\tan x, \forall x \in D$

5 منحناها متناظر حول نقطة الأصل.

وبصفة عامة: الدالة $y = a \tan bx$

مثال: أوجد الدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

a $y = -\tan x$

b $y = \frac{1}{2} \tan x$

خصائص الدوال المثلثية باعتبار $n \in \mathbb{Z}$

الخاصية	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
الدورة	2π	2π	π
المجال	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R} - \left\{x, x = \frac{\pi}{2} + n\pi\right\}$
المدى	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$(-\infty, \infty)$
الأصفار	$x = n\pi$	$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$	$x = n\pi$
زوجية أو فردية	زوجية	زوجية	فردية

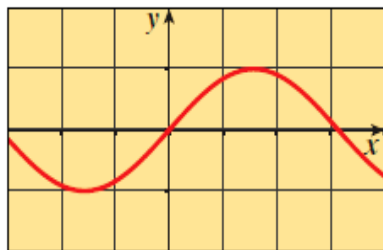
التحويلات الهندسية للدوال الجيبية

Geometric Transformations of Sinusoid Functions

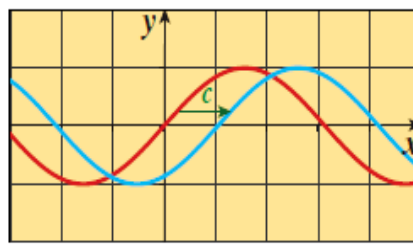
Horizontal Translation

الإزاحة الأفقية

بيان الدالة $y = f(x - c)$ ينتج من إزاحة أفقية لبيان الدالة $y = f(x)$ بمقدار c
 إذا كان c موجبًا فإن الإزاحة تكون جهة اليمين.
 إذا كان c سالبًا فإن الإزاحة تكون جهة اليسار.

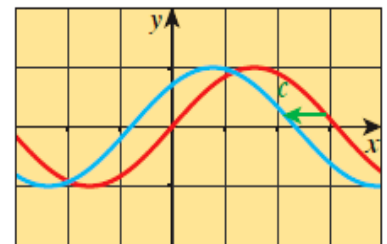


$$y = f(x)$$



$$y = f(x - c)$$

$$c > 0$$



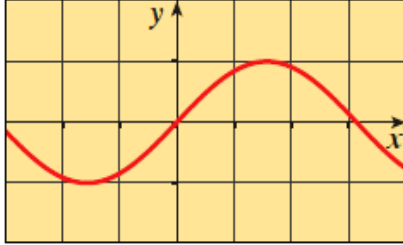
$$y = f(x - c)$$

$$c < 0$$

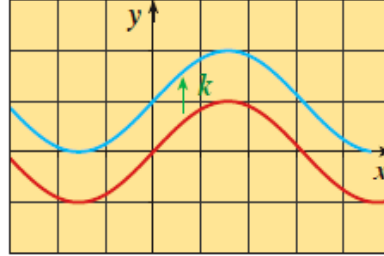
Vertical Translation

الإزاحة الرأسية

بيان الدالة $y = f(x) + k$ ينتج من إزاحة رأسية لبيان الدالة $y = f(x)$ بمقدار k .
إذا كان k موجبًا فإن الإزاحة تكون إلى الأعلى.
إذا كان k سالبًا فإن الإزاحة تكون إلى الأسفل.

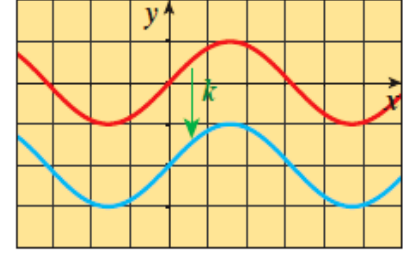


$$y = f(x)$$



$$y = f(x) + k$$

$$k > 0$$



$$y = f(x) + k$$

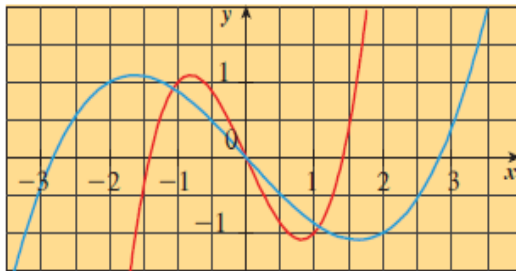
$$k < 0$$

Horizontal Stretch or Shrink

التمدد / الانكماش الأفقي

ليكن b عددًا موجبًا.
بيان الدالة $y = f(bx)$ ينتج من انكماش / تمدد أفقي لبيان الدالة $y = f(x)$

