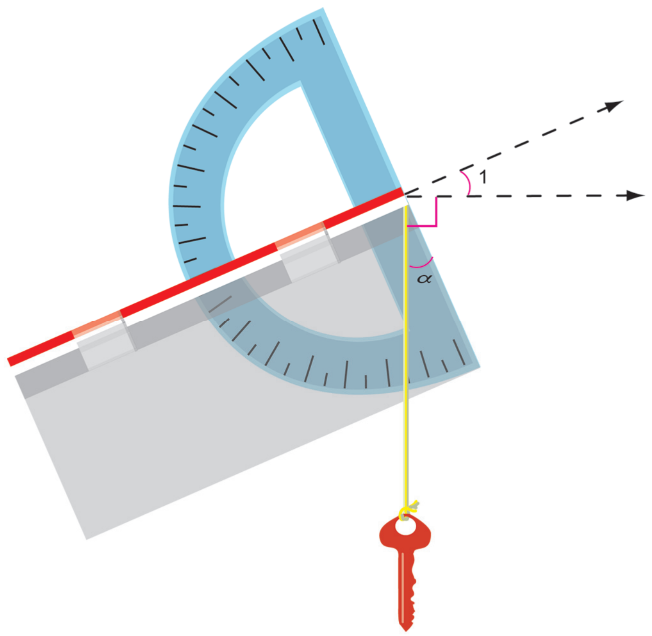
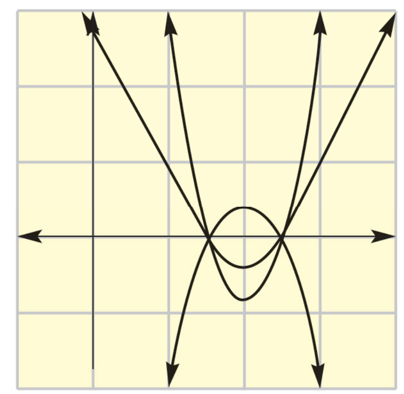
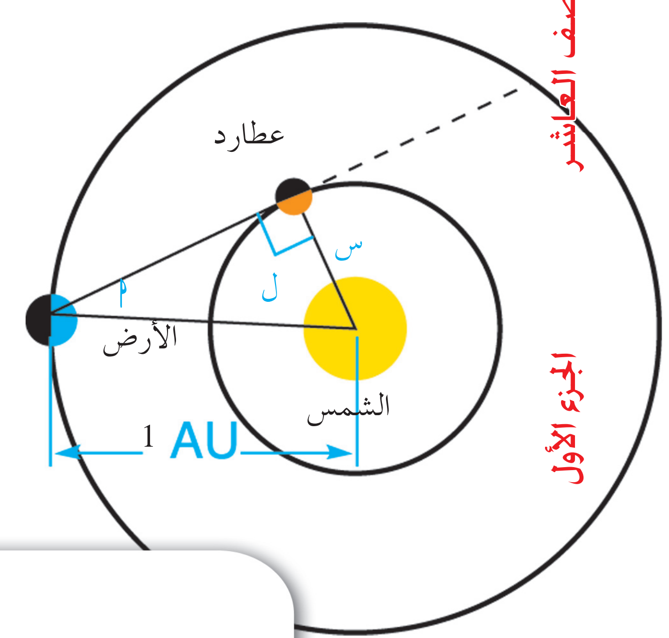






كتاب المعلم

الصـــفّ الـعـاشـر ١٠

الفصل الدراسي الأوّل

الرياضيات

الرياضيات
كتاب المعلم
الصف العاشر
الجزء الأول
الطبعة الأولى

وزارة التربية

تطرح سلسلة الرّياضيّات مواقف حياتيّة يوميّة، وتؤمّن فرص تعلُّم كثيرة. فهي تعزّز المهارات الأساسيّة، والحسّ العدديّ، وحلّ المسائل، والجهوزيّة لدراسة الجبر، والهندسة، وتنمّي مهارتَي التّعبير الشّفهيّ والكتابيّ ومهارات التفكير في الرّياضيّات. وهي تتكامل مع الموادّ الدراسيّة الأخرى فتكون جزءًا من ثقافة شاملة متماسكة تحفّز الطلّاب على اختلاف قدراتهم وتشجّعهم على حبّ المعرفة.

تتكوّن السلسلة من:

- كتاب الطالب
- كتاب المعلّم
- كرّاسة التمارين
- كرّاسة التمارين مع الإجابات

PEARSON Scott Foresman

مركز البحوث التربويّة

Trigonometry

الوحدة الثانية: حساب المثلثات

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

٢ – ١ : الزوايا وقياساتها.

جزء ١ : الزاوية وقياسها

جزء ٢ : القياس الستيني

جزء ٣: القياس الدائري

جزء ٤ : العلاقة بين القياسين الدائري والستيني

٢ – ٢ : النسب المثلثية: الجيب وجيب التمام ومقلوباهما

جزء ١ : المقابل والمجاور لزاوية حادة في مثلث قائم الزاوية

جزء ٢ : جيب الزاوية

جزء ٣: جيب تمام الزاوية

جزء ٤ : مقلوبات الجيب وجيب التمام

٢ – ٣: ظل الزاوية ومقلوبه

جزء ١ : ظل الزاوية

جزء ٢ : إيجاد زاوية إذا علم ظلها

جزء ٣: مقلوب ظل الزاوية

٢ – ٤ : النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

جزء ١ : الزاوية ٤٥°

جزء ٢ : الزوايا ٣٠°، ٦٠°

جزء ٣: متطابقات مثلثية

جزء ٤ : الزاوية الربعية

٢ – ٥: حل المثلث قائم الزاوية

جزء ١ : حل المثلث إذا عرفت أضلاعه

جزء ٢ : حل المثلث إذا عرفت زواياه

٢ – ٦: زوايا الارتفاع والانخفاض

جزء ١ : زوايا الارتفاع

جزء ٢ : زوايا الانخفاض

٢ – ٧: القطاع الدائري والقطعة الدائرية

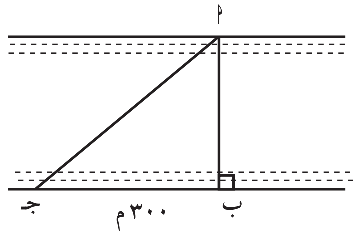
جزء ١ : القطاع الدائري ومساحة القطاع الدائري

جزء ٢ : القطعة الدائرية ومساحة القطعة الدائرية

مقدمة الوحدة

مشروع للتفكير

سوف يتعرف الطلاب إلى موضوع «حساب المثلثات» بعمق وتركيز؛ لذا يجب إعطاء فكرة عامة عن هذا العلم أو الفرع من الرياضيات. دعهم يقرأون فقرة «**أضف إلى معلوماتك**» في كتاب الطالب، ثم أكد لهم أن الكثير من الأفكار المتعلقة بحساب المثلثات نشأت أصلًا من مشكلات تتضمن عمل قياسات لمسافات أو زوايا بطرائق غير مباشرة، أي من دون استخدام أداة للقياس. مثلًا: إيجاد عرض نهر عند موقع معين (من دون استخدام شريط قياس ومده بين نقطتين متقابلتين على ضفتي النهر) وذلك لإقامة جسر فوقه عند هذا الموقع. اسأل الطلاب: ماذا يفعلون لو كانوا مهندسين لإيجاد أب.



مثلًا: نرسم طولًا معينًا $\overline{\text{بجـ}}$ بزاوية قائمة على الشاطئ حيث نقطة ب. وبأحد الأجهزة يمكن قياس الزاوية أجـ ب ولتكن ٦٠°. كيف يمكن الحصول على أب؟

أحد الحلول: رسم مثلث قائم الزاوية أ′جـ′ب′ مشابه للمثلث أجـ ب بقياسات صغيرة، ثم قياس أ′ب′ واستخدام فكرة مقياس الرسم لإيجاد أب.

اذكر لهم أن حساب المثلثات يحل لنا مثل هذه المشكلة وفي معظم الحالات نستخدم المثلث قائم الزاوية كما نرى في هذه الوحدة.

إرشادات توجيهية للطلاب:

اسأل الطلاب إعطاء بعض الأمثلة حول المسافات التي لا يمكن قياسها مباشرة كالمسافة بين الأرض والمريخ والمسافة بين مركز الأرض وسطحها.

اسألهم أيضًا وصف بعض المجالات حيث تستخدم القياسات غير المباشرة. يمكن للأمثلة أن تشمل مساحة الأراضي أو علم الفلك أو علم البحار.

شجّع الطلاب على حفظ كل المعدات وكل ما يتعلق بالمشروع في ملف خاص. ذكّر الطلاب كيف يمكن للرياضيات أن تزيد من قدرتهم على قياس أشياء خارج محيطهم الفيزيائي.

من المستحسن وضع خطة للمشروع. بينما يتشارك الطلاب في إتمام أعمالهم، شجّع المجموعات على شرح الوسائل المستخدمة.

في السؤال (أ) يمكن تقديم المساعدة: الخيط هو دائماً متعامد مع الأفق.

عندما يتقدّم الطلاب بمشروعهم اسأل كل طالب ماذا فعل وماذا قاس. اسأل الطلاب أن يشرحوا كيفية استخدام الآلة والصعوبات التي واجهتهم عند تنفيذ المشروع.

سلّم التقييم:

٤.	يعرض الطالب المشروع بشكل كامل. يتعامل مع آلية قياس الميل ويقترح تحسين آدائها. يعطي كافة القياسات والحسابات والأشكال والشروح بأسلوب منظم ودقيق وواضح.
٣.	يعرض الطالب المشروع بشكل كامل. يتعامل مع آلة قياس الميل ويساهم في تحسين آدائها. يقدم معظم القياسات والحسابات والأشكال والشروح مرتكبًا أخطاءً قليلة ولكنها معروضة بأسلوب منظم.
٢.	يعرض الطالب المشروع بشكل كامل. يتعامل مع آلة قياس الميل ويقترح تحسين آدائها، يقدم القياسات والحسابات والأشكال والشروح مرتكبًا أخطاء كثيرة كما أنها معروضة بأسلوب غير منظم.
١.	معظم العناصر في المشروع غير كاملة أو ناقصة.

٢ـ١ : الزوايا وقياساتها

١ الأهداف

- معرفة الزاوية الموجهة (السالبة والموجبة).
- تعرف قياس الزاوية.
- التحويل بين الدرجات والدقائق والثواني.
- القياس الستيني.
- القياس الدائري.
- العلاقة بين القياسين الدائري والستيني.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

الزاوية الموجهة - الزاوية الموجهة الموجبة - الزاوية الموجهة السالبة - القياس الستيني - القياس الدائري - الزاوية في الوضع القياسي.

٣ الأدوات والوسائل

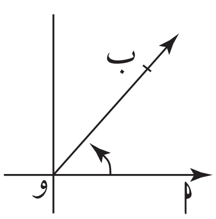
مسطرة مدرجة - منقلة - فرجار - آلة حاسبة.

٤ التمهيد

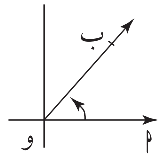
اسأل الطلاب: كيف نجد محيط الدائرة ومساحتها.
ذكّرهم بعقارب الساعة ودورانها: تحديد الاتجاه السالب والموجب. أشر إلى أن حركة دوران الأرض حول محورها هي عكس دوران عقارب الساعة، وأن حركة دوران الأرض اعتمدت على أنها الاتجاه الموجب لقياس الزوايا.
تناقش معهم حول أجزاء الساعة: الدقيقة والثانية. اعرض ملصقات لأشكال تحوي زوايا في أوضاع مختلفة ودعهم يقرأونها، ثم دع الطلاب يشكلون بضلعي فرجار زوايا حادة، قائمة، منفرجة.

٥ التدريس

(١) **الزاوية وقياسها**: على ورقة مربعات ومستوى إحداثي، اصنع زوايا بحيث يكون رأسها عند نقطة الأصل، وأحد أضلاعها على امتداد الاتجاه الموجب لمحور السينات والضلع الآخر في مواضع مختلفة.

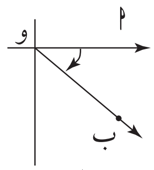


زاوية موجبة



زاوية موجبة

- عرف الوضع القياسي للزاوية والضلع الابتدائي لها (وليكن وأ) والضلع النهائي (وليكن وب) في أوضاع مختلفة، ثمّ وضح الزاوية الموجبة والزاوية السالبة.
- اطلب إليهم رسم زوايا في أوضاع قياسية حادة موجبة وحادة سالبة ومنفرجة موجبة، ... إلخ.



زاوية سالبة

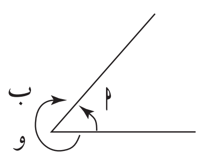
- ذكر الطلاب بالقياس الستيني والمنقلة التي نقيس بها الزوايا والدرجة والدقيقة، وقياسات مختلفة: قائمة، مستقيمة.

(٢) **القياس الستيني**: استخدم الآلة الحاسبة في التعبير عن قياسات زوايا بالدرجات والدقائق والعكس بالعكس.
نبه إلى أن الزاوية يمكن أن تأخذ قياسات من ٠° إلى ٣٦٠° في حالة دورة الضلع النهائي دورة كاملة (عكس اتجاه دوران عقارب الساعة) ويمكن أن يزداد قياس الزاوية بمزيد من الدورات.

- يمكن أن تربط بين قياس الزاوية الموجبة وقياس الزاوية السالبة، مثلًا: −٣٠٠°، ٦٠°.
- يمكن الربط بين قياس الزاوية وقياس الزاوية المضافة إليها دورات كاملة. مثلًا: ... ٣٦٠° + ٦٠°، ٦٠°.
- لا تسهب في شرح هذا الجزء بل اجعله نشاطًا وحوارًا مع الطلاب على الشكل التالي:
  ارسم الضلع النهائي للزوايا: ٣٠°، ٣٩٠°، ٧٥٠°، −٣٠°، −٣٣٠°، −٣٩٠°.
  أشر إلى أنه بعد الثواني نستخدم الأجزاء من مئة من الثانية، خاصة في المباريات الرياضية.

تطبيق حياتي

ناقش مع الطلاب المثال التالي: في ميدان دائري، دارت سيارة ثلاث دورات وربع الدورة بالاتجاه الموجب ثم توقفت. أوجد قياس الزاوية (٣ × ٣٦٠° + ٩٠°).
تابعت السيارة سيرها ودارت دورتين، أوجد قياس الزاوية (٥ × ٣٦٠° + ٩٠°). افترض أن السيارة تراجعت دورة كاملة، يصبح قياس زاويتها ٤ × ٣٦٠°+ ٩٠°.



لاحظ أن نقطة توقف السيارة لم تتغير.

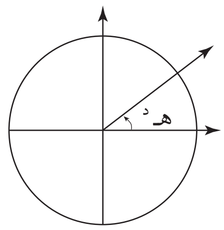
اذكر قياسات ٣ زوايا تكافئ في وضعها الزاوية التي قياسها ٩٠°، ٤٥° ...

لتوضيح الحقيقة الهندسية:

القياس الدائري: $\frac{\text{طول القوس الذي يحصر زاوية}}{\text{طول نصف قطر هذه الدائرة}}$ = مقدارًا ثابتًا

استخدم عدة شفافيات، مرسومًا على كل منها مستوى إحداثي بالمواصفات نفسها. ثم ارسم على كل شفافية زاوية لها المقياس نفسه، يقع مركزها في كل من الدوائر المرسومة في كل شفافية وبأنصاف أقطار مختلفة، ثم ضع الشفافيات على جهاز العرض واحدة تلو الأخرى بحيث تقع مراكز الدوائر على بعضها بعضًا، فيتضح أمام الطلاب فكرة ثبات قياس الزاوية الدائري كما يتضح في التعريف:

$\frac{\text{ل}}{\text{نق}} = \frac{\text{طول القوس}}{\text{نصف قطر الدائرة}} = \text{هـ}^{\text{د}}$



ومنها: ل = هـ$^{\text{د}}$ نق

نبه الطلاب إلى وحدة القياس الدائري (الزاوية النصف قطرية) وذكرهم بوحدة القياس الستيني (الدرجة) – وصورها بأشكال تقريبية.

اربط بين القياسين ٣٦٠° تعادل ٢π (راديان)

١٨٠° تعادل π (راديان)

لاحظ أن π عدد حقيقي غير نسبي يساوي تقريبًا ٣,١٤ ولا يمكن التعبير عنه بالضبط بعدد نسبي.

عبر عن الدرجة الواحدة (في قياس الزوايا) بعدد حقيقي مناظر ١° = $\frac{\pi}{١٨٠°}$ = ٠,٠١٧٥

(سيفيد ذلك في مقرر آخر عند عرض فكرة الدوال المثلثية أو الدوال الدائرية باعتبارها دوال متغيراتها أعداد حقيقية).

استخدم العلاقة $\frac{\text{هـ}^{\text{د}}}{\pi} = \frac{\text{س}°}{١٨٠°}$ للتحويل من قياس إلى آخر.

مثال

ذكر الطلاب بمعنى زاوية قائمة. اكتب على اللوح أن ١° = ٦٠′، ١′ = ٦٠″

قد يجد الطلاب صعوبة في عملية ضرب عدد صحيح بكسر. مد يد المساعدة واشرح لهم أننا نبدأ بضرب العدد الصحيح بالبسط ثم نقسم النتيجة على المقام. ساعدهم على إكمال العملية الحسابية إذ يمكن أن نحصل على كسر عشري.

اشرح لهم أن الكسر العشري يضرب بالعدد ٦٠ لنحصل على الدقائق وإذا كان الكسر العشري في الدقائق نكمل أيضًا ونضرب بالرقم ٦٠ لنحصل على الثواني.

على سبيل المثال: س° = ٢١,٢٥٦°

نأخذ ٠,٢٥٦ × ٦٠′ = ١٥,٣٦′.

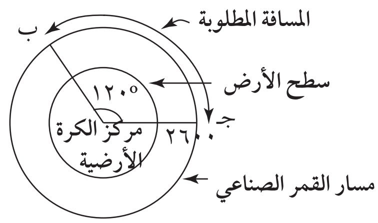
بعد ذلك نأخذ ٠,٣٦′ × ٦٠" = ٢١,٦" ≈ ٢٢"

فيكون: س° ≃ ٢١° ١٥′ ٢٢"

مثال (٨) (كتاب الطالب ص: ٧٥)

لاحظ أن المطلوب هو طول القوس الدائري $\overset{\frown}{\text{جـ ب}}$ الذي يقابل زاوية قياسها $\frac{١}{٣}$ دورة كاملة، أي: $\frac{١}{٣}$ × ٢π حيث ٢π قياس الزاوية المقابلة للدورة الكاملة.

اشرح للطلاب أن سرعة القمر الصناعي حول الأرض نعتبرها ثابتة. إذًا المسافة التي يقطعها في ساعة واحدة هي $\frac{١}{٣}$ المسافة الإجمالية التي يقطعها في ثلاث ساعات.



ساعدهم على إيجاد المتغيرات لتطبيق القاعدة ل = **نق** هـ^د^.

٦ الربط

قمر صناعي يدور حول الأرض بسرعة ثابتة وبشكل دائري، يقطع مسافة ٥٤ ٠٠٠ كم في كل دورة. ما بعد القمر الصناعي عن مركز الأرض؟

نق هـ^د^ = ل ⟸ نق = $\frac{٥٤\ ٠٠٠}{٢ \times ٣,١٤}$ = ٨ ٥٩٨,٧٣

يبعد القمر الصناعي عن مركز الأرض حوالى ٨ ٥٩٨,٧٣ كم.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخلط الطلاب بين الدرجة والراديان. وضح لهم أن زاوية قياسها ١٨٠° هي نفسها π راديان وأن $\frac{\pi}{١٨٠°}$ ≠ ١.

٨ التقييم

اطلب إلى الطلاب حل التمارين في فقرة «حاول أن تحل» (٢)، (٣). تأكد من أنهم يستخدمون التحويل بين القياس الستيني وبين القياس الدائري.

٩ إجابات وحلول

كتاب الطالب (ص ٧٠) «في الأشكال التالية»

(أ) الضلع الابتدائي للزاوية أوب هو $\overrightarrow{\text{وأ}}$ والضلع النهائي هو $\overrightarrow{\text{وب}}$ وقياس الزاوية أوب موجب.

(ب) في الشكلين الآخرين (٣) و(٤) أوب، م و ن الضلع الابتدائي للزاوية م و ن هو $\overrightarrow{\text{وم}}$ والضلع النهائي هو $\overrightarrow{\text{ون}}$ وقياس الزاوية م و ن سالب.

«حاول أن تحل»

١ $\frac{٧}{٣٢}$ القائمة = ١٩° ٤١′ ١٥″

٠,٦٢٥ القائمة = ٥٦° ١٥′

٢ $\frac{٣}{٧}$ المستقيمة = $\frac{٣}{٧}$ × ١٨٠° = ٧٧° ٨′ ٣٥″

٣ (أ) ٧,٢ سم (ب) ١٢,٥٦ سم

استخدم القاعدة $\frac{\text{هـ}^{\text{د}}}{\pi} = \frac{\text{س}^{\circ}}{١٨٠^{\circ}}$

٤ (أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) $\frac{٥\pi}{٣}$

(جـ) $\frac{٥\pi}{٤}$ (د) $\frac{٥\pi}{٦}$

٥ (أ) ١١٢° ٣٠′ (ب) ٤٣° تقريبًا

(جـ) ١٩٢° تقريبًا (د) ٣٦°

٦ (أ) ٩٠° (ب) ٦٠°

(جـ) ٣٠° (د) ٤٥°

٧ (أ) ل = هـ^د نق ≃ ٥,٤٩٨ سم

(ب) ≃ ٥٠,٢٦٥ سم

٢ـ٢: النسب المثلثية: الجيب وجيب التمام ومقلوباهما

١ الأهداف

- تعرف جيب الزاوية جا(sin).
- تعرف جيب تمام الزاوية جتا(cos).
- تعرف قاطع الزاوية.
- تعرف قاطع تمام الزاوية.
- استخدام الجيب وجيب التمام لحساب أضلاع غير معلومة الأطوال في المثلث قائم الزاوية.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

جيب الزاوية (sin) – جيب تمام الزاوية (cos) – قاطع الزاوية (sec) – قاطع تمام الزاوية (cosec).

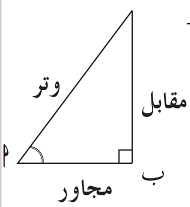
٣ الأدوات والوسائل

مسطرة مدرجة – منقلة – فرجار – آلة حاسبة – مثلث قائم الزاوية – ورق رسم بياني.

٤ التمهيد

ارسم مثلثًا قائم الزاوية. ذكّر الطلاب بأن الضلع المقابل للزاوية القائمة يسمى وترًا في المثلث قائم الزاوية. اطلب إلى الطلاب حساب النسب لكل زاوية حادة على الشكل التالي:

الضلع المقابل للزاوية / وتر المثلث ، الضلع المجاور للزاوية / وتر المثلث

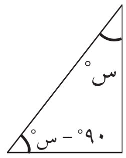


- يتعرف مفهوم الزاويتين المتتامتين (٣٠°، ٦٠°) (٥٠°، ٤٠°)، (٥٤°، ٣٦°).
  اطلب إلى الطلاب إعطاء أمثلة.
- اكتب على السبورة الأعداد التالية: ٥، ١٠، ٢٠، ٣٠، ٤٠، ٥٠، ٦٠، ١٠٠ . اسأل الطلاب عن مقلوب هذه الأعداد. ماذا يلاحظون؟ هل تكبر باستمرار أم تصغر باستمرار؟

٥ التدريس

ناقش مع الطلاب كل خطوة متبعة لإيجاد الجيب وجيب التمام.

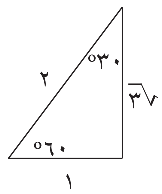
تأكد من أن الطلاب فهموا جيدًا العلاقة:



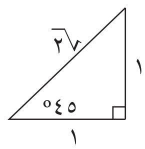
جا(س°) = جتا(٩٠° − س°) من خلال استقراء قيم النسب الحاصلة. أرشد الطلاب إلى فهم أن نسب الجيب وجيب التمام هي فقط في المثلث قائم الزاوية.

ارسم مثلثًا قائم الزاوية واطلب إلى الطلاب إيجاد العلاقات بين كل زوجين من أطوال أضلاع المثلث.

ذكر الطلاب بالنسب المثلثية في المثلثات الخاصة التالية:



١. المثلث قائم الزاوية وهو نصف مثلث متطابق الأضلاع.



٢. المثلث قائم الزاوية ومتطابق الضلعين. (انظر إلى الصورتين).

وضح أن النسب المثلثية خاصة جتا(cos)، جا(sin) لها تطبيقات عملية كثيرة في أنها تعتبر النموذج الرياضي لمظاهر حياتية مثل الأعمال البحرية وتمثيل الدورانات الهندسية وتحركات الموجات الصوتية وموجات المد والجزر...

وضِّح للطلاب ما يلي بالنسبة إلى الزاوية الحادة في المثلث القائم الزاوية:

(أ) كلما كبرت الزاوية يكبر جيب الزاوية ولكن قاطع تمام الزاوية قتا (cosec) يصغر.

(ب) كلما كبرت الزاوية يصغر جيب التمام ولكن قاطع الزاوية قا(sec) يكبر.

ثم شجع الطلاب على استنتاج:

(قاطع تمام الزاوية) قتا = $\frac{1}{\text{جا}}$

(قاطع الزاوية) قا = $\frac{1}{\text{جتا}}$

مثال (٥)

تأكد من أن الطلاب تفهموا الصورة جيدًّا. اسألهم: أين الأرض؟ وأين عطارد؟ وإلامَ يرمز كل ضلع في المثلث؟ لِمَ هذا المثلث هو قائم الزاوية؟

ركز على معرفة الوتر والضلع المقابل للزاوية أ.

ساعد الطلاب على حساب المسافة بين عطارد والشمس.

(نجد بواسطة الآلة الحاسبة جا ٣,٢٢°).

تفكير ناقد: اطلب إلى الطلاب إيجاد المسافة بين الأرض وعطارد بطريقتين مختلفتين.

$\frac{\text{المسافة بين عطارد والأرض}}{\text{المسافة بين الشمس والأرض}}$ = جتا ٣,٢٢°.

$\frac{\text{المسافة بين الشمس والأرض}}{\text{المسافة بين عطارد والأرض}}$ = قا ٣,٢٢°.

ساعد الطلاب على فهم طريقة إيجاد قيمة الزاوية على الآلة الحاسبة باستخدام: جتا$^{-1}$، جا$^{-1}$.

٦ الربط

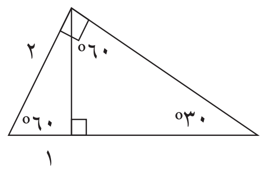
درِّب الطلاب على استخدام الآلة الحاسبة في إيجاد النسب المثلثية لزوايا معينة، وكذلك إيجاد قياس زاوية معلوم نسبة مثلثية لها.

ارسم على السبورة مثلثًا قائم الزاوية له زاوية قياسها معروف وله ضلع واحد طوله معروف. اطلب إليهم إيجاد قياس الزاوية الأخرى وأطوال بقية الأضلاع.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخلط الطلاب بين جيب الزاوية وجيب تمام الزاوية.
وضح لهم النسبة في المثلث قائم الزاوية التي تدل على جيب الزاوية وجيب تمام الزاوية.
قد يجد بعض الطلاب صعوبة في إيجاد المجهول س في المعادلة، مدّ يد المساعة. اطلب إليهم استخدام الضرب التقاطعي أو استخدام المضاعف المشترك الأصغر. قد يجد الطلاب صعوبة في التفرقة بين جتا (cosθ)، قتا (cosecθ).
وضّح لهم أن قتاθ = $\frac{١}{جاθ}$

٨ التقييم



باستخدام الخواص الهندسية، اطلب إلى الطلاب إيجاد أطوال الأضلاع غير المعلومة في المثلثات التي بالشكل.

اسأل الطلاب: ما هو جيب الزاوية، إذا كان قاطع تمام هذه الزاوية يساوي ٣ أي أن قتا θ = ٣، ثم اسألهم ما هو جيب تمام الزاوية، إذا كان: قاθ = $\frac{٢}{\sqrt{٢}}$.

اطلب إليهم إيجاد قاطع تمام الزاوية وقاطع الزاوية لبعض الزوايا على الآلة الحاسبة.

٩ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

١ (أ) باستخدام معكوس نظرية فيثاغورث نجد:

ب ش^{٢} + ب ر^{٢} = (٥)^{٢} + (١٢)^{٢} = ٢٥ + ١٤٤ = ١٦٩

ش ر^{٢} = (١٣)^{٢} = ١٦٩

وبالتالي ب ش^{٢} + ب ر^{٢} = ش ر^{٢}. المثلث ش ب ر قائم في بَ.

(ب) جا(شَ) = $\frac{١٢}{١٣}$ ، جا(رَ) = $\frac{٥}{١٣}$

٢ (أ) معكوس نظرية فيثاغورث نجد:

س ع^{٢} + ع د^{٢} = ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠

س د^{٢} = ١٠٠، لذا س ع^{٢} + ع د^{٢} = س د^{٢}

والمثلث قائم في عَ.

(ب) جا(سَ) = $\frac{٨}{١٠}$ = $\frac{٤}{٥}$ ؛ جتا(سَ) = $\frac{٦}{١٠}$ = $\frac{٣}{٥}$

جا(دَ) = $\frac{٦}{١٠}$ = $\frac{٣}{٥}$ ؛ جتا(دَ) = $\frac{٨}{١٠}$ = $\frac{٤}{٥}$

(جـ) جا(سَ) = جتا(دَ) ، جتا(سَ) = جا(دَ)

٣ ٢٥^{٢} = ٢٤^{٢} + ٧^{٢} (تطبيق معكوس نظرية فيثاغورث)

جاأ = $\frac{٢٤}{٢٥}$ ، جتاأ = $\frac{٧}{٢٥}$ ، قاأ = $\frac{٢٥}{٧}$ ، قتاأ = $\frac{٢٥}{٢٤}$

جاجـ = $\frac{٧}{٢٥}$ ، جتاجـ = $\frac{٢٤}{٢٥}$ ، قاجـ = $\frac{٢٥}{٢٤}$ ، قتاجـ = $\frac{٢٥}{٧}$

٤ جتا ٤٣° = $\frac{ص}{١٠}$ ، ص = ١٠ × جتا ٤٣° ،

ص = ٧,٣ (تقريبًا)

٥ (أ) جا ٤٦,١ = $\frac{س}{ل}$، س = ٠,٧٢ AU

(ب) (أ) جتا ٥٨° = $\frac{٥}{س}$ ، س = $\frac{٥}{جتا ٥٨°}$ $\simeq$ ٩,٤

(ب) جا ٣٦° = $\frac{١٠}{س}$ ، س = $\frac{١٠}{جا ٣٦°}$ $\simeq$ ١٧

(جـ) جا ٢١° = $\frac{س}{١٢}$ ، س = ١٢ × جا ٢١° $\simeq$ ٤,٣

٦ (أ) ق(سَ) $\simeq$ ٤٠° ٣٢′ ٣٠″

(ب) ق(سَ) $\simeq$ ٦٧° ٤٨′ ٣٠″

(جـ) ق(سَ) $\simeq$ ٥٨° ٥١′ ٩″

٢ـ٣: ظل الزاوية ومقلوبه

١ الأهداف

- حساب ظل الزاوية ومقلوبه في المثلثات قائمة الزاوية.
- استخدام ظل الزاوية ومقلوبه في إيجاد أطوال أضلاع مثلث وزواياه.
- حل المثلث قائم الزاوية.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

ظل الزاوية ظا (tangent) – مقلوب ظل الزاوية ظتا (cotangent).