إذا كان $b < 1$: تمدد بمعامل $\frac{1}{b}$

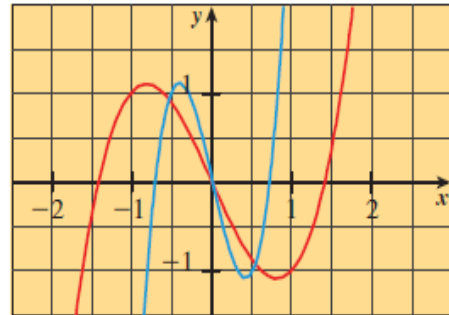


$$y = f(x) = x^3 - 2x$$

$$y = f(0.5x) = (0.5x)^3 - 2(0.5)x$$

تمدد أفقي بمعامل $\frac{1}{0.5}$

إذا كان $b > 1$: انكماش بمعامل $\frac{1}{b}$



$$y = f(x) = x^3 - 2x$$

$$y = f(2x) = (2x)^3 - 2(2x)$$

انكماش أفقي بمعامل $\frac{1}{2}$

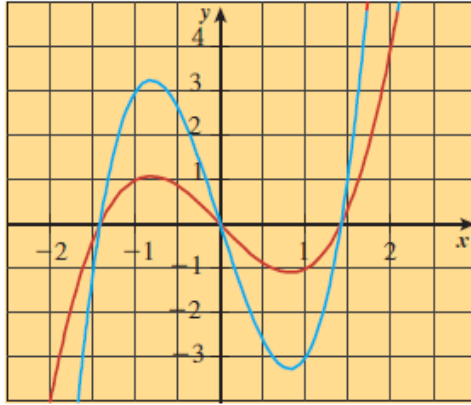
Vertical Stretch or Shrink

التمدد/الانكماش الرأسي

ليكن a عددًا موجبًا $a \neq 0$

بيان الدالة $y = af(x)$ ينتج من انكماش/تمدد رأسي لبيان الدالة $y = f(x)$

إذا كان $|a| > 1$: تمدد بمعامل $|a|$

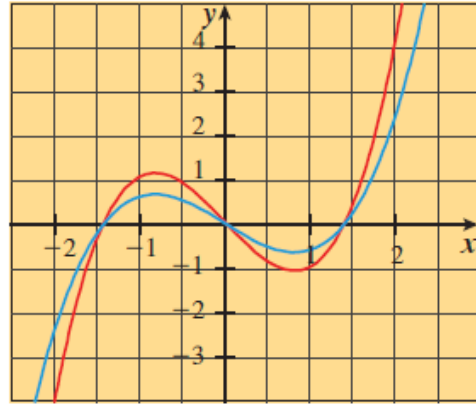


$$y = f(x) = x^3 - 2x$$

$$y = 3f(x) = 3x^3 - 6x$$

تمدد رأسي بمعامل 3

إذا كان $|a| < 1$: انكماش بمعامل $|a|$



$$y = f(x) = x^3 - 2x$$

$$y = 0.6f(x) = 0.6x^3 - 1.2x$$

انكماش رأسي بمعامل 0.6

تكون الدالة جيبيية إذا أمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$f(x) = a \sin(bx - h) + k$$

$$f(x) = a \cos(bx - h) + k \quad \text{أو}$$

حيث a, b, h, k ثوابت $a \neq 0, b \neq 0$

التمدد/الانكماش الرأسي وسعة الدالة الجيبية

Vertical Stretch/Shrink and the Amplitude of a Sinusoid

سعة الدالة $f(x) = a \sin(bx - h) + k$ أو $f(x) = a \cos(bx - h) + k$ هي $|a|$.