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة مدرجة، منقلة، فرجار، آلة حاسبة علمية.

٤ التمهيد

أوّلًا: مراجعة ما يلي:

- المثلثات المتشابهة.
- مفهوم النسبة.
- رسم مستقيم في المستوى الإحداثي.

ثانيًا: طرح موقف حياتي يبيّن أهمية دراسة ظل الزاوية مثل: كيف يمكن حساب ارتفاع برج من نقطة تبعد عنه مسافة معينة؟

٥ التدريس

ابدأ بالعمل التعاوني الوارد في كتاب الطالب على مرحلتين:

تأكد من أن جميع الطلاب قد استخدموا برنامج الدرجات على الآلة الحاسبة.

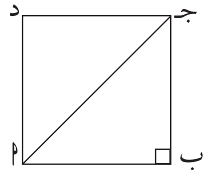
اطلب إليهم رسم مثلث قائم الزاوية ولتكن الزاوية ٣٠°، ثم اطلب إليهم إيجاد النسبة التالية: $\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية}}$.

استنتج من هذه الأعمال أنهم توصلوا إلى القيمة نفسها واطلب إليهم تسمية هذه النسبة ظل الزاوية ٣٠°.

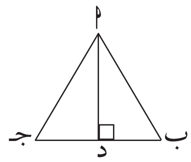
اطلب إلى الطلاب، ضمن المجموعات، استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد:

ظا ١٠°، ظا ٢٠°، ظا ٣٠°، ظا ٤٠°.

ثم مقارنة القيم الناتجة للتوصل إلى التعميم: كلما زاد قياس الزاوية، زاد ظلّها.



راجع مع الطلاب جدول النسب المثلثية.
استخدم مربعًا طول ضلعه ١، ثم ارسم وتره أجـ. أشر إلى أن طول الوتر يساوي $\sqrt{٢}$ ، واطلب إليهم إيجاد قيم جا، جتا، ظا لزاوية قياسها ٤٥°. ثم استخدم مثلثًا متطابق الأضلاع طول ضلعه ١. أشر إلى أن جـ د = $\frac{١}{٢}$، أد = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$، واطلب إليهم إيجاد قيم جا، جتا، ظا للزوايا قياساتها ٣٠°، ٦٠°. ناقش معهم العلاقة بين النسب المثلثية للزاويتين ٣٠°، ٦٠°.



ملاحظة حول المثال (١)

ركّز مع الطلاب على أن ظل الزاوية يُمكن أن يكون أصغر من ١ أو أكبر من ١ للزاوية الحادّة في المثلث قائم الزاوية.

مثال (٢) تطبيقات حياتية

في مناقشة المثال، يستحسن استخدام بوصلة وتمثيل ما قام به الكشاف (ويمكن تطبيقة عمليًّا في ساحة المدرسة) وأخذ القراءات من الطلاب أنفسهم. وفي الحل بيّن لهم أننا نحصل على قيمة س بالضرب التقاطعي ظا ٨٦° = $\frac{س}{٥٠}$.

ساعد الطلاب كي يتأكدوا من أن نظام الآلة الحاسبة هو بالدرجات قبل استخدامها، ثم وضّح كيفيّة استخدامها للحصول على ظل الزاوية ووظفه في إيجاد قيمة س.
تحقق من استخدام الطلاب للآلة الحاسبة بشكل صحيح وكلّفهم بإيجاد ظا ٤٥° ثم تأكد من أن الطلاب فهموا أن: ظا ٤٥° = ١.

إذا كانت ٤٥° < س < ٩٠° يكون ظا س > ١

إذا كانت ٠° < س < ٤٥° يكون ظا س < ١

للمتفوقين: إذا كانت $\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$ ، $\hat{جـ}$ ثلاث زوايا حادة في مثلث، قارن بين:
ظا$\hat{أ}$ + ظا$\hat{ب}$ + ظا$\hat{جـ}$، ظا$\hat{أ}$ × ظا$\hat{ب}$ × ظا$\hat{جـ}$، في الحالات التالية:

(أ) ق($\hat{أ}$) = ٦٠°، ق($\hat{ب}$) = ٥٠°

(ب) ق($\hat{أ}$) = ٦٠°، ق($\hat{ب}$) = ٤٥°

(جـ) ق($\hat{أ}$) = ٧٠°، ق($\hat{ب}$) = ٧٠°

فكر متطور: اطلب إلى الطلاب تحديد المثلث القائم الزاوية إذا كان كل من زاويتيه الحادتين متساويين.

مثال (٤)

اشرح للطلاب أن باستطاعتهم استخدام الآلة الحاسبة ومعكوس الظل لإيجاد قياس زاوية حادّة (باستخدام $\tan^{-1}$).

مثال (٥)

تأكد من أن الطلاب فهموا جيّدًا الزاوية الموجودة بين المحور الموجب للسينات والمستقيم. ساعدهم على رسم مستقيم أفقي موازٍ لمحور السينات يتقاطع مع مستقيم عمودي موازٍ لمحور الصادات فنحصل على زاوية قائمة ونحدد الزاوية أ التي هي زاوية محور السينات مع المستقيم.

٦ الربط

وقف رجل أمام أحد الأبراج وأراد قياس ارتفاعه عن سطح الأرض باستخدام قياس الزاوية بين الخط الأفقي $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ والخط المائل $\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$، فوجد أن هذه الزاوية تساوي ٧٠°. إذا كانت المسافة بين نقطة وقوفه أ ونقطة التقاء حائط البرج مع الأرض ب تساوي ٦٠ مترًا. فما ارتفاع هذا البرج؟

ظا ٧٠° = $\frac{\text{ع}}{\text{٦٠}}$ ⟸ ع = ٦٠ × ظا ٧٠° ≃ ١٦٥ مترًا.

تأكد من أن الطلاب يستخدمون الآلة الحاسبة بشكل صحيح.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

يرتكب بعض الطلاب الأخطاء بين الضلع المقابل للزاوية والضلع المجاور للزاوية.

مدّ يد المساعدة: ارسم مثلثًا قائم الزاوية في عدة مواقف حتى يتمكن الطلاب من تسمية الضلع المقابل أو الضلع المجاور للزاوية الحادة.

ساعد الطلاب على رؤية أن ظل الزاوية مُعرّف إذا كانت الزاوية حادّة في المثلث قائم الزاوية أي إذا كانت بين ٠° و٩٠°.

٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» الواردة في كتاب الطلاب، تأكد من فهمهم للفرق بين ظل الزاوية ومقلوبه.

٩ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

١ (أ) $\frac{\text{أب}}{\text{س ص}} = \frac{٣}{١٢} = \frac{١}{٤}$ ، $\frac{\text{أجـ}}{\text{س ع}} = \frac{٥}{٢٠} = \frac{١}{٤}$ ،

$\frac{\text{جـ ب}}{\text{ح ص}} = \frac{٤}{١٦} = \frac{١}{٤}$ لذا يكون المثلثان متشابهين.

(ب) نعم، نعم، ق(شَ) = ق(أَ).

ق(عَ) = ق(جَ).

(جـ) نعم، نعم، ق(شَ) = ق(أَ).

٢ (أ) ظا ٥٧° = $\frac{\text{س}}{٢,٥}$ ⟸ س = ٢,٥ × ظا ٥٧°

= ٣,٨٥.

س = ٣,٨٥ سم

(ب) ظا ٦٢° = $\frac{\text{س}}{١٠٠}$ ⟸ س = ١٠٠ × ظا ٦٢°

= ١٨٨.

س = ١٨٨ سم

(جـ) ظا ٥٤° = $\frac{\text{س}}{١٠}$ ⟸ س = ١٣,٧٦.

س = ١٣,٧٦ سم

٣ ق(سَ) = ظا$^{-1}$ (٠,٥) = ٢٦° ٣٣′ ٥٤″

٤ ق(لَ) = ظا$^{-1}$ $\left(\frac{١٠٠}{٤١}\right)$ = ٦٧° ٤٢′ ٢٣″.

٥ (أ) ق(أَ) = ظا$^{-1}$ $\left(\frac{١}{٢}\right)$ = ٢٦° ٣٣′ ٥٤″.

٦ ظاجـ = $\frac{٧}{٢٤}$ ، ظتاجـ = $\frac{٢٤}{٧}$

٢ـ٤: النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

١ الأهداف

- يوجد النسب المثلثية للزوايا: ٣٠°، ٦٠°، ٤٥°، ٩٠°.
- يستخدم النسب المثلثية في المثلث: ثلاثيني ستيني.
- يوجد متطابقات مثلثية.
- يتعرّف الزوايا الربعية.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

زوايا خاصة – مثلث ثلاثيني ستيني – متطابقات مثلثية – زوايا ربعية.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة مدرجة – منقلة – فرجار – آلة حاسبة – ورقة رسم بياني.

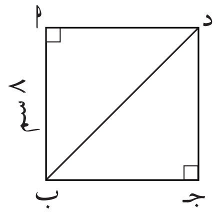
٤ التمهيد

اسأل الطلاب:

- ما المثلث المتطابق الأضلاع؟
- ما المثلث متطابق الضلعين؟
- ما العمود في المثلث؟
- ما القاعدة لمساحة مثلث؟
- ما المنصف للزاوية؟
- اطلب إليهم رسم زوايا موجهة موجبة وسالبة.
- اطلب إليهم رسم زوايا في الوضع القياسي.
- ذكر الطلاب بالاتجاه الموجب والاتجاه السالب على المحاور المتعامدة.

٥ التدريس

اطلب إلى الطلاب استخدام ورقة الرسم البياني، ودعهم يستخدمون المسطرة ليرسموا مربعًا طول ضلعه ٨ سم، ثم يرسموا أحد قطريه.



اسأل...

(أ) كم مثلثًا حصلتم عليه؟

(ب) ما نوع كل مثلث؟

(جـ) اطلب إليهم استخدام نظرية فيثاغورث لإيجاد طول القطر $\overline{\text{دب}}$.

(د) اسأل: على افتراض أن طول ضلع المربع هو س، ما طول القطر $\overline{\text{دب}}$ بدلالة س؟

(هـ) أوجد جا(أ̂دب)، جتا(أ̂دب). ماذا تستنتج؟

ركّز مع الطلاب على فهم المثلث الثلاثيني الستيني وعلاقته بالمثلث متطابق الأضلاع. دعهم يحلون مسائل تتضمن إعطاء طول ضلع واحد، ثم إيجاد بقية الأضلاع في المثلث الثلاثيني الستيني.

شجّع الطلاب على استخدام المتطابقات المثلثية لأنها تساعد على إيجاد النسب المثلثية في حال كان معطى إحداها.

مثال ذلك: لتكن أ زاوية في مثلث قائم، حيث جا(أ̂) = $\frac{٤}{٥}$.
أوجد: جتا(أ̂)، ظا(أ̂)، ظتا(أ̂)، قا(أ̂)، قتا(أ̂).

اشرح بإسهاب الزاوية الربعية. ثم أعطِ أمثلة متعددة عن المستوى الإحداثي المتعامد.

في المثال (٦) صفحة (٩٣)

ناقش مع الطلاب زاوية انحناء برج بيزا، واطلب إليهم إجراء بحث عن هذا البرج وكيفية تدعيمه.

٦ الربط

تطبيق على برج بيزا حيث يقف مراقبان يشاهدان رأس البرج بزاويتين ٤٥°، ٣٠°.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

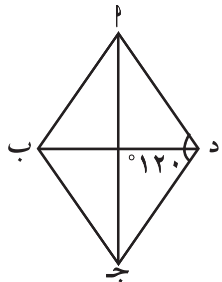
قد يخطئ بعض الطلاب في تحديد زاوية ربعية.

مد يد المساعدة: أعد تعريف الزاوية الربعية، ثمّ أعط أمثلة متعددة.

٨ **التقييم**

أب جـ د معيّن حيث ق(أدجـ) = ١٢٠°،

ومساحته ٥٠√٣ سم². أوجد طول ضلعه وطول كل من قطريه.

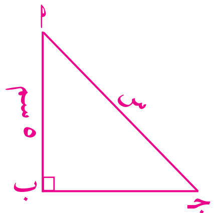


٩ **إجابات وحلول**

«حاول أن تحل»

١ (أ) س² = ٢٥ + ٢٥

س = ٥√٢ سم



(ب) ظا(جـ) = ١ = $\frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الضلع المجاور}}$

أي: الضلع المقابل = الضلع المجاور

ويكون المثلث قائم الزاوية متطابق الضلعين.

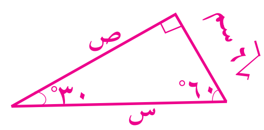
فتكون ق(جـ) = ٤٥°.

٢ جا(٣٠°) = $\frac{\sqrt{٦}}{\text{س}}$ ، $\frac{١}{٢} = \frac{\sqrt{٦}}{\text{س}}$ ،

س = ٢√٦ سم

ظا(٣٠°) = $\frac{\sqrt{٦}}{\text{ص}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٦}}{\text{ص}}$ ،

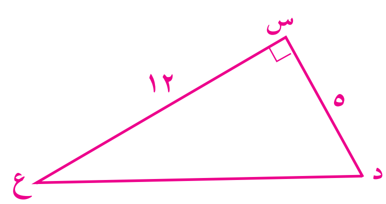
ص = ٣√٢ سم



٣ كل مثلث هو متطابق الأضلاع وطول ضلعه ٨ سم لذا يكون الارتفاع ٤√٣ ومساحة المعين:

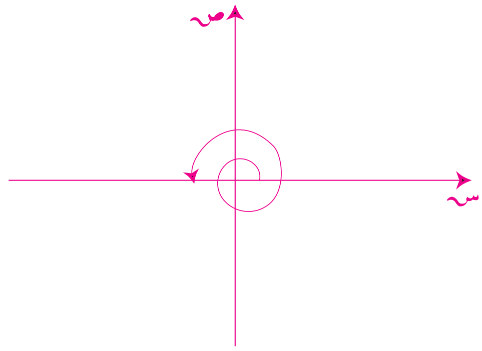
$\left(\frac{٨ \times ٤\sqrt{٣}}{٢}\right)$ ٢ = ٣٢√٣ سم²

٤

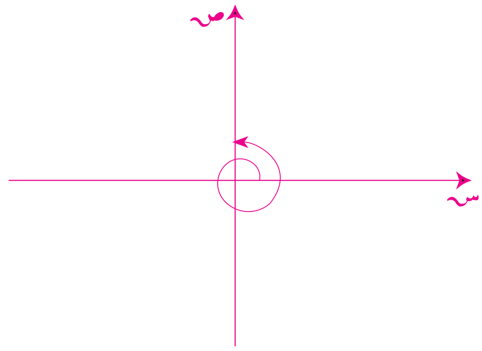


ظا(د) = $\frac{١٢}{٥}$ ، ظتا(د) = $\frac{٥}{١٣}$

٥

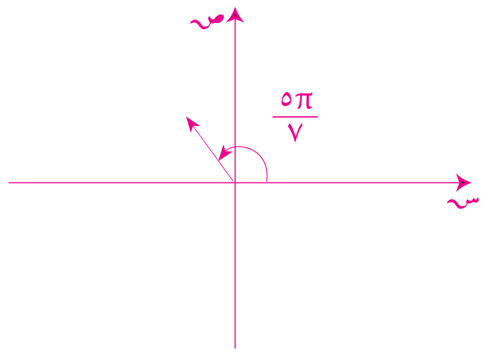


3π زاوية ربعية

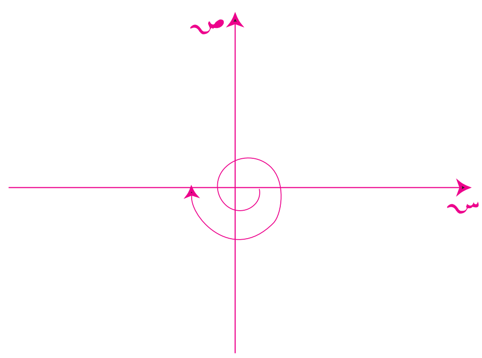


٤٥٠° = ٣٦٠° + ٩٠°

زاوية ربعية



زاوية غير ربعية



زاوية ربعية

-٥٤٠° = -٣٦٠° - ١٨٠°

٢-٥: حل المثلث قائم الزاوية

١ الأهداف

- يوجد قياس زوايا مثلث قائم إذا عرفت أطوال أضلاعه.
- يوجد أطوال أضلاع مثلث قائم إذا عرفت قياسات زواياه.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

لا يوجد.

٣ التدريس

مسطرة مدرجة – منقلة – فرجار – آلة حاسبة – ورق رسم بياني.

٤ التمهيد

اطلب إلى الطلاب استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد ما يلي:

(أ) جا(٢٥°)، جتا(٢٥°)، ظا(٢٥°).

(ب) جا(٤٥°)، جتا(٤٥°)، ظا(٤٥°).

اسأل...

هل المثلثات التالية هي قائمة الزاوية أم لا؟

(أ) أب د، حيث: أب = ٧ سم،
أد = ٢٤ سم ، ب د = ٢٥ سم.

(ب) رع د، حيث: رع = ٩ سم،
رد = ١٢ سم، ع د = ١٥ سم.

(جـ) ب جـ د، حيث: ب جـ = ٦ سم،
ب د = ١٠ سم، جـ د = ١٢ سم.

٥ التدريس

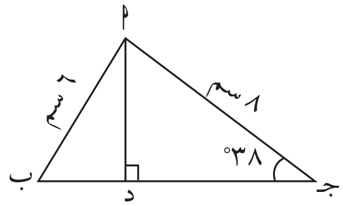
ساعد التلاميذ في حل مسألة عن مثلث قائم الزاوية مع معطيات مختلفة إن كان لجهة طول الأضلاع أو لجهة قياس الزوايا. أخبرهم أن ذلك هو خطوة أولى لإيجاد حلول لمثلثات مختلفة الأضلاع.

ركّز على استخدام الآلة الحاسبة في إيجاد النسب المثلثية للزوايا وإيجاد قياس الزوايا إذا عُرفت نسبها المثلثية.

أعط مثالًا متقدمًا لمثلث مختلف الأضلاع تستخدم فيه أحد الأعمدة والمثلث قائم الزاوية لإيجاد قياس زواياه.

مثال

حل المثلث ﻫ ب جـ باستخدام العمود النازل من ﻫ على $\overline{\text{ب جـ}}$.



٦ الربط

انظر إلى المثال (٣).

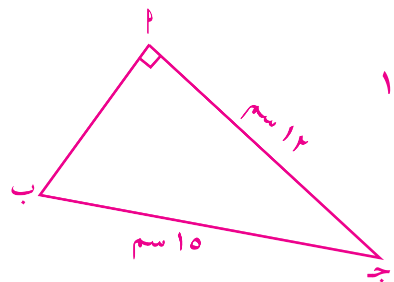
٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ بعض الطلاب باستخدام الآلة الحاسبة عند التحويل. نبّه إلى استخدام مفتاح التحويل بشكل صحيح.

٨ التقييم

راقب الطلاب وهم يحاولون التعامل مع فقرات «حاول أن تحل»، تأكد من أنهم يستخدمون النسب المثلثية والآلة الحاسبة في شكل صحيح.

٩ إجابات وحلول



١ ب ﻫ^{٢} = ٢٢٥ − ١٤٤

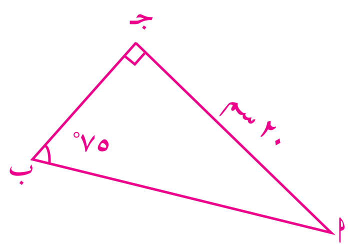
ب ﻫ^{٢} = ٨١

ب ﻫ = ٩ سم

جا($\hat{\text{ب}}$) = $\frac{١٢}{١٥}$

ق($\hat{\text{ب}}$) = ٥٣° ٨′.

ق($\hat{\text{جـ}}$) = ٣٦° ٥٢′.



٢ ق($\hat{\text{ﻫ}}$) = ١٥°

جا(٧٥°) = $\frac{٢٠}{\text{ﻫ ب}}$ ،

ﻫ ب = ٢٠,٧ سم.

ظا(٧٥°) = $\frac{٢٠}{\text{جـ ب}}$ ، جـ ب = ٥,٣٦ سم.

٣ ق(ب ﻫ د) = ١٨٠° − ١٤٠° = ٤٠°

ق(ﻫ $\hat{\text{ب}}$ د) = ٩٠° − ٤٠° = ٥٠°

جتا(٥٠°) = $\frac{١٥}{\text{ب ﻫ}}$ ، ب ﻫ = $\frac{١٥}{٠,٦٤٣}$ = ٢٣,٣

المسافة التي قطعها تساوي ٢٣,٣ مترًا.

٤ جتا($\hat{\text{ﻫ}}$) = $\frac{٥}{٦}$ ؛ ق($\hat{\text{ﻫ}}$) = ٣٣° ٣٣′ ٢٦″

٢ـ٦ : زوايا الارتفاع والانخفاض

١ الأهداف

- يوجد قياس زوايا الارتفاع وقياس زوايا الانخفاض.
- يستخدم هذه القياسات ليحل مسائل حياتية.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

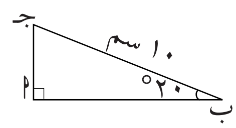
زاوية ارتفاع – زاوية انخفاض – مستوى أفقي.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة مدرجة – منقلة – مميال (إذا وجد) – آلة حاسبة – ورق رسم بياني.

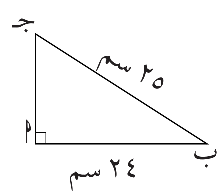
٤ التمهيد

(أ)



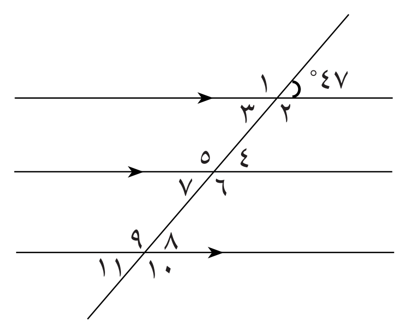
في المثلث أعلاه أوجد: ق(جˆ) ، أب ، أجـ.

(ب)



في المثلث أعلاه أوجد: أجـ ، ق(بˆ) ، ق(جˆ).

(جـ)



في الرسم أعلاه، ما قياس الزوايا:

١ˆ ، ٢ˆ ، ٣ˆ ، ٤ˆ ، ٥ˆ ، ٦ˆ ، ٧ˆ ، ٨ˆ ، ٩ˆ ، ١٠ˆ ، ١١ˆ ؟

٥ التدريس

منذ القدم استخدم العلماء القياسات غير المباشرة لإيجاد المسافات التي لا يمكن قياسها مباشرة، وقد استخدم المميال (clinometer) بشكل واسع في القياسات غير المباشرة وخاصة لتحديد زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض.
وفي عصرنا الحاضر، بدأت الأجهزة الإلكترونية تأخذ دورها الكبير في إيجاد القياسات غير المباشرة.
ركّز مع الطلاب على الأمثلة، وهي جميعها تطبيقات حياتية ترتكز بالدرجة الأولى على إيجاد زاوية ارتفاع أو زاوية انخفاض بواسطة أجهزة إلكترونية.
في المثال (٢): إيجاد ارتفاع غيمة عن مستوى سطح الأرض أثناء حدوث البرق والرعد.
في المثال (٣): من المهم جدًّا لرجل الإطفاء تحديد مسافات تسمح له بالتحرك أثناء حدوث حريق ما في الأبنية أو في الغابات.

٦ الربط

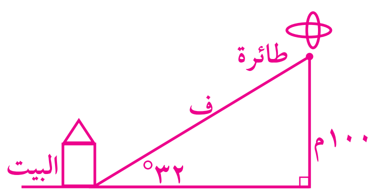
جميع الأمثلة في هذا الدرس وفقرات «حاول أن تحل» مرتبطة بالحياة اليومية وبالواقع.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

في «حاول أن تحل» (٢)، قد يعتقد بعض الطلاب أن زاوية الانخفاض هي بين الخط العمودي النازل من المنطاد إلى أرض الملعب، وخط الضوء المرسل من آلة التصوير إلى الملعب.
ساعد الطلاب على فهم أن زاوية الانخفاض هي التي يصنعها الخط الأفقي مع خط الضوء المرسل إلى الملعب.

٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يحاولون إيجاد الحلول لفقرات «حاول أن تحل». تأكد من حسن استخدامهم لزوايا الارتفاع والانخفاض.



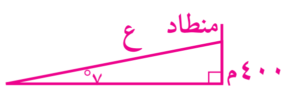
٩ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

١ جا(٣٢°) = $\frac{١٠٠٠}{ف}$ ، ف = ١ ٨٨٧

المسافة تساوي ١ ٨٨٧ مترًا تقريبًا.

٢ جا(٧°) = $\frac{٤٠٠}{ع}$ ، ع = ٣ ٢٧٩



طول خط الضوء ٣ ٢٧٩ مترًا تقريبًا.

٢-٧: القطاع الدائري والقطعة الدائرية

١ الأهداف

- تعريف القطاع الدائري.
- إيجاد مساحة القطاع الدائري.
- تعرّف القطعة الدائرية.
- إيجاد مساحة القطعة الدائرية.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

قطاع دائري، قطعة دائرية.

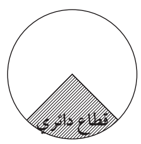
٣ الأدوات والوسائل

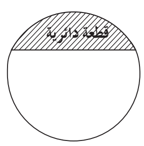
مسطرة مدرجة – منقلة – فرجار – آلة حاسبة.

٤ التمهيد

ارسم على اللوح عددًا من الزوايا. اطلب إلى الطلاب قياس كل زاوية بواسطة المنقلة. اسألهم تحويل هذه القياسات من القياس الستيني إلى القياس الدائري.

ارسم شكلًا ووضح عليه: الدائرة، قطاع دائري، قطعة دائرية. ثم أشر إلى قطاع أصغر وقطاع أكبر وكذلك الحال بالنسبة إلى القطعة وحدود كل منهما والمنطقة التي تمثلها. أظهرهما كأجزاء منفصلة ثم بصورة متكاملة في دائرة.





اسأل الطلاب عن مساحة المثلث.

مساحة = $\frac{\text{قاعدة} \times \text{ارتفاع}}{٢}$.

اسأل الطلاب عن مساحة الدائرة إذا كان نصف قطرها نق.

مساحة الدائرة = π نق^{٢}.

٥ التدريس

لإيجاد مساحة القطاع الدائري يمكن البدء بنسبته إلى مساحة الدائرة باعتبارها قطاعًا قياس زاويته المركزية ٢π، ويمكن استنتاج مساحة القطاع على الصورة:

مساحة القطاع = مساحة الدائرة × $\frac{\text{هـ}^{د}}{٢\pi}$، حيث: هـ^{د} قياس الزاوية المركزية للقطاع، وَ٢π قياس الزاوية المركزية للدائرة بالراديان.

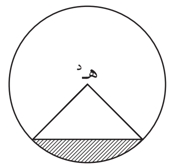
مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ هـ^د نق^٢.

إذا علم طول القوس ل، فنعوض عن ل = هـ^د نق من القانون (١) نفسه. وإذا علم قياس زاويته المركزية فنعوض بقيمة الزاوية بالقياس الدائري.

القطعة الدائرية

ارسم صورًا لقطع دائرية في مختلف الأوضاع.

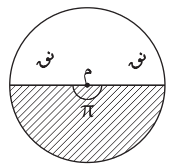
ابدأ بمسألة أو نشاط يمكّن الطلاب من استنتاج مساحة القطعة الدائرية بعد تذكيرهم بمساحة القطاع ومساحة المثلث. يمكن توضيح ذلك بقطعة من ورق الكرتون تقسم إلى أجزاء يتضح فيها أن:



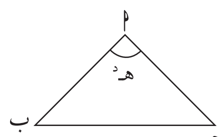
مساحة القطعة تساوي:

مساحة القطاع − مساحة المثلث.

ابحث مع الطلاب مساحة نصف الدائرة باعتبارها: قطاع زاويته المركزية = π أو قطعة دائرية وترها قطر في الدائرة.

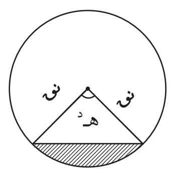


اشرح للطلاب كيفية الحصول على قانون مساحة المثلث بدلالة ضلعيه والزاوية المحصورة بينهما:



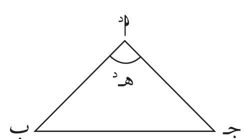
$\frac{١}{٢}$ × أجـ × أب × جا هـ^د

واستنتج من ذلك أن مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^٢ (هـ^د − جا هـ^د)



سؤال تمهيدي للطالب

إذا كانت مساحة المثلث $\frac{١}{٢}$ × حاصل ضرب ضلعين متجاورين، فماذا تتوقع أن يكون قياس الزاوية المحصورة بين هذين الضلعين؟



حقّق ذلك من القانون العام التالي:

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × أجـ × أب × جا هـ^د.

في المثال (٦)

أشر إلى الطلاب بأنهم سوف يتعرفون إلى الطبق البتري هذا العام في دروس علم الأحياء. وهو يستخدم لمعرفة أنواع العوامل المرضة الموجودة في المواد التي تدرس.

٦ الربط

(أ) تريد زراعة أزهار في قسم من حديقة المنزل على شكل قطاع دائري مساحته ٢٠ م^{٢} تقريبًا. إذا كانت زاوية هذا القسم تساوي تقريبًا ٧٢°، فكم يكون طول نصف قطرْ؟

$$هـ^{د} = \frac{٧٢^{\circ} \times \pi}{١٨٠^{\circ}} = \frac{٢\pi}{٥}$$

$$المساحة = \frac{١}{٢} نق^{٢} هـ^{د} \Leftarrow ٢٠ = \frac{١}{٢} نق^{٢} \times \frac{٢\pi}{٥}$$

$$نق = ٥,٦ م$$

(ب) تقوم بعض البلديات في المدن بتزيين ميادين (مستديرات) الطرق بالأزهار. ولدينا ميدان طول نصف قطره ٦ أمتار.

اطلب إلى الطلاب أن يعملوا ضمن مجموعات لتقسيم الميدان إلى قطع دائرية ومثلثات في داخلها، وتلوينها وإيجاد مساحة كل منها. **(تتنوع الإجابات)**.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يستخدم الطلاب قياس زاوية القطاع الدائري هـ د بالدرجات (degrees). وضح لهم أنه يجب التحويل من الدرجات إلى الراديان (Radians).

قد يخلط الطلاب بين القطاع الدائري والقطعة الدائرية.
وضح لهم الفرق بأمثلة عديدة.

ساعد الطلاب على فهم مساحة القطعة الدائرية باستخدام المتغيرات في مكانها المناسب. أرشدهم على فهم قيمة هذه المساحة على أنها الفرق الحاصل بين مساحة قطاع دائري ومساحة مثلث.

ذكرهم بأن الزاوية التي رأسها في مركز الدائرة وقياسها هـ د يجب أن تكون دائمًا بالقياس الدائري راديان.

أرشدهم إلى أن مساحة القطاع الدائري يمكن الحصول عليها إمّا بالقاعدة: المساحة = $\frac{١}{٢}$ ل نق أو المساحة = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} هـ د علمًا أن ل = هـ د نق.

وأن المثلث المتطابق الضلعين رأسه في مركز الدائرة وزاويته هي هـ د وله مساحة تساوي $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} جا هـ د علمًا أن نق هو نصف قطر الدائرة.

٨ التقييم

اطلب إلى الطلاب حل فقرات «حاول أن تحل» في كتاب الطالب. تأكد من أنهم يستخدمون المعطيات بشكل جيد لإيجاد المساحات المطلوبة.