مثال: صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين: $y_1 = \sin x$, $y_2 = \frac{1}{3} \sin x$.

التمدد/الانكماش الأفقي ودورة الدالة

Horizontal Stretch/Shrink and the Period

عند تطبيق التمدد الأفقي أو الانكماش الأفقي على دالة جيبيية فإن خاصية الدالة التي تتغير تسمى **دورة الدالة** حيث:

دورة كل من: $y = a \sin(bx)$ ، $y = a \cos(bx)$ هي $\frac{2\pi}{|b|}$

مثال: صف العلاقة بين التمثيلين البيانيين لكل من: $y_1 = \cos x$ ، $y_2 = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

ارسم دورتين من الدالة: $y_2 = \cos\frac{x}{2}$

مثال: صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين: $y_1 = \cos x$, $y_2 = 2 \cos\left(-\frac{1}{3}x\right)$

مثال: صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين f , h لكل مما يلي:

(a) $f(x) = \cos 2x$, $h(x) = \frac{5}{3} \cos 2x$

(b) $f(x) = \sin \frac{x}{3}$, $h(x) = \frac{-2}{3} \sin \frac{x}{3}$

(c) $f(x) = \sin x$, $h(x) = \sin 3x$

(d) $f(x) = \cos x$, $h(x) = \cos \frac{x}{5}$

الإزاحة الأفقية Horizontal Translation

$$y = a \sin(bx - h) \text{ بيان}$$

ينتج من إزاحة أفقية لبيان $y = a \sin bx$ بمقدار $\frac{h}{b}$ إلى جهة اليمين عندما $h > 0$ ، وإلى جهة اليسار عندما $h < 0$ وبالمثل لبيان الدالة: $y = a \cos(bx - h)$

مثال:

صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين:

a $y_1 = \cos x$, $y_2 = \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$

b $y_1 = \sin 3x$, $y_2 = \sin(3x - 7)$

لكل قيم x يكون التالي صحيحًا:

- | | | | | | |
|---|-----------------------------------------------|---|------------------------------------------------|---|------------------------------------------------|
| 1 | $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$ | 2 | $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ | 3 | $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ |
| 4 | $\cos(x \pm 2\pi) = \cos x$ | 5 | $\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$ | 6 | $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$ |

الإزاحة الرأسية

بيان الدالة $y = a \sin(bx - h) + k$ ينتج عن إزاحة رأسية لبيان الدالة $y = a \sin(bx - h)$ بمقدار k (إلى أعلى إذا كانت k موجبة، وإلى أسفل إذا كانت k سالبة).

مثال: صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين: $y_1 = \frac{3}{4} \sin x$ ، $y_2 = \frac{3}{4} \sin x + 2$

مثال: $f(x) = 3 \sin \frac{x}{2}$ ، $h(x) = 3 \sin \frac{x}{2} - 1$

ملخص التحويلات على الدوال الجيبية

Transformations Sinusoid Functions

التحويل	بالتطبيق على $y = \cos x$	بالتطبيق على $y = \sin x$
التمدد الرأسى/الانكماش (السعة)	$y = a \cos x$	$y = a \sin x$
التمدد الأفقى/الانكماش (الدورة)	$y = \cos bx$	$y = \sin bx$
الإزاحة الأفقية	$y = \cos(x - h)$	$y = \sin(x - h)$
الإزاحة الرأسية	$y = \cos x + k$	$y = \sin x + k$
الانعكاس في محور السينات	$y = -\cos x$	$y = -\sin x$
الانعكاس في محور الصادات	$y = \cos(-x) = \cos x$	$y = \sin(-x) = -\sin x$

مثال:

وضّح كيف يمكن الحصول على التمثيل البياني لكل من الدالتين التاليتين عن طريق التمثيلات البيانية للدوال المثلثية: $\sin x$ أو $\cos x$. أوجد أيضًا سعة كل دالة ودورتها.

a $y = \cos(1 - x) + 2$

b $y = 2 \sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) - 1$

مثال:

وضّح كيف يمكن الحصول على التمثيل البياني لكل من الدالتين التاليتين باستخدام تحويلات الدوال المثلثية $y = \sin \theta$ أو $y = \cos \theta$ ، ثم أوجد سعة كل دالة ودورتها:

(a) $y = -2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 1$

(b) $y = 3.5 \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) - 1$

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

قانون الجيب
في أي مثلث ABC :

Using the Law of Sine

استخدام قانون الجيب

مثال: حل ΔABC حيث: $\alpha = 36^\circ$, $\beta = 48^\circ$, $a = 8 \text{ cm}$

ملاحظة : يسمح قانون الجيب بحل مثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما.

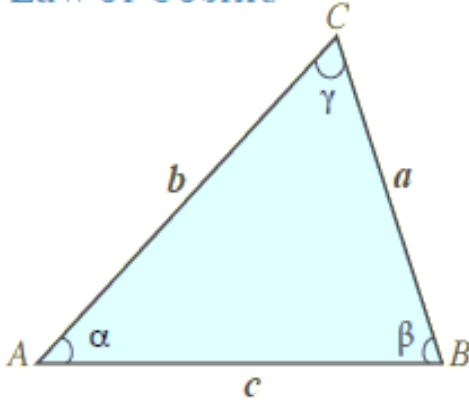
مثال: حل ΔABC حيث: $a = 7 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$, $\alpha = 26.3^\circ$

مثال: حلّ المثلث ABC : $m(\widehat{A}) = 43^\circ, a = 32 \text{ cm}, b = 28 \text{ cm}$

مثال: حل المثلث ABC : $m(\widehat{B}) = 57^\circ, a = 11 \text{ cm}, b = 10 \text{ cm}$

قانون جيب التمام Law of Cosine

Law of Cosine



قانون جيب التمام

في ΔABC

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Using the Law of Cosine

استخدام قانون جيب التمام

يسمح قانون جيب التمام بحل مثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

معلومة:

مثال: حل ΔABC حيث: $a = 11 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$, $\gamma = 20^\circ$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

مثال:

في ΔABC حيث: $a = 9 \text{ cm}$, $b = 7 \text{ cm}$, $c = 5 \text{ cm}$ معلومة:

يمكن حل أي مثلث معلوم فيه ضلعين وزاوية ليست محصورة بينهما باستخدام قانون الجيب أو جيب التمام.

أوجد قياس الزاوية الأكبر.

مثال: حل ΔABC حيث: $a = 5 \text{ cm}$, $b = 6.5 \text{ cm}$, $\alpha = 25^\circ$

Area of Triangle

مساحة المثلث

مثال: أوجد مساحة المثلث ABC حيث: $a = 5 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$, $c = 8 \text{ cm}$

مثال: أوجد مساحة المثلث ABC حيث: $a = 5 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$, $c = 8 \text{ cm}$

قاعدة هيرون

Heron's Formula

يمكننا أيضًا إيجاد مساحة مثلث بمعرفة أطوال أضلاعه الثلاثة بالقاعدة التالية:

قاعدة هيرون

تعطى مساحة مثلث ABC أطوال أضلاعه a, b, c بالقاعدة:

$$\text{Area}(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c) = \text{semiperimeter (نصف محيط المثلث)}$$

مثال: أوجد مساحة المثلث ABC حيث: $a = 4 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$, $c = 3 \text{ cm}$

مثال: في أحد سباقات المراكب الشراعية وضعت اللجنة المنظمة شرطاً ألا تتعدى مساحة شراع المركب 7.5 m^2 .
إذا كان شراع أحد المراكب على شكل مثلث أبعاده: 6 m , 5 m , 3 m
فهل يسمح له بالمشاركة في السباق؟