٩ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

١ (أ) المساحة = $\frac{١}{٢}$ ل × نه

= $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ١٠

= ٢٠ سم^{٢}

٢ مساحة المثلث ب ع د = $\frac{١}{٢}$ ب ع × د ع × جا($\hat{ع}$)

٧ = $\frac{١}{٢}$ (٣) (٦) جا($\hat{ع}$)

جا($\hat{ع}$) = $\frac{٧}{٩}$ ،

ق($\hat{ع}$) = ٥١° تقريبًا.

٣ (أ) زاوية القطعة قياسها ٦٠° (مثلث متطابق الأضلاع)، ٦٠° = $\frac{\pi}{٣}$

المساحة = $\frac{١}{٢}$ نه^{٢} (هـ^{د} − جاهـ^{د})

= $\frac{١}{٢}$ × ٦^{٢} × $\left(\frac{\pi}{٣} - \text{جا} \frac{\pi}{٣}\right)$

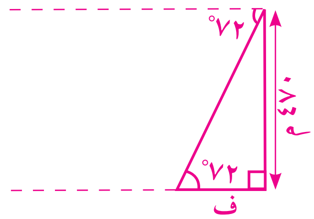
≃ ٣,٢٦ م^{٢}

(ب) المساحة ≃ ١٤,١ سم^{٢}

حل المسائل

حل «مسألة إضافية»

اطلب إلى الطلاب رسم مخطط للمسألة.



$$ظا ٧٢° = \frac{٤٧٠}{ف}$$

$$ف = \frac{٤٧٠}{ظا ٧٢°} = ١٥٢$$

يبعد هذا المظلي عن قاعدة التل ١٥٢ مترًا.

الوحدة الثالثة: الهندسة المستوية

Plane Geometry

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

٣ – ١ : طرائق البرهان الهندسي

جزء ١ : التبرير الاستقرائي

جزء ٢ : التبرير الاستنتاجي

جزء ٣: خاصية "القياس المنطقي"

٣ – ٢ : المضلعات المتشابهة

جزء ١ : التشابه

جزء ٢ : مقياس الرسم

جزء ٣: المستطيل الذهبي

٣ – ٣: تشابه المثلثات

جزء ١ : القياس غير المباشر

جزء ٢ : نظريات تشابه المثلثات

جزء ٣: تطبيقات حياتية

٣ – ٤ : التشابه في المثلثات قائمة الزاوية

جزء ١ : نظريات تشابه المثلثات قائمة الزاوية

جزء ٢ : تطبيقات حياتية

٣ – ٥ : التناسبات والمثلثات المتشابهة

جزء ١ : نظريات التناسبات والمثلثات المتشابهة

جزء ٢ : تطبيقات حياتية

٣ – ٦ : العلاقة بين محيطي شكلين متشابهين وبين مساحتيهما

جزء ١ : إيجاد العلاقة بين نسبة التشابه والمحيط والمساحة

جزء ٢ : تطبيقات حياتية

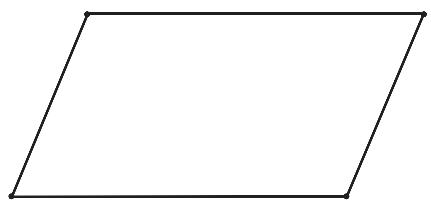
مقدمة الوحدة

مشروع للتفكير

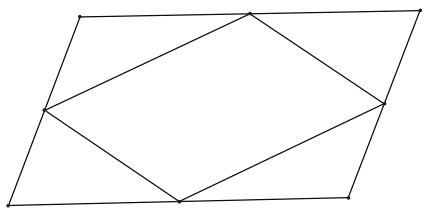
منذ أكثر من ٢٥ سنة بدأت هندسة الكسريات تتقدم في مجالات متعددة لتأخذ طريقها في وصف تحولات من الحياة الواقعية.

في الحقيقة لا يطلب إلى الطالب المتابعة في إيجاد الجزئيات المستخدمة في تكوين الكسريات، ولكن الغاية الأساسية هي أن يتمكن من رؤية الأشكال الغريبة والمعقدة التي يمكن أن تنتج عن شكل بسيط أثناء خضوعه لقواعد نستخدمها في التجزئة لتشكيل مراحل جديدة من الكسريات.

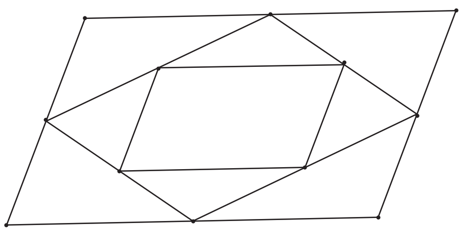
مثال: إذا أخذت متوازي أضلاع وبدأت بتطبيق المراحل التالية:



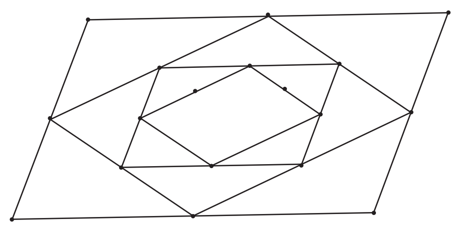
مرحلة (صفر)



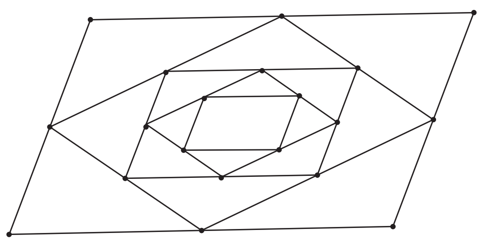
مرحلة (١)



مرحلة (٢)



مرحلة (٣)



مرحلة (٤)

في كل مرحلة من المراحل نجمع منتصف أضلاع الشكل الذي حصلنا عليه من المرحلة التي سبقت.

اسأل: هل ترى نهاية لهذه المراحل؟

تتضمن هندسة الكسريات في بعض الأحيان تعقيدات هندسية بكل ما للكلمة من معنى. ولكن يمكن التغلب على ذلك بواسطة المراحل المعتمدة على الأنماط وبالانطلاق من أشكال هندسية مثل: قطع مستقيمة، مثلثات، رباعيات، ...

والمهم أن الطالب سوف يستكشف من خلال العمل مع زملائه وبإرشادات معلميه ظواهر في الطبيعة لها علاقة بالكسريات.

مشروع الوحدة

إرشادات توجيهية للطلاب:

١. **اللوازم:** مسطرة، حبل طويل.

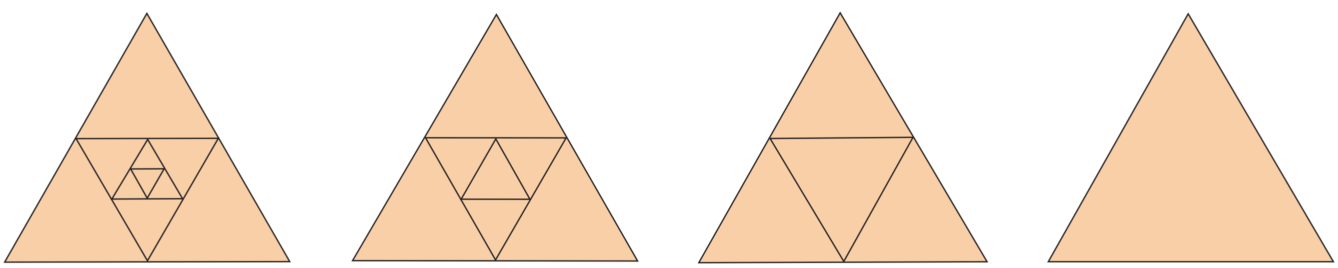
٢. **أسئلة حول مراحل التحويل إلى جزئيات:**

(أ) انظر إلى المرحلة (١). كيف جرى التحول من المرحلة صفر إلى بقية المراحل.

(ب) ركز على النمط الذي يحدث بين كل مرحلة وأخرى.

(جـ) انظر إلى كلّ قطعة مستقيمة، ما الذي يحدث لها؟

إجابة الفقرة (د) من المشروع (كتاب الطالب ص: ١٠٨)



مرحلة صفر   مرحلة (١)   مرحلة (٢)   مرحلة (٣)

سلّم التقييم:

٤.	ينفذ الطالب كافة مراحل التجزئة بشكل كامل ويتابع النمط في كل مرحلة. يكتب تقريرًا مفصلًا وواضحًا عن الخطوات التي نفذها.
٣.	ينفذ الطالب معظم مراحل التجزئة ويتابع النمط مع أخطاء طفيفة. يكتب تقريرًا مفصلًا عن الخطوات التي نفذها.
٢.	ينفذ الطالب بعض مراحل التجزئة ويتابع النمط مع أخطاء كثيرة. يكتب تقريرًا مبهمًا وغير واضح عن الخطوات التي نفذها.
١.	معظم عناصر المشروع ناقصة وغير واضحة.

٣ـ١ : طرائق البرهان الهندسي

١ الأهداف

- يبحث عن أنماط.
- يستخدم التبرير الاستقرائي لتوقع نتائج.
- يتعرف قانون الاستطلاع.
- يتعرف قانون التعليل الاستدلالي.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

أنماط – تبرير استقرائي – قانون الاستطلاع – تعليل استدلالي – القياس المنطقي – مثال مضاد.

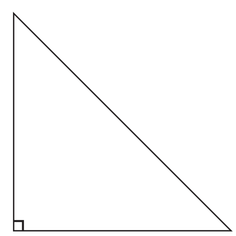
٣ الأدوات والوسائل

لا شيء.

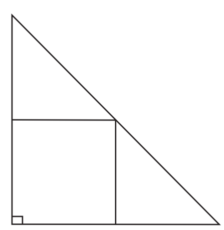
٤ التمهيد

ارسم على السبورة مثلثًا قائم الزاوية متطابق الضلعين.

نفذ على هذا المثلث الخطوات التالية (المطلوب إيجاد عدد المربعات والمثلثات عند نهاية كل خطوة).



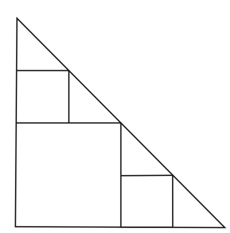
خطوة صفر



خطوة (١)

عدد المربعات = ١

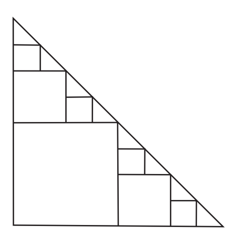
عدد المثلثات = ٢



خطوة (٢)

عدد المربعات = ٢

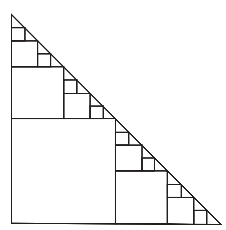
عدد المثلثات = ٤



خطوة (٣)

عدد المربعات = ٤

عدد المثلثات = ٨



خطوة (٤)

عدد المربعات = ٨

عدد المثلثات = ١٦

(أ) هل استنتجت نمطًا لعدد المربعات؟ لعدد المثلثات؟

(ب) هل يمكن الاستمرار مع هذا النمط لإيجاد عدد المربعات بعد ن خطوة؟ وعدد المثلثات بعد ن خطوة؟

٥ التدريس

- **التبرير الاستقرائي:** يفترض التبرير الاستقرائي إيجاد نمط يمكن المتابعة معه للوصول إلى نتائج مبنية على توقعات، ولكن أحيانًا كثيرة لا يوصلنا النمط إلى الاستنتاج السليم.

مثال ذلك: في المعادلة س × س = س

هي صحيحة إذا س = ٠

هي صحيحة إذا س = ١

ولكن إذا س ≤ ٢ لا يمكن أن تكون صحيحة.

ويرشدنا التبرير الاستقرائي إلى تخمينات تبدو معقولة: لا نبرهنها، إلا أن أمثلة مضادة يمكنها إبطال هذا التخمين،

مثال ذلك: مربع العدد هو أكبر من العدد الأساسي. هل هذا دائمًا صحيح؟ في الواقع يمكن إثبات عدم صحة ذلك من خلال أمثلة مضادة: $\left(\frac{١}{٤} < \frac{١}{٢}\right) \quad \frac{١}{٢} = \sqrt{\frac{١}{٤}}$

$$\left(\frac{١}{٩} < \frac{١}{٣}\right) \quad \frac{١}{٣} = \sqrt{\frac{١}{٩}}$$

- **التعليل الاستدلالي (التبرير الاستنتاجي):**

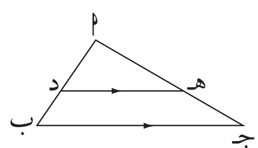
هو طريقة في التفكير المنطقي من حقائق معطاة إلى نتيجة محددة.

يمكن التركيز مع الطالب على قانون الفرز ليحدد الشروط والمعطيات والنتائج.

مثال: أ ب جـ مثلث

د نقطة منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

هـ نقطة منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$



نستنتج:

(أ) $\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

(ب) د هـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ

في المثال (٣): الفقرات (أ)، (ب)، (جـ) مهمة جدًا لأنها تؤكد على أن هناك في بعض الأحيان نتائج لا تتوافق مع المعطيات وأيضًا قد لا تتوافق مع نمط وجدته في البدء.

٦ الربط

معظم الأمثلة ومعظم فقرات «حاول أن تحل» هي ربط مع الواقع.

٧ أخطاء متوقعة وطرق معالجتها

قد يخطئ بعض الطلاب في استخدام النمط عند التبرير الاستقرائي أو في استخدام قانون الفرز عند التبرير الاستنتاجي.

شجعهم في الحالتين على المتابعة الصحيحة للوصول إلى نتائج مؤكدة.

٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يعالجون فقرات «حاول أن تحل». تأكد من أنهم يتوصلون إلى نتائج معقولة.

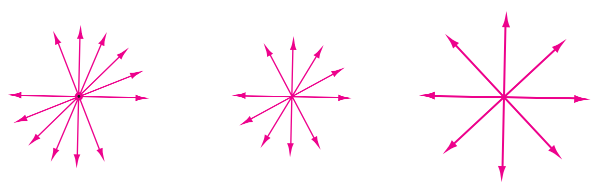
٩ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

١ (أ) ٢٩، ٣٧، ٤٦

(ب) الاثنين، الثلاثاء، الأربعاء

(جـ)



٢ (أ) ٤ = $٢^{٢}$

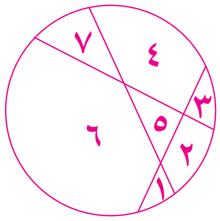
(ب) ٩ = $٣^{٢}$

(جـ) ١٦ = $٤^{٢}$

(د) ٢٥ = $٥^{٢}$

(هـ) ١٠ ٠٠٠ = $١٠٠^{٢}$

٣ عدد الأوتار المتقاطعة ٣.
عدد القطاعات الدائرية يساوي ٧.
لذا يكون التخمين غير صحيح.



٤ (أ) حوالى ٣٩ لوح تزلج.
(ب) لا يمكن أن يساعد التمثيل البياني بشكل موثوق على توقع المبيع في شهر ديسمبر لأنه بعيد عن الأشهر الموجودة على التمثيل البياني.

٥ يمكن أن يكون هناك أي عطل في السيارة مما يجعلها غير قادرة على التحرك ولن يدور محركها.

٦ تختلف الإجابات. يمكن لمنصور ألا يلعب يوم الثلاثاء.

٧ لا تستطيع التأكيد على أن هذه المعطيات صحيحة.

٨ (أ) كل عدد رقم آحاده صفرًا يقسم على ١٠ ويقسم أيضًا على ٥ (صحيح).
(ب) غير ممكن، لأن نتيجة الأول لا تعطي نتيجة الثاني.

٩ طول نهر الفولكا أقل من ٣٧٠٠ كم لذا نهر الفولكا ليس واحدًا من أطول ١٠ أنهر في العالم.

٣ـ٢: المضلعات المتشابهة

١ الأهداف

- يحدد مفهوم التشابه بين الأشكال الهندسية المستوية.
- يستخدم مقياس الرسم في التكبير وفي التصغير.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

تشابه – أضلاع متناظرة – زوايا متناظرة – مقياس رسم – نسبة التشابه – مستطيل ذهبي – نسبة ذهبية.

٣ الأدوات والوسائل

ورق رسم بياني – مسطرة مدرجة – منقلة.

٤ التمهيد

اسأل الطلاب عن نظريات تطابق المثلثات. وما النتائج التي يحصلون عليها لجهة الأضلاع والزاويا. اعرض أمامهم مثلثات قائمة الزاوية واطلب إليهم إيجاد حلول لها باستخدام نظرية فيثاغورث. اسأل الطلاب ما إذا كانت أزواج الكسور التالية متكافئة:

$\frac{٣}{٨}$ وَ $\frac{١٢}{٣٢}$؛ $\frac{٨}{٤}$ وَ $\frac{٢}{٤}$؛ $\frac{٣٥}{٥٦}$ وَ $\frac{٢٠}{٣٢}$

اعرض أمامهم بعض المعادلات التربيعية واطلب إليهم إذا أمكن إيجاد الحلول باستخدام المميز.

٥ التدريس

سوف يتعلم الطلاب في هذا الدرس تشابه المضلعات وكيفية إيجاد الزوايا المتناظرة والأضلاع المتناظرة، ثم كتابة نسبة التشابه.

ناقش معهم فقرات التدريب (١) و(٢) وفقرات التعميم (١)، (٢). استمع إلى إجاباتهم.

شجع الطلاب على التعامل بإيجابية مع المثال (٢) حيث أنه تطبيق حياتي مباشر لمقياس الرسم وقد يكون مقدمة مهمة لمن يريد الدخول في المستقبل إلى مجال الهندسة المعمارية.

ركز على الربط بين مقياس الرسم والنسبة الذهبية لأهمية ذلك في إبراز الأبعاد الفنية في الرسوم والبناء.

المثال (٤)

- يعبّر بوضوح عن أهمية النسبة الذهبية التي اعتمدها كبار الرسامين في لوحاتهم الخالدة.

اطلب إلى الطلاب أن يرسموا على ورقة مربعات مستطيلًا، أ ب جـ د حيث إحداثيات رؤوسه هي:

أ(−٢، −٢)، ب(٦، −٢)، جـ(٦، ٤)، د(−٢، ٤).

ثم دعهم يرسمون صورته هـ و ز ح، حيث هـ(−١، −١) وعامل مقياس الرسم $\frac{١}{٢}$.

أوجد إحداثيات و، ز، ح. (لاحظ وجود أكثر من حل).

٦ الربط

إذا أردت وضع خريطة لدولة الكويت بمقياس رسم $\frac{١}{٥٠٠٠٠٠}$ (كل ٥٠٠٠٠٠ متر على الأرض تعادل ١ سم على الخريطة). ما المسافة على الخريطة بين العاصمة الكويت والأحمدي علمًا أنها تساوي ٦٠ كم على الأرض؟

٧ أخطاء متوقعة وطرق معالجتها

قد يجد الطلاب صعوبة في الربط بين الأضلاع المتناسبة والزوايا المتساوية القياس في الأشكال المتشابهة.

وضّح لهم أنه في الأشكال المتشابهة، الزوايا المتساوية القياس هي مقابلة للأضلاع المتناسبة.

٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يحاولون الإجابة عن فقرات «حاول أن تحل».

ناقش معهم النتائج وقدم لهم إرشادات تساعد على تصويب أعمالهم عند الضرورة.

٩ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

١ ق(بˆ) = ٨٥°

ق(ص) = ٦٠°

ق(عˆ) = ١٣٥°

ق = (سˆ) = ٨٠°

ق(ك) = ٨٥°.

$$\frac{\text{أب جـ د}}{\text{س ك ع ص}} \leftarrow \frac{\text{أب}}{\text{س ك}} = \frac{\text{أد}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ك ع}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{ع ص}}$$

ومن التناسبات نحصل على: أب = ١,٢ سم،

ك ع = ١,٨ سم، دجـ = ١,٧٥ سم.

٢ عرض غرفة الجلوس = ٣ أمتار.

طول غرفة الجلوس = ٦ أمتار = عرض الشقة.

طول الشقة: ٨ أمتار.

٣ نوجد $\frac{١٠,٥}{٦,٥}$ ≈ ١,٦١٥٤ تقريبًا النسبة الذهبية.

٤ يجب أن يساوي طوله:

١,٦١٨ × ٣٧ ≈ ٥٩,٨٦٦ سم.

٣ـ٣: تشابه المثلثات

١ الأهداف

- يتعرف حالات تشابه المثلثات.
- يربط بين الأضلاع المتناسبة والزوايا متساوية القياس.
- يحل مسائل حياتية ويجد قياسات غير مباشرة باستخدام تشابه المثلثات.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

القياس غير المباشر.

٣ الأدوات والوسائل

ورق رسم بياني – مسطرة مدرجة – منقلة – آلة حاسبة علمية.

٤ التمهيد

اسأل الطلاب:

(أ) كيف تتشابه المضلعات؟

(ب) ما الأضلاع المتناسبة ونسبة التشابه؟ وأين نجدها؟

(جـ) كيف نربط بين الأضلاع المتناسبة والزوايا متساوية القياس في المضلعات المتشابهة؟

(د) ما حالات تطابق المثلثات المختلفة الأضلاع.

٥ التدريس

- تشابه المثلثات مهم بحيث يجب التركيز على كل نظرية يستطيع استخدامها الطالب لإيجاد تشابه مثلثين، ومن ثم استنتاج الأضلاع المتناسبة والزوايا المتساوية القياس والانتقال إلى التطبيقات الحياتية باستخدام القياس غير المباشر وهو الأهم في المثلثات المتشابهة.
- **المثال (٣)**: يساعد كثيرًا على فهم القياس غير المباشر في مواقف حياتية مشابهة في هذا المثال، ركز مع الطلاب على الربط بين العلوم الفيزيائية والرياضيات.
- **المثال (٥)**: يبيّن كيف يتم تطبيق التشابه على دعم حلبة المنحدر في لعبة التزحلق.

٦ الربط

الأمثلة (٣)، (٥)، (٧) تربط بين الواقع والتشابه بين المثلثات.

٧ أخطاء متوقعة وطرق معالجتها

قد يخطئ الطلاب في كتابة الأضلاع المتناسبة للمثلثين المتشابهين.

ذكر الطلاب بأن الأضلاع المتناسبة يجب أن تحصر الزوايا المتساوية القياس.

٨ التقييم

راقب الطلاب وهم يعملون مع فقرات «حاول أن تحل»، ساعدهم على تخطي بعض الصعوبات التي تواجههم وخاصة في المواقف الحياتية كما في «حاول أن تحل (٣)».

٩ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

١ ق($\hat{\text{هـ}}$) = ق($\hat{\text{ب}}$) = ٩٠°

ق(د$\hat{\text{و}}$هـ) = ق (أ$\hat{\text{جـ}}$ ب) بالتبادل الداخلي.

لذا يكون المثلث أب جـ مشابه للمثلث دهـ و (نظرية ١)

٢ ق($\hat{\text{أ}}$) = ق($\hat{\text{أ}}$) زاوية مشتركة في المثلثين

ق($\hat{\text{ب}}$) = ق($\hat{\text{هـ}}$) = ٩٠°

لذا يكون المثلث أب جـ مشابه للمثلث أهـ د (نظرية ١)

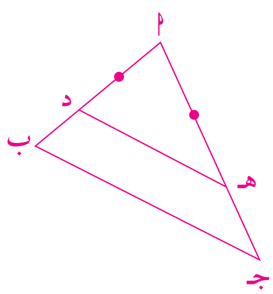
٣ (أ) المثلثان متشابهان لذا نكتب: $\frac{\text{ع}}{\text{١,٨}} = \frac{\text{١٢}}{\text{١,٢}}$، ع = ١٨م

(ب) $\frac{\text{س}}{\text{١٨٠}} = \frac{\text{٣}}{\text{١٢٠}}$، س = ٤,٥ م.

٤ يمكن تقسيم $\overline{\text{أب}}$ إلى ٣ أجزاء متساوية ثم نضع النقطة د بحيث إن: $\frac{\text{أد}}{\text{أب}} = \frac{\text{٢}}{\text{٣}}$،

ثم نقسم $\overline{\text{أ جـ}}$ إلى ٣ أجزاء متساوية، ونضع النقطة هـ بحيث إن: $\frac{\text{أهـ}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{٢}}{\text{٣}}$

نجمع د مع هـ فنحصل على مثلثين أد هـ، أب جـ متشابهين (نظرية ٢).



لذا تصبح $\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ وإن $\frac{\text{د هـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{٢}{٣}$ (نسبة التشابه).

٥ المثلثان: أب جـ ، أد هـ متشابهين لذا نكتب:

$\frac{١,٥}{١,٥ + ٢} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{أ جـ} + ٣}$ ومنه نحصل على:

أجـ = ٢,٢٥م.

٦ $\frac{٤,٥}{٣} = \frac{٣}{٢} = \frac{٦}{٤} = ١,٥$

لذا يكون المثلثان متشابهين استنادًا إلى (نظرية ٣).

٧ في المثلث أب جـ قائم الزاوية

في ب نكتب جا($\hat{\text{أ}}$) = $\frac{٩}{١٥}$

ق(أ) = ١٢" ٥٢' ٣٦°

تدريب (١)

(أ) زوايا متساوية القياس لذا:

المثلثان متشابهين

نكتب: $\frac{١٢}{٨} = \frac{\text{س}}{٦}$؛ س = ٩ سم

(ب) زوايا متساوية القياس لذا:

المثلثان متشابهين

نكتب: $\frac{\text{س}}{٢٢} = \frac{١٤}{٢٤}$ ؛ س = ١٢,٨$\overline{٣}$ سم

(جـ) المثلثان متشابهان نكتب:

$\frac{٦}{٨} = \frac{٩}{\text{س}}$؛ س = ١٢ سم

«تدريب (٢)»

(أ) لا يوجد تشابه.

(ب) يوجد تشابه لوجود زوايا متساوية القياس.

(جـ) لا يوجد تشابه، النسب غير متساوية.

(د) لا يوجد تشابه، النسب غير متساوية.

(هـ) لا يوجد تشابه، النسب غير متساوية.

(و) يوجد تشابه. نسبتين متساويتين لأضلاع تحصر زاويتين متساويتا القياس.

(ز) يوجد تشابه. النسبة $\frac{٤}{٣}$

(ح) يوجد تشابه. النسبة $\frac{١}{٢}$ وزاوية.

٣ـ٤: التشابه في المثلثات قائمة الزاوية

١ الأهداف

- يتعرف خصائص العمود المرسوم من رأس القائمة إلى الوتر في مثلث قائم الزاوية.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

لا يوجد.

٣ الأدوات والوسائل

ورقة رسم بياني – أدوات هندسية مألوفة.

٤ التمهيد

اسأل الطلاب:

(أ) ما النظريات الثلاث لتناسب مثلثين؟

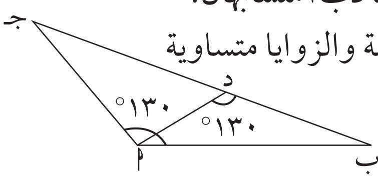
(ب) ما العمود المرسوم من الرأس إلى الضلع المقابل في المثلث؟

(جـ) إذا وجد مثلثين قائما الزاوية ومتطابقا الضلعين، هل هما متشابهين؟

(د) هل جميع المثلثات من نوع قائم الزاوية ثلاثيني ستيني هي في حالة تشابه؟

(هـ) أثبت أن المثلثين أب جـ، دبأ متشابهان.

اكتب نسب الأضلاع المتناسبة والزوايا متساوية القياس.



٥ التدريس

ناقش مع الطلاب نظرية (١) والنتائج (١) وَ(٢) من حيث أهميتها في المثلث قائم الزاوية.

ركز معهم على فكرة أن هذه العلاقات لا تصح إلا في المثلث قائم الزاوية. وأن هناك عمود واحد مرسوم من رأس القائمة إلى الوتر يعطي هذه العلاقات من تشابه المثلثات.

اطلب إليهم الاستفادة من العلاقات في النتيجة (٢) لإيجاد نظرية فيثاغورث.

ركز على التطبيقات الحياتية في المثال (٢) والمثال (٣).

ناقش معهم الحلول في تدريب (١) وتابع باهتمام كيفية استخدامهم للنتيجة (١) والنتيجة (٢) لإنجاز هذا التدريب.

٦ الربط

المثال (٢) والمثال (٣) يؤكدان كيفية استخدام تشابه المثلثات قائمة الزاوية في حل مسائل حياتية.

٧ أخطاء متوقعة وطرق معالجتها

قد يخطئ الطلاب في كتابة الأضلاع المتناسبة. ساعدهم أوّلًا على كتابة الزوايا المتساوية القياس في المثلثين، ثم استنتاج تناسب الأضلاع.

٨ التقييم

تابع مع الطلاب العمل في فقرات «حاول أن تحل»، لتتأكد من فهمهم لتشابه مثلثات قائمة الزاوية باستخدام العمود المرسوم من القائمة إلى الوتر.

٩ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

١ ص^{٢} = ٤ × ١٢ = ٤٨؛ ص = ٦٫٩٢٨ سم

س^{٢} = ٤ × ١٦ = ٦٤؛ س = ٨ سم

٢ $\frac{٢}{٣} = \frac{\text{وأ}}{\text{وب}}$ ومنه: وأ = ٣٫٢ سم وب = ٤٫٨ سم

٣ طريقة أولى:

أد^{٢} = (٣٠٠)^{٢} − (١٨٠)^{٢} = ٥٧ ٦٠٠

أد = ٢٤٠ م

طريقة ثانية:

دب = ٥٠٠ − ١٨٠ = ٣٢٠

أد^{٢} = ٣٢٠ × ١٨٠ = ٥٧ ٦٠٠

أد = ٢٤٠ م.

«تدريب (١)»

- ع = $\frac{٣٠}{٢}$ ؛ ع = ١٥سم
  س^{٢} = (٣٠)^{٢} − (١٥)^{٢} ؛ س = ٢٥,٩٨سم
  ص = $\frac{س}{٢}$ ، ص = ١٢,٩٩سم.
- (س + ٣)^{٢} = ١٢ × س؛ س = ٣.
- ع^{٢} = ٤٠ × ١٠ ؛ ع = ٢٠ سم.

٣-٥: التناسبات والمثلثات المتشابهة

١ الأهداف

- يتعرف خصائص الخط الموازي لأي ضلع في المثلث.
- يتعرف نظرية طاليس ويطبقها.
- يتعرف خصائص منصفات الزوايا الداخلية في المثلث ويستخدمها.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

نظرية طاليس، منصف الزاوية.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة مدرجة - ورق رسم بياني - أدوات هندسية.

٤ التمهيد

اسأل الطلاب:

(أ) ما هو منصف الزاوية؟

(ب) كيف تثبت تشابه مثلثين؟

(جـ) إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازين، فما العلاقة بين الزوايا المتناظرة؟ وما العلاقة بين الزوايا المتبادلة داخليًّا؟

(د) استخدم الضرب التقاطعي لتجد قيمة س في التناسب:

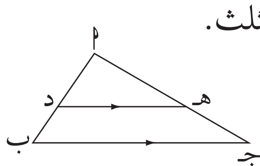
$$\frac{س}{٧} = \frac{١٢}{٣٥}$$

٥ التدريس

يربط هذا الدرس بين التناسبات والمثلثات المتشابهة والمستقيمات المتوازية، لذا يجب التركيز على النظريات الثلاث الموجودة في الدرس.

من المهم جدًا أن يفهم الطلاب كتابة التناسب في المثلثين المتشابهين وأن يعرفوا الفرق في تناسب الأجزاء الذي يصنعها المستقيم الموازي إلى أحد الأضلاع في المثلث.

أي في المثلث المقابل:



إذا أخذنا أدهـ مشابه للمثلث أب جـ

نستطيع كتابة:

$$\frac{أد}{أب} = \frac{أهـ}{أجـ} = \frac{هـ د}{جـ ب}$$

ولكن إذا أخذنا: $\frac{\text{أد}}{\text{دب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـ جـ}}$

فهذا التناسب لا يساوي $\frac{\text{دهـ}}{\text{ب جـ}}$

دعهم يستفيدون جيدًا من المثال (٢) «تجنب الخطأ»، فهو يعطي تفسيرًا جيدًا لأخطاء قد يرتكبها الطلاب.

٦ الربط

انظر إلى المثال (٣).

٧ أخطاء متوقعة وطرق معالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام القطع المتناسبة في نظرية طاليس. اشرح لهم من خلال أمثلة متعددة الفرق بين استخدام المثلثات المتشابهة ونظرية طاليس.

٨ التقييم

راقب الطلاب وهم يجيبون على أسئلة «حاول أن تحل»، تأكد من فهمهم لاستخدام التناسب.

٩ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

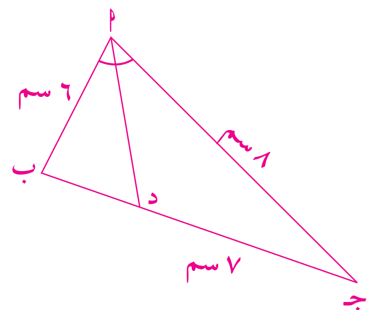
١ $\frac{\text{٣}}{\text{س}} = \frac{\text{٥}}{\text{٢,٥}}$ ؛ س = ١,٥.

٢ $\frac{\text{أو}}{\text{وجـ}} = \frac{\text{٤}}{\text{٥}}$ ، $\frac{\text{أو}}{\text{٣}} = \frac{\text{٤}}{\text{٥}}$ ، أو = ٢,٤ سم.

٣ $\frac{\text{١٦,٥}}{\text{ص}} = \frac{\text{١٥}}{\text{٢٥}}$ ؛ ص = ٢٧,٥.

$\frac{\text{١٥}}{\text{٢٥}} = \frac{\text{س}}{\text{٣٠}}$ ؛ س = ١٨.

٤



$\frac{\text{٨}}{\text{٦}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{د ب}}$ ومنه نستنتج:

جـ د = ٤ سم.

د ب = ٣ سم.

٣-٦: العلاقة بين محيطي شكلين متشابهين وبين مساحتيهما

١ الأهداف

- يتعرف العلاقة بين محيطات الأشكال المتشابهة ويوجد نسبة التشابه.
- يتعرف العلاقة بين مساحات الأشكال المتشابهة ويوجد نسبة التشابه.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

نسبة التشابه بين محيطي شكلين متشابهين - نسبة التشابه بين مساحتي شكلين متشابهين.

٣ الأدوات والوسائل

ورقة مربعات - مسطرة - آلة حاسبة.

٤ التمهيد

اسأل الطلاب:

(أ) كيف تتشابه المضلعات؟ وما نسبة التشابه؟

(ب) ما العلاقة بين الأضلاع المتناسبة وقياس الزاويا المتناظرة؟

(جـ) ما هي نظريات تشابه المثلثات؟

(د) كيف تجد محيط بعض الأشكال الهندسية؟

(هـ) ما هي قواعد مساحات بعض الأشكال الهندسية؟ (مثلث، مربع، مستطيل، شبه منحرف، متوازي أضلاع، معين، دائرة).

٥ التدريس

ارسم على ورقة مربعات شكلًا هندسيًّا واعرضه أمام الطلّاب، ثم وزّع عليهم أوراق مربعات، واطلب إليهم أن يرسموا شكلًا هندسيًّا مشابهًا، ثم يحددوا ما إذا كان أكبر أم أصغر من الشكل الذي عرضته أمامهم.

اطلب إليهم كتابة النسبة بين قياسات الشكل الذي رسموه والشكل الذي عرضته عليهم. ذكرهم بضرورة تبسيط هذه النسبة.

ركز من خلال أمثلة متعددة على القاعدتين الواردتين في نظرية (١). أعطِ أمثلة بديلة تطبيقية تساعدهم على التمييز بين نسبة تشابه المحيطات ونسبة تشابه المساحات للأشكال المتشابهة.

٦ الربط

من المعروف أن إنتاج الأرض الزراعية يتناسب مع مساحة قطعة الأرض المزروعة، على افتراض أن أبعاد قطعة أرض زادت ٣ مرات من أبعادها السابقة، فإن الأنتاج سيزداد ٩ مرات.

٧ أخطاء متوقعة وطرق معالجتها

قد يخلط الطلاب بين نسبة محيطي شكلين متشابهين وبين نسبة مساحتيهما، أكد لهم بأن النسبة بين المحيطين هي نسبة التشابه بينما نسبة المساحات هي مربع نسبة التشابه.

٨ التقييم

راقب عمل الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل». تأكد من أنهم ميزوا بين نسبة تشابه محيطي شكلين ونسبة تشابه بين مساحتي شكلين متشابهين.

٩ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

١ محيط المثلث الأصغر = $\frac{٢}{٥} \times ٤٥ = ٣٠$

محيط المثلث الأصغر = ٣٠ سم.

٢ محيط المضلع الثاني $٤٨ - ٨ = ٤٠$

نسبة التشابه بين محيطي المضلعين = $\frac{٤٠}{٤٨} = \frac{٥}{٦}$.

وهي نسبة الأضلاع المتناظرة بين المضلعين. نأخذ أ، ب، جـ، د، هـ أطوال أضلاع المضلع الثاني.

$\frac{أ}{٣} = \frac{٥}{٦}$ ومنه أ = ٢,٥ سم

$\frac{ب}{٥} = \frac{٥}{٦}$ ومنه ب = $٤,١\overline{٦}$ سم

$\frac{جـ}{٦} = \frac{٥}{٦}$ ومنه جـ = ٥ سم

$\frac{د}{٨} = \frac{٥}{٦}$ ومنه د = $٦,\overline{٦}$ سم

$\frac{هـ}{١٠} = \frac{٥}{٦}$ ومنه هـ = $٨,\overline{٣}$ سم

٣ محيط الدائرة الأولى = ١٠π.

ومحيط الدائرة الثانية = ١٦π

نسبة المحيطين = $\frac{١٠\pi}{١٦\pi}$ = $\frac{٥}{٨}$ ونسبة المساحتين = $\frac{٢٥}{٦٤}$

٤ نسبة محيط المضلعين = $\frac{٤}{٣}$

محيط المضلع الأكبر = $\frac{٤}{٣}$ × ٢٤ = ٣٢

أي محيط المضلع الأكبر = ٣٢ سم

٥ الفرق بين المساحتين: ١٠,٨٢٥ − ٦,٩٢٨ = ٣,٨٩٧

التناسب: $\frac{٣,٨٩٧}{١٠,٨٢٥}$ = ٠,٣٦ والنسبة المئوية ٣٦٪.

لذا تتغير هذه النسبة المئوية.

حل المسائل

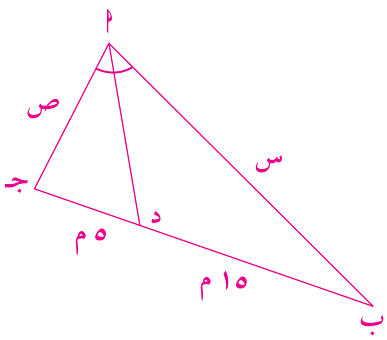
إجابة «مسألة إضافية»

$$\frac{س}{ص} = \frac{١٥}{٥} = \frac{٣}{١}$$

ومنه $\frac{س}{س + ص} = \frac{٣}{١ + ٣}$

أي: س = ٤١,٢٥ سم

ص = ١٣,٧٥ سم



الوحدة الرابعة: الجبر Algebra

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

٤ – ١ : النسبة والتناسب

- **جزء ١ :** النسبة
- **جزء ٢ :** التناسب والضرب التقاطعي
- **جزء ٣ :** التناسب المتسلسل
- **جزء ٤ :** تطبيقات حياتية

٤ – ٢ : التغير الطردي

- **جزء ١ :** التغير الطردي
- **جزء ٢ :** دالة التغير الطردي
- **جزء ٣ :** معدل التغير الطردي
- **جزء ٤ :** تطبيقات حياتية

٤ – ٣ : التغير العكسي

- **جزء ١ :** التغير العكسي
- **جزء ٢ :** دالة التغير العكسي
- **جزء ٣ :** مقارنة بين التغير الطردي والتغير العكسي
- **جزء ٤ :** تطبيقات حياتية

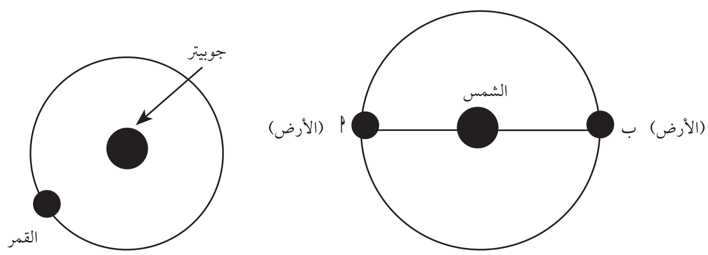
مقدمة الوحدة

سوف يتعامل الطلّاب مع بعض مواضيع الجبر مثل النسبة والتناسب والتغير الطردي والتغير العكسي.

دعهم يقرأون بتمعن فقرة «أضف إلى معلوماتك» في كتاب الطالب لتضيء من خلالها على مساهمة العلماء العرب في تطوير العلوم وإغناء الحضارة الإنسانية بما قدموه في مجالات العلوم والرياضيات والطب والفلك والفلسفة وغير ذلك.

من المهم جدًا تنبيه الطلاب إلى أن دروس هذه الوحدة لها تطبيقات حياتية سوف يتعرفون عليها ويمكن أن يتواجهوا مع مثيلاتها في مواقف يومية.

وتاريخيًّا لا بد من الأشارة إلى أن العالم أول رومر (Ole Romer) سنة ١٦٧٥ قد استخدم التناسب ليقدر سرعة الضوء على الشكل التالي:



لقد قام بقياس حركة الأقمار التي تدور في مدار جوبيتر.
عندما تحركت الأرض من النقطة أ إلى النقطة ب حول الشمس، وجد أن القمر بقي ظاهرًا لمدة ١٦,٦ دقيقة

واستنتج أن الضوء يحتاج إلى ١٦,٦ دقيقة ليجتاز المسافة من النقطة أ إلى النقطة ب. باستخدام التناسب، قدّر العالم رومر أن سرعة الضوء ٢٤١٣٥٠ كيلومترًا بالثانية والتي هي حوالى ٨١٪ من سرعة الضوء المعتمدة حاليًّا والتي تساوي ٣٠٠٠٠٠ كيلومتر بالثانية تقريبًا.

إرشادات توجيهية للطلاب:

اسأل الطلّاب:

(أ) لماذا يستخدم المتسابقون على الدراجات الهوائية نموذج الدولاب الأمامي أكبر من الدولاب الخلفي؟

(ب) لماذا تكون التروس على الدراجة الهوائية ذات قياسات مختلفة؟

(جـ) اطلب إليهم إجراء بحث يتناول مباراة الركوب على الدراجات الهوائية ونتائجها.

(د) ما الفائدة المتوخاة من ركوب الدراجات الهوائية؟

سلّم التقييم	
٤.	يضع جداول المسافات التي يجتازها صعودًا ونزولًا وأفقيًّا بشكل كامل، ويكتب تقريرًا مفصلًا وواضحًا يبين فيه كيف استخدم النسب والتناسب.
٣.	يضع جداول المسافات التي يجتازها صعودًا ونزولًا وأفقيًّا مرتكبًا بعض الأخطاء في حساب النسب والتناسب، ويكتب تقريرًا مفصلًا ولكن يلزمه بعض الإيضاحات.
٢.	يضع جداول المسافات التي يجتازها صعودًا ونزولًا وأفقيًّا مع أخطاء متعددة في حساب النسب والتناسب، ويكتب تقريرًا لا يعبر كثيرًا عن أهداف المشروع.
١.	معظم عناصر المشروع ناقصة وغير واضحة.

٤ـ١ : النسبة والتناسب

١ الأهداف

- يتعرف النسبة.
- يتعرف التناسب ويستخدمه.
- يتعرف التناسب المتسلسل وخواصه.
- يوجد الوسط الهندسي.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

النسبة – مقياس الرسم – التناسب – التناسب المتسلسل – الوسط الهندسي.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة مدرجة – أوراق رسم بياني – آلة حاسبة.

٤ التمهيد

اسأل الطلاب:

- ما نسبة عدد الكتب إلى عدد الدفاتر في حقيبتك؟
- ما نسبة عدد المكاتب إلى عدد الكراسي؟

ناقش مع الطلاب معنى نسبة ٥ إلى ٣.

- اسأل الطلّاب عن نسبة عدد الغائبين إلى عدد الحاضرين اليوم في الفصل، ونسبة عدد الكراسي إلى عدد طاولات الطلبة داخل غرفة الفصل.
- ناقش كيفية رسم مخططات للمنشآت (التصميات الهندسية)، وقراءة الخرائط لتعرف الأبعاد الحقيقية للمسافات بين مدينتين أو موقعين.
- وضِّح مفهوم مقياس الرسم كما ورد في فقرة «دعنا نفكر ونتناقش».

٥ التدريس

في عمل تعاوني:

- يمكنك استخدام شفافية لمخطط الشقة المبينة في كتاب الطالب. قد يحتاج العمل إلى مسطرة مدرجة وآلة حاسبة للقياس وإجراء العمليات الحسابية.
- لاحظ أن التعريف الرياضي للنسبة هو:

علاقة بين عددين حقيقيين وتكتب بالصورة $\frac{أ}{ب}$ أو أ:ب.

- في النسبة – بصفة عامة – ليس من الضروري أن يكون كلٌّ من حدّي النسبة بالوحدات نفسها أو من النوع نفسه، فمثلًا في مقياس الرسم قد يكون المقياس ١ سم: ١٠٠ كم في الخرائط. وقد توجد نسبة بين عدد البنين وعدد البنات في امتحان الثانوية العامة، وقد توجد النسبة بين عدد المعلمين وعدد الطلاب. عند حساب النسبة المئوية تراعى وحدات حدّي النسبة.

في التناسب:

- يمكن البدء بكسور متكافئة، مثلًا $\frac{١}{٢} = \frac{٣}{٦}$ وإعادة قراءة ذلك بلغة تساوي نسبتين ١:٢ = ٣:٦ أو بالصورة ١، ٢، ٣، ٦ أربعة أعداد متناسبة والعكس صحيح.
- انتقل إلى الصورة العامة $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ تكافئ أ، ب، جـ، د، وتكتب أيضًا أ د = ب جـ.
- قدم أمثلة وأمثلة مضادة للتناسب، مثلًا: ١، ٢، ٣، ٦ متناسبة ولكن ١، ٢، ٣، ٤ ليست متناسبة. ثمّ اطلب إلى الطلاب إعطاء أمثلة وأمثلة مضادة.
- اعرض تناسبًا، مثل: $\frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$ واطلب إلى الطلاب أن يبحثوا عن الخواص التي يمكن أن يستنتجوها... عمّم الخواص الصحيحة على $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$.
- **اسأل للتفكير:** هل $\frac{١٠}{٢}$ = ٥ تناسب؟ ضعها في صورة تناسب $\frac{٥}{١} = \frac{١٠}{٢}$. **٥:١ = ١٠:٢**

في التناسب المتسلسل:

- خواص التناسب المتسلسل هي خواص التناسب العادي نفسها.
- اطلب إلى الطلاب أن يعطوا أمثلة عن ثلاثيات من الأعداد تكوّن كل منها تناسبًا متسلسلًا، مثلًا: (١، ٢، ٤)، (١، ٣، ٩)، (٤، ٦، ٩).
- اطلب إليهم إعطاء أمثلة عن أربعة أعداد تكوِّن تناسبًا متسلسلًا، مثلًا: (٣، ٦، ١٢، ٢٤).
- ناقش (بأمثلة): هل كل أربعة أعداد في تناسب متسلسل تكون في تناسب عادي؟ وهل العكس صحيح؟
- في حل التمارين، دع الطلّاب يستخدمون أكثر من طريقة للحل، مثلًا الضرب التقاطعي أو أي من خواص التناسب.
- الأمثلة (٥)، (٦)، (١١) هي تطبيقات حياتية تبيّن أهمية التناسبات في حل مسائل حياتية يمكن أن تصادفنا يوميًّا.

٦ الربط

مسألة من البيئة: كتب على باب أحد المخازن ما يلي:

- ادفع $\frac{٢}{٣}$ السعر فقط.
- احصل على حسم قدره ٥٠٪.

إذا كان سعر القميص ٤٢ دينارًا، فأيها أفضل العروض لك؟

- **العرض الأول:** $\frac{٢}{٣} = \frac{س}{٤٢}$، س = ٢٨
- **العرض الثاني:** $\frac{٥٠}{١٠٠} = \frac{س}{٤٢}$، س = ٢١

العرض الثاني هو الأفضل.

٧ أخطاء متوقعة وطرق معالجتها

قد يكتب الطلاب النسبة $\frac{ﺃ}{ب}$ على الشكل ب : ﺃ.

وقد يخطئون أيضًا في كتابة التناسب المتسلسل: (١، ٣، ٩).

أكد لهم أن النسبة $\frac{ﺃ}{ب}$ هي نسبة ﺃ إلى ب أي تكتب ﺃ : ب وليس ب : ﺃ. وأن كتابة ١، ٣، ٩ هي $\frac{١}{٣} = \frac{٣}{٩}$.

٨ التقييم

راقب الطلاب وهم يحلون فقرات «حاول أن تحل»، ثم ناقش معهم الحلول التي توصلوا إليها.

٩ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

١ $\frac{\text{١ سم}}{\text{٥٠ كم}} = \frac{\text{٦,٥ سم}}{\text{س كم}}$ ، س = ٣٢٥ كم.

٢ ص = ٦

٣ ب = ٥

٤ $\frac{٣,٤}{٧} = \frac{٢,٠٤}{٤,٢}$، حيث إن: ٣,٤ × ٤,٢ = ٧ × ٢,٠٤
= ١٤,٢٨

٥ $\frac{٦٣٥٠ - ٥٥٠٠}{٦٣٥٠}$ = ٠,١٣٤ أي ١٣,٤٪.

٦ $\frac{٢٠}{٣٠٠} = \frac{٥٠}{\text{س}}$، س = ٧٥٠ سعرة حرارية.

٧ تتنوع الإجابات. مثال: ٢، ٨، ٣٢.

٨ $\frac{-٩}{\text{س}} = \frac{\text{س}}{٤}$ أي $\text{س}^٢ = -٣٦$.
لا يوجد حل.

٩ س = −١ أو س = ٦.

١٠ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$ = م، ومنه: أ = جـ $\text{م}^٢$، ب = جـ م.
نستنتج أن: $\frac{\text{أ} + ٣\text{ ب}}{\text{ب} + ٣\text{ جـ}} = \frac{\text{أ} - ٢\text{ ب}}{\text{ب} - ٢\text{ جـ}}$ = م

١١ $\frac{\text{م}}{\text{س}} = \frac{٥}{٣}$، ينال منصور ٥٥ دينارًا وسالم ٣٣ دينارًا.

٤-٢: التغير الطردي

١ الأهداف

- الربط بين الانحدار (Slope) وثابت التغيُّر.
- استخدام ثابت التغيُّر لحلّ المسائل.
- حلّ مسائل حياتية تتعلَّق بالتغير مثل القوى والأوزان.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

التغير الطردي – دالة التغير الطردي – معدل وثابت التغير الطردي.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة مدرجة – أوراق ملليمترية – آلة حاسبة.

٤ التمهيد

اسأل الطلاب:

- ما المتغيّر؟
- ما الانحدار؟
- اسأل الطلاب عن الأنماط مثلًا العدّ بالاثنينات، ثم عن معنى معامل المُتغيِّر، وكيفية قراءة الجداول والبيانات وكيفية رسم المنحنيات والرسم البياني.
- هيئ الطلاب لفكرة التغير. اطلب إليهم ذكر بعض الأشياء التي تغيرت عندهم من العام الماضي (مثلًا: السن، الفصل الدراسي، الوزن ...).

٥ التدريس

- اسأل عن أنماط تحتوي على كميات تتضاعف (مثلًا: عدد الأيادي عند خمسة أشخاص، عدد الأجنحة لدى ٨ عصافير...)، واطلب إليهم أن يعبروا عن ذلك في صورة معادلات (مثلًا: ص = ك س).
- اعرض ثلاث صيغ لمثال للتغير الطردي كما في مثال الصور المتحركة في السينما، الجدول، الشكل البياني، المعادلة (ص = ٢٤ س). دع الطلاب يلاحظون أن كلًّا منها يعبِّر عن العلاقة نفسها (تغير طردي).

- اربط بين قيمتي ص، س في كل صف بالجدول والنقطة التي تمثل هذا الربط في الشكل البياني.
- كرِّر عملية الربط مع المعادلة (تساوي الطرفين بعد التعويض).
- دع الطلاب يعبِّرون بلغتهم عن فهمهم للمصطلحات: تغير، تغير طردي، معدل التغير، ثابت التغير، معامل س في المعادلة... اشرح ببساطة مفهوم ميل المستقيم.
- نَبِّه إلى أن ثابت التغير (معامل س) لا يمكن أن يكون صفرًا.
- كن دقيقًا في تعريف التغير الطردي على أنه دالة خطية بالصورة ص = ك س، حيث ك ≠ ٠ وابتعد عن التعريفات القديمة غير الصحيحة المرتبطة بالزيادة والنقصان.
- استخدم الشفافيات والمصورات والملصقات المناسبة.
- أعط أمثلة وأمثلة مضادة عن التغير الطردي. لاحظ شرط مرور المستقيم الممثل لدالة التغير الطردي أنه يمر بنقطة الأصل. وأن الدالة الممثلة له تكتب على الشكل ص = ك س، حيث ك ≠ ٠ وليست على الشكل ص = ك س + ب.

  حفزّ الطلاب على إيجاد ص بدلالة س وعلى إيجاد س بدلالة ص في المعادلة ص = ك س.

  ركز على التطبيقات الحياتية لأهميتها في إيضاح المواقف التي يستخدم فيها التغير الطردي.

٦ الربط

إن الوزن الذي يحدثه جسم ما يتغير طرديًّا مع كتلته. إذا كانت كتلة حديدية تساوي ٦ كجم وكان وزنها يساوي ٥٩ نيوتن. اكتب العلاقة بين الكتلة والوزن.

ص = $\frac{٥٩}{٦}$ س، حيث ص = الوزن س = الكتلة.

٧ أخطاء متوقعة وطرق معالجتها

قد يخطئ بعض الطلاب في إيجاد معدل التغير أو ثابت التغير فيكتبون $ك = \frac{س}{ص}$.

اعرض أمامهم أمثلة متعددة ودعهم يكتبون $ك = \frac{ص}{س}$.

٨ التقييم

ناقش مع الطلاب التمارين في فقرات «حاول أن تحل»، وتأكد من أنهم قادرون على فهم التغير الطردي والمعادلة التي يمثلها.

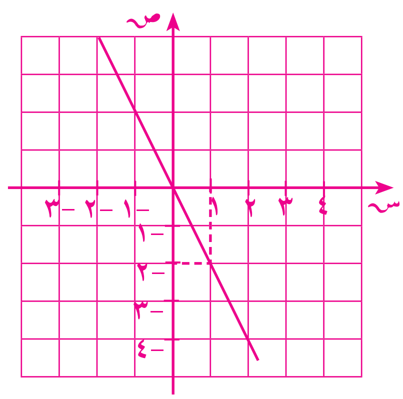
٩ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

١ $ك = \frac{ص}{س} = \frac{-٢٠}{١٠} = -٢$

نكتب $ص = -٢س$

عند $س = ١٥$، نجد $ص = -٢ \times ١٥ = -٣٠$



٢ لا يمثل تغير طردي، لأنه إذا تزايد عدد العمال تتناقص أيام العمل.

٣ نوجد $\frac{ص_١}{س_١} = \frac{-٣}{٢}$ ، $\frac{ص_٢}{س_٢} = \frac{٦}{-٤} = \frac{-٣}{٢}$

وبالتالي المستقيم يمثل تغيرًا طرديًا ونكتب:

$ص = \frac{-٣}{٢} س$.

٤ (أ) ص = $\frac{٢}{٧}$ س (تغير طردي).

(ب) ص = − $\frac{٣}{٤}$ س + ٢ (لا يمثل تغير طردي).

(جـ) ص = ٥,٧س (تغير طردي).

٥ تتنوع الإجابات بحسب وزن كل شخص.

كمية الدم = $\frac{١}{١٥}$ الوزن.

٦ لا يوجد ثابت تغير.

٧ ثابت التغير: $\frac{٠,٢٧٥}{١٢}$ = ٠,٠٢٣.

ص = ٠,٠٢٣ س

٤,٣ = ٠,٠٢٣س، س = ١٨٧ كجم/ واط.

٤ـ٣: التغير العكسي

١ الأهداف

- يتعرف التغير العكسي.
- يميز التغير العكسي عن التغير الطردي.
- يستقصي علاقات تمثل تغيرًا عكسيًّا مثل الوقت والعمل... .
- يرسم بيانيًّا الدالة العكسية.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

تغير عكسي - دالة التغير العكسي - ثابت التغير العكسي.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة مدرجة، أوراق ملليمترية، آلة حاسبة.

٤ التمهيد

- راجع مع الطلاب مواضع النقاط ذات الأزواج المرتبة على شبكة الإحداثيات.
- اسأل الطلاب عن علاقة بين متغيرين س، ص وكيف إذا زادت س زادت معها ص. ثم إذا زادت س تناقصت ص.

اطلب إلى الطلاب رسم منحني على شبكة الإحداثيات للدالة ص = $\frac{٤}{س}$.

٥ التدريس

كلّف جميع المجموعات إكمال الجدول في عمل تعاوني، ثم الإجابة عن الأسئلة. ناقش إجابات المجموعات مع الطلاب.

- **مثال (٤)**: يصعب على الطلاب في بعض الأحيان مقارنة الأعداد على الجداول. مدّ يد المساعدة وارسم الجدول التالي على السبورة.

س	٢	٤	٦
ص	٤	١٦	٣٦

ثم اسألهم إذا كان يُمثِّل تغيرًا طرديًا أو تغيرًا عكسيًّا أو لا شيء من ذلك. استخدم هذا المثال كي تُساعد الطلاب على دراسة كل الأعداد الموجودة في الجدولين (أ)، (ب).

- دعهم يفكرون فيما إذا كان الفريق مكونًا من ١٦٠ شخصًا، فهل يمكن من الناحية العملية إتمام العمل في يوم واحد؟ ساعد الطلاب على أن يتفهموا أهمية الظروف الواقعية في عالم الحقيقة عند تطبيق نموذج رياضي.
- اسأل الطلاب إذا كان بإمكانهم إعطاء عيِّنة يُمكِن أن نستخدم فيها معادلة تغيُّر طردي أو تغيُّر عكسي.

صف أوجه الشبه والاختلاف بين التغير الطردي والتغير العكسي مستعينًا بالمعادلات والرسوم البيانية.

اطلب إليهم إعطاء أمثلة أو مواقف تتضمن متغيرين تمثل العلاقة بينهما تغيرًا عكسيًّا.

ضع على لوحة ملصقًا يوضح العلاقتين:

$\text{ص} = \frac{\text{ك}}{\text{س}}$ (التغير العكسي)

$\text{ص} = \text{ك}\ \text{س}$ (التغير الطردي)

وجانب كل من العلاقتين الرسم البياني الممثل لهما:

اطلب إلى الطلاب التعبير بصيغ أخرى عن العلاقتين:

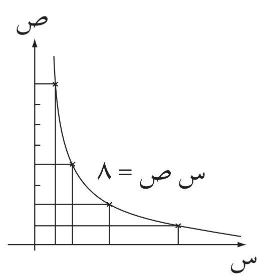
$\text{ص}\ \text{س} = \text{ك}$ ومنه: $\text{ص}_1\text{س}_1 = \text{ص}_2\ \text{س}_2 = \text{ك}$،

ثم $\text{ص} = \text{ك}\ \text{س}$ أي $\frac{\text{ص}_1}{\text{س}_1} = \frac{\text{ص}_2}{\text{س}_2}$

وحقق ذلك من خلال الأمثلة والتمارين مع المقارنة بين نوعي التغير.

- دع الطلاب يقدرون بين الحين والآخر النتائج عقليًّا قبل إجراء العمليات الحسابية بدقة. كوِّن حِسًّا رياضيًّا عند طلابك.
- استخدم الجدول والشكل البياني والمعادلة للتعبير عن التغير، ودع الطلاب يستنتجون إحدى الصيغ من صيغة أخرى.

تفكير: اسأل الطلاب كيف يمكنهم أن يصفوا الفرق بين التغيّر الطردي والتغيّر العكسي.



٦ الربط

- ناقش مع الطلاب أمثلة عن التغير العكسي والطردي من خلال ما يدرسونه في العلوم الأخرى. نبّه الطلاب إلى القانون الفيزيائي: ثابت = $\frac{P \times V}{T}$ ، في العلاقة بين الحجم والضغط في حالة ثبوت درجة الحرارة، والعلاقة بين الحجم ودرجة الحرارة في حالة ثبوت الضغط. استفد مما هو موجود في كتب العلوم.
- استخدم نماذج مبسَّطة للرافعة (الأرجوحة) كما في المثال (٣)، ودع الطلاب يجربون العلاقة بأنفسهم باستخدام مسطرة تستند على قلم (مثلًا).

٧ أخطاء متوقعة وطرق معالجتها

لا يستطيع الطلاب في بعض المسائل التمييز بين التغير الطردي والتغير العكسي، وبين التغير الذي لا يمثل تغيرًا طرديًّا أو عكسيًّا. دع الطلاب يحددون كل من التغيرين.

٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يعملون في فقرات «حاول أن تحل» تأكد من أنهم تفهموا جيدًا الفرق بين التغير الطردي والتغير العكسي.

٩ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

١ ٢ × ٣٠ = ٣ × ٢٠ = ٤ × ١٥ = ٥ × ١٢ = ٦ × ١٠
= ١٠ × ٦ = ٦٠

س × ص = ٦٠ ، تغير عكسي.

٢ تتنوع الإجابات.

س	٢	٣	٤	٦	٩	١٢	١٨
ص	١٨	١٢	٩	٦	٤	٣	٢

٣ (أ) ك = ٠,٢ × ٧٥ = ١٥ ومنه: ٣ س = ١٥
أي س = ٥.

(ب) م$_1$ و$_1$ = م$_2$ و$_2$ ؛ ٣و$_1$ = ٤٠ × ٦ ، ومنه يكون الوزن و$_1$ = ٨٠ كجم.

(جـ) ٣ × ٧٥ = ز × ٩٠ ومنه ز = ٢,٥ ساعة

٤ (١) س ص = ١٠٠ (جـ) عكسي

(٢) ص = ٢٠س (د) طردي

(٣) س ص = ٥ (ب) عكسي

(٤) ص = ٥س (أ) طردي

٥ ٤٢ × ٣٥ = ٥٢,٥ × س

س = ٢٨ م.

حل المسائل

إجابة «مسألة إضافية»

(أ) نأخذ س الوزن المطلوب

١٢٠ × ٢٠٠ = ١٥٠ × س

س = ١٦٠ جم

(ب) كلما قل الوزن زادت المسافة، لذا يجب أن يكون وزن الكرة أقل من ١٦٠ جم